پاسخنامه تمرین سری هفتم:

۱) پاسخ ضربه مدارهای توصیف شده بامعادلات دیفرانسیل زیر را با حدس زدن عبارت پاسخ ضربه و محاسبه ضرایب حساب کنید.

الف) $s^2+15s+50=0 \to s=\ -5\ ,-10$

$$y(t)=(ae^{-5t}+be^{-10t})u(t)+c\delta(t)+d\delta'(t)$$

$$y'(t)=(-5ae^{-5t}-10be^{-10t})u(t)+(a+b)\delta(t)+c\delta'(t)+d\delta''(t)$$

$$y''(t)=(25ae^{-5t}+100be^{-10t})u(t)+(-5a-10b)\delta(t)+(a+b)\delta'(t)+c\delta''(t)+d\delta'''(t)$$

ضریب $\delta(t) \to 50c+10a+5b=8$

ضریب $\delta'(t) \to a+b+15c+50d=0$

ضریب $\delta''(t) \to c+15d=1$

ضریب $\delta'''(t) \to d=1$

$$a=-\frac{92}{5}\ ,b=+\frac{892}{5}\ ,c=\ -14,d=1$$

$$y(t)=\left(-\frac{92}{5}e^{-5t}+\frac{892}{5}e^{-10t}\right)u(t)-14\delta(t)+\delta'(t)$$

ب) $s^3+6s^2+11s+6=0 \to s=\ -1\ ,-2\,,-3$

$$y(t)=(ae^{-t}+be^{-2t}+ce^{-3t})u(t)$$

$$y'(t)=(-ae^{-t}-2be^{-2t}-3ce^{-3t})u(t)+(a+b+c)\delta(t)$$

$$y''(t)=(ae^{-t}+4be^{-2t}+9ce^{-3t})u(t)+(-a-2b-3c)\delta(t)+(a+b+c)\delta'(t)$$

$$y'''(t)=(-ae^{-t}-8be^{-2t}-27ce^{-3t})u(t)+(a+4b+9c)\delta(t)+(-a-2b-3c)\delta'(t)+(a+b+c)\delta''(t)$$

ضریب$\delta(t) \to 6a+3b+2c=2$

ضریب$\delta'(t) \to 5a+4b+3c=0$

ضریب$\delta''(t) \to a+b+c=1$

$$a=\frac{3}{2}\,,b=-6\,,c=\frac{11}{2}$$

$$y(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-t}-6e^{-2t}+\frac{11}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

۲) پاسخ حالت صفریک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x(t) = (e^{-t})u(t)$ برابر است با $y(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$ پاسخ پله آن را حساب کنید. پاسخ پله را یک بار با انتگرال کانولوشن و یک بار با رابطه مشتق/انتگرال بین پاسخ ضربه و پاسخ پله بدست ورید.

$$x(t) = (e^{-t})u(t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = (-e^{-t})u(t) + \delta(t)$$

$$\frac{dx}{dt} + x(t) = \delta(t) \rightarrow x(t) = y(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

$$h(t) = (-4e^{-2t} + e^{-t})u(t) + \delta(t) + (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

$$h(t) = -2e^{-2t}u(t) + \delta(t)$$

$$s(t) = \int_{0-}^{t} h(t')dt' = (e^{-2t} - 1)u(t) + u(t) = (e^{-2t})u(t)$$

$$s(t) = h(t) * u(t) = [-2e^{-2t}u(t) * u(t)] + [\delta(t) * u(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{t} -2e^{-2\lambda}u(\lambda) \times u(t-\lambda)\, d\lambda \ + u(t) = \int_{0}^{t} -2e^{-2\lambda}\, d\lambda \ + u(t) = (e^{-2t} - 1)u(t) + u(t) = (e^{-2t})u(t)$$

۳) در شکل مسئله ۹ فصل ششم مقدار مقاومتها را یک اهم در نظر بگیرید

الف) معادله دیفرانسیل ولتاژ $v_o(t)$ را بدست آورید.

