In the Name of God

Communication Systems (25751-4)

Problem Set 03 (Solution)

Fall Semester 1401-02

Department of Electrical Engineering

Sharif University of Technology

Instructor: Dr. M. Pakravan

(∗) starred problems are optional and have a bonus mark!

4 Energy and Power Spectral Density Calculation

Determine whether these signals are energy-type or power-type. In each case, find the energy spectral density and the energy content or the power spectral density and the power content of the signal.

1. $x_1(t) = e^{-\alpha|t|}\sin(\beta t) \qquad (\alpha, \beta > 0)$
2. $x_2(t) = \text{sinc}^2(\alpha t) \qquad (\alpha > 0)$
3. $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t - kn) \qquad (k \in \mathbb{N}, k > 2)$
4. $x_4(t) = Au(-t)$
5. (∗) $x_5(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$
6. (∗) $x_6(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$

پاسخ

۱. سیگنال از نوع انرژی است.

$$\begin{aligned}
E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲\alpha|t|}\sin^{۲}(\beta t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲\alpha|t|}\frac{۱-\cos(۲\beta t)}{۲}dt \\
&= \int_{۰}^{\infty} e^{-۲\alpha t}dt - \int_{۰}^{\infty} e^{-۲\alpha t}\cos(۲\beta t)dt \\
&= \frac{۱}{۲\alpha} - \text{Re}\{\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\alpha t}e^{j۲\beta t}dt\} \\
&= \frac{۱}{۲\alpha} - \text{Re}\{\frac{۱}{۲(\alpha - j\beta)}\} = \frac{۱}{۲\alpha} - \frac{\alpha}{۲(\alpha^{۲}+\beta^{۲})}
\end{aligned}$$

چون سیگنال $x_۱(t)$ انرژی است، برای به دست آوردن طیف توان، می‌توانیم اندازه‌ی تبدیل فوریه‌ی آن به توان دو را حساب کنیم:

$$f_۰ = \frac{\beta}{۲\pi}$$
$$\mathcal{F}\{\sin(۲\pi\frac{\beta}{۲\pi}t)\} = \frac{-j}{۲}\left[\delta(f-\frac{\beta}{۲\pi}) - \delta(f+\frac{\beta}{۲\pi})\right]$$
$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \frac{۲\alpha}{\alpha^۲ + ۴\pi^۲ f^۲}$$
$$X_۱(f) = \mathcal{F}\{\sin(۲\pi\frac{\beta}{۲\pi}t)\} * \mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \frac{-j}{۲}\left[\frac{۲\alpha}{\alpha^۲ + ۴\pi^۲(f-\frac{\beta}{۲\pi})^۲} - \frac{۲\alpha}{\alpha^۲ + ۴\pi^۲(f+\frac{\beta}{۲\pi})^۲}\right]$$

$$\mathcal{S}_{x_۱}(f) = |X_۱(f)|^۲ = \left[\frac{۱۶\alpha\pi^۲ f f_۰}{[\alpha^۲ + ۴\pi^۲(f^۲+f_۰^۲)]^۲ - [۸\pi^۲ f f_۰]^۲}\right]^۲$$

۲. سیگنال از نوع انرژی است. تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x_۲(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}^۲(\alpha t)\} = \frac{۱}{\alpha}\Lambda(\frac{f}{\alpha})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{sinc}^۲(\alpha t))^۲ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{۱}{\alpha}\Lambda(\frac{f}{\alpha}))^۲ df \\
&= \frac{۲}{\alpha^۲}\int_۰^{\alpha} (\frac{f}{\alpha})^۲ df = \frac{۲}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{x_۲}(f) = |X_۲(f)|^۲ = \frac{۱}{\alpha^۲}\Lambda^۲(\frac{f}{\alpha})$$

۳. با توجّه به متناوب‌بودن سیگنال، سیگنال از نوع توان است.

