In the Name of God

Communication Systems (25751-4)

Problem Set 01 (Solution)

Fall Semester 1401-02

Department of Electrical Engineering

Sharif University of Technology

Instructor: Dr. M. Pakravan

($*$) starred problems are optional and have a bonus mark!

1 Fourier Transform

Determine the Fourier transform of each of the following signals:

1. $x_1(t) = e^{-\alpha|t|}\cos(\beta t). \qquad (\alpha > 0)$
2. $x_2(t) = \Lambda(t) = (1-|t|)u(t+1)u(-t+1).$
3. $x_3(t) = \frac{t}{(a^2+t^2)^2}.$
4. $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Lambda(\frac{t}{T}-kn). \qquad (T>0, k>0, k\in\mathbb{Z})$

پاسخ

۱. می‌دانیم:

$$\mathcal{F}\{\cos(۲\pi f_۰ t)\} = \frac{۱}{۲}[\delta(f+f_۰)+\delta(f-f_۰)].$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\cos(۲\pi f_۰ t)\} &= \frac{۱}{۲}G(f) * [\delta(f+f_۰)+\delta(f-f_۰)] \\ &= \frac{۱}{۲}[G(f+f_۰)+G(f-f_۰)].\end{aligned}$$

حال اگر قرار دهیم $g(t) = e^{-a|t|}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} &= \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t)\} \\ &= (\frac{۱}{a+j۲\pi f}+\frac{۱}{a-j۲\pi f}) \\ &= (\frac{۲a}{a^۲+۴\pi^۲ f^۲})\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\cos(\beta t)\} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۲a}{a^۲+۴\pi^۲(f+f_۰)^۲}+\frac{۲a}{a^۲+۴\pi^۲(f-f_۰)^۲}\right].$$

۲.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} &= \int_{-1}^{0}(1+t)e^{-2\pi i f}dt + \int_{0}^{1}(1-t)e^{-2\pi i f t}dt \\ &= \left[\frac{1+2\pi i f}{4\pi^2 f^2} - \frac{e^{2\pi i f}}{4\pi^2 f^2}\right] - \left[\frac{2\pi i f - 1}{4\pi^2 f^2} + \frac{e^{-2\pi i f}}{4\pi^2 f^2}\right] \\ &= -\frac{e^{-2\pi i f}\left(e^{2\pi i f}-1\right)^2}{4\pi^2 f^2} \\ &= -\frac{e^{-2\pi i f}\left(e^{\pi i f}\left[e^{\pi i f}-e^{-\pi i f}\right]\right)^2}{4\pi^2 f^2} \\ &= -\frac{e^{-2\pi i f}e^{2\pi i f}(2i)^2\sin^2(\pi f)}{4\pi^2 f^2} \\ &= \left[\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right]^2 = \operatorname{sinc}^2(f)\end{aligned}$$

۳. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}x_3(t) &= \frac{t}{\left(a^2+t^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{a^3}\cdot\frac{\frac{t}{a}}{\left(1+\left(\frac{t}{a}\right)^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{a^3}\cdot\frac{-a}{2}\cdot\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\Big)\end{aligned}$$

حال اگر تعریف کنیم $g_1(t)=e^{-|t|}$، خواهیم داشت:

$$G_1(f) = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}.$$

و بنا بر خاصیت دوگانی، اگر تعریف کنیم $g_2(t)=\frac{1}{1+(2\pi t)^2}$، خواهیم داشت:

$$G_2(f) = \frac{1}{2}e^{-|-f|} = \frac{1}{2}e^{-|f|}.$$

در قدم بعدی تعریف می‌کنیم $g_3(t)=g_2\left(\frac{t}{2\pi a}\right)$، و داریم:

$$G_3(f) = 2\pi a\cdot G_2(2\pi a f) = \pi a e^{-|2\pi a f|}.$$

حال داریم:

$$x_3(t) = \frac{-1}{2a^2}\cdot\frac{d}{dt}\big(g_3(t)\big).$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}X_3(f) &= \frac{-1}{2a^2}\cdot j2\pi f G_3(f) \\ &= \frac{-1}{2a^2}\cdot j2\pi f\cdot\pi a\cdot e^{-|2\pi a f|} \\ &= \frac{-j\pi^2 f}{a}e^{-|2\pi a f|}.\end{aligned}$$