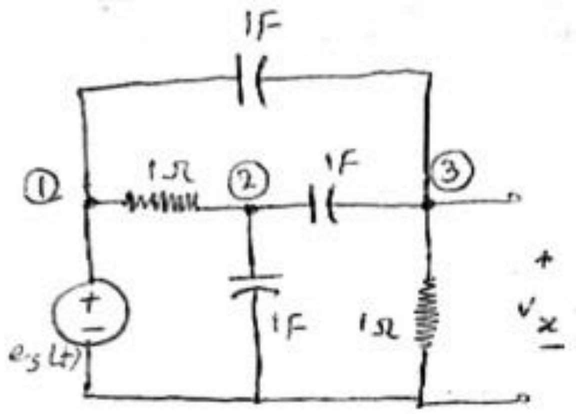
ب) پاسخ پله را با حدس زدن عبارت پاسخ پله و محاسبه ضرایب حساب کنید.(بدون استفاده از روش مجموع پاسخ همگن و پاسخ ویژه)

پ) مرتبه مدار را تعیین کنید. آیا همه فرکانسهای طبیعی در پاسخ ضربه دیده میشود؟ دلیل آن را بیان کنید.

ت) در قسمت ب، شرایط اولیه خازنها در $t = 0^+$ را بدست آورید.

حل: الف)

سوال ②



$$\text{KCL ②} \rightarrow \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{dv_2}{dt} + \frac{d(v_2 - v_3)}{dt} = 0$$

$$\text{KCL ③} \rightarrow \frac{d(v_3 - v_2)}{dt} + v_3 + \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0$$

$$v_1 = e_s(t) \quad / \quad v_3 = v_x$$

$$\text{KCL ②} \rightarrow v_2 - v_1 + 2D v_2 - D v_3 = 0$$

$$\rightarrow v_2 = \frac{v_1 + D v_3}{1 + 2D} = \frac{e_s(t) + D v_x}{1 + 2D}$$

$$2D v_x + v_x - D e_s(t) = D v_2 = \frac{D e_s(t) + D^2 v_x}{1 + 2D}$$

$$2D v_x + v_x - D e_s(t) + 4D^2 v_x + 2D v_x - 2D^2 e_s(t) = D e_s(t) + D^2 v_x$$

$$\rightarrow 3\frac{d^2 v_x}{dt^2} + 4\frac{dv_x}{dt} + v_x = 2\frac{d^2 e_s(t)}{dt^2} + 2\frac{de_s(t)}{dt}$$

حل بدون استفاده از اپراتور D

$$KCL\ ② \rightarrow \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{dv_2}{dt} + \frac{d(v_2 - v_3)}{dt} = 0$$

$$KCL\ ③ \rightarrow v_3 + \frac{d(v_3 - v_2)}{dt} + \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0$$

$$v_1 = e_s(t) \quad / \quad v_3 = v_x$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\frac{dv_2}{dt} + v_2 = e_s(t) + \frac{dv_x}{dt} \\ 2\frac{dv_x}{dt} + v_x - \frac{de_s(t)}{dt} = \frac{dv_2}{dt} \end{array}\right.$$

مشتق

$$\rightarrow 2\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{dv_2}{dt} = \frac{de_s(t)}{dt} + \frac{d^2 v_x}{dt^2}$$

$$4\frac{d^2 v_x}{dt^2} + 2\frac{dv_x}{dt} - 2\frac{d^2 e_s(t)}{dt^2} + 2\frac{dv_x}{dt} + v_x - \frac{de_s(t)}{dt} = \frac{de_s(t)}{dt} + \frac{d^2 v_x}{dt^2}$$

$$\rightarrow 3\frac{d^2 v_x}{dt^2} + 4\frac{dv_x}{dt} + v_x = 2\frac{d^2 e_s(t)}{dt^2} + 2\frac{de_s(t)}{dt}$$

ب)

$$3\frac{d^2 v_x}{dt^2} + 4\frac{dv_x}{dt} + v_x = 2\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt} = 2\delta'(t) + 2\delta(t)$$

$$3s^2 + 4s + 1 = 0 \rightarrow s = -1, -\frac{1}{3}$$

$$v_x(t) = \left(ae^{-t} + be^{-\frac{1}{3}t}\right)u(t)$$

$$v_x'(t) = \left(-ae^{-t} - \frac{1}{3}be^{-\frac{1}{3}t}\right)u(t) + (a+b)\delta(t)$$

$$v_x''(t) = \left(ae^{-t} + \frac{1}{9}be^{-\frac{1}{3}t}\right)u(t) + \left(-a - \frac{1}{3}b\right)\delta(t) + (a+b)\delta'(t)$$

