

به نام خدا

نیمسال دوم ۱۴۰۰

ساختار داده و الگوریتم

مدرس: صابر صالح

تمرین تئوری سری پنجم

سوال هایی که با علامت \* مشخص شده اند تحویلی هستند.

همانطور که می دانید، ایلان ماسک توئیتر را می خواهد بخرد. در چند سوال بعدی فرض می کنیم که ایلان ماسک با بررسی دیتابیس این شرکت با یک سری چالش هایی مواجه می شود و برای حل آنها از شما کمک می گیرد.

تعاریف:

- اگر اکانت  $P_1$ ، اکانت  $P_2$  را دنبال کند، آنگاه یک یال جهت دار از  $P_1$  به  $P_2$  خواهیم داشت.
- اگر اکانت  $P_1$ ،  $n$  تا از توئیتهای اکانت  $P_2$  را لایک کند، آنگاه وزن یال جهت دار از راس  $P_1$  به راس  $P_2$  برابر  $n$  خواهد بود.

با بررسی دیتابیس شرکت دو گروه از افراد را مشاهده می کنیم که روابط بینشان به صورت زیر است:

گروه اول (گروه A)

- $n$  نفر هستند که به ازای هر دو نفر، اگر نفر اولی نفر دوم را دنبال کند آنگاه نفر دوم نیز نفر اول را دنبال خواهد کرد (یال جهت دار دوطرفه).
- اگر نفر اولی  $k_1$  تا از توئیتهای نفر دوم را لایک کند، نفر دوم نیز برای جبران، دقیقاً به همین تعداد از توئیتهای نفر اول را لایک می کند (در این حالت وزن یال بینشان برابر  $k_1$  خواهد بود). اگر نفر اول این  $k_1$  لایک توئیتهای اکانت نفر دوم را به تعداد  $k_2$  بار کم یا زیاد کند، نفر دوم نیز دقیقاً به همان تعداد تعداد لایکهایش را کم یا زیاد می کند (به طور خلاصه، وزن یال از نفر اول به نفر دوم همواره مساوی وزن یال نفر دوم به نفر اول است)
- گروه دوم (گروه B) علاوه بر دو ویژگی گروه A، ویژگی زیر را نیز دارد:
- هر دو نفر یا هم را دنبال کرده اند یا با واسطه با هم ارتباط دارند (گراف همبند)

گروه سوم (گروه C)

- $n$  نفرند طوری که اگر نفر اول نفر دوم را دنبال کند، لزومی ندارد که نفر دوم نیز نفر اول را دنبال کند (یعنی اگر از راس  $i$  به راس  $j$  یال جهت دار باشد لزومی ندارد که از راس  $j$  به راس  $i$  یال جهت دار داشته باشیم)
- تعداد لایکهای دو نفر نیز لزومی ندارد که مساوی باشند (یعنی وزن یال از راس  $i$  به راس  $j$  لزوماً مساوی وزن یال از راس  $j$  به راس  $i$  نیست)

\* ۱. الف) فرض کنید  $T$  یکی از درختهای پوشای کمینه از گراف گروه B باشد. حال از این گراف، اکانت  $P_1$  تعداد توئیتهایی که از اکانت  $P_2$  لایک کرده است را تغییر می دهد. در چه صورتی، تغییر وزن یال بین این دو راس باعث می شود که  $T$  دیگر یک درخت پوشای کمینهی B نباشد (دقت کنید که یالی که بین اکانت  $P_1$  و  $P_2$  وجود دارد لزوماً یالی از  $T$  نیست)

ب) در شرایطی که  $T$  در اثر تغییر قسمت (الف) دیگر درخت پوشای کمینه نباشد، الگوریتمی بهینه ارائه دهید که با ایجاد کمترین تغییرات در  $T$  آن را دوباره به یک درخت پوشای کمینه تبدیل کند. (توجه کنید که طبیعتاً وزن هیچ یک از یالهای B را نمی توانید عوض کنید)

ج) اگر یالی که بین اکانت  $P_1$  و  $P_2$  وجود دارد در  $T$  باشد و اکانت  $P_1$  تعداد لایکه‌هایش برای اکانت  $P_2$  را کم کند، ثابت کنید باز هم  $T$ ، درخت پوشای کمینه‌ی گراف گروه  $B$  هست.

د) اگر یالی که بین اکانت  $P_1$  و  $P_2$  وجود دارد در  $T$  نباشد و اکانت  $P_1$  تعداد لایکه‌هایش برای اکانت  $P_2$  را کم کند، آنگاه الگوریتمی برای یافتن درخت پوشای کمینه برای گراف تغییر یافته‌ی  $B$  ارائه دهید.

۲. الف) فرض کنید وزن هر یال از گروه گراف  $B$  برابر ۱ یا ۲ باشد. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی  $O(|V|+|E|)$  ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر را از راس یک اکانت مشخص  $s$  به همه‌ی رئوس دیگر بدست آورد.

ب) الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی  $O(|V|+|E|)$  بنویسید که مسیری از اکانت مشخص  $s$  به اکانت مشخص  $t$  که وزن هر یال آن  $w$  باشد را بدست آورد. سپس به کمک این الگوریتم، مساله یافتن مسیری از  $s$  به  $t$  که در آن کمینه‌ی وزن یال‌ها در آن، بیشینه است را در زمان  $O((|V|+|E|)\log(|E|))$  حل کنید.

