



باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

آمار و احتمال مهندسی - گروه ۲ - زمستان ۱۴۰۱

تمرین سری هشتم

موعد تحویل: مطابق با سامانه CW

پرسش ۱. غضنفر و مظفر و بیت کووووین!

غضنفر و مظفر برای سال جدید قرار است بیت کوین عیدی بگیرند. (اگر به کسی هم عیدی بدهند فرض میکنیم که یک عیدی منفی گرفته اند!). همچنین مقدار عیدی آن ها به صورت تصادفی است و نرمال است و توزیع عیدی آن ها به ترتیب زیر است $X \sim N(\mu_x, 1), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ است و $\rho(x+y, x-y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ درضمن میدانیم اگر $Y = \mu_y + \sigma_y$ به احتمال 90 درصد مقدار بیت کوینی که غضنفر عیدی گرفته در بازه $[0.996535, 2.7355145]$ قرار دارد. حال میانگین عیدی های غضنفر و انحراف معیار عیدی های مظفر را در حالت معمول حساب کنید. (در صورت نیاز به $z_\alpha, \chi_{\alpha,n}, t_{\alpha,n}$ میتوانید از جداول معتبر در اینترنت و یا کتب مرجع استفاده کنید).

پرسش ۲. MSE نامتناهی (از هر طرف که رفته جز وحشتم نیفزود// زنه از این بیابان وین راه بی نهایت)

می دانیم که میلیاردها سال پیش یک انفجار عظیم نخستین با انرژی X که متغیر تصادفی است و آن را مشاهده نکرده ایم رخ داده است ($Var(X) = \sigma^2, E[x] = 0$). پس آن ما بی شمار انفجار با انرژی های Y_1, Y_2, Y_3, \dots را به چشم خود دیده ایم و در مورد آن ها میدانیم که:

$$Y_i = X + W_i$$

۲.

$$Var(W_i) = \rho^{2i}, \rho > 1, E[W_i] = 0 \text{ for } i \in \mathbb{N}$$

همچنین فرض کنید که X, W_1, W_2, \dots مستقل هستند در این صورت تخمین گر خطی با کم ترین مجذور خطا برای انرژی نخستین انفجار با استفاده از Y_i ها به دست آورید.

پرسش ۳. ولکن باز هم مربع شرطی خی!

۱. فرض کنید که $X \sim \chi(n), Y|X=x \sim Exponential(x)$ در این صورت تابع توزیع پسین را برای حالتی که $Y=n$ باشد به دست آورید. ($f_{X|Y}(x|n)$)

۲. فرض کنید که $X \sim Poisson(\lambda), Y|X=n \sim \chi^2(n+1)$ در این صورت تابع توزیع پسین را برای حالتی که $Y=\lambda$ است را به دست آورید. ($P_{X|Y}(x|\lambda)$)

پرسش ۴. توزیع نرمال (چه گوید گفت اندر این داستان// خردتان بر این هست هم داستان)

میخواهیم ولتاژ یک قطعه الکترونیکی که ولتاژ آن به صورت تصادفی عوض میشود را با مولتی متر اندازه بگیریم. میدانیم که توزیع ولتاژ تصادفی آن به صورت $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ است. البته میدانیم ولتاژی که توسط مولتی متر خوانده میشود به صورت $Y = X + \lambda W$ که در آن λ عددی ثابت است و $W \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$ است که W, X در آن مستقل هستند.

۱. برای این که کمترین خطای میانگین مربعات تخمین X توسط Y خطی گذرنده از مبدا باشد در صفحه $X - Y$ ، λ چه قدر باید باشد ($\mu_y > \mu_x$)
۲. با فرض این که $\mu_y = 0$ میانگین مربعات خطا (MSE) را برای تخمین Y که کمترین خطای مربعات توسط Y برای X داشته باشد را به دست آورید.
۳. با فرض این که $Y = y$ مشاهده شده باشد برای این که به ازای $X = x_m$ ماکسیمم خوشبینی (ML) برای تخمین رخ λ را مشخص کنید.
۴. با فرض این که $Y = y$ مشاهده شده باشد برای این که به ازای $X = x_{mp}$ بیشینه تخمین پسین (MAP) رخ λ را مشخص کنید. ($\mu_w \neq 0, x_{mp} < y$)

پرسش ۵. تخمین بزن

اگر تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد: ($0 \leq x, y \leq 1$)

$$f_{XY}(x, y) = x + \frac{3}{2