ضریب $\delta(t) \rightarrow c + a + 3b = 2$

ضریب $\delta'(t) \rightarrow 3a + 3b + 4c = 2$

$$a = 0\ \ , b = \frac{2}{3}$$

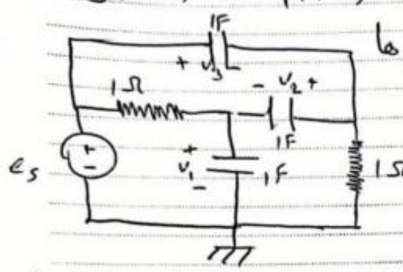
$$v_x(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}t}\right)u(t)$$

ج) ۳ خازن در مدار داریم . یک حلقه خازنی(KVL) بین هر ۳ خازن و منبع ولتاژ وجود دارد. پس مدار مرتبه 2 (3-1=2) است. همانطور که در محاسبه پاسخ در بخش قبلی نیز مشاهده کردیم ، مدار 2 فرکانس طبیعی $-1/3$, -1 دارد که در پاسخ فقط یک فرکانس طبیعی حضور داشت. در واقع اگر به معادله دیفرانسیل دقت کنیم ، عدد منفی یک که ریشه سمت چپ معادله بوده ، ریشه سمت راست معادله نیز هست. به همین دلیل ، از دوطرف معادله ساده می شود و دیگر در پاسخ مشاهده نمی شود.

$$2s^2 + 2s = 0 \rightarrow s = 0\,, -1$$

د)

$$v_s(0^+) = v_1(0^+) + v_2(0^+) + v_3(0^+)$$



KCLها:

$$\rightarrow \frac{-dv_3}{dt} + \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2 + v_3}{1} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_2}{dt} \mp \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1 - e_s}{1}$$

$\int_{0^-}^{0^+}$

$$\rightarrow -v_3(0^+) + v_3(0^-) + v_2(0^+) - v_2(0^-) = 0$$

$$\rightarrow v_2(0^+) - v_2(0^-) = v_1(0^+) - v_1(0^-)$$

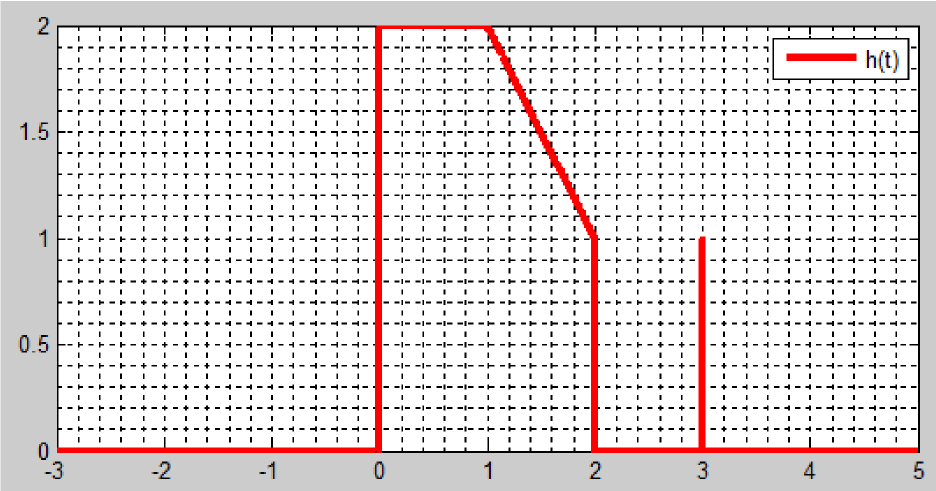
$$\text{kvl} \rightarrow v_1(0^+) + v_2(0^+) + v_3(0^+) = 1$$

