In the Name of God

Communication Systems (25751-4)

Problem Set 06 (Solution)

Fall Semester 1401-02

Department of Electrical Engineering

Sharif University of Technology

Instructor: Dr. M. Pakravan

1 Sampling

The lowpass signal $x(t)$ with a bandwidth of W is sampled with a sampling interval of T_s, and the signal

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)p(t - nT_s) \tag{1}$$

is reconstructed from the samples, where $p(t)$ is an arbitrary-shaped pulse (not necessarily time limited to the interval $[0, T_s]$).

1. Find the Fourier transform of $x_p(t)$.
2. Find the conditions for perfect reconstruction of $x(t)$ from $x_p(t)$.
3. Determine the required reconstruction filter.
4. Consider the signal $\overline{x}(t)$ with the first-order interpolation as follows:

$$\overline{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Big(x(nT_s) + \frac{t - nT_s}{T_s} \big(x((n+1)T_s) - x(nT_s) \big) \Big) \Big(u(t - nT_s) - u(t - (n+1)T_s) \Big) \right]$$

Determine the spectral density of $\overline{x}(t)$.

پاسخ

۱. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)p(t - nT_s) \\ &= p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \\ &= p(t) * x_\delta(t) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$X_p(f) = P(f)X_\delta(f) = \frac{P(f)}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T_s})$$

۲. • برای جلوگیری از aliasing باید داشته باشیم: $\frac{۱}{T_s} > ۲W$
• و برای آن‌که بتوانیم $x(t)$ را استخراج کنیم باید $P(f)$ در بازه‌ی $|f| < W$ ناصفر باشد.

۳. اگر فرض کنیم شرایط بخش قبل برقرارند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} X(f) &= X_p(f)H(f) \\ &= X_p(f)[\frac{T_s}{P(f)}\Pi(\frac{f}{۲W_H})] \end{aligned}$$

که در رابطه‌ی بالا، W_H هر مقداری در بازه‌ی $[W, \frac{۱}{T_s} - W]$ می‌تواند داشته باشد.

۴. برای رسیدن از $x_{\text{sampled}}(t)$ به $\overline{x}(t)$ از فیلتر مثلثی زیر استفاده شده است:

$$h(t) = \Lambda(\frac{|t|}{T_s}) = \begin{cases} ۱ - \frac{|t|}{T_s} & -T_s \leq t \leq T_s \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\overline{x}(t) = h(t) * \underbrace{(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s))}_{x_\delta(t)}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{S}_{\overline{x}}(f) = \mathcal{S}_h(f)\mathcal{S}_{x_\delta}(f)$$

برای محاسبه‌ی $\mathcal{S}_{x_\delta}(f)$، ابتدا ضربه‌ها را با پالس‌های مستطیلی به عرض ϵ و ارتفاع $\frac{۱}{\epsilon}$ جایگزین می‌کنیم و سیگنال به دست آمده را $\hat{x}(t)$ می‌نامیم. حال داریم:

$$R_{\hat{x}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} \hat{x}(t)\hat{x}(t-\tau)\, dt$$

اگر فرض کنیم $\epsilon < T_s$، به ازای هر عدد صحیح m، اگر $mT_s - \epsilon \leq \tau \leq mT_s + \epsilon$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} R_{\hat{x}}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \sum_{k=-\lfloor\frac{T}{۲T_s}\rfloor}^{\lfloor\frac{T}{۲T_s}\rfloor} x(kT_s)x((k+m)T_s)(\frac{\epsilon - |\tau - mT_s|}{\epsilon^۲}) \\ &= \frac{R_m}{\epsilon T_s}(۱ - \frac{|\tau - mT_s|}{\epsilon}) \end{aligned}$$

که داریم:

$$R_m = \lim_{N\to\infty} \frac{۱}{N} \sum_{k=\frac{-N}{۲}}^{\frac{N}{۲}} x\big(kT_s\big)x\big((k+m)T_s\big)$$

در نتیجه با میل‌کردن $\epsilon \to ۰$ داریم:

$$R_{x_\delta}(\tau) = \frac{۱}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m\delta(\tau - mT_s)$$

$$\mathcal{S}_{x_\delta}(f) = \frac{۱}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m e^{-j۲\pi mfT_s}$$

