



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۲ - زمستان ۱۴۰۱

تمرین سری دوم

موعد تحویل: مطابق با سامانه CW

پرسش ۱. غذای تمیز

غذای تمیز یک ساندویچ فروشی است که بعد از مدت طولانی مجدداً در دانشگاه راه‌اندازی شده است. تعداد فروش ساندویچ‌های بندری این رستوران در ۴ روز اول هفته (شنبه تا سه‌شنبه) می‌تواند توسط توزیع پواسون با میانگین $\frac{1}{10}$ بندری در دقیقه مدل‌سازی می‌شود. همچنین در روزهای چهارشنبه و پنجشنبه تعداد فروش بندری‌ها با توزیع پواسون با میانگین $\frac{1}{30}$ بندری در دقیقه مدل‌سازی می‌شود.

(آ) احتمال اینکه این رستوران در روز پنجشنبه در یک بازه ۴ ساعته، ۲۰ بندری بفروشد چقدر است.

(ب) یک روز تصادفی از هفته را انتخاب می‌کنیم و در روز انتخاب شده، یک بازه ۱ ساعته را در نظر می‌گیریم. اگر در این بازه هیچ بندری به فروش نرسد، احتمال اینکه روز انتخاب شده ۴ روز اول هفته (شنبه تا سه‌شنبه) باشد.

(ج) رستوران غذای تمیز در کنار بندری، ذغال‌برگر هم می‌فروشد، از آن جایی که این غذا محبوب است در تمام روزهای غیر تعطیل (شنبه تا پنجشنبه) به طور متوسط ساعتی ۱۰ تا فروش می‌رود اگر تعداد فروش ذغال‌برگر را با توزیع پواسون (با متوسط ذکر شده) مدل‌کنیم. چقدر احتمال دارد این رستوران در یک بازه ۲ ساعته در روز شنبه دقیقاً ۱۰ ساندویچ (چه بندری چه ذغال‌برگر) بفروشد.

توجه: در تمام قسمت‌های بالا روز جمعه تعطیل است و طبیعتاً احتمال فروش هر ساندویچی در این روز برابر با ۰ است.

پرسش ۲. بازی ناعادلانه

معین و دانیال در حال بازی کردن با یک سکه نامتقارن هستند که احتمال شیر آمدن آن برابر p است. از طرفی، معین با تغییر دادن شکل سکه، احتمال شیر آمدن سکه یا همان p را به کمتر از $\frac{1}{2}$ کاهش داده است. آن‌ها $2n$ بار سکه را می‌اندازند دانیال زمانی برنده بازی می‌شود که در پایان بازی، تعداد شیرها بیشتر باشد! در عوض بی‌انصافی معین، دانیال می‌تواند تعیین کند که چند بار سکه را باید پرتاب کنند (مقدار $2n$ را تعیین می‌کند). بهترین مقدار $2n$ را برای برنده شدن دانیال پیدا کنید. (راهنمایی: اگر $2n$ بهترین حالت برای تعداد بازی که در آن دانیال برنده بازی هست باشد، آنگاه احتمال بردن دانیال در این صورت بیشتر از حالات $2n - 2$ و $2n + 2$ خواهد بود).

پرسش ۳. کلونی

در یک لانه از مورچه های وحشی در زمستان، احتمال زنده ماندن هر مورچه به تعداد کل مورچه ها (n) و شرایط لانه شان وابسته است که این شرایط را با پارامتر λ مدل می کنیم. احتمال زنده ماندن هر مورچه برابر $p = \frac{\lambda}{n}$ است. اگر در یک کلونی n مورچه وجود داشته باشد،

(آ) امید ریاضی تعداد مورچه ها بعد از زمستان را به دست آورید.

(ب) اگر در یک کلونی دیگر، مقدار n بسیار بزرگ باشد، احتمال زنده ماندن k مورچه را بعد از زمستان به دست بیاورید.

پرسش ۴. شمع چینی

در یک مراسم ختم، ۲۰ عدد شمع دور عکس متوفی چیده شده اند. احتمال اینکه یک شمع چینی باشد برابر $\frac{1}{4}$ است. بعد از یک ساعت، شمع های چینی با احتمال $\frac{1}{6}$ و شمع های ایرانی با احتمال $\frac{1}{2}$ خاموش می شوند. بعد از یک ساعت، امید ریاضی شمع های روشن را به دست آورید.