۴. با توجّه به سؤال ۴، برای هر سیگنال $x(t)$ داریم:

$$\mathcal{F}\Big\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_s)\Big\} = \frac{۱}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\Big(\frac{n}{T_s}\Big)\delta(f-\frac{n}{T_s}).$$

و در نتیجه اگر سیگنال $x_۴(t)$ در یک تناوب را با $\tilde{x}_۴(t)$ نشان دهیم، داریم:

$$X_۴(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_۰\tilde{X}(nf_۰)\delta(f-nf_۰), \quad f_۰ = \frac{۱}{۲kT}.$$

از طرفی:

$$\tilde{x}_۴(t) = \Lambda(\frac{t}{T}) - \Lambda(\frac{t}{T}-k).$$

و بنابراین:

$$\tilde{X}(f) = T\mathrm{sinc}^۲(Tf) - T\mathrm{sinc}^۲(Tf)e^{-j۲\pi Tfk} = T\mathrm{sinc}^۲(Tf)(۱-e^{-j۲\pi Tfk}).$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} X_۴(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{T}{۲kT}\mathrm{sinc}^۲(\frac{nT}{۲kT})(۱-e^{-j\pi n})\delta(f-\frac{n}{۲kT}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{۲k}\mathrm{sinc}^۲(\frac{n}{۲k})(۱-(-۱)^n)\delta(f-\frac{n}{۲kT}). \end{aligned}$$

2 Parseval's Theorem

Let $x(t)$ and $y(t)$ be two energy-type signals, and let $X(f)$ and $Y(f)$ denote their Fourier transforms, respectively. Show that:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$$

پاسخ

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt &= \int_{t=-\infty}^{\infty}\left[\int_{f=-\infty}^{\infty} X(f)e^{j۲\pi ft}df\right]\left[\int_{f'=-\infty}^{\infty} Y(f')e^{j۲\pi f't}df'\right]^* dt\\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty}\left[\int_{f=-\infty}^{\infty} X(f)e^{j۲\pi ft}df\right]\left[\int_{f'=-\infty}^{\infty} Y^*(f')e^{-j۲\pi f't}df'\right] dt\\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty}\int_{f'=-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f')\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j۲\pi(f-f')t}dt\right] df'df\end{aligned}$$

حال می‌دانیم که $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = ۱$. در نتیجه از رابطه‌ی عکس تبدیل فوریه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j۲\pi ft}df = \delta(t)$$

و با جابجایی اسم متغیّرهای t, f می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j۲\pi ft}dt = \delta(f)$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j۲\pi(f-f')t}dt = \delta(f-f')$$

و می‌توان مراحل حل را ادامه داد:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt &= \int_{f=-\infty}^{\infty}\int_{f'=-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f')\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{j۲\pi(f-f')t}dt\right] df'df\\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty}\int_{f'=-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f')\delta(f-f')df'df\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df\end{aligned}$$

3 Fourier Transform and Real Integrals

Use the known properties of the Fourier transform to obtain the following:

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sinc}(x)}{a^2 + x^2} dx$
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \text{sinc}^2(\beta t) dt \qquad (\alpha > 0)$
3. $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t^3} dt$
4. $(*) I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^4} dt$