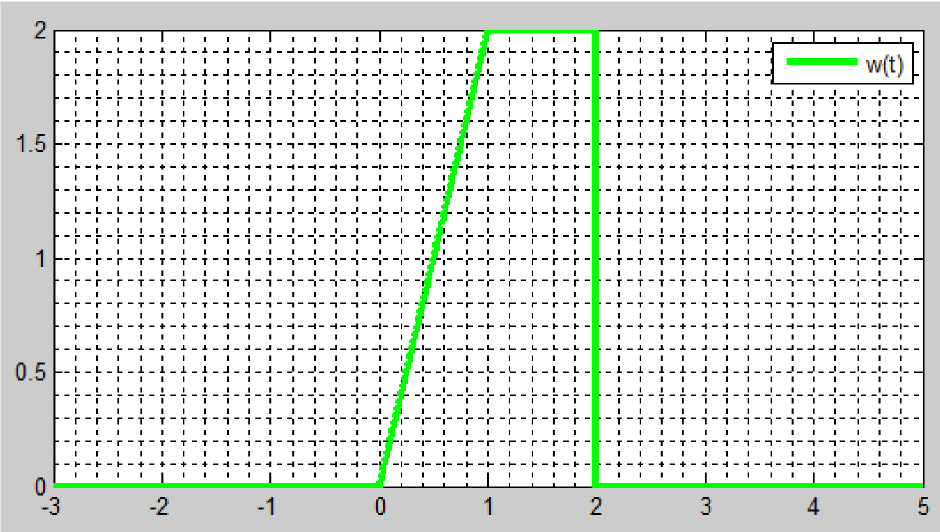
$$v_1(0^+) = v_2(0^+) = +v_3(0^+)$$

$$\rightarrow v_1(0^+) = v_2(0^+) = v_3(0^+) = \frac{1}{3}\ \text{v}$$

$$\boxed{v_x(0^+) = v_1(0^+) + v_2(0^+) = \frac{2}{3}\ \text{v}}$$

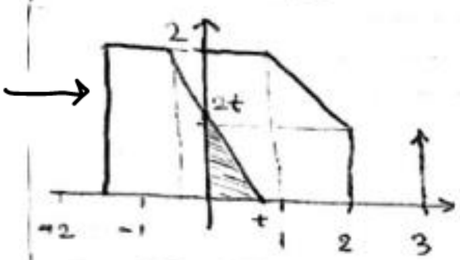
۴) پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در زیر داده شده است. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی داده شده در زیر را با انتگرال کانولوشن و رسم شکل مناسب برای هر مرحله محاسبه کنید. ابتدا شکل موج پاسخ ضربه و منبع را رسم کنید.





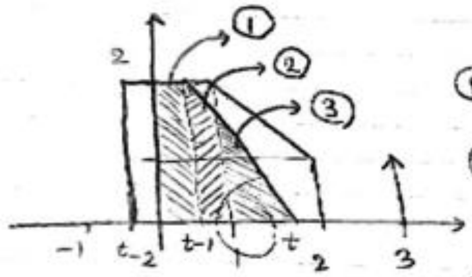
$y(t) = 0 \qquad (t < 0)$

$(0 < t < 1)$



$$y(t) = 2 \times \frac{2t \times t}{2} = 2t^2$$

$(1 < t < 2)$



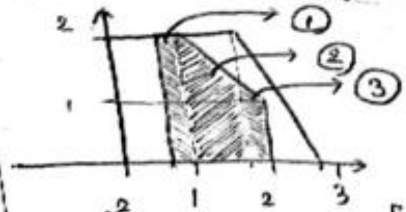
① → $4(t-1)$

② → $\dfrac{(2 + (2t-2))(2-t)}{2} \times 2$

③ $$\int_1^t (-\lambda+3)(2(t-\lambda))\,d\lambda = 2\left[\left(3t^2 + \frac{t^3}{3} - \frac{(3+t)}{2}t^2\right) - \left(3t + \frac{1}{3} + \frac{3+t}{2}\right)\right]$$