پرسش ۵. ویروس جدید

(آ) بعد از کرونا، یک ویروس دیگر در ایران شیوع پیدا کرده است که حافظه مردم را به کلی دچار مشکل می کند. اگر احتمال شیوع این ویروس بیماری طبق برآوردهای انجام شده برابر با ۱٪ باشد، در یک روستا، پزشک باید به طور متوسط چند نفر را معاینه کند تا به اولین نشانه این ویروس برخورد کند؟

(ب) احتمال اینکه پزشک پس از معاینه نفر n ام، به سومین فردی که نشانه های بیماری را دارد برخورد چقدر است؟

(ج) اگر بدانیم پزشک با معاینه m مریض به ویروس بی حافظگی برخورد نکرده است، احتمال اینکه مراجعین تا نفر n ام دچار بیماری ویروس نشده باشند چقدر است؟

پرسش ۶. بخش پذیری

تابع وزن احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

$$P_X(n) = c.n^{-2}, n \in \mathbb{N}$$

اگر اعداد اول را به ترتیب به صورت $1 < p_1 < p_2 < \dots$ بنویسیم (یعنی $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$) و واقعه A_k رخداد بخش پذیری X بر p_k باشد:

(آ) مقدار c را بدست آورید.

(ب) احتمال $P(A_k)$ را بدست آورید.

(ج) نشان دهید A_k ها نسبت به هم مستقل اند.

(د) ثابت کنید: $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-2}) = c$

پرسش ۷. پارکینگ شریف

پارکینگ شریف در طرح جدید دانشگاه ۱۰ ساعت در روز فعالیت می‌کند. هزینه پارک در پارکینگ به شرح زیر است: ۲۰ هزار تومان برای هر ساعت در ۳ ساعت اولیه و هزینه هر ساعت بعدی برابر ۱۰ هزار تومان است. اطلاعاتی که از دوربین های پارکینگ به دست آمده است، نشان می‌دهد که مدت زمانی که دانشجویان ها اتوموبیل خود را در پارکینگ شریف پارک می‌کنند از متغیر تصادفی گسسته زیر تابعیت می‌کند:

$$P(X = k) = \begin{cases} k_i = \frac{11-k}{55} & k \in \{1, 2, \dots, 10\} \\ k_j = 0 & \text{O.W} \end{cases}$$

میانگین پرداختی دانشجویان برای پارکینگ را به دست آورید.

پرسش ۸. باز هم سکه!

یک سکه ی سالم را پرتاب می‌کنیم و نتایج پرتاب را از راست به چپ یادداشت می‌کنیم.

(آ) به چه احتمالی الگوی شیر-شیر-شیر قبل از الگوی شیر-شیر-خط رخ می‌دهد؟

(ب) به چه احتمالی الگوی شیر-شیر-شیر قبل از الگوی خط-شیر-شیر رخ می‌دهد؟

سوالات غیر تحویلی

پرسش ۱. پاسکال و پواسون

فرض کنید X یک متغیر تصادفی از جنس پاسکال با پارامترهای r و p است. نشان دهید اگر $r \rightarrow \infty$ و $p \rightarrow 1$ به گونه ای که $\lambda = r(1-p) \rightarrow \lambda$ به دست بیاید، آنگاه:

$$P(X = n + r) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

پرسش ۲. پواسون و مترو

طبق اطلاعات سایت شرکت مترو، از ساعت ۴:۰۰ تا ۶:۳۹، به طور میانگین هر ۳/۵ دقیقه مترو وارد ایستگاه دروازه دولت می شود و از ساعت ۷:۳۹ تا ۹، به طور میانگین هر ۴ دقیقه مترو وارد ایستگاه می شود. فرض کنید رها راس ساعت ۷:۲۵ وارد ایستگاه می شود و حداکثر نیم ساعت در مترو منتظر قطار می ماند Y . را مدت زمان انتظار رها قرار دهید. در نتیجه Y عددی بین ۰ و ۳۰ است. تابع توزیع تجمعی و میانگین Y را حساب کنید.

سوالات کتاب

کتاب پیشرونیك فصل ۳: سوالات ۳، ۴، ۸، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۴، ۲۵
کتاب پاپولیس (ویرایش چهارم) فصل ۴: سوالات ۲۱، ۲۶، ۲۹، ۳۱