\* ۳. ایلان ماسک میخواهد ترجمه‌ی هوشمند توییت‌های انگلیسی به  $n$  زبان دیگر را بهبود دهد. برای این کار او باید داده برای آموزش دادن این مترجم هوشمند ایجاد کند که هزینه دارد. هزینه‌ی ایجاد داده بین هر دو زبان را فرض کنید میدانیم. همچنین فرض کنید هزینه‌ی ترجمه زبان  $L_1$  به زبان  $L_2$  برابر هزینه‌ی ترجمه زبان  $L_2$  به زبان  $L_1$  می‌باشد. برای صرفه‌جویی در هزینه، الگوریتمی چندجمله‌ای دهید که کمینه هزینه لازم برای ترجمه توییت‌ها از انگلیسی به بقیه‌ی زبان‌ها را محاسبه کند.

\* ۴.  $n$  شرکت میخواهند محصولات خود را در سیستم پیشنهاد دهنده تبلیغ توییت‌ر، تبلیغ کنند. برای این منظور توییت‌ر  $n$  روش مختلف برای تبلیغ به این  $n$  شرکت می‌دهد (هر روش را فقط یک شرکت می‌تواند انتخاب کند). بر اساس میزان سودی که شرکت از روش تبلیغ  $i$  می‌کند، ارزش روش تبلیغ  $i$  ام برای شرکت  $j$  برابر  $V_{ij}$  است ( $V_{ij}$  ها همگی مثبت و صحیح هستند). هدف تعیین یک قیمت  $P_i$  برای روش تبلیغ  $i$  ام و تخصیص یک روش تبلیغ برای هر یک از شرکت‌ها است به گونه‌ای که هر شرکت روش تبلیغ خود را به سایر روش‌ها ترجیح دهد.

توجه ۱: سود شرکت  $j$  ام از روش تبلیغ  $i$  ام برابر  $V_{ij} - P_i$  است. هر شرکت روش تبلیغی را ترجیح میدهد که سودش بیشینه باشد  
توجه ۲: سود هر شرکت باید بیشتر از صفر باشد

۵. در گروه  $C$ ، یک اکانت پرترفدار است اگر تمام  $n-1$  نفر دیگر را دنبال کند و تمام  $n-1$  نفر نیز او را دنبال کرده باشند. گروه  $C$  را "گروه خوب" می‌نامیم اگر هر اکانت که پرترفدار نیست، دقیقاً دو نفر را دنبال کرده باشد و نیز دقیقاً دو نفر او را دنبال کرده باشند. تغییر در گراف شامل حذف یک یال یا اضافه کردن آن است. کمینه تعداد تغییر لازم در یک گراف را بیابید به طوری که گراف گروه  $C$  بعد از تغییرات تبدیل به "گروه خوب" بشود.

۶. در گروه  $C$ ، برای دو اکانت  $P_1$  و  $P_2$  می‌دانیم اگر اکانت  $P_1$  را به دلیل پیروی نکردن از سیاست توییت‌ر از این گروه حذف کنیم آنگاه از این گروه حذف کنیم آنگاه از اکانت  $P_2$  به هر اکانت دیگری مانند  $P_j$  دقیقاً یک مسیر وجود خواهد داشت و از  $P_j$  به  $P_2$  مسیری نخواهد داشت. الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(m+n)$  ارائه دهید که شار بیشینه از  $P_1$  به  $P_2$  را در این گراف پیدا کند.

\* ۷. در گروه  $A$ ، می‌خواهیم دو مسیر متمایز از اکانت  $P_i$  به  $P_j$  بیابیم که دو مسیر در هیچ بالی مشترک نباشند و همچنین وزن هر کدام برابر با وزن کوتاه‌ترین مسیر از  $P_i$  به  $P_j$  باشد. دو مسیر بدست آمده می‌توانند اکانت‌های مشترک داشته باشند (راهنمایی: حل با استفاده از مسئله شار بیشینه)

\* ۸. برای گراف گروه  $B$ ، ثابت کنید درخت فراگیر کمینه  $B$  یکتاست اگر و فقط اگر به ازای هر تقسیم اکانت‌ها به دو دسته سبک‌ترین یال بین ۲ دسته یکتا باشد.

۹. در گراف گروه  $B$ ، "هوی لایک" به یالی گفته می‌شود که در یک دور تنها سنگین‌ترین یال باشد. نشان دهید هوی لایک حتما عضو هیچ زیر درخت فراگیر کمینه نیست.

\* ۱۰. مشاوران ایلان بر این باورند که اگر همه کاربران به گونه‌ای با هم در ارتباط باشند که در گراف ارتباطی آن‌ها مسیر همپلتونی دیده شود به وضعیت خوبی برای ارتباط کاربران می‌رسند. آن‌ها همچنین با بررسی گراف ارتباطی کاربران به این موضوع پی بردند که اگر از یک اکانت دلخواه  $P_j$  شروع کنند و روی گراف حرکت کنند هرگز نمی‌توانند به اکانت مورد نظر روی گراف برگردند. الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه دهید که بررسی کند ارتباط کاربران با یکدیگر "خوب" توصیف می‌شود یا خیر و در صورت وجود چنین مسیری، آن را شناسایی کند.