پاسخ

۱. از خواصّ تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = \Pi(t).$$
$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\} = \frac{۲a}{a^۲ + (۲\pi f)^۲}.$$
$$\mathcal{F}\{\frac{۲a}{a^۲ + (۲\pi t)^۲}\} = X_۲(f) = e^{-af}u(f) + e^{af}u(-f).$$
$$\mathcal{F}\{\frac{۱}{a^۲ + t^۲}\} = \frac{\pi}{a}(e^{-۲a\pi f}u(f) + e^{۲a\pi f}u(-f)).$$

همچنین با توجّه به قضیه‌ی پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\,df.$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
I_۱ &= \int_۰^{\infty} \frac{\text{sinc}(t)}{a^۲ + t^۲}\,dt \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}(t)}{a^۲ + t^۲}\,dt \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(f)\Big[\frac{\pi}{a}\big(e^{-۲a\pi f}u(f) + e^{۲a\pi f}u(-f)\big)\Big]\,df \\
&= \frac{\pi}{۲a}\int_{\frac{-۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} (e^{-۲a\pi f}u(f) + e^{۲a\pi f}u(-f))\,df \\
&= \frac{۱}{-۲a^۲}\, e^{-۲a\pi f}\Big]_۰^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲a^۲}(۱ - e^{-a\pi}).
\end{aligned}$$

۲. داریم:

$$\begin{aligned}
I_۲ &= \int_۰^{+\infty} e^{-\alpha t}\text{sinc}^۲(\beta t)dt \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}\text{sinc}^۲(\beta t)dt
\end{aligned}$$

می‌دانیم که $\mathcal{F}\{\text{sinc}(\beta t)\} = \frac{1}{\beta}\text{rect}(\frac{f}{\beta})$. در نتیجه:

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}^2(\beta t)\} = \frac{1}{\beta}\text{rect}(\frac{f}{\beta}) * \frac{1}{\beta}\text{rect}(\frac{f}{\beta}) = \frac{1}{\beta}\Lambda(\frac{f}{\beta})$$

همچنین می‌دانیم:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}\text{sinc}^2(\beta t)dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\Lambda(\frac{f}{\beta}) * \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}\right]_{f=0} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda(\frac{f-f'}{\beta})\frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f'^2}df'\right]_{f=0} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda(\frac{f'}{\beta})\frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f'^2}df' \\
&= \frac{2\alpha}{\beta^2}\int_{0}^{\beta}\frac{-f'+\beta}{\alpha^2 + 4\pi^2 f'^2}df' \\
&= -\frac{2\alpha}{8\pi^2\beta^2}\int_{0}^{\beta}\frac{8\pi^2 f'df'}{\alpha^2 + 4\pi^2 f'^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2\beta}\int_{0}^{\beta}\frac{df'}{1 + (\frac{2\pi f'}{\alpha})^2} \\
&= \frac{-\alpha}{4\pi^2\beta^2}\ln\left(\frac{\alpha^2 + 4\pi^2\beta^2}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{\pi\beta}\tan^{-1}(\frac{2\pi\beta}{\alpha})
\end{aligned}$$

۳. تعریف می‌کنیم $x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}$ و $y(t) = \frac{-1}{t}$. در نتیجه داریم:

$$\frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t^3} = y(t)x(t).$$

از طرفی، تبدیل فوریه‌ی $x(t)$ و $y(t)$ را می‌دانیم:

$$\begin{aligned}
&X(f) = (j2\pi f)\pi\Pi(\pi f) = j2\pi^2 f\Pi(\pi f), \\
&Y(f) = j\pi\text{sgn}(f).
\end{aligned}$$

و با استفاده از قضیه‌ی پارسوال می‌دانیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
I_{۳} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t^{۳}}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)\, df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (j۲\pi f)\pi\Pi(\pi f)(-j\pi \mathrm{sgn}(f))\, df \\
&= ۴\pi^{۳} \int_{۰}^{\frac{۱}{۲\pi}} f\, df \\
&= ۴\pi^{۳} \frac{۱}{۸\pi^{۲}} = \frac{\pi}{۲}.
\end{aligned}
$$

