



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۲ - زمستان ۱۴۰۱

تمرین سری سوم

موعد: مطابق با سامانه CW

پرسش ۱. توپ جام جهانی!

برمی گردیم به جام جهانی قطر ۲۰۲۲، توپ های جام جهانی که توسط آدیداس توسعه یافته، از یک حسگر کروی کمک می گیرد که هر ثانیه ۵۰۰ بار به اتاق VAR دیتای خود را ارسال می کند. فدراسیون فوتبال قطر برای اطمینان از تعداد توپ های لازم برای هر ورزشگاه تابع چگالی احتمال طول عمر توپ ها را از آدیداس درخواست می کند. اگر این تابع چگالی احتمال برحسب تعداد بازی به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2} & , x > 10 \\ 0 & , x \leq 10 \end{cases}$$

(آ) مقدار ثابت C را محاسبه کنید.

(ب) توزیع تجمعی X (F_X) را بیابید.

(ج) احتمال آنکه از ۶ توپ ارسالی به هر ورزشگاه حداکثر ۴ و حداقل ۲ توپ برای حداقل ۱۵ بازی برنامه ریزی شده برای ورزشگاه، کار کنند را بدست آورید. (پیشامد خرابی توپ ها از هم مستقل است)

(دقت کنید که X یک متغیر تصادفی پیوسته است و مقادیری مانند اعشاری و یا اعداد گنگ هم می تواند شامل شود)

پرسش ۲. ممان های مرکزی توزیع یکنواخت

می دانیم یک توزیع یکنواخت با تابع چگالی احتمال زیر توصیف می شود:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

فرض کنید:

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \Delta = b-a$$

ابتدا تابع چگالی احتمال را بر حسب پارامتر های تعریف شده بازنویسی کرده و سپس به موارد زیر پاسخ دهید:

(آ) ممان مرکزی n ام که به صورت زیر تعریف می شود

$$E[(X - \mu)^n]$$

را برای مقادیر فرد n ، برحسب پارامتر های تعریف شده بدست بیاورید.

(ب) الف را برای مقادیر زوج n تکرار کنید.

(ج) انحراف معیار استاندارد X را برحسب پارامترهای تعریف شده بیابید.

پرسش ۳. قطار ۴:۵۰ از پدینگتون

قطارهایی که عازم مقصد A می باشند، از ساعت ۴:۵۰ به فاصله ۱۵ دقیقه یکبار به ایستگاه پدینگتون وارد می شوند، در حالی که قطار های عازم مقصد B از ساعت ۴:۵۵ با همان فاصله زمانی ۱۵ دقیقه وارد ایستگاه می شوند. خانم الیسپت در حالی که سوار قطار بین شهری به مقصد C بوده است، در قطار موازی شاهد قتل زن جوانی بوده است. قطار خانم الیسپت به مقصد C با هر دو مقصد A ، B مقداری از مسیر را مشترک است بگونه ای که هر کدام از A ، B می توانند قطاری باشند که خانم الیسپت شاهد قتل در آن بوده است. یک شاهد عینی در ایستگاه پدینگتون مقتول را دیده است که با عجله وارد سکو شده و سوار اولین قطار ورودی به ایستگاه می شود. متأسفانه این شاهد ساعت دقیق ورود به ایستگاه یا سوار شدن مقتول را نمی داند اما مستندات پلیس نشان می دهد که مقتول در بازه زمانی با توزیع یکنواخت از ۴:۵۰ الی ۵:۵۰ وارد ایستگاه پدینگتون شده است.

(آ) با محاسبه، حدس بزنید مقصد قطاری که قتل در آن رخ داده است، محتمل تر است A باشد یا B ؟ (مقتول سوار کدام قطار شده است)

(ب) اگر مقتول در بازه زمانی با توزیع یکنواخت ۵ الی ۶ وارد ایستگاه پدینگتون می شد، آیا پاسخ بخش قبل تغییری می کرد؟

پرسش ۴. توزیع بتا

تابع چگالی احتمال توزیع بتا برای متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , o.w. \end{cases} \quad \left(\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \right)$$

به کمک رابطه داده شده،

(آ) به کمک محاسبه ممان n ام $(E[X^n])$ ، میانگین و واریانس این توزیع را محاسبه کنید.

(ب) مد این توزیع را بیابید. $(0 < a, b)$

(ج) تابع چگالی احتمال را برای مقایر مختلف a و b ترسیم کرده، تاثیر آن ها را روی توزیع شرح دهید.

(د) اگر $Y = 1 - X$ تعریف شود، نشان دهید:

$$X \sim \text{Beta}(a, b) \Rightarrow Y \sim \text{Beta}(b, a)$$

پرسش ۵. بستنی طرشت مون نشه؟

سیروس به دلیل نمره بالایی خود در درس آمار و احتمال، قرار است به دوستش متین شیرینی بدهد اما سر زمان رفتن به بستنی طرشت توافق ندارند. سرانجام تصمیم می گیرند برای تعیین زمان بر حسب دقیقه، یک عدد تصادفی که آن را X می نامند، تولید کنند. متین که نگران دیر شدن شیرینی خود است، پیشنهاد می دهد که یک عدد دلخواه k به انتخاب او از عدد تصادفی کم شود و نهایتاً سر عدد $|X - k|$ به توافق برسند. اگر X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد،

(آ) امید ریاضی زمان توافقی را بدست آورید.