و بنابراین:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\overline{x}}(f) &= \mathcal{S}_h(f)\mathcal{S}_{x_\delta}(f) \\
&= |T_s \mathrm{sinc}^{۲}(fT_s)|^{۲} \frac{۱}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m e^{-j۲\pi m f T_s} \\
&= T_s \mathrm{sinc}^{۴}(fT_s) \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m e^{-j۲\pi m f T_s}
\end{aligned}
$$

البته اگر طیف توان را محاسبه نکردید و به تبدیل فوریه‌ی $\overline{x}(t)$ هم اکتفا کردید در این تمرین قابل قبول است.

2 Nonideal Sampling

Some sampling devices extract from $x(t)$ its average value over the sampling duration, so $x(nT_s)$ in Eq. (1) is replaced by:

$$\overline{x}(nT_s) = \frac{1}{\tau}\int_{nT_s-\tau}^{nT_s} x(t)dt.$$

1. Devise a frequency-domain model of this process using an averaging filter, with input $x(t)$ and output $y(t)$, followed by instantaneous sampling. Then obtain the impulse response of the averaging filter and write the resulting expression for $X_p(f)$.

2. Find the equalizer needed when $p(t)$ is a rectangular pulse with duration T_s and unit amplitude.

پاسخ

۱. اگر تعریف کنیم $h(t) = \frac{۱}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\delta(\lambda)d\lambda = \frac{۱}{\tau}[u(t) - u(t-\tau)]$، می‌توانیم بنویسیم:

$$y(t) = \overline{x}(t) = \frac{۱}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} x(\lambda)d\lambda = x(t) * h(t)$$

حال از آن‌جا که $H(f) = \mathrm{sinc}(f\tau)e^{-j\pi f\tau}$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{x}(nT_s)p(t-nT_s)\\
&= p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{x}(nT_s)\delta(t-nT_s)\\
&= p(t) * \overline{x}_\delta(t)
\end{aligned}$$

و مشابه پرسش قبل:

$$\begin{aligned}
X_p(f) &= P(f)\overline{X}_\delta(f)\\
&= \frac{P(f)}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{X}(f-\frac{n}{T_s})\\
&= \frac{P(f)}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H(f-\frac{n}{T_s})X(f-\frac{n}{T_s})\\
&= \frac{P(f)}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}(f\tau-\frac{n\tau}{T_s})\exp\big(-j\pi(f\tau-\frac{n\tau}{T_s})\big)X(f-\frac{n}{T_s})
\end{aligned}$$

۲. فرض کنیم شرایط بازسازی کامل برقرار باشند. در این صورت، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{eq}}(f) &= \frac{T_s}{P(f)\mathrm{sinc}(f\tau)\exp(-j\pi f\tau)}\Pi(\frac{f}{۲W_H})\\
&= \frac{T_s}{T_s\mathrm{sinc}(fT_s)\mathrm{sinc}(f\tau)\exp(-j\pi f(\tau+T_s))}\Pi(\frac{f}{۲W_H})
\end{aligned}$$

3 Quantization Error

Consider the continues random variable X with pdf:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Let Y be a discrete version of X formed by uniformly quantizing to n level.

$$Y = \frac{1}{n}(\lfloor nX \rfloor + \frac{1}{2})$$

1. For $n = 3$, what values of Y are possible and what are their probabilities.
2. For $n = 3$, derive the quantization error $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$.
3. Derive the value of quantization error $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ for arbitrary n.
4. Suppose a non-uniform quantizer is used to represent X. What values of a, b minimize $\mathbb{E}[(X-Z)^2]$ for fix t and

$$Z = \begin{cases} a & 0 \le x \le t \\ b & t < x \le 1 \end{cases}$$

پاسخ

۱. برای $n = ۳$ متغیر تصادفی Y می‌تواند مقادیر $\frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۶}$ را اخذ کند.

$$Y = \begin{cases} \frac{۱}{۶} & ۰ \le x < \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \le x < \frac{۲}{۳} \\ \frac{۵}{۶} & \frac{۲}{۳} \le x < ۱ \end{cases}$$