۴. تعریف می‌کنیم $g(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi})$. داریم $G(f) = \pi\, \mathrm{rect}(\pi f)$ و در نتیجه اگر تعریف کنیم $h(t) = g^{۲}(t)$ داریم:

$$
\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{g^{۲}(t)\} = \mathcal{F}\{\frac{\sin^{۲}(t)}{t^{۲}}\} = \pi\, \mathrm{rect}(\pi f) * \pi\, \mathrm{rect}(\pi f) = \pi\, \Lambda(\pi f)
$$

حال از قضیه‌ی پارسوال داریم:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{۴}(t)}{t^{۴}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h^{۲}(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^{۲} df \\
&= \pi^{۲} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^{۲}(\pi f) df \\
&= ۲\pi^{۲} \int_{-\frac{۱}{\pi}}^{۰} (\pi f + ۱)^{۲} df \\
&= ۲\pi \int_{۰}^{۱} f^{۲} df = \frac{۲\pi}{۳}
\end{aligned}
$$

در نتیجه:

$$
I_{۴} = \int_{۰}^{+\infty} \frac{\sin^{۴}(t)}{t^{۴}} dt = \frac{۱}{۲} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{۴}(t)}{t^{۴}} dt = \frac{\pi}{۳}
$$

4 Inverse Fourier Transform

1. Determine $x_1(t)$, whose Fourier transform $X_1(f)$ has the following magnitude and phase. Express $x_1(t)$ as a closed-form and sketch its function of time.

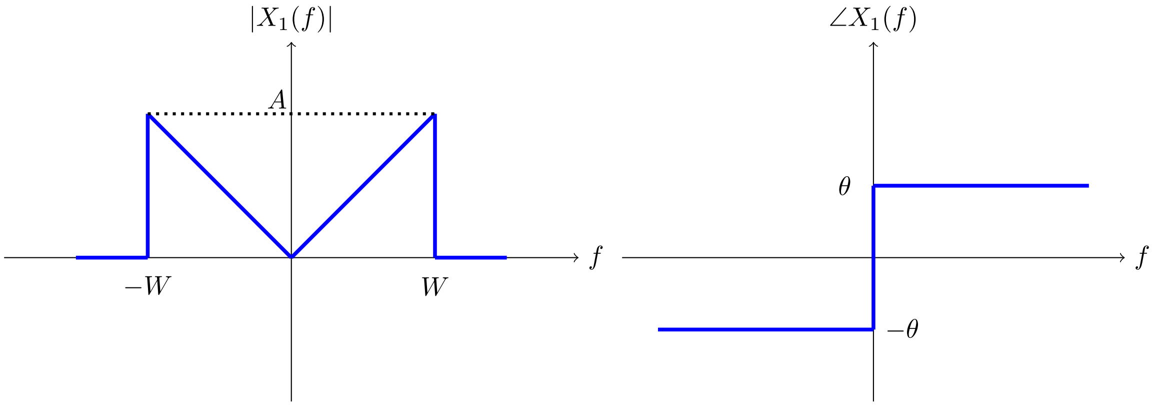

Figure 1: Problem 2 – part 1

2. Determine $x_2(t)$, whose Fourier transform $X_2(f)$ has the following magnitude and phase. Express $x_2(t)$ as a closed-form and sketch its function of time.