$$x_۳(t) = \Lambda(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-kn)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow X_۳(f) &= \mathcal{F}\{\Lambda(t)\}\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-kn)\} \\
&= \frac{۱}{k}\mathrm{sinc}^۲(f)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{k}) \\
&= \frac{۱}{k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^۲(\frac{n}{k})\delta(f-\frac{n}{k}) \\
&= \frac{۱}{k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^۲(\frac{n}{k})\delta(f-\frac{n}{k})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_۳(t) = \frac{۱}{k}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^۲(\frac{n}{k})e^{j\frac{۲\pi}{k}nt}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} x_۳^۲(t)dt \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{۱}{kl} \int_{\frac{-kl}{۲}}^{\frac{kl}{۲}} x_۳^۲(t)dt \\
&= \frac{۱}{k} \int_{\frac{-k}{۲}}^{\frac{k}{۲}} \Lambda^۲(t)dt = \frac{۲}{k^۲}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{x_۳}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} x_۳(t)x_۳^*(t-\tau)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{۲\pi}{T_s}nt} c_m^* e^{-j\frac{۲\pi}{T_s}n(t-\tau)} dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} c_n c_m^* e^{j\frac{۲\pi}{T_s}(n-m)t} e^{j\frac{۲\pi}{T_s}n\tau} dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} c_n c_n^* e^{j\frac{۲\pi}{T_s}n\tau} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^۲ e^{j\frac{۲\pi}{T_s}n\tau} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{k^۲} \mathrm{sinc}^۴(\frac{n}{k}) e^{j\frac{۲\pi}{k}n\tau}
\end{aligned}
$$

در اثبات بالا فرض کرده‌ایم $T = NT_s$ و $N \to \infty$.

$$
\Rightarrow \mathcal{S}_{x_۳}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{k^۲} \mathrm{sinc}^۴(\frac{n}{k}) \delta(f - \frac{n}{k})
$$

۴. سیگنال از نوع توان است. برای محاسبه‌ی چگالی طیف توان آن دو روش معرّفی می‌کنیم:

- روش اوّل: محاسبه‌ی مستقیم تابع اتوکورولیشن و گرفتن تبدیل فوریه از آن

$$
\begin{aligned}
R_{x_۴}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} x_۴(t)x_۴(t-\tau)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{T} \int_{\frac{-T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} A^۲ u(-t)u(-t+\tau)dt \\
&= \begin{cases} \lim_{T\to\infty} \frac{A^۲(\frac{T}{۲})}{T} = \frac{A^۲}{۲} & \tau \geq ۰ \\ \lim_{T\to\infty} \frac{A^۲(\frac{T}{۲}+\tau)}{T} = \frac{A^۲}{۲} & \tau < ۰ \end{cases} \\
&= \frac{A^۲}{۲}
\end{aligned}
$$

در نتیجه:

$$
\mathcal{S}_{x_۴}(f) = \mathcal{F}\{R_{x_۴}(\tau)\} = \frac{A^۲}{۲}\delta(f)
$$

• روش دوم: در سؤال قبل، اثبات کردیم که چگالی طیف توان را می‌توان از روش زیر محاسبه کرد:

$$\mathcal{S}_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathcal{S}_{x_T}(f)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}, \qquad x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال داریم:

$$x_{4,T}(t) = A\,\mathrm{rect}(\frac{t+\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}})$$
$$X_{4,T}(f) = \frac{A}{2}Te^{j\pi f\frac{T}{2}}\,\mathrm{sinc}(\frac{fT}{2})$$
$$\mathcal{S}_{x_{4,T}}(f) = |X_{4,T}(f)|^2 = \frac{A^2}{4}T^2\,\mathrm{sinc}^2(\frac{fT}{2})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{x_4}(f) &= \lim_{T\to\infty}\frac{\mathcal{S}_{x_{4,T}}(f)}{T} \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4}T\,\mathrm{sinc}^2(\frac{fT}{2}) \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4}\frac{\sin^2(\frac{\pi fT}{2})}{\frac{\pi^2 f^2 T}{4}} = K\delta(f)\end{aligned}$$