$y(t) =$ ① + ② + ③

$(2 < t < 3)$

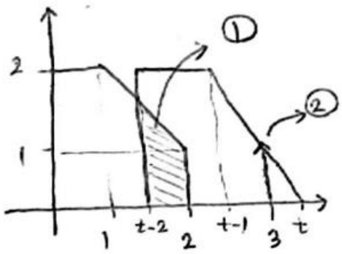


① → $2(3-t)$

② → $(9-2t)(t-2)$

③ → $$\int_{t-1}^{2} (-\lambda+3)(2(t-\lambda))\,d\lambda = 2\left[6t + \frac{8}{3} - 2(3+t) - \left(3t(t-1) + \frac{(t-1)^3}{3} + \frac{(3+t)(t-1)}{2}\right)\right]$$

$(3 < t < 4)$



① → $2 \times \dfrac{(5-t+1)(4-t)}{2}$

$= (6-t)(4-t)$

② → $2(t-3)$

$y(t) = t^2 - 8t + 18$

$y(t) = 2 \qquad (4 < t < 5)$

$y(t) = 0 \qquad (5 < t)$

۵) مسئله ۲۰ از فصل ششم کتاب را حل کنید.

$$\Re_0(e^{-2t}\cos tu(t)) = e^{-t}u(t) \Rightarrow \Re_0(\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\cos tu(t)\right)) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}u(t)\right)$$

$$\Rightarrow \Re_0(-2e^{-2t}\cos tu(t) - e^{-2t}\sin tu(t) + \delta(t)) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

$$\Rightarrow -2\Re_0(e^{-2t}\cos tu(t)) - \Re_0(e^{-2t}\sin tu(t)) + \Re_0(\delta(t)) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

$$\Rightarrow \Re_0(e^{-2t}\sin tu(t)) = -e^{-t}u(t) - \delta(t) + h(t) \Rightarrow \Re_0(\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\sin tu(t)\right)) = \frac{d}{dt}\left(-e^{-t}u(t) - \delta(t) + h(t)\right)$$

$$\Rightarrow \Re_0(-2e^{-2t}\sin tu(t) + e^{-2t}\cos tu(t) + 0.\delta(t)) = e^{-t}u(t) - \delta(t) - \frac{d\delta}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow -2\Re_0(e^{-2t}\sin tu(t)) + \Re_0(e^{-2t}\cos tu(t)) = e^{-t}u(t) - \delta(t) - \frac{d\delta}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow -2(-e^{-t}u(t) - \delta(t) + h(t)) + e^{-t}u(t) = e^{-t}u(t) - \delta(t) - \frac{d\delta}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} + 2h(t) = \frac{d\delta}{dt} + 3\delta(t) + 2e^{-t}u(t)$$

روش دیگر $h(t) = k_1 e^{-2t}u(t) + k_2\delta(t) + k_3 e^{-t}u(t)$

حال با جمع آثار پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$\frac{dh}{dt} + 2h(t) = \frac{d\delta}{dt} + 3\delta(t) \Rightarrow h_1(t) = k_1 e^{-2t}u(t) + k_2\delta(t) \Rightarrow h_1(t) = e^{-2t}u(t) + \delta(t)$$

$$\frac{dh}{dt} + 2h(t) = 2e^{-t}u(t) \Rightarrow h_2(t) = k_1 e^{-2t}u(t) + k_2 e^{-t}u(t) \Rightarrow h_2(t) = -2e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t)$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = -e^{-2t}u(t) + \delta(t) + 2e^{-t}u(t)$$

$$s(t) = \int_{0^-}^{t} h(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1)u(t) + u(t) - 2(e^{-t} - 1)u(t)$$

۶) پاسخ پله یک مدار LTI برابر است با: $s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le 0<1\\ 3-e^{-(t-1)} & t>1\end{cases}$

پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی $w(t)=2e^{-t}u(t)$ حساب کنید.