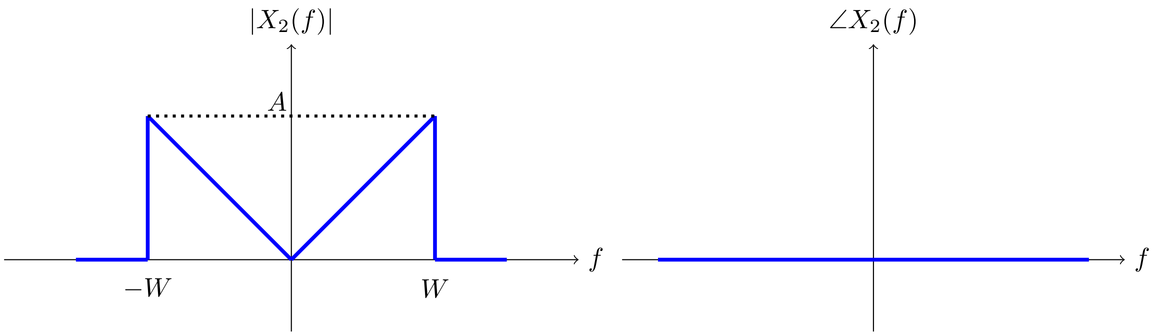

Figure 2: Problem 2 – part 2

3. What are important similarities and differences between $x_1(t)$ and $x_2(t)$? How do those similarities and differences manifest in their Fourier transforms?

پاسخ

۱.

$$
\begin{aligned}
&X_1(f) = |X_1(f)|\, e^{j\angle X_1(f)}\\
&x_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f) e^{j2\pi ft} df\\
&= \int_{-W}^{0} (\frac{-A}{W} f) e^{-j\theta} e^{j2\pi ft} df + \int_{0}^{W} (\frac{A}{W} f) e^{j\theta} e^{j2\pi ft} df\\
&= \frac{-A}{W} e^{-j\theta} \int_{-W}^{0} f e^{j2\pi ft} df + \frac{A}{W} e^{j\theta} \int_{0}^{W} f e^{j2\pi ft} df\\
&= \frac{-A}{W} e^{-j\theta} \frac{1 - e^{-j2\pi Wt} + j2\pi Wt e^{-j2\pi Wt}}{4\pi^2 t^2} + \frac{A}{W} e^{j\theta} \frac{-1 + e^{j2\pi Wt} + j2\pi Wt e^{j2\pi Wt}}{4\pi^2 t^2}\\
&= \frac{-A(e^{-j\theta} + e^{j\theta})}{4\pi^2 t^2 W} + \frac{A(e^{-j(2\pi Wt+\theta)} + e^{j(2\pi Wt+\theta)})}{4\pi^2 t^2 W} + \frac{jA(e^{j(2\pi Wt+\theta)} - e^{-j(2\pi Wt+\theta)})}{2\pi t}\\
&= \frac{-2A\cos(\theta)}{4\pi^2 t^2 W} + \frac{2A\cos(2\pi Wt+\theta)}{4\pi^2 t^2 W} - \frac{2A\sin(2\pi Wt+\theta)}{2\pi t}.
\end{aligned}
$$

۲. کافیست قرار دهیم $\theta = 0$، در نتیجه:

$$x_2(t) = \frac{-2A}{4\pi^2 t^2 W} + \frac{2A\cos(2\pi Wt)}{4\pi^2 t^2 W} - \frac{2A\sin(2\pi Wt)}{2\pi t}.$$

۳. هر دو سیگنال از نظر نحوه‌ی میرایی مشابهند. تفاوت در آنست که سیگنال $x_2(t)$ یک سیگنال زوج است، ولی سیگنال $x_1(t)$ نه زوج است و نه فرد. البته اگر قرار دهیم $\theta = \frac{\pi}{2}$، سیگنال $x_1(t)$ فرد می‌شود و تبدیل فوریه‌ی آن هم موهومی خالص خواهد بود.

5 Types of Signals

Classify the following signals into energy-type, power-type, and neither energy-type nor power-type signals.
For energy-type or power-type signals find the energy or the power contents of the signal.

