In the Name of God

Communication Systems (25751-4)

Problem Set 04 (Solution)

Fall Semester 1401-02

Department of Electrical Engineering

Sharif University of Technology

Instructor: Dr. M. Pakravan

($*$) starred problems are optional and have a bonus mark!

1 DSB Modulation with Periodic Waveforms

A DSB signal is generated by multiplying the message signal $m(t)$ with the periodic rectangular waveform shown in Figure 2 and filtering the product with a bandpass filter tuned to the reciprocal of the period T_p, with bandwidth $2W$, where W is the bandwidth of the message signal.

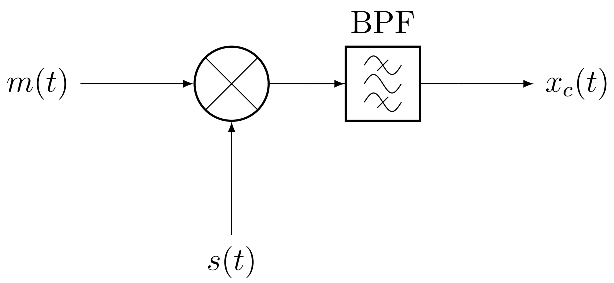


Figure 1: DSB Modulator

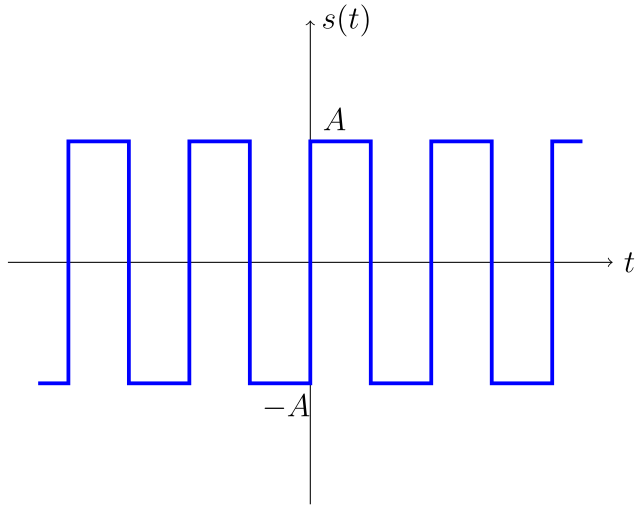


Figure 2: $s(t)$

1. Demonstrate that the output $x_c(t)$ of the BPF is the desired DSB signal

$$x_c(t) = A_c m(t)\sin(2\pi f_c t)$$

   where $f_c = \dfrac{1}{T_p}$, and find A_c.

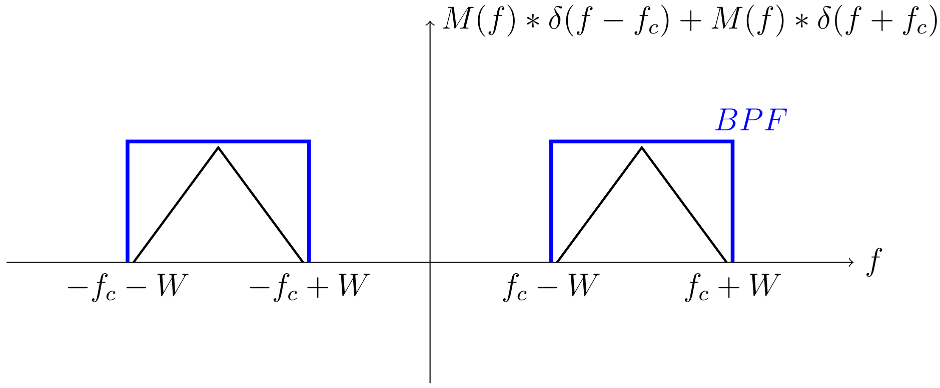
2. Show that it is not necessary that the periodic signal be rectangular. This means that any periodic signal with period T_p can substitute for the rectangular signal in Figure 2.

پاسخ

۱. با توجه به اینکه سیگنال $m(t)$ پایین‌گذر است، هارمونیک اصلی $s(t)$ را در نظر می‌گیریم و مثل بسط سری فوریه به سیستم می‌نگریم.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T_p}nt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi f_c nt}$$

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \mathrm{BPF}\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n m(t) e^{j2\pi f_c nt}\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{BPF}\{m(t) e^{j2\pi f_c nt}\} \\ &= m(t)\left[c_1 e^{j2\pi f_c t} + c_{-1} e^{-j2\pi f_c t}\right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{T_p}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{+\frac{T_p}{2}} A\,\mathrm{sign}(t) e^{-j2\pi f_c t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\,\mathrm{sign}(t) e^{-jt} dt \\ &= j\mathcal{I}m\left\{\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-jt}\mathrm{dt}\right\} = \frac{A}{\pi} j\mathcal{I}m\left\{\frac{e^{-jt}}{-j}\Big|_0^{\pi}\right\} = \frac{2A}{j\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_{-1} = -\frac{2A}{j\pi}$$

$$x_c(t) = m(t)\frac{2A}{j\pi}[e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t}] = m(t)\frac{2A}{j\pi}2j\sin(2\pi f_c t) = \frac{4A}{\pi} m(t)\sin(2\pi f_c t)$$