$t\big(u(t)-u(t-1)\big)$

$$s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le 0<1\\ 3-e^{-(t-1)} & t>1\end{cases} = t\cancel{u}(t)+(3-e^{-(t-1)})u(t-1)$$

جواب ایراد دارد.

$$h(t)=\frac{ds}{dt}=u(t)+0.\delta(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+(3-1)\delta(t-1)=u(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+2\delta(t-1)$$

$$y(t)=h(t)*w(t)=\left(u(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+2\delta(t-1)\right)*\left(2e^{-2t}u(t)\right)$$

$$=u(t)*\left(2e^{-t}u(t)\right)+\left(e^{-(t-1)}u(t-1)\right)*\left(2e^{-t}u(t)\right)+\left(2\delta(t-1)\right)*\left(2e^{-t}u(t)\right)$$

$$=\left(\int_0^t 2e^{-\lambda}d\lambda\right)u(t)+\left(\int_1^t e^{-(\lambda-1)}.2e^{-(t-\lambda)}d\lambda\right)u(t-1)+2\left(2e^{-(t-1)}u(t-1)\right)$$

$$=2\left(1-e^{-t}\right)u(t)+\left(2(t-1)e^{-(t-1)}\right)u(t-1)+4e^{-(t-1)}u(t-1)$$

۷) در مدار بالا از شکل مقابل پاسخ پله برابر است با: $v_1(t)=(ae^{-\frac{t}{2}}+\frac{2}{3})u(t)$

اگر شبکه N از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر تشکیل شده باشد، برای پاسخ حالت صفر مدار پایین از شکل مقابل داریم: $v_1(2)=2(e^{-2}+e^{-1})V$ پاسخ حالت صفر مدار پایین از شکل مقابل به ورودی $v_s(t)=\sin t\, u(t)$ را با استفاده از انتگرال کانولوشن بدست آورید.

حل: در مدار بالا در حالت دائمی سلف اتصال کوتاه است و لذا مقاومت دیده شده از دو سر منبع جریان (وقتی سمت راست اتصال کوتاه است) برابر است با ولتاژ $v_1(t)$ در حالت دائمی تقسیم بر منبع جریان یک آمپری که می شود: $\frac{v_1(\infty)}{i_s(\infty)}=\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{2}{3}\Omega$

در مدار پایین پاسخ پله ولتاژ دو سر خازن به روش نظری قابل محاسبه است:

$$v_s(t)=u(t)\Rightarrow s(t)=v_1(t)=\left(\left(v_1(0^+)-v_1(\infty)\right)e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}+v_1(\infty)\right)u(t)$$

$$v_1(0^+)=v_1(0^-)=0,\quad R_{eq}=\frac{v_1}{i_1}\Big|_{v_s=0}=\frac{2}{3}\Omega\Rightarrow\tau=R_{eq}C=\frac{2}{3}.\frac{3}{2}=1s\Rightarrow v_s(t)=u(t)\Rightarrow s(t)=v_1(t)=v_1(\infty)\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

حال پاسخ ضربه را حساب می‌کنیم و سپس از پاسخ به ورودی مشخص شده در شکل پایین ضریب مجهول در پاسخ ضربه را تعیین می‌کنیم:

$$h(t)=\frac{ds}{dt}=v_1(\infty)e^{-t}u(t)$$
$$v_s(t)=\delta(t)+\delta(t-1)\Rightarrow v_1(t)=h(t)+h(t-1)=v_1(\infty)e^{-t}u(t)+v_1(\infty)e^{-(t-1)}u(t-1)$$
$$v_1(2)=2(e^{-2}+e^{-1})V\Rightarrow 2(e^{-2}+e^{-1})=v_1(\infty)e^{-2}u(2)+v_1(\infty)e^{-(2-1)}u(2-1)=v_1(\infty)(e^{-2}+e^{-1})\Rightarrow v_1(\infty)=2V$$
$$\Rightarrow h(t)=2e^{-t}u(t)$$

نهایتا پاسخ به ورودی داده شده را با کانولوشن بدست می آوریم:

2

$$v_s(t)=\sin t\,u(t)\Rightarrow v_1(t)=h(t)*v_s(t)=\left(\int_0^t\sin\lambda.2e^{-(t-\lambda)}d\lambda\right)u(t)=\left(2e^{-t}\int_0^t\sin\lambda.e^{\lambda}d\lambda\right)u(t)$$
$$=\left(2e^{-t}\left[e^{\lambda}(\sin\lambda-\cos\lambda)\right]_0^t\right)u(t)=\left((\sin t-\cos t)+e^{-t}\right)u(t)$$