1. $x_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t) \qquad (\alpha > 0)$
2. $x_2(t) = \mathrm{sinc}(t)$
3. $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Lambda(t - kn)$
4. $x_4(t) = \begin{cases} Kt^{-\frac{1}{4}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

پاسخ

۱. حدس می‌زنیم سیگنال انرژی است.

$$
\begin{aligned}
E_۱ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t)\right|^۲ dt \\
&= \int_۰^{\infty} e^{-۲\alpha t}\cos^۲(\beta t)dt \\
&= \int_۰^{\infty} e^{-۲\alpha t}\left(\frac{\cos(۲\beta t)+۱}{۲}\right)dt \\
&= \int_۰^{\infty} \frac{e^{-۲\alpha t}}{۲} + \frac{e^{-۲\alpha t+۲j\beta t}}{۴} + \frac{e^{-۲\alpha t-۲j\beta t}}{۴}dt \\
&= \frac{-۱}{۲(-۲\alpha)} + \frac{-۱}{۴(-۲\alpha+۲j\beta)} + \frac{-۱}{۴(-۲\alpha-۲j\beta)} \\
&= \frac{۱}{۴\alpha} + \frac{\alpha}{۴(\alpha^۲+\beta^۲)}
\end{aligned}
$$

چون انرژی محاسبه‌شده مثبت و محدود است، حدس ما درست بود.

۲. حدس می‌زنیم سیگنال انرژی است.

$$x_۲(t) = \mathrm{sinc}(t) \Rightarrow X_۲(f) = \Pi(f)$$

$$
\begin{aligned}
E_۲ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^۲(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^۲(f)df = ۱
\end{aligned}
$$

چون انرژی محاسبه‌شده مثبت و محدود است، حدس ما درست بود.

۳. از آن‌جا که سیگنال متناوب است، حدس می‌زنیم توان باشد.

$$\begin{aligned} P_3 &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2k} \int_{-k}^{k} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2k} 4 \int_{-1}^{0} (t+1)^2 dt \\ &= \frac{1}{2k}\frac{4}{3} = \frac{2}{3k} \end{aligned}$$

چون توان محاسبه‌شده مثبت و محدود است، حدس ما درست بود.

۴. حدس خاصی نمی‌توانیم بزنیم. سعی می‌کنیم انتگرال $|x_4(t)|^2$ را در یک بازه پیرامون صفر بگیریم و رفتار آن را بررسی کنیم:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_4^2(t)dt = \int_{0}^{\frac{T}{2}} K^2 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2K^2\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\begin{cases} E_4 = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_4^2(t)dt = \infty \\ P_4 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_4^2(t)dt = 0 \end{cases}$$

بنابراین حد مربوط به سیگنال انرژی بیکران و حد مربوط به سیگنال توان صفر می شود. پس این سیگنال نه توان و نه انرژی است.

6 Poisson's Sum Formula

1. By computing the Fourier series coefficients for the periodic signal $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$, shows that:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi t}{T_s}}$$

2. Using the result of part (1), prove that for any signal $x(t)$ and any T_s ,the following identity holds:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_s}\right) e^{jn\frac{2\pi t}{T_s}}$$

3. Conclude the following relation known as *Poisson's sum formula.*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_s}\right)$$

پاسخ

۱. تابع $s(t)$ با دوره‌ی تناوب T_s متناوب است. در نتیجه ضرایب سری فوریه‌ی آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{۱}{T_s} \int_{\frac{-T_s}{۲}}^{\frac{T_s}{۲}} s(t) e^{-jn\frac{۲\pi t}{T_s}} dt \\ &= \frac{۱}{T_s} \int_{\frac{-T_s}{۲}}^{\frac{T_s}{۲}} \delta(t) e^{-jn\frac{۲\pi t}{T_s}} dt = \frac{۱}{T_s} \end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{۲\pi t}{T_s}} = \frac{۱}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{۲\pi t}{T_s}}$$