۲. مشابه بخش قبل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
x_c(t) &= m(t)\left[c_1 e^{j2\pi f_c t} + c_{-1} e^{-j2\pi f_c t}\right]\\
&= m(t)\left[c_1 e^{j2\pi f_c t} + c_1^* e^{-j2\pi f_c t}\right]\\
&= 2m(t)\mathbf{Re}\{c_1 e^{j2\pi f_c t}\}\\
&= 2m(t)\mathbf{Re}\{(c_{1,r} + jc_{1,i})(\cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t))\}\\
&= 2m(t)\left[c_{1,r}\cos(2\pi f_c t) - c_{1,i}\sin(2\pi f_c t)\right]\\
&= 2m(t)\sqrt{c_{1,r}^2 + c_{1,i}^2}\left[\frac{c_{1,r}}{\sqrt{c_{1,r}^2 + c_{1,i}^2}}\cos(2\pi f_c t) - \frac{c_{1,i}}{\sqrt{c_{1,r}^2 + c_{1,i}^2}}\sin(2\pi f_c t)\right]\\
&= 2m(t)\sqrt{c_{1,r}^2 + c_{1,i}^2}\left[\cos(\tan^{-1}(\frac{c_{1,i}}{c_{1,r}}))\cos(2\pi f_c t) - \sin(\tan^{-1}(\frac{c_{1,i}}{c_{1,r}}))\sin(2\pi f_c t)\right]\\
&= 2m(t)\sqrt{c_{1,r}^2 + c_{1,i}^2}\cos\left(2\pi f_c t + \tan^{-1}(\frac{c_{1,i}}{c_{1,r}})\right)
\end{aligned}$$

در نتیجه خروجی همچنان یک سیگنال DSB است.

2 Weaver's SSB Modulator

Weaver's SSB modulator is illustrated in Figure 3. By taking the input signal as $x(t) = \cos(2\pi f_m t)$, where $f_m < W$, demonstrate that by proper choice of f_1 and f_2 the output is a SSB signal.

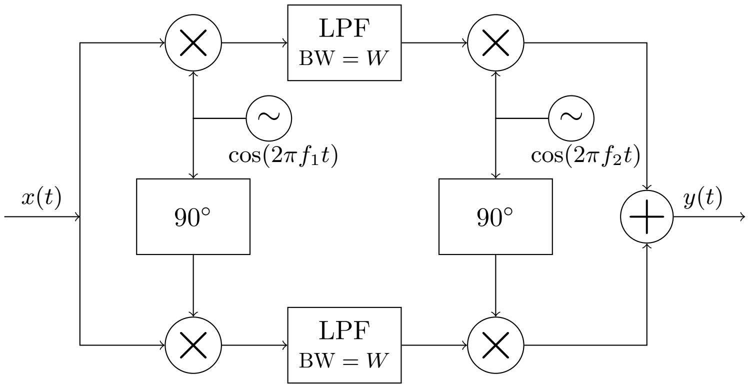


Figure 3: Weaver's SSB Modulator

پاسخ

ورودی فیلترهای پایین‌گذر بالا و پایین برابر است با:

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_1 t) = \frac{1}{2}\Big[\cos\big(2\pi(f_1 - f_m)t\big) + \cos\big(2\pi(f_1 + f_m)t\big)\Big]$$
$$x_2(t) = \cos(2\pi f_m t)\sin(2\pi f_1 t) = \frac{1}{2}\Big[\sin\big(2\pi(f_1 - f_m)t\big) + \sin\big(2\pi(f_1 + f_m)t\big)\Big]$$

حال f_1 را به نحوی انتخاب می‌کنیم که $|f_1 - f_m| < W$ و $f_1 + f_m > W$. در این صورت فرکانس‌های بیرون از محدوده‌ی $[-W, W]$ فیلتر می‌شوند و خروجی فیلترهای پایین‌گذر بالا و پایین برابر است با:

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\cos\big(2\pi(f_1 - f_m)t\big)$$
$$x_4(t) = \frac{1}{2}\sin\big(2\pi(f_1 - f_m)t\big)$$

پس خروجی سیستم برابر است با:

$$y(t) = \frac{1}{2}\Big[\cos\big(2\pi(f_1 - f_m)t\big)\cos(2\pi f_2 t) + \sin\big(2\pi(f_1 - f_m)t\big)\sin(2\pi f_2 t)\Big]$$