برای به دست تابع جرم احتمال متغیّر تصادفی Y از تابع توزیع تجمّعی متغیّر تصادفی X استفاده می‌کنیم:

$$F_X(x) = \big(۲x - x^۲\big)\big(u(x) - u(x-۱)\big)$$
$$\mathbb{P}[Y = \frac{۱}{۶}] = F_X(\frac{۱}{۳}) = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۹} = \frac{۵}{۹}$$
$$\mathbb{P}[Y = \frac{۱}{۲}] = F_X(\frac{۲}{۳}) - F_X(\frac{۱}{۳}) = \frac{۸}{۹} - \frac{۵}{۹} = \frac{۱}{۳}$$
$$\mathbb{P}[Y = \frac{۵}{۶}] = F_X(۱) - F_X(\frac{۲}{۳}) = ۱ - \frac{۸}{۹} = \frac{۱}{۹}$$

۲. برای $n = ۳$ امید ریاضی خطای کوانتش برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-Y)^۲] &= \int_{x=۰}^{۱} f_X(x)\big(x - y(x)\big)^۲ dx \\ &= \int_{x=۰}^{\frac{۱}{۳}} ۲(۱-x)(x-\frac{۱}{۶})^۲ dx + \int_{x=\frac{۱}{۳}}^{\frac{۲}{۳}} ۲(۱-x)(x-\frac{۱}{۲})^۲ dx + \int_{x=\frac{۲}{۳}}^{۱} ۲(۱-x)(x-\frac{۵}{۶})^۲ dx \\ &= \frac{۵}{۹۷۲} + \frac{۱}{۳۲۴} + \frac{۱}{۹۷۲} = \frac{۱}{۱۰۸}\end{aligned}$$

۳. مقادیر ممکن برای Y عبارتند از:

$$y_j = \frac{j + \frac{۱}{۲}}{۲} \qquad (j = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱)$$

و در نتیجه مقدار خطا را می‌توان محاسبه کرد:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Y)^2] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} 2(1-x)\big(x-\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big)^2\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \Big[2\big(x-\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big)^2 - 2x\big(x-\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big)^2\Big]\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{-1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \Big[2u^2 - 2\big(u+\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big)u^2\Big]\,du \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{-1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} 2\big[1-\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big]u^2\,du \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} 4\big[1-\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big] \int_{0}^{\frac{1}{2n}} u^2\,du \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} 4\big[1-\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big]\frac{1}{3}\frac{1}{8n^3} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{6n^3}\big[1-\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\big] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-\frac{1}{2}-j}{6n^4} \\
&= \frac{2n-1}{12n^4}n - \frac{1}{6n^4}\frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n^2}{12n^4} = \frac{1}{12n^2}
\end{aligned}
$$

۴. برای پیدا کردن مینیمم خطای کوانتش، تابع خطا را حساب می‌کنیم و مینمم مطلق آن را به دست می‌آوریم.

$$
Z = \begin{cases} a & 0 \le x \le t \\ b & t \le x \le 1 \end{cases}
$$

$$
\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \int_0^t f_X(x)(x-a)^2dx + \int_t^1 f_X(x)(x-b)^2dx
$$

از $\mathbb{E}[(X-Z)^2]$ نسبت به a مشتق می‌گیریم تا مینیمم آن را مشخص کنیم.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\mathbb{E}[(X-Z)^2] &= \int_0^t f_X(x)2(a-x)dx \\
&= 2a\int_0^t f_X(x)dx - 2\int_0^t f_X(x)xdx = 0
\end{aligned}
$$

در نتیجه:

$$
a = \frac{\int_0^t f_X(x)xdx}{\int_0^t f_X(x)dx} = \mathbb{E}[X|0 \le X \le t] = \frac{3t-2t^2}{6-3t}
$$

پس از مشخص شدن مقدار a، مقدار b را هم با مشتق‌گیری به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}\mathbb{E}[(X-Z)^۲] &= \int_t^۱ f_X(x)۲(b-x)dx \\ &= ۲b\int_t^۱ f_X(x)dx - ۲\int_t^۱ f_X(x)xdx = ۰\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$b = \frac{\int_t^۱ f_X(x)xdx}{\int_t^۱ f_X(x)dx} = \mathbb{E}[X|t < X \leq ۱] = \frac{۲t+۱}{۳}$$