(ب) متین چه k پیشنهاد دهد تا امید ریاضی زمان توافقی کمینه گردد؟ (مُد ، مدین یا میانگین)

(ج) اگر در قسمت قبل ، X دارای توزیع نمائی با پارامتر λ باشد ، k را بیابید.

پرسش ۶. سوال فرانسوی^۱

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ x + k & , \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ C & , x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

(آ) مقادیر k و C را بگونه ای مشخص کنید که توزیع تجمعی X معتبر باشد.

(ب) تابع توزیع تجمعی X را رسم کرده و مشخص کنید X چه نوع متغیر تصادفی می باشد؟ (چرا؟)

(ج) تابع توزیع تجمعی X را به شکل یک تابع پیوسته و یک تابع پله ای به فرم زیر بنویسید.

$$F_X(x) = C(x) + D(x) \quad (D(x) = \sum_k d_k u(x - x_k))$$

(د) تابع چگالی احتمال تعمیم یافته X را بیابید.

(ه) $P(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{3})$ را بیابید.

(و) $E[X]$ را بیابید.

پرسش ۷. از نبرد تا پیروزی راهی نیست

ایستگاه مترو نبرد و پیروزی حدود یک کیلومتر با یکدیگر فاصله دارند، قرار است یک ایستگاه تعمیرات کوچک بین این دو ایستگاه در فاصله ۳۰۰ متری ایستگاه پیروزی احداث شود تا در مواقع ضروری تکنسین های شرکت مترو تهران بتوانند به آسانی خود را به قطار برسانند. اگر حادثه ای با توزیع یکنواخت روی فاصله دو ایستگاه رخ دهد،

(آ) امید ریاضی فاصله حادثه تا نزدیک ترین ایستگاه (چه رسمی چه تعمیراتی) را بیابید.

(ب) (اختیاری) آیا نقطه ای میان دو ایستگاه وجود دارد که مقدار قسمت الف در آنجا اکسترمم شود؟ اگر چنین است، این مقدار را محاسبه کنید.

* راهنمایی : ابتدا مسئله را مدلسازی کرده و تابع چگالی احتمال را بدست آورید.

^۱وجه تسمیه از دانشجویان دکتر شمس الهی پرسیده شود

پرسش ۸. سیستم

در یک سیستم مخابراتی، فرستنده هر بیت اطلاعات را که توزیع برنولی X با احتمال موفقیت p دارد، ارسال می کند. نویز گیرنده باعث می شود که مقادیر دریافت شده در گیرنده دیگر گسسته نبوده و توزیع $Z + X$ داشته باشد. Z توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار $\sigma = \frac{1}{\sqrt{8}}$ می باشد. در گیرنده، یک مبدل آنالوگ به دیجیتال وجود دارد و شیوه کارش به این شکل است که در صورتی که مقدار دریافت شده از ۰.۵ کوچک تر باشد، آن را صفر می خواند و در غیر این صورت آن بیت یک خوانده می شود. با توجه به اینکه مقدار X خوانا نیست، احتمال اینکه مبدل ما بیت ارسالی را اشتباه تشخیص دهد چه قدر است؟ ($erf(1) = 0.84$)

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

سوالات غیر تحویلی

پرسش ۱. یادم تو را فراموش

اگر $X \sim exp(\lambda)$ نشان دهید که X بی حافظه می باشد.

پرسش ۲. نقاط دور افتاده

دو نقطه به طور تصادفی و مستقل در بازه صفر تا یک با توزیع یکنواخت انتخاب شده اند. میانگین فاصله این دو نقطه را بیابید.

پرسش ۳. اما رفیق بر همه چیزی مقدم است^۲

طبق قرار قبلی که دوست شما با شما گذاشته است، قرار است او در بازه زمانی ۸ الی ۸:۱۰ صبح به ایستگاه انقلاب برسد. همچنین شما نیز برای رفتن به دانشگاه در لحظه ای در این بازه زمانی به صورت تصادفی به ایستگاه می رسید اما شما در ساعت ۹ باید دانشگاه باشید زیرا که کلاس شما حضور غیاب اجباری دارد و همچنین در صورت تاخیر سوژه می شوید(!). بنابراین تصمیم می گیرید از لحظه رسیدن به ایستگاه، حداکثر ۵ دقیقه برای دوست خود صبر کنید و در صورت نیامدن او، به تنهایی به دانشگاه بروید. احتمال آنکه به تنهایی به دانشگاه بروید را بیابید.

پرسش ۴. باند های $\phi(x)$

اگر $Z \sim N(0, 1)$ ، برای $x \geq 0$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq P(Z \geq x) = 1 - \phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

سوالات کتاب

کتاب پیشرو نیک فصل ۴: سوالات ۷، ۱۰، ۱۲، ۱۶، ۱۸ الی ۲۳

کتاب پاپولیس فصل ۴: سوالات ۸، ۱۰، ۱۵

کتاب پاپولیس فصل ۵: سوالات ۲، ۶، ۱۰، ۱۷، ۱۸، ۲۱، ۲۶، ۳۱، ۳۲

^۲دنيا خوش است و مال عزيز است و تن شريف اما رفیق بر همه چیزی مقدم است