که فرم مشابه یک سیگنال SSB را دارد چون سیگنال $\sin(2\pi(f_1 - f_m)t)$ تبدیل هیلبرت سیگنال $\cos(2\pi(f_1 - f_m)t)$ است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos\big(2\pi(f_2 - f_1 + f_m)t\big)$$

پس برای یک سیگنال USSB مدوله شده روی فرکانس f_c داریم:

$$f_2 - f_1 + f_m = f_c + f_m \Rightarrow f_2 = f_c + f_1$$

و برای یک سیگنال LSSB مدوله شده روی فرکانس f_c داریم:

$$f_2 - f_1 + f_m = f_c - f_m \Rightarrow f_2 = f_c + f_1 - 2f_m$$

در هر دو حالت با هر f_c و f_1 مجاز، f_2 به دست می‌آید.

به عنوان یک مثال، می‌توان $f_1 = W$ در نظر گرفت. در این صورت حتماً $|f_1 - f_m| = |W - f_1| < W$ خواهد بود و همچنین $f_1 + f_m = W + f_m > W$ خواهد شد. در این حالت، برای سیگنال USSB، فرکانس f_2 به صورتِ $f_2 = f_c + f_1 = f_c + W$ خواهد بود و برای سیگنال LSSB، فرکانس f_2 به صورتِ $f_2 = f_c + f_1 - 2f_m = f_c + W - 2f_m$ خواهد شد.

3 VSB Signal

A VSB signal $y(t)$ is as below. α is a non negative constant less than one.

$$y(t) = \frac{\alpha}{2}\cos(2\pi(f_c+f_m)t) + \frac{1-\alpha}{2}\cos(2\pi(f_c-f_m)t) + \cos(2\pi f_c t)$$

1. Prove that the envelop of the signal can be calculated as below. $d(t)$ represents the distortion.

$$e(t) = \big[1+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_m t)\big]d(t)$$

$$d(t) = \sqrt{1+[\frac{(1-2\alpha)\sin(2\pi f_m t)}{2+\cos(2\pi f_m t)}]^2}$$

2. Find α such that it maximize $d(t)$.

پاسخ

۱. می‌توان نوشت:

$$y(t) = \frac{\alpha}{۲}\big[\cos(۲\pi f_c t)\cos(۲\pi f_m t) - \sin(۲\pi f_c t)\sin(۲\pi f_m t)\big] + \\ + \frac{۱-\alpha}{۲}\big[\cos(۲\pi f_c t)\cos(۲\pi f_m t) + \sin(۲\pi f_c t)\sin(۲\pi f_m t)\big] + \cos(۲\pi f_c t)$$

در نتیجه داریم:

$$y(t) = -\alpha\big[\sin(۲\pi f_c t)\sin(۲\pi f_m t)\big] + \frac{۱}{۲}\big[\cos(۲\pi f_c t)\cos(۲\pi f_m t) + \sin(۲\pi f_c t)\sin(۲\pi f_m t)\big] + \cos(۲\pi f_c t).$$

حال برای محاسبه‌ی دامنه‌ی سیگنال، سعی می‌کنیم سیگنال را به صورت $y(t) = A(t)\cos(۲\pi f_c t) + B(t)\sin(۲\pi f_c t)$ بنویسیم:

$$y(t) = \cos(۲\pi f_c t)\big[۱ + \frac{۱}{۲}\cos(۲\pi f_m t)\big] + \sin(۲\pi f_c t)\big[(\frac{۱}{۲}-\alpha)\sin(۲\pi f_m t)\big]$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$y_I(t) = ۱ + \frac{۱}{۲}\cos(۲\pi f_m t),$$
$$y_Q(t) = -(\frac{۱}{۲}-\alpha)\sin(۲\pi f_m t).$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} e(t) &= \sqrt{y_I^{۲}(t) + y_Q^{۲}(t)} \\ &= \sqrt{\big[۱+\frac{۱}{۲}\cos(۲\pi f_m t)\big]^{۲} + \big[(\frac{۱}{۲}-\alpha)\sin(۲\pi f_m t)\big]^{۲}} \\ &= \big[۱+\frac{۱}{۲}\cos(۲\pi f_m t)\big]\sqrt{۱+\Big[\frac{(\frac{۱}{۲}-\alpha)\sin(۲\pi f_m t)}{۱+\frac{۱}{۲}\cos(۲\pi f_m t)}\Big]^{۲}} \\ &= \big[۱+\frac{۱}{۲}\cos(۲\pi f_m t)\big]\sqrt{۱+\Big[\frac{(۱-۲\alpha)\sin(۲\pi f_m t)}{۲+\cos(۲\pi f_m t)}\Big]^{۲}} \end{aligned}$$

۲. از آن‌جا که می‌دانیم $۰ \leq \alpha < ۱$، خواهیم داشت $(۱-۲\alpha)^{۲} \leq ۱$ و مقدار بیشینه‌ی $d(t)$ در $\alpha^* = ۰$ رخ می‌دهد.