4 Quantization and Signal Transmission

A signal $m(t)$ bandlimited to 3 kHz is sampled at a rate $\frac{1}{3}$ higher than its Nyquist rate. The maximum acceptable error in the sample amplitude (the maximum quantization error) is 0.5% of the peak signal amplitude m_p (quantization steps are uniform). The quantized samples are binary coded. Find the minimum bandwidth of a channel required to transmit the encoded binary signal.
24 such signals are time-division-multiplexed. If 2% more bits are added to the multiplexed data for error protection and synchronization, determine the minimum transmission bandwidth required to transmit the multiplexed signal.

پاسخ

نرخ نمونه‌برداری Nyquist عبارت است از:

$$R_N = ۲ \times ۳۰۰۰ = ۶۰۰۰ \text{ Hz}$$

در نتیجه نرخی که با آن از سیگنال نمونه برداشته‌ایم برابر خواهد بود با:

$$R = ۶۰۰۰ \times \frac{۴}{۳} = ۸۰۰۰ \text{ Hz}$$

کوانتش یکنواختی با گام Δ_q را در نظر بگیرید. در این حالت، حدّاکثر خطای کوانتش برابر است با: $\pm\frac{\Delta_q}{۲}$. از طرف دیگر، اگر تعداد سطوح کوانتش را L فرض کنیم، در کوانتش دودویی L باید توانی از ۲ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\Delta_q = \frac{۲m_p}{L}$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta_q}{۲} = \frac{m_p}{L} \leq \frac{۰/۵m_p}{۱۰۰}$$
$$\Rightarrow L \geq ۲۰۰$$
$$\Rightarrow L = ۲^۸ = ۲۵۶$$

در نتیجه با فرض کدینگ دودویی با ۸ بیت، نرخ بیت نهایی برابر است با:

$$R_t = ۸ \times ۸۰۰۰ = ۶۴۰۰۰ \text{ bit/s}$$

حال فرض کنید می‌خواهیم بیت‌ها را با استفاده از یک پالس $p(t)$ ارسال کنیم. به تعبیر دیگر سیگنال

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t - nT_s)$$

را می‌خواهیم ارسال کنیم. از آن‌جا که می‌خواهیم در مقصد این بیت‌ها را بازیابی کنیم، باید به ازای هر n داشته باشیم $x(nT_s) = a_n$، یا به عبارت دیگر:

$$p(nT_s) = \begin{cases} ۱ & n = ۰ \\ ۰ & n \neq ۰ \end{cases} \tag{۲}$$

حال می‌خواهیم کمینه پهنای باند موردنیاز را بیابیم. ادّعا می‌کنیم که باید داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲B} \leq T_s$$

برای اثبات این ادّعا، دو مرحله لازم است:

۱. نشان دهیم که هیچ سیگنال $x(t)$ای با $T_s < \frac{۱}{۲B}$ به ازای همه‌ی دنباله‌های $\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ پهنای باند کمتر از B ندارد.

۲. نشان دهیم یک سیگنال $x(t)$ با $T_s = \frac{۱}{۲B}$ وجود دارد که پهنای باند آن به ازای همه‌ی دنباله‌های $\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ برابر با B است.

برای اثبات بخش اوّل کافیست فرض کنیم که $T_s = \frac{۱}{۲(B+\epsilon)}$ برای یک $\epsilon > ۰$. حال اگر ارسال دنباله‌ی $10101010\ldots$ که یکی‌درمیان صفر و یک می‌شود را در نظر بگیریم، سیگنال $x(t)$ متناظر با این دنباله، یک سیگنال متناوب خواهد بود با دوره‌ی تناوب $۲T_s = \frac{۱}{B+\epsilon}$. در تبدیل فوریه‌ی این سیگنال، فرکانس $f_s = \frac{۱}{T_s} = B + \epsilon$ و هارمونیک‌های آن مشاهده می‌شوند و در نتیجه با عبورکردن $x(t)$ از کانالی با پهنای باند B، همه‌ی این فرکانس‌ها فیلتر می‌شوند و نمی‌توان در گیرنده بیت‌ها را بازیابی کرد. در نتیجه به ازای هیچ $\epsilon > ۰$ نمی‌توان دنباله‌ای با نرخ بیت $۲(B+\epsilon)$ را از کانالی با پهنای باند B ارسال کرد.