و برای تعیین مقدار K داریم:

$$\begin{aligned}K &= \int_{f=-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{4}\frac{\sin^2(\frac{\pi fT}{2})}{\frac{\pi^2 f^2 T}{4}}df \\ &= \frac{1}{T}\int_{t=-\infty}^{\infty}4\frac{A^2}{4}\,\mathrm{rect}^2(\frac{t+\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}})dt = \frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

در هردو روش مشاهده می‌شود که:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_{x_4}(f)df = \frac{A^2}{2}$$

۵. با توجه به متناوب بودن سیگنال، این سیگنال نمی‌تواند انرژی باشد و در نتیجه توان است. برای حلّ این قسمت، از عبارت زیر استفاده می‌کنیم که در بخش ۳ همین سؤال عملاً اثبات شد. همچنین ضرایب سری فوریه‌ی این سیگنال در تمرین اول محاسبه شده‌اند.

$$x_5(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_s t}$$
$$\Rightarrow R_{x_5}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 e^{j2\pi n f_s \tau}$$
$$\Rightarrow \mathcal{S}_{x_5}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2\delta(f-\frac{n}{T_s})$$

حال، در این سیگنال داریم $f_s = 2f_0$ و می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
& c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \\
& x_5(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} e^{j4\pi n f_0 t} \\
& \Rightarrow R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)})^2 e^{j4\pi f_0 \tau n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2(4n^2-1)^2} e^{j4\pi f_0 \tau n} \\
& \Rightarrow \mathcal{S}_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)})^2 \delta(f - 2f_0 n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2(4n^2-1)^2} \delta(f - 2f_0 n)
\end{aligned}
$$

$$
P = 2f_0 \int_{-\frac{1}{4f_0}}^{+\frac{1}{4f_0}} \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt = \frac{1}{2}
$$

۶. سیگنال گوسی افت شدیدتری از نمایی دارد و انرژی است.

برای محاسبه‌ی چگالی طیف انرژی، می‌توانیم از سیگنال تبدیل فوریه بگیریم و مجذور اندازه‌ی آن را محاسبه کنیم:

$$
\begin{aligned}
X_6(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-t^2}{2\sigma^2}) \exp(-j2\pi f t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-t^2}{2\sigma^2} - j2\pi f t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-t^2 - 4j\sigma^2\pi f t}{2\sigma^2}) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(t + j2\sigma^2\pi f)^2}{2\sigma^2}) \exp(\frac{(j2\sigma^2\pi f)^2}{2\sigma^2}) dt \\
&= \exp(\frac{-4\sigma^4\pi^2 f^2}{2\sigma^2}) \\
&= \exp\big(-2(\sigma\pi f)^2\big)
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{S}_{x_6}(f) = |X_6(f)|^2 = \exp\big(-4(\sigma\pi f)^2\big)
$$

$$
E = \int_{-\infty}^{\infty} x_6^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-t^2}{\sigma^2}} dt
$$

حال با توجه به توزیع گوسی و انتگرال آن داریم:

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = 1
$$

از آن‌جا که رابطه بالا به ازای هر σ برقرار است، به جای σ قرار می‌دهیم $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ ؛ پس داریم:

$$
\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{\sigma^2}} dt = 1
$$

و در نتیجه:

$$
E = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{\pi\sigma^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma^2}}
$$

5 Double Side-Band Modulation

In a DSB system the carrier is $c(t) = A\cos(2\pi f_c t)$ and the message signal is given by $m(t) = 2\text{sinc}(t) + \text{sinc}^2(2t)$.

