**باسمه تعالی**

**دانشگاه صنعتی شریف**

**دانشکده مهندسی برق**

## آمار و احتمال مهندسی - گروه ۲ - زمستان ۱۴۰۱

# تمرین سری هفتم

**موعد تحویل: مطابق با سامانه CW**

---

### پرسش ۱. مرغ MLE چرا میل چمن نمیکند همدم گل نمیشود...

در اسمان الوده شهر تهران پرندگان مختلف با وزن های متفاوتی چه مثبت و منفی و جود دارد.فرض کنیم که توزیع مرغ ها تصادفی و یک سان باشد و نمونه های تصادفی $X_1, X_2, ..., X_m$ مشاهده شده اند اگر بدانیم که تابع چگالی وزن ان ها به این صورت باشد:

$$f(x|\sigma) = \frac{exp(\frac{-|x|^n}{\sigma^n})}{\int_{-\infty}^{\infty} exp(\frac{-|u|^n}{\sigma^n})du}$$

(که $\sigma, n > 0$).در این صورت $\sigma$ را به گونه ای تعین کنید که بیش ترین تخمین خوشانسی ($MLE$)را داشته باشیم.

### پرسش ۲. BMI گاو های برقی مشهدی حسن(گاوان و خران باربردار//به زآدمیان مردمآزار)

مشهدی حسن دامداری نمونه است.او وقتی دیده که همه چیز درحال برقینیزه شدن است پس سریعا اقدام به خرید یک گله بزرگ گاو برقی نموده است.این گاوها به جای خوردن علوفه با برق شهر شارژ میشوند .مشهدی حسن که نگران سلامتی گاو های خود است از ان ها تست های مختلف میگیرد که یکی از ان ها BMI است ومیدانیم که BMI یک گاو از گله عددی تصادفی است و توزیع نمونه های اندازه گیری شده مثل هم هستند( $i.i.d$ ).اگر بدانیم که $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه های ما باشند و $CDF$ ان ها به صورت $F_X(x)$ باشد.و$X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ مرتب شده $X_1, X_2, ..., X_n$ و$Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(n-1)}$ مرتب شده $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ باشد$(n > 2)$. در این صورت ثابت کنید:

.۱

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_{X(i)}(x) = F_X(x)$$

$1 < i < n$.۲ :

$$\frac{F_{X(i)(x)}}{\sqrt{1 - 2F_X(x) + 2F_X(x)^2}} \leq \sqrt{F_{Y(i)}(x)^2 + F_{Y(i-1)}(x)^2}$$

### پرسش ۳. نمک در نمکدان شوری ندارد دل من طاقت دوری ندارد

میدانیم که در یک کیسه نمک مقدارنسبی که از نمک موجود است که در یک کیسه نمک مقدار عددی تصادفی بین ۰ تا ۱ است.اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ بیان گر مقدار نمک نسبی از نمونه های کیسه دریک انبار نمک باشد.همچنین $X_i$ ها یکسان هستند ( $i.i.d$ ).و از توزیع $X_i \sim beta(\theta, b)$ پیروی میکند والبته میدانیم که مقدار همه ی $X_i$ برابر ۱ نیست.در این صورت با فرض ثابت بودن $b$ بازه اطمینانی $100\%(1-\alpha)$ برای $\theta$ ارائه دهید.

**پرسش ۴.**

فرض کنیم که X،Y توزیع های نرمال باشند به طوری که پارامتر های ان ها برای ما مشخص نیست. همچنین نیزZ=X+Y نرمال و $\rho(X,Y) = 0.5$است.در دو ازمایش جداگانه ۱۰ نمونه از$X$ و ۱۰ نمونه از$Y$ برداشته ایم که نمونه ها در زیر امده اند.در این صورت بازه اطمینان ۹۰ درصدی برای $\sigma_z + \mu_z$ بیابید.(درصورت نیاز به $z_\alpha, \chi^2_{\alpha,n}, t_{\alpha,n}$ میتوانید از جداول معتبر در اینترنت و یا کتب مرجع استفاده کنید).

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X: | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۹ | ۱۴.۵ | ۱۲.۵ | ۱۱.۵ |
| Y: | ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۹ | ۱۰ | ۸.۵ | ۵.۷ | ۶.۵ | ۴ |

**پرسش ۵. نسبت بخت**

قصد داریم از آزمون نسبت بخت برای فرضیه ی

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

با مشاهده نمونه های $X_1 \dots X_n \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$

(آ) نسبت بخت را به صورت تابعی از نمونه های مشاهده شده بدست آورید.

(ب) ناحیه رد $H_0$ را بدست آورید.

**پرسش ۶. باز هم نسبت بخت**

تست نسبت بخت را برای

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : p = p_0 \\ \mathrm{H}_1 : p = p_1 \end{cases}$$

با توجه به نمونه های مستقل $X_1 \dots X_n \sim Bernoulli(p)$ در نظر بگیرید.نشان دهید که نسبت بخت تابعی نزولی از جمع متغیر ها می باشد. و به کمک آن استدلال کنید که در هر level Significance دلخواه اگر این آزمون $H_0$ را برای برای یک سطح مشاهده شده $Y = y$ رد کند آنگاه برای تمام $Y > y$ نیز رد خواهد شد.

**پرسش ۷. درست نمایی بیشینه**

(آ) فرض کنید که $X$ یک متغیر تصادفی گسسته با دامنه ی $(1, 2, 3, \dots k)$ باشد و تعریف کنیم $p_i = \Pr[X = i]$ داده های مستقل $X_1, X_2, \dots, X_n$ از این متغیر تصادفی موجود است.اگر بردار احتمال $P$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

تخمین گر درست نمایی بیشینه برای P را بیابید.

(ب) نقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ از صفحه داده شده اند. می دانیم:

$$y_i = ax_i + b + Z_i$$

که $Z_i$ ها نمونه های مستقل از توزیع $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ هستند.تخمین گر درست نمایی بیشینه برای a و b را بدست آورید.