



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۲ - بهار ۱۴۰۲

تمرین سری چهارم

موعد: مطابق با سامانه CW

پرسش ۱. متغیر تصادفی لاپلاس

تابع توزیع تجمعی لاپلاس را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F_L(x) = \int_{-\infty}^x f_L(u) du = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right) & , x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right) & , x \geq \mu \end{cases}$$

اگر $Y = \tan^{-1}(X)$ ، باشد $f_Y(y)$ را بیابید.

پرسش ۲. \min و \max

X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ هستند. اگر $U = \max(X_1, X_2)$ و $V = \min(X_1, X_2)$ باشند:

(آ) $F_U(u)$ و $F_V(v)$ و $f_U(u)$ و $f_V(v)$ را بیابید.

(ب) سوال الف را برای X های ۱ تا n تعمیم دهید.

(ج) اگر X_i ها متغیر های نمایی با پارامتر μ باشند میانگین V را به دست آورید.

(د) اگر X_i ها متغیر های یکنواخت با پارامترهای a و b باشند میانگین V و U را به دست آورید.

(ه) برای متغیر های بخش (د)، بخش (ب) را تکرار کنید.

پرسش ۳. تحویل مدارک به آموزش

امیر برای تحویل مدارک خود وارد ساختمان مرکزی آموزش می شود. در این زمان، تنها دو کارمند آموزش وجود دارند که در حال تحویل مدارک از احمد و علیرضا می باشند. امیر نیز نفر بعدی در صف می باشند. تحویل مدارک از متغیر نمایی با پارامتر λ پیروی می کند. اگر هر کس بلافاصله بعد از اتمام کارش ساختمان را ترک کند، امید ریاضی کل زمانی که امیر در مرکز آموزش سپری میکند چقدر است؟ (راهنمایی: از مورد ج سوال قبل استفاده کنید.)

پرسش ۴. کواریانس یابی

- اگر $X = N + Z$ و $Y = N + U$ در حالیکه هر سه متغیر نسبت به یکدیگر مستقل می باشند ،
 (آ) با محاسبه کواریانس نشان دهید آیا X, Y مستقل هستند یا خیر؟ اگر پاسخ خیر است، آیا می توان حالتی را در نظر گرفت که X, Y مستقل باشند؟
 (ب) X, Y به شرط کدام متغیر تصادفی مستقل اند؟ توضیح دهید.
 (ج) اگر توزیع متغیر های تصادفی N, Z, U پواسون با پارامتر یکسان λ باشند، $\rho(X, Y)$ را بیابید.
 (د) برای متغیر های بخش ج، $P_{XY}(x, y)$ را بیابید.

پرسش ۵. دور از جون شما، ... کاری

اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند به طوریکه:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{C}{xy^3} & ; 1 < x < y, y > 1 \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

(آ) C را بیابید.

(ب) $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را بیابید.

(ج) آیا X, Y از یکدیگر مستقلند؟

(د) اگر U و V دو متغیر تصادفی مستقل باشند به طوریکه: $U = \frac{X}{Y}$ و $V = Y^2$ ، $f_{UV}(u, v)$ را به دست آورید.

(ه) چک کنید آیا سطح زیر نمودار تابع جدید نیز ۱ است ؟

(و) $f_U(u)$ و $f_V(v)$ را بیابید.

(ز) آیا U, V از یکدیگر مستقلند؟

(ح) $f_{U|V}(u|v)$ را بیابید.

پرسش ۶. مسخره بازی

امیرمحمد ماشین عدد سازی دارد که با توزیع گوسی عدد تولید میکند. امیرمحمد می داند که پارامتر μ این متغیر گوسی، نمونه ای از متغیر Y ، که در سوال قبل مورد بررسی قرار گرفت میباشد. اگر Y یک کانال مخابراتی بر حسب متغیر X (در سوال قبل) باشد، با دانستن $E[X] = 3$ میانگین اعداد تولید شده توسط ماشین را بیابید. (راهنمایی: $f_{Y|X}(y|x)$ را بیابید.)

پرسش ۷. هلو برو تو گلو

فرض کنید $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ و $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند، تابع چگالی احتمال $Z = X + Y$ را بیابید.

سوالات پیشنهادی کتاب پیشرو نیک فصل پنجم : ۴، ۸، ۹، ۱۰، ۱۸، ۱۹، ۲۳، ۲۴، ۲۹، ۳۰، ۳۳، ۳۶، ۳۷، ۳۸