4 A Simple Scrambler System

The message signal $m(t)$ has a Fourier transform shown in Figure 4. This signal is applied to the system shown in Figure 5 to generate the signal $y(t)$.

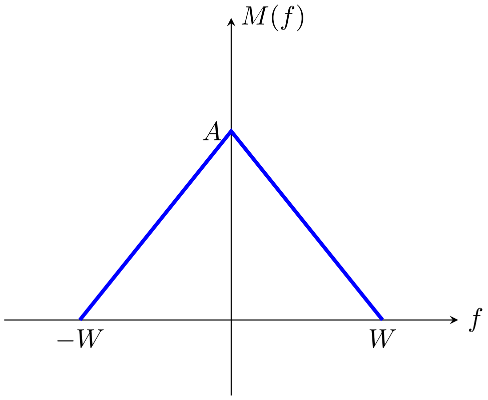


Figure 4: Fourier Transform of $m(t)$

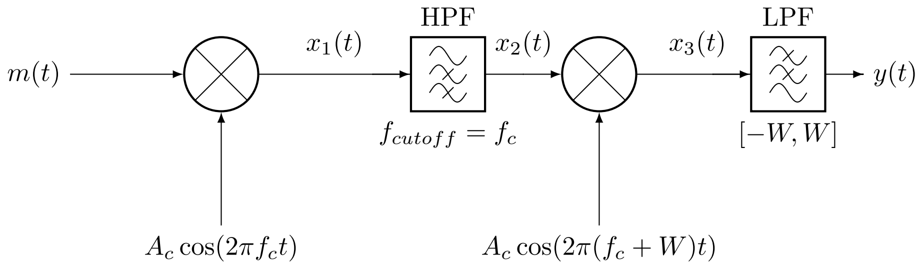
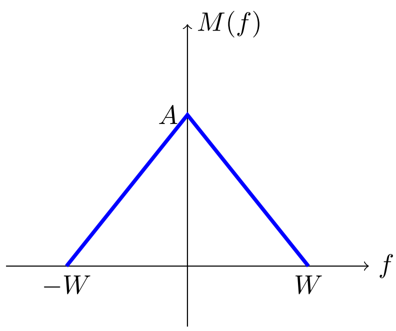


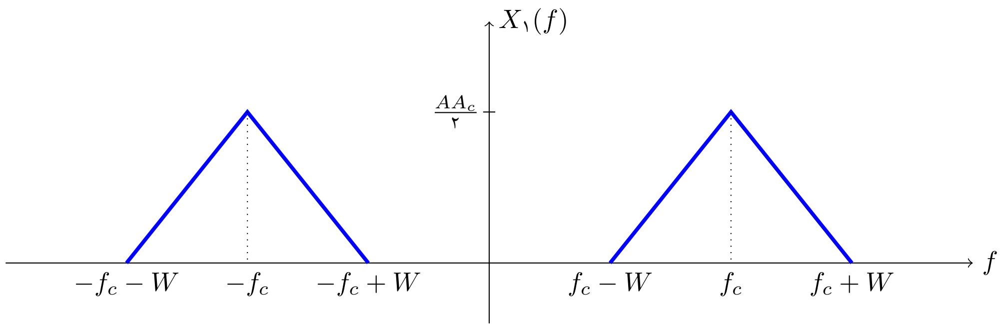
Figure 5: simple scrambler

1. Plot $Y(f)$, the Fourier transform of $y(t)$.
2. Show that if $y(t)$ is transmitted, the receiver can pass it through a replica of the system shown in Figure 5 to obtain $m(t)$ back. This means that this system can be used as a simple scrambler to enhance communication privacy.

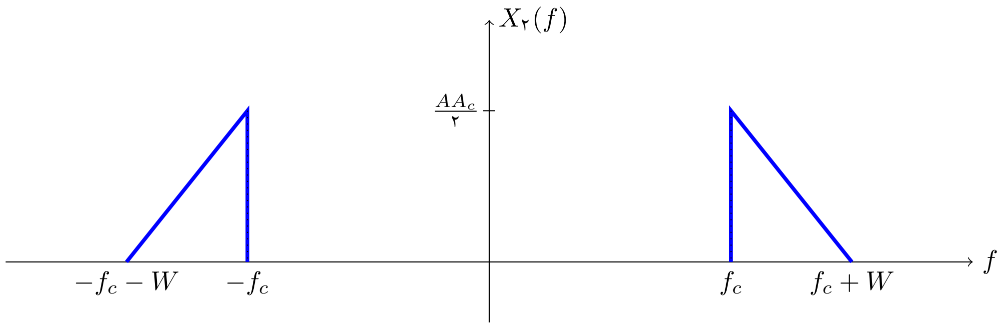
پاسخ

۱. با توجّه به نام‌گذاری سیگنال‌ها، مرحله به مرحله پیش می‌رویم.

