باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۲ - زمستان ۱۴۰۱

تمرین سری پنجم

موعد تحویل: مطابق با سامانه CW

پرسش ۱. توزیع گاما!

می گوییم یک متغییر تصادفی مانند X دارای توزیع گاما با پارامتر های $\alpha > 0, \lambda > 0$ و به صورت $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ نشان میدهیم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \left\{ \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \right.$$

که در آن

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

(آ) اگر $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ آنگاه توزیع مولد گشتاور X را بیابید.

(ب) با استفاده از تابع مولد گشتاور نشان دهید $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ که X_i ها متغییرهای تصادفی نمایی مستقل و هم توزیع با پارامتر λ هستند، آنگاه $Y \sim Gamma(n, \lambda)$

(ج) تابع $\Gamma(\alpha)$ خواص زیر را دارد.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}} \quad (\lambda > 0)$$
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

با کمک این خواص، امید ریاضی و واریانس یک متغییر تصادفی با توزیع $Y \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ را به دست آورید.

پرسش ۲. سلف پس از دوران کرونا

به دلیل گسترش واکسیناسیون در جامعه، وزارت بهداشت مجوّز بازگشایی دانشگاه ها را صادرکرده است و معاونت دانشجویی جدید دانشگاه، از شما می خواهد که به سرعت برنامه ی غذایی دانشگاه را آماده کنید. یک لیست از N نوع غذای مختلف در اختیار شماست که می توانید در هر روز برنامه ریزی کنید تا یکی از آن ها پخته شود. شما زمان کمی برای این کار در اختیار دارید و در نتیجه برای هرروز، یک غذا را به صورت تصادفی از لیست مذکور انتخاب می کنید و در برنامه ی غذایی قرار می دهید (به دلیل ضیق وقت، ممکن است غذاهای تکراری هم

انتخاب کنید!). از طرف دیگر، برای معاونت دانشجویی پوشش دادن همه ی غذاهای موجود در لیست هم بسیار مهم است. امید ریاضی تعداد روزهای لازم برای آن که همه ی غذاهای موجود در لیست، لااقل یک بار در سالن غذاخوری ارائه شوند چقدر است؟

پرسش ۳. !نامساوی

فرض کنید X یک متغییر تصادفی با $\mathbb{E}[X] = 0$ و $Var[X] = \sigma^2$ است. ثابت کنید که برای هر $a > 0$ خواهیم داشت:

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

(راهنمایی: می توانید از رابطه بدیهی $\mathbb{P}[X \geq a] = \mathbb{P}[X + c \geq a + c]$ برای هر ثابت دلخواه $c \in \mathbb{R}$ و از نامساوی مارکف استفاده کنید.)

پرسش ۴. مولد گشتاور خاص

فرض کنید تابع مولد گشتاور $\Phi_X(s)$، برای هر s دارای خاصیت $\Phi_X(s) = e^s \Phi_X(-s)$ باشد.

(آ) $\mathbb{E}[X]$ را بدست آورید.

(ب) فکر میکنید می توان تابع چگالی احتمال X را تعیین کرد؟

پرسش ۵. کلاه برداری

فرض کنید n نفر کلاه خود را یک یک سبد گذاشته و سپس هر کدام به صورت تصادفی کلاهی را از سبد برمی دارند. بعضی افراد کلاه خود را انتخاب کرده اند و به کنار می روند. مابقی افراد که کلاهی اشتباه را انتخاب کرده اند، مجدد کلاه ها را در سبد قرار داده و هر کدام کلاهی به صورت تصادفی از سبد بر می دارد. مجدّداً افرادی که کلاه درست انتخاب کرده اند کنار می روند و مابقی افراد آنقدر این کار را تکرار می کنند تا همگی کلاه خود را داشته باشند.

(آ) فرض کنید R_n تعداد دورهای لازم برای این باشد که کل n نفر کلاه خود را به درستی در اختیار داشته باشند. امید ریاضی R_n را بیابید.

(ب) فرض کنید S_n تعداد کل انتخاب های غلط انجام شده در طول این «بازی» باشد. امید ریاضی S_n را بیابید

پرسش ۶. بردار گوسی

فرض کنید $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ یک بردار تصادفی از متغییر های تصادفی تواما نرمال باشد. (یعنی X_1, X_2, X_3 متغییر های تصادفی تواما نرمال هستند.) اگر بردار میانگین و ماتریس کوواریانس این بردار تصادفی به صورت زیر تعریف شود.

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

آنگاه تابع مولد گشتاور X که به صورت زیر تعریف میشود را محاسبه کنید.

$$\Phi_X(s) = \mathbb{E}[e^{s^T X}] = \mathbb{E}[e^{s_1X_1+s_2X_2+s_3X_3}]$$

پرسش ۷. بازم تواما گوسی

فرض کنید X و Y دو متغییر تصادفی تواما گوسی با پارامتر های $\mu_X = 0, \sigma_X^2 = 1, \mu_Y = -1, \sigma_Y^2 = 4, \rho = -\frac{1}{2}$

(آ) $\mathbb{P}[X + Y > 0]$ را بیابید.

(ب) اگر $X + 2Y$ و $aX + Y$ مستقل باشند، ثابت a را بیابید.

(ج) $\mathbb{P}[X + Y > 0|2X - Y = 0]$ را بیابید.