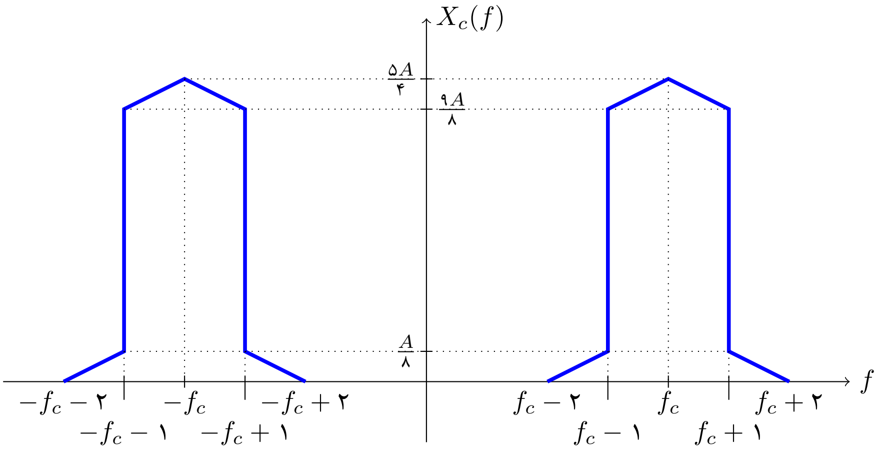
Find the frequency domain representation and the bandwidth of the modulated signal.

پاسخ

$$m(t) = ۲\text{sinc}(t) + \text{sinc}^{۲}(۲t) \Rightarrow M(f) = ۲\Pi(f) + \frac{۱}{۲}\Lambda(\frac{f}{۲})$$

$$x_c(t) = m(t)c(t) \Rightarrow X_c(f) = M(f) * C(f) = M(f) * \left[\frac{A}{۲}\delta(f-f_c) + \frac{A}{۲}\delta(f+f_c)\right]$$

$$\Rightarrow X_c(f) = \frac{A}{۲}\left[۲\Pi(f-f_c) + \frac{۱}{۲}\Lambda(\frac{f-f_c}{۲})\right] + \frac{A}{۲}\left[۲\Pi(f+f_c) + \frac{۱}{۲}\Lambda(\frac{f+f_c}{۲})\right]$$



می‌توان دید که پهنای باند سیگنال مَدگردان‌شده (معادل فارسیِ modulated!) عبارت است از $W = ۴$ Hz.

6 Amplitude Modulation

An AM signal has the form $x_c(t) = 4\cos(2800\pi t) + 20\cos(3000\pi t) + 4\cos(3200\pi t)$.

1. Determine the modulating signal $m(t)$ and the carrier $c(t)$.
2. Determine the modulation index.
3. Determine the ratio of the power in the sidebands to the power in the carrier.

پاسخ

۱. بخش اوّل و دوم این مسئله جواب یکتا ندارند. ما یک جواب را می‌آوریم که به ذهن نزدیک‌تر است!

$$\begin{aligned} x_c(t) &= ۴\cos(۲۸۰۰\pi t) + ۲۰\cos(۳۰۰۰\pi t) + ۴\cos(۳۲۰۰\pi t) \\ &= ۴(۲\cos(۳۰۰۰\pi t)\cos(۲۰۰\pi t)) + ۲۰\cos(۳۰۰۰\pi t) \\ &= ۲۰(۱ + ۰/۴\cos(۲۰۰\pi t))\cos(۳۰۰۰\pi t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m(t) = \cos(۲۰۰\pi t) \qquad , c(t) = \cos(۳۰۰۰\pi t)$$

۲. $\mu = ۰/۴$

۳.

$$z(t) = ۱ + \mu m(t) \Rightarrow R_z(\tau) = ۱ + \mu^۲ R_m(\tau)$$
$$R_{x_c}(\tau) = \frac{A_c^۲}{۲} R_z(\tau)\cos(۲\pi f_c \tau) = \frac{A_c^۲}{۲}(۱ + \mu^۲ R_m(\tau))\cos(۲\pi f_c \tau)$$
$$P_{x_c} = R_{x_c}(۰) = \frac{A_c^۲}{۲} + \frac{A_c^۲}{۲}\mu^۲ P_m$$
$$\Rightarrow \frac{P_{\text{sidebands}}}{P_{\text{carrier}}} = \mu^۲ P_m = ۰/۰۸$$