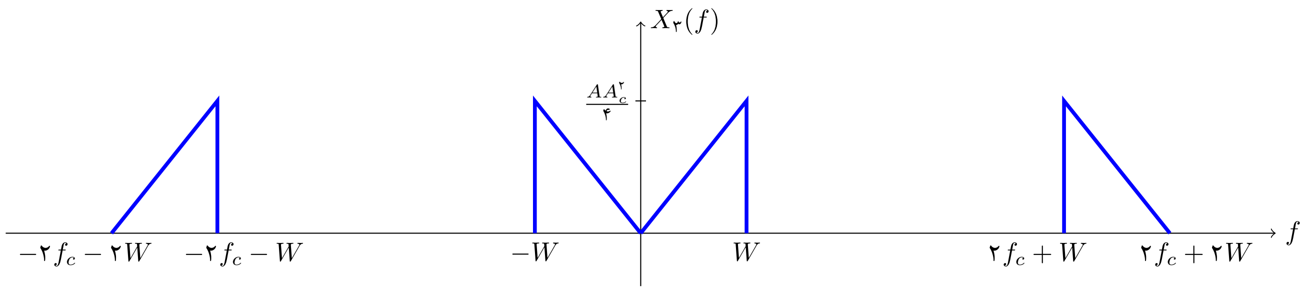




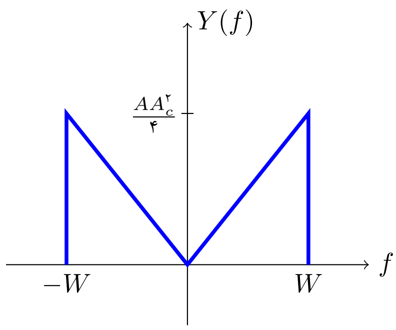
$X_۱(f)$
$\frac{AA_c}{۲}$
f
$-f_c - W$
$-f_c$
$-f_c + W$
$f_c - W$
f_c
$f_c + W$



$X_۲(f)$
$\frac{AA_c}{۲}$
f
$-f_c - W$
$-f_c$
f_c
$f_c + W$

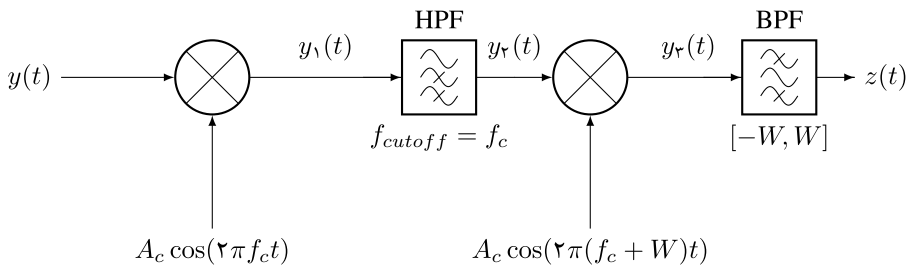


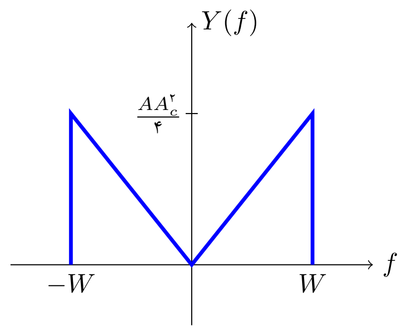
$X_۳(f)$
$\frac{AA_c^۲}{۴}$
f
$-۲f_c - ۲W$
$-۲f_c - W$
$-W$
W
$۲f_c + W$
$۲f_c + ۲W$