۲. کافیست که در دو طرف رابطه‌ی اخیر را با $x(t)$ کانوالو کنیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{۱}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{۲\pi t}{T_s}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_s) &= x(t) * \frac{۱}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{۲\pi t}{T_s}} \\ &= \frac{۱}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-۱}\{X(f)\delta(f - \frac{n}{T_s})\} \\ &= \frac{۱}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-۱}\{X(\frac{n}{T_s})\delta(f - \frac{n}{T_s})\} \\ &= \frac{۱}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\frac{n}{T_s}) e^{jn\frac{۲\pi t}{T_s}} \end{aligned}$$

۳. کافیست قرار دهیم $t = ۰$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_s)\bigg|_{t=۰} = \frac{۱}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\frac{n}{T_s})e^{jn\frac{۲\pi t}{T_s}}\bigg|_{t=۰}$$

در نتیجه:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nT_s) = \frac{۱}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\frac{n}{T_s})$$

و با عوض کردن ترتیب جملات مجموع:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) = \frac{۱}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\frac{n}{T_s})$$

7 Output Energy of an LTI System

Let $x(t)$ represent the input to an LTI system, where:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|} e^{\frac{jn\pi}{4}t}$$

for $0 < \alpha < 1$. The frequency response of the system is:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < W \\ 0 & o.w. \end{cases}.$$

Assume that $\alpha = 0.4$. What is the minimum value for W sush that the average energy in the output signal will be at least 90% of that in the input signal?

پاسخ

سیگنال $x(t)$ با دوره‌ی تناوب $T = ۸$ متناوب است. برای محاسبه‌ی توان متوسّط آن داریم:

$$\begin{aligned}
P &= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_T |x(t)|^{۲} dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|}\alpha^{|m|} e^{\frac{jn\pi}{۴}t} e^{\frac{-jm\pi}{۴}t} dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{۲|n|} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{۲|n|} \\
&= \frac{۱}{۱-\alpha^{۲}} + \frac{۱}{۱-\alpha^{۲}} - ۱ \\
&= \frac{۱+\alpha^{۲}}{۱-\alpha^{۲}}
\end{aligned}$$

فرض می‌کنیم که فیلتر، K فرکانس پایین‌تر را عبور دهد. در این صورت توان متوسّط سیگنال خروجی عبارت است از:

$$\begin{aligned}
P_y &= \sum_{n=-K}^{K} \alpha^{۲|n|} \\
&= \frac{۱-\alpha^{۲K+۲}}{۱-\alpha^{۲}} + \frac{۱-\alpha^{۲K+۲}}{۱-\alpha^{۲}} - ۱ \\
&= \frac{۱+\alpha^{۲} - ۲\alpha^{۲K+۲}}{۱-\alpha^{۲}}
\end{aligned}$$

برای آن‌که سیگنال خروجی، ۹۰٪ توان سیگنال ورودی را داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{1+\alpha^2-2\alpha^{2K+2}}{1-\alpha^2} \geq 0/9\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$$
$$\Rightarrow 1+\alpha^2-2\alpha^{2K+2} \geq 0/9\left(1+\alpha^2\right)$$
$$\Rightarrow 2\alpha^{2K+2} \leq 0/1\left(1+\alpha^2\right)$$
$$2(K+1)\ln(\alpha) \leq \ln\left(\frac{1+\alpha^2}{20}\right)$$
$$K \geq \frac{\ln\left(\frac{1+\alpha^2}{20}\right)}{2\ln(\alpha)}-1$$

و در نتیجه:

$$W \geq \frac{1}{8}\left(\frac{\ln\left(\frac{1+\alpha^2}{20}\right)}{2\ln(\alpha)}-1\right)$$

8 (*) A Signal and Its Fourier Transform

Assume that $x(t)$ has the following Fourier transform:

