به نام خدا

ساختار داده و الگوریتم — نیمسال دوم ۰۰-۰۱

تمرین تئوری سری ششم — مدرس: صابر صالح

سوال هایی که با علامت ❈ مشخص شده اند تحویلی هستند.

❈ ۱. علی در تدارک یک سفر است. او می‌داند که به دلیل پرخطر بودن مسیر، در این راه سختی‌های زیادی وجود دارد و ریسک بالایی را باید بپذیرد. پس از تحقیق درباره روستاهای مختلف متوجه شد که اهالی آن ناحیه به مسافران تا حد امکان کمک می‌کنند. آن‌ها همچنین بنا به شناختی که از جاده‌ها و خطرهای آن دارند، میزان مشخصی کمک (پول) برای هر جاده در نظر می‌گیرند. همچنین در صورتی‌که آن جاده بی‌خطر باشد، توصیه می‌کنند تا مسافر از مسیر لذت برده و مسافران نیز بیشتر خرید های خود را در این جاده ها انجام می‌دهند. عل با یکی از خوب‌های ناحیه صحبت کرده است و پس از آن می‌داند برای هر جاده چه میزان پول به عنوان کمک دریافت خواهد کرد و برای جاده های بی خطر نیز برنامه ریزی کرده است تا هر یک از آن ها چه مقدار خرج کند (جاده‌ها لزوما دو طرفه نیستند در نقشه و بعضی از جاده ها یک طرفه اند). علی در پی این است که آیا می‌تواند مسیر را طی کند و به آن برگردد در حالیکه پول اولیه‌ی وی با پول نهاییش برابر باشد؟ ثابت کنید پیدا کردن چنین مسیری، NP-Complete است.

۲. فرض کنید مجموعه‌ی F مجموعه‌ی تمامی دوستان شما باشد که می‌خواهید تعدادی از آن‌ها را به مهمانی دعوت کنید. می‌دانیم k گروه دوستی $S_1, S_2, \dots , S_k$ در بین این افراد وجود دارد (که لزوما مجزا نیستند). شما می‌خواهید n نفر از دوستانتان را دعوت کنید طوری که از هیچ گروهی تمامی افراد دعوت نشده باشند. ثابت کنید تصمیم این که این کار امکان‌پذیر هست یا نه NP-Complete است.

❈ ۳. گراف جهت‌دار G داده شده است. می‌خواهیم بزرگ‌ترین زیرگراف (با بیش‌ترین تعداد یال) از G را بیابیم که هیچ دور جهت‌داری نداشته باشد. ثابت کنید تصمیم‌گیری اینکه آیا زیرگرافی از G وجود دارد که دور جهت‌دار نداشته باشد و با حذف حداکثر k یال به دست آمده باشد، NP-Hard است.

۴. در یک پروژه‌ی فضایی سفینه‌هایی با گنجایش ۱۰۰۰ تن، به کمربند سیارک‌ها اعزام می‌شوند. هر سفینه می‌تواند به سیارک‌های مختلف سفر کند. میزان منابع فلزی موجود در یک سیارک نوع SS حداکثر ۱۰۰۰ تن برآورد می‌شود. تعداد سیارک‌های هدف n است و دانشمندان به دنبال این هستند که کمترین تعداد سفینه را اعزام کنند. برای این کار الگوریتمی تقریبی با ضریب تقریب ۲ پیشنهاد دهید.

❈ ۵. سه ماتریس مربعی A، B و C با ابعاد $n \times n$ داده شده‌اند. بررسی تساوی $AB=C$ با استفاده از الگوریتم استاندارد ضرب ماتریس‌ها به زمان $O(n^3)$ و با استفاده از بهترین الگوریتم موجود برای ضرب ماتریس‌ها به زمان $O(n^{2.373})$ نیاز دارد. برای این مسئله یک الگوریتم مونت کارلوی سریع ارائه خواهیم کرد:

(آ) بردار تصادفی R به طول n را این‌گونه می‌سازیم که هر درایه R را با احتمال یکسان صفر یا یک می‌کنیم. نشان دهید اگر تساوی $AB=C$ برقرار نباشد، احتمال اینکه $ABR=CR$ باشد، حداکثر $\frac{1}{2}$ است.