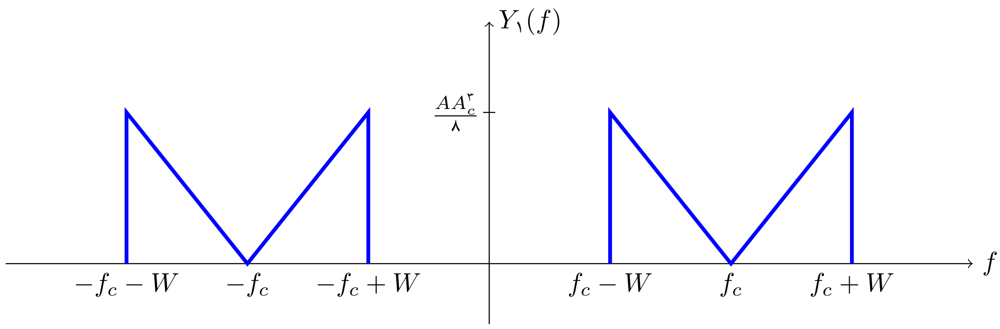


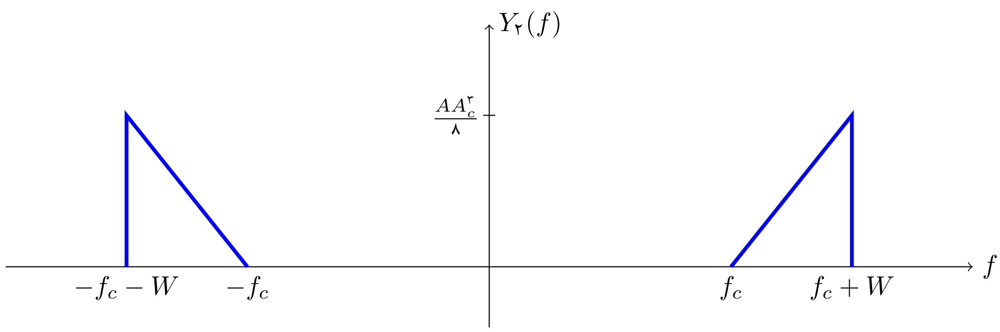
$Y(f)$
$\frac{AA_c^۲}{۴}$
f
$-W$
W

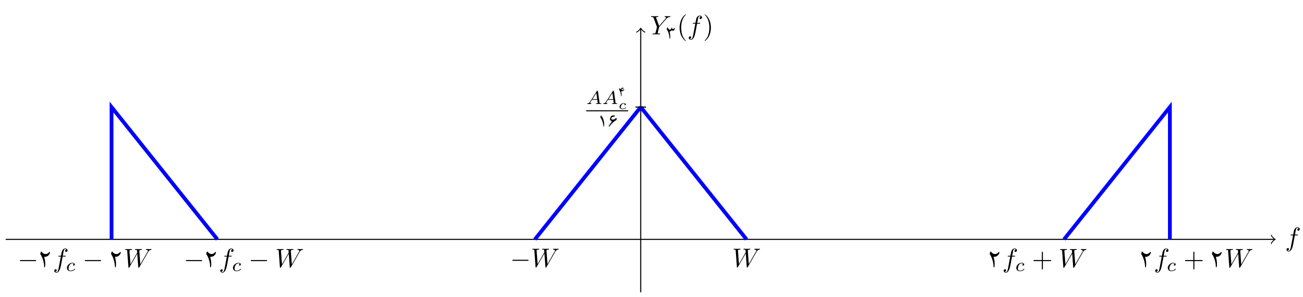
۲. مجدّداً سیگنال‌ها را نام‌گذاری کرده و مرحله به مرحله پیش می‌رویم.

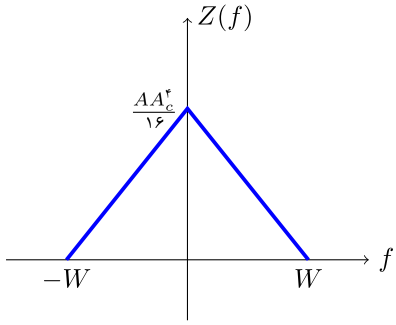












در نتیجه:

$$z(t) = \frac{A_c^۴}{۱۶} m(t)$$

یعنی سیگنال خروجی با سیگنال ارسال‌شده تنها در یک ضریب اختلاف دارد.

5 VSB Modulation System

A vestigial sideband modulation system is shown in Figure 5. The bandwidth of the message signal $m(t)$ is W and the transfer function of the bandpass filter is shown in the figure 7.

