باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۲ - بهار ۱۴۰۲

تمرین سری ششم

موعد تحویل: مطابق با سامانه CW

پرسش ۱. همگرایی در توزیع

(آ) دنباله متغیرهای تصادفی X_i را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$X_i \sim Geometric(\frac{\lambda}{i}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

و دنباله متغیرهای تصادفی Y_i را نیز به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Y_i = \frac{X_i}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

نشان دهید که این دنباله در توزیع به توزیع $Exponential(\lambda)$ میل میکند.

(ب) دنباله متغیرهای تصادفی X_i را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$X_i \sim Binomial(i, \frac{\mu}{i}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

نشان دهید که این دنباله در توزیع به توزیع $Poisson(\mu)$ میل میکند.

(ج) دنباله متغیرهای تصادفی X_i را به این صورت تعریف میکنیم:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{e^{i(x-1)}}{1+e^{i(x-1)}} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

نشان دهید که این دنباله در توزیع به 1 میل میکند.

(د) دنباله متغیرهای تصادفی X_i را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{e^{ix}+xe^{i}}{e^{ix}+\frac{i+1}{i}e^{i}} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{e^{ix}+e^{i}}{e^{ix}+\frac{i+1}{i}e^{i}} & x > 1 \end{cases}$$

نشان دهید که این دنباله در توزیع به توزیع $Uniform(0, 1)$ میل میکند.

پرسش ۲. جمع سری ها

(آ) دو دنباله متغیر تصادفی X_i و Y_i مثال بزنید طوری که X_i در توزیع به X و Y_i در توزیع به Y میل کند اما $X_i + Y_i$ در توزیع به $X + Y$ میل نکند.

(ب) نشان دهید که اگر X_i در متوسط توان دویی به X و Y_i در متوسط توان دویی به Y میل کند $X_i + Y_i$ نیز در متوسط توان دویی به $X + Y$ میل میکند.(راهنمایی: از نامساوی کوشی شوارتز استفاده کنید)

(ج) قسمت قبل را برای $Almost\ Sure\ Convergence$ تکرار کنید.

پرسش ۳. قدم زدن تصادفی و حرکت براونی

در این مساله میخواهیم قضیه حد مرکزی را برای یک مساله فیزیکی بررسی کنیم.

(آ) یک حشره را در نظر بگیرید که روی محور x حرکت میکند و در ابتدا در مبدا قرار دارد. این حشره در هر مرحله با احتمال p یک واحد به سمت جلو و با احتمال $q = 1 - p$ یک واحد به عقب میرود. احتمال اینکه در مرحله n در مختصات k که یک عدد صحیح است قرار داشته باشد چقدر است؟(راهنمایی: جمع تعداد دفعه‌هایی که به راست و به چپ رفته برابر با شماره مرحله میشود)

(ب) حالا میخواهیم که مساله را از حالت گسسته به حالت پیوسته ببریم. بازه زمانی صفر تا یک ثانیه را به N بازه با طول یکسان به طول $\frac{1}{N}$ تقسیم میکنیم. در هر مرحله حشره با احتمال p به اندازه ε جلو و با احتمال $q = 1-p$ به اندازه ε عقب میرود. برای مرحله i متغیر تصادفی X_i را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$X_i \sim Bernoulli(p)$$

مکان حشره بعد از یک ثانیه X(که خود یک متغیر تصادفی هست) را بر حسب متغیرهای تصادفی X_i بنوسید.

(ج) واریانس مکان حشره بعد از یک ثانیه σ^2 و امیدریاضی آن μ را بر حسب پارامترهای مساله بدست آورید. مجددا متغیر تصادفی X را برحسب متغیرهای تصادفی X_i ها اینبار بر حسب N, μ, σ^2 بنوسید.

(د) با استفاده از تعریف حدی تابع چگالی احتمال، تابع چگالی احتمال مکان حشره بعد از یک ثانیه را به ازای $N \to \infty$ بدست آورید. (راهنمایی: در فرایند حدگیری برای راحتی میتوانید صرفا شکل تابعیت از x را بدست آورید و سپس با بهنجار کردن تابع چگالی احتمال ضریب آن را تعیین کنید.)
در صورت لزوم میتوانید از تقریب زیر(تقریب استرلینگ) استفاده کنید:

$$N \gg 1 :\ \ N! \approx \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N$$

یا به صورت لگاریتمی:

$$N \gg 1 :\ \ ln(N!) \approx N\ ln(N) - N$$

(ه) نتیجه قسمت قبل را برای زمان دلخواه t بدست آورید.(ابتدا بدست آورید که پارامترهایی که در جواب قسمت قبل ظاهر شدند به ازای زمان دلخواه چگونه تغییر میکنند.) نتیجه این دو بخش را با قضیه حد مرکزی چک کنید.

پرسش ۴. انواع همگرایی

(آ) ثابت کنید که اگر دنباله متغیر تصادفی X_i در متوسط توان دویی به X میل کند در احتمال نیز به X میل میکند.

(ب) ثابت کنید که اگر دنباله متغیر تصادفی X_i در توزیع به X میل کند و برای عدد حقیقی c داشته باشیم $\mathbb{P}[X = c] = 1$ آنگاه این دنباله در احتمال نیز به X میل میکند.

پرسش ۵. آزمایشگاه الکترونیک۱

شما در درس الکترونیک۱ میخواهید مقدار مقاومت R را اندازه گیری کنید. از آن جایی که میدانید هر اندازه گیری مقداری خطای تصادفی دارد، این کار را n بار انجام خواهید داد و میانگین این اندازه گیری ها را به عنوان تخمینی از مقدار R گزارش خواهید کرد. به طور مشخص اگر Y_i نتیجه اندازه گیری iام باشد، فرض بر این است که داریم:

$$Y_i = R + X_i$$

که در آن X_i خطای اندازه گیری iام است. فرض کنید X_i ها iid هستند و داریم:

$$\mathbb{E}[X_i] = 0, \; Var[X_i] = 4$$

شما چند بار اندازه گیری را انجام میدهید تا 95% مطمئن شوید که خطای مقدار گزارش شده کمتر از 0.1 است؟

سوالات پیشنهادی کتاب

کتاب پشرونیک فصل ۷ : سوالات ۱۰، ۱۳، ۱۵ ،۱۶، ۱۸، ۲۰
کتاب پاپولیس فصل ۷ : سوالات ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۹، ۳۰، ۳۱