(ب) با استفاده از قسمت (آ) الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^2)$ ارائه کنید که تساوی $AB=C$ را با احتمال خطای کمتر از 10^{-10} بررسی کند. همچنین احتمال درستی و مرتبه زمانی الگوریتم خود را تحلیل کنید.

۶. گراف ساده همبند و بدون جهت G داده شده است. می‌خواهیم ببینیم آیا دوری در G وجود دارد که حداقل نیمی از راس‌های G در آن باشد. به عبارت دیگر، طول دور حداقل $\frac{n}{2}$ باشد که در آن n تعداد راس‌های G است. نشان دهید این مساله NP-Complete است. (راهنمایی: مساله دور همیلتونی NP-Complete است)

۷. یک درخت اکثریت، درخت باینری کاملی است که عمقی برابر با n دارد و هر برگ آن مقدار ۰ یا ۱ دارد. مقدار هر گره درونی نیز از اکثریت مقدار برگ‌های فرزندان آن به دست می‌آید. فرض کنید هر گره درخت d فرزند دارد. مساله در اینجا محاسبه مقدار ریشه است.

الف) ثابت کنید هر الگوریتم deterministic در بهترین حالت از مرتبه $O(d^n)$ است.

ب) برای حالت خاص d=3، الگوریتمی تصادفی ارائه دهید که مقدار ریشه را در زمان $O(c^n)$ که $c < 3$ است محاسبه کند.

❈ ۸. در گراف G = (V, E) یک زیرمجموعه از راس‌ها مثل U را خیلی مستقل می‌گوییم هرگاه هیچ مسیری با طول ۱ و ۲ در بین دو راس از U در گراف موجود نباشد. ثابت کنید مساله یافتن بزرگترین زیرمجموعه مستقل NP-Complete است.

❈ ۹. گراف d-منتظم G را با n راس در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم زیرمجموعه‌ای از راس‌ها را پیدا کنیم که هر راس گراف یا عضو این مجموعه باشد و یا در همسایگی یکی از اعضای این مجموعه قرار داشته باشد. به بیان دیگر، مطلوب پیدا کردن مجموعه راس‌هایی است که فاصله تمام رئوس گراف از آن‌ها کمتر یا مساوی ۱ باشد (با در نظر گرفتن این نکته که فاصله یک راس از خودش صفر است).

الف) ثابت کنید مساله NP-Complete است.

ب) ثابت کنید هر مجموعه با خاصیت فوق حداقل سایز $\frac{n}{d+1}$ را دارد.

ج) ثابت کنید اگر به طور تصادفی $\frac{2n}{d+1}\log(n)$ راس گراف را انتخاب کنیم، احتمال اینکه راسی وجود داشته باشد که فاصله‌اش از این مجموعه بیشتر از ۲ باشد، کمتر از $\frac{1}{n}$ است.

۱۰. مجموعه $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه $B = \{C_1, \dots, C_m\}$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های A است (هر کدام از C_iها یک زیرمجموعه از A هستند). می‌خواهیم ببینیم آیا زیرمجموعه‌ای مانند S از A به اندازه حداکثر k وجود دارد به نحوی که به ازای هر C_i حداقل یک عضو آن در S موجود باشد؟ ثابت کنید مساله NP-Complete است.

❈ ۱۱. فرض کنید می‌خواهیم n کار مختلف را به یک پردازنده که توانایی انجام یک کار در هر لحظه دارد را تخصیص دهیم. هر کار مجموعه‌ای از بازه‌ها دارد که در آن زمان‌ها به پردازنده احتیاج دارد. می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توان حداقل k کار از میان کارهای موجود انتخاب کرد به نحوی که بتوانند روی پردازنده بدون تداخل با هم اجرا شوند؟ ثابت کنید این مساله Np-Complete است.

۱۲. مساله ExactlyOne3SAT مشابه مساله 3SAT است با این تفاوت که در هر clause باید دقیقاً یک literal مقدار true داشته باشد (در مساله 3SAT عادی، "حداقل" یک literal باید true باشد). با علم به این که مساله ExactlyOne3SAT یک مساله NP-Complete است، می‌خواهیم ثابت کنیم مساله زیر نیز NP-Complete است.

فرض کنید یک عدد صحیح مثبت W داریم و n عدد صحیح مثبت به صورت w_i. می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توان تعدادی از w_iها را به گونه‌ای انتخاب کرد که $\Sigma w_i = W$ شود؟ ثابت کنید این مساله NP-Complete است.