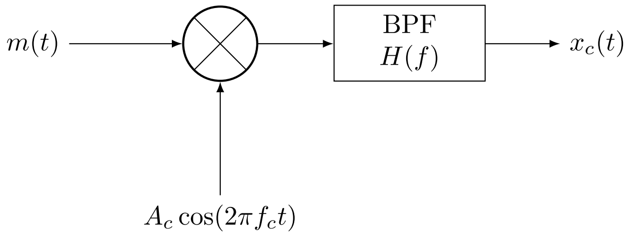


Figure 6: VSB Modulator

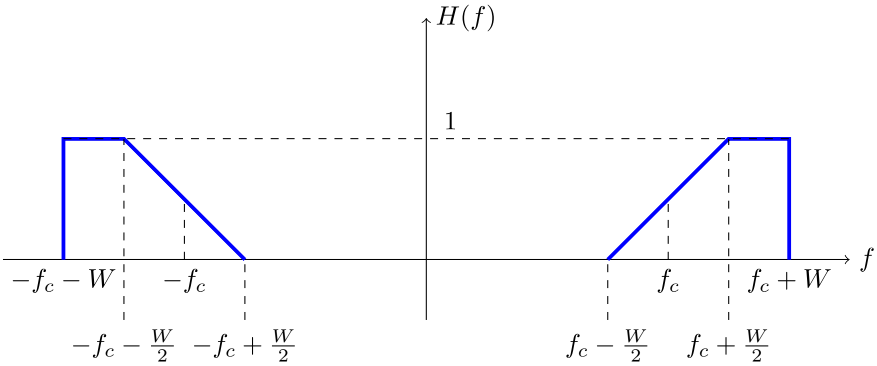


Figure 7: $H(f)$

1. Determine $h_{lp}(t)$, the lowpass equivalent of $h(t)$, where $h(t)$ represents the impulse response of the bandpass filter.
2. Derive an expression for the modulated signal $x_c(t)$.

پاسخ

۱. برای یافتن معادل باند پایه‌ی فیلتر، باید محتوای فرکانسی فیلتر در فرکانس‌های مثبت را در ۲ ضرب کنیم و محتوای فرکانسی آن در فرکانس‌های منفی را صفر کنیم. سپس فیلتر را به فرکانس مرکزی صفر منتقل کنیم.

$$H_{lp}(f) = \tilde{H}(f) = ۲u(f + f_c)H(f + f_c) = ۲\begin{cases} \frac{۱}{W}f + \frac{۱}{۲} & |f| \leq \frac{W}{۲} \\ ۱ & \frac{W}{۲} \leq f \leq W \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
h_{lp}(t) = \tilde{h}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{H}(f)\} \\
&= \int_{\frac{-W}{2}}^{W} \tilde{H}(f) e^{j2\pi ft} df \\
&= \int_{\frac{-W}{2}}^{\frac{W}{2}} (\frac{2f}{W} + 1) e^{j2\pi ft} df + \int_{\frac{W}{2}}^{W} 2e^{j2\pi ft} df \\
&= \frac{2}{W}\left[\frac{1}{j2\pi t} f e^{j2\pi ft} + \frac{1}{4\pi^2 t^2} e^{j2\pi ft}\right]_{\frac{-W}{2}}^{\frac{W}{2}} + \frac{1}{j2\pi t} e^{j2\pi ft}\Big|_{\frac{-W}{2}}^{\frac{W}{2}} + \frac{2}{j2\pi t} e^{j2\pi ft}\Big|_{\frac{W}{2}}^{W} \\
&= \frac{1}{j\pi t} e^{j2\pi Wt} + \frac{j}{\pi^2 t^2 W} \sin(\pi Wt) \\
&= \frac{j}{\pi t}\left[\mathrm{sinc}(Wt) - e^{j2\pi Wt}\right]
\end{aligned}
$$

۲. سیگنال ورودی به فیلتر را $v(t)$ می‌نامیم. داریم:

$$
\begin{aligned}
&v(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) = v_I(t)\cos(2\pi f_c t) - v_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \\
&\Rightarrow v_I(t) = A_c m(t), \qquad v_Q(t) = 0 \\
&\Rightarrow v_{lp}(t) = v_I(t) + jv_Q(t) = A_c m(t)
\end{aligned}
$$

حال داریم:

$$
\begin{aligned}
x_{c,lp}(t) &= \frac{1}{2} v_{lp}(t) * h_{lp}(t) \\
&= \frac{1}{2} A_c m(t) * \frac{j}{\pi t}\left[\mathrm{sinc}(Wt) - e^{j2\pi Wt}\right] \\
&= \frac{1}{2} A_c \left[m(t) * \frac{j\mathrm{sinc}(Wt)}{\pi t} + m(t) * \frac{e^{j2\pi Wt}}{j\pi t}\right]
\end{aligned}
$$

و با توجّه به پهنای باند $m(t)$ می‌توان نوشت:

$$
\mathcal{F}\{m(t) * \frac{e^{j2\pi Wt}}{j\pi t}\} = -M(f)\mathrm{sign}(f - W) = M(f)
$$

نتیجتاً:

$$
\begin{aligned}
&x_{c,lp}(t) = \frac{1}{2} A_c \left[m(t) * \frac{j\mathrm{sinc}(Wt)}{\pi t} + m(t)\right] \\
&\Rightarrow x_c(t) = \mathbf{Re}\{x_{c,lp}(t) e^{j2\pi f_c t}\} = \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2} A_c \left[m(t) * \frac{\mathrm{sinc}(Wt)}{\pi t}\right]\sin(2\pi f_c t)
\end{aligned}
$$

6 (*)Modulation and Chirp Signals

The message signal $m(t)$has a Fourier transform $M(f)$. This signal is applied to the system shown in Figure 6 to generate the signal $y(t)$. Assume that $h(t) = A_1 e^{j\pi\omega_0^2 t^2}$ and ω_0 is constant.