برای اثبات بخش دوم هم کافیست $p(t) = \text{sinc}(\frac{t}{T_s}) = \text{sinc}(۲Bt)$ را در نظر بگیریم. پهنای باند این سیگنال برابر با B است. شرط (۲) را محقّق می‌کند و باعث می‌شود که پهنای باند سیگنال $x(t)$ هم برابر با B باشد.

در نتیجه داریم:

$$B_t = \frac{R_t}{۲} = \frac{۶۴}{۲} = ۳۲ \text{ kHz}$$

از آن‌جا که ۲۴ کانال را می‌خواهیم ارسال کنیم و به اندازه‌ی ٪۲ تعداد بیت‌ها برای تصحیح خطا و هم‌زمانی اضافه می‌شوند، نرخ بیت کلّی برابر است با:

$$R_T = ۲۴ \times ۶۴۰۰۰ \times ۱/۰۲ = ۱/۵۶۶۷۲ \text{ Mbit/s}$$

و حدّاق پهنای باند لازم برای ارسال این نرخ بیت عبارت است از:

$$B_T = \frac{R_T}{۲} = \frac{۱۵۶۶/۷۲}{۲} = ۷۸۳/۳۶ \text{ kHz}$$

5 μ-Law Compander

The message signal $m(t)$ with the power of 20 mWatts is applied to an analog-to-digital converter with the dynamic range of -1 volt to 1 volt.

1. To transmit this signal by PCM, uniform quantization is adopted. If the SQNR is required to be at least 43 dB, determine the minimum number of bits required to code the uniform quantizer. Determine the SQNR obtained with this quantizer.
2. Repeat part 1, if a μ-law compander is applied with $\mu = 100$.
   Hint: You may have to use equation (5.35) of [1]

پاسخ

۱. می‌دانیم:

$$\text{SQNR} = \frac{P_x}{\frac{۱}{۱۲}(\frac{۲x_p}{L})^۲} = ۳L^۲\frac{P_x}{x_p^۲}$$

در نتیجه:

$$۱۰^{۴/۳} = ۳L^۲\frac{۰/۰۲}{۱}$$
$$\Rightarrow L = ۵۷۶/۶۶$$
$$\Rightarrow ۲^n > ۵۷۶/۶۶ \Rightarrow n = ۱۰$$

و بنابراین:

$$\text{SQNR} = ۳(۲^{۱۰})^۲\frac{۰/۰۲}{۱} = ۶۲۹۱۴/۵۶ \approx ۴۷/۹۸ \text{ dB}$$

۲. شرط $\mu^۲ \gg \frac{x_p^۲}{P_x}$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \mu^۲ = ۱۰^۴ \\ \frac{x_p^۲}{P_x} = \frac{۱}{۰/۰۲} = ۵۰ \end{cases} \Rightarrow \mu^۲ \gg \frac{m_p^۲}{p_x}$$

در نتیجه می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$\text{SQNR} = \frac{۳L^۲}{\big(\ln(۱+\mu)\big)^۲}$$

بنابراین:

$$۱۰^{۴/۳} = \frac{۳L^۲}{(\ln(۱+۱۰۰))^۲}$$
$$\Rightarrow L = ۳۷۶/۳۷$$
$$\Rightarrow ۲^n > ۳۷۶/۳۷ \Rightarrow n = ۹$$

و:

$$\text{SQNR} = \frac{۳(۲^۹)^۲}{(\ln(۱+۱۰۰))^۲} = ۳۶/۹۲۲/۸۴ \approx ۴۵/۶۷ \text{ dB}$$

References

[1] Lathi, Bhagwandas Pannalal and Ding, Zhi. *Modern digital and analog communication systems*. Oxford university press, 2019.