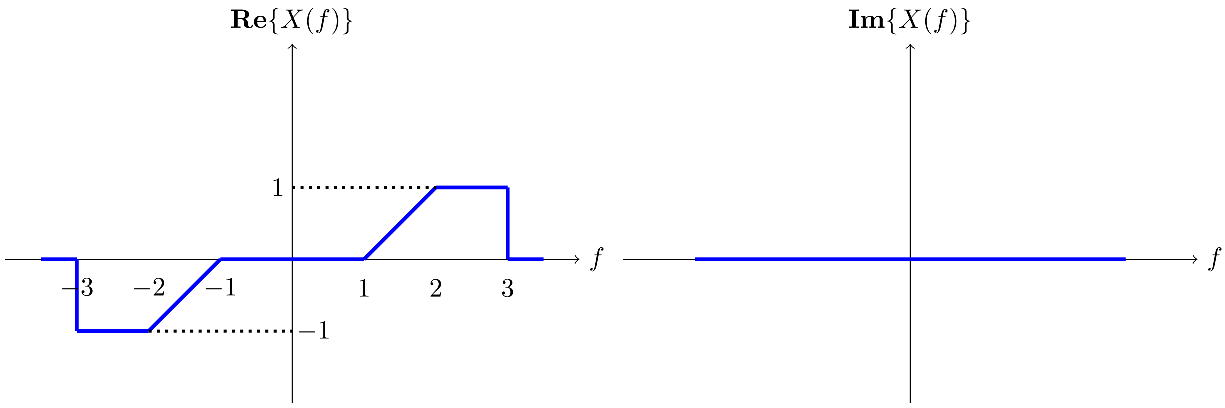

Figure 3: Problem 8

1. Find the following integral:

$$I = \int_0^{+\infty} 2tx(t)\cos(2\pi t)dt.$$

2. Is $x(t)$ an energy-type signal or a power-type signal?

3. find the energy or the power content of $x(t)$.

پاسخ

1. $X(f)$ is odd and real, so $x(t)$ will be odd and pure imaginary. We also know that t and $\cos(2\pi t)$ are odd and even respectively. Hence $2tx(t)\cos(2\pi t)dt$ is even. Thus:

$$A = \int_0^{\infty} 2tx(t)\cos(2\pi t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\cos(2\pi t)dt.$$

We have

$$tx(t)\cos(2\pi t) = tx(t)\left(\frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}\right) \tag{1}$$

so if the fourier transform of $tx(t)\cos(2\pi t)$ and $tx(t)$ are $X_1(f)$ and $X_2(f)$ respectively, then according to equation 1 we have:

$$X_1(f) = \frac{X_2(f-1) + X_2(f+1)}{2}.$$

and we also have:

$$A = X_1(0).$$

Hence,

$$A = \frac{X_2(-1) + X_2(+1)}{2} \tag{2}$$

According to fourier transform properties, we have:

$$X_2(f) = \frac{j}{2\pi}X'(f). \tag{3}$$

So according to equation 2 an 3:

$$A = \frac{jX'(-1) + jX'(+1)}{4\pi}. \tag{4}$$

At points $t = -1$ and $t = +1$ the derivative is not continuous. So we use mean of both sides:

$$X'(f)\Big|_{f=1} = \frac{0+1}{2} \qquad , X'(f)\Big|_{f=-1} = \frac{1+0}{2}.$$

So according to equation 4, we have:

$$A = \frac{jX'(-1) + jX'(+1)}{4\pi} = \frac{j(\frac{1}{2}) + j(\frac{1}{2})}{4\pi} = \frac{j}{4\pi}.$$

2. According to Parseval's theorem, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$, for a bounded fourier transform, $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$ will be bounded. Hence this signal is energy-type.

3.
$$\begin{aligned}
E &= \int_{\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \\
&= 2\int_{0}^{3} |X(f)|^2 df \\
&= 2\Big(\int_{0}^{1} |X(f)|^2 df + \int_{1}^{2} |X(f)|^2 df + \int_{2}^{3} |X(f)|^2 df\Big) \\
&= 2\big(0 + \int_{1}^{2} (f-1)^2 df + 1\big) \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned} \tag{5}$$