1. Find an expression for $y(t)$, in term of $m(t)$ and $M(f)$.
2. Design a system to reconstruct $m(t)$ from $y(t)$.

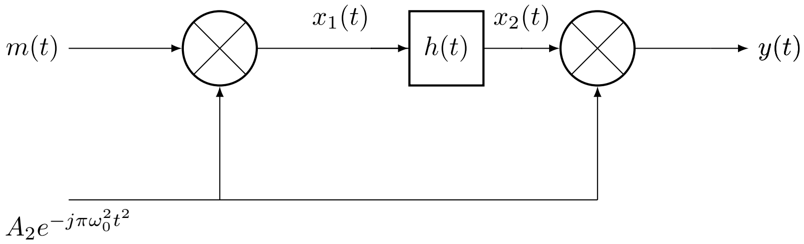


Figure 8: a system with chirp signals

پاسخ

۱.

$$x_۱(t) = A_۲ m(t) e^{-j\pi\omega_۰^۲ t^۲}$$

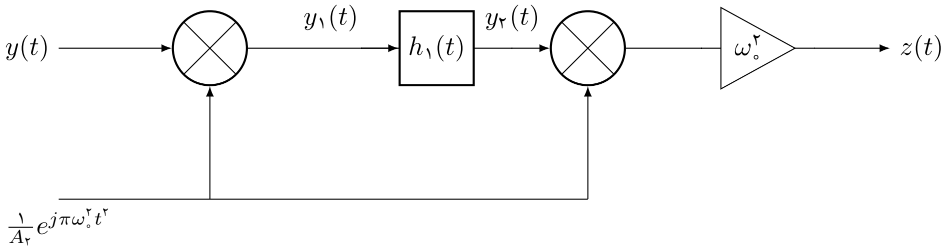
$$\begin{aligned}
x_۲(t) &= x_۱(t) * h(t) \\
&= A_۱ A_۲ \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) e^{-j\pi\omega_۰^۲ \tau^۲} e^{j\pi\omega_۰^۲ (t-\tau)^۲} d\tau \\
&= A_۱ A_۲ \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) e^{j\pi\omega_۰^۲ (t^۲ - ۲t\tau)} d\tau \\
&= A_۱ A_۲ e^{j\pi\omega_۰^۲ t^۲} \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) e^{-j۲\pi\omega_۰^۲ t\tau} d\tau \\
&= A_۱ A_۲ e^{j\pi\omega_۰^۲ t^۲} M(\omega_۰^۲ t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = A_۱ A_۲^۲ M(\omega_۰^۲ t)$$

در حقیقت، سیگنال زمانی $y(t)$، حاوی اطّلاعات حوزه‌ی فرکانس سیگنال $m(t)$ است. این اتّفاق به برکت حضور و وجود سیگنال‌هایی رخ داده که فرکانس آن‌ها به صورت خطّی با زمان تغییر می‌کند، و خبر ناگوار آنست که این سیگنال در جهان واقعی قابل پیاده‌سازی دقیق نیست، و تقریب‌هایی هم که از آن داریم نسبتاً خطای بالایی دارند. اگر کسی بتواند چنین سیگنالی را دقیق پیاده کند، احتمالاً انقلابی در صنعت پردازش رخ خواهد داد!

امّا! اتّفاق جذّاب و زیبا آنست که به برکت حضور عدسی‌ها، چنین سیگنالی در حوزه‌ی مکان بسیار مفت و مسلّم وجود دارد و به راحتی می‌توانیم در حوزه‌ی مکان، با دقّت بسیار بالایی تبدیل فوریه بگیریم!

۲. سیستم زیر را در نظر بگیرید: ($h_1(t) = \frac{1}{A_1} e^{-j\pi\omega_0^2 t^2}$)



$$y(t) = A_1 A_2^2 M(\omega_0^2 t)$$

$$y_1(t) = \frac{1}{A_2} y(t) e^{j\pi\omega_0^2 t^2} = A_1 A_2 M(\omega_0^2 t) e^{j\pi\omega_0^2 t^2}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) * h_1(t) \\ &= A_2 \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega_0^2 \tau) e^{j\pi\omega_0^2 \tau^2} e^{-j\pi\omega_0^2 (t-\tau)^2} d\tau \\ &= A_2 e^{-j\pi\omega_0^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega_0^2 \tau) e^{j2\pi\omega_0^2 \tau t} d\tau \\ &= \frac{A_2}{\omega_0^2} e^{-j\pi\omega_0^2 t^2} m(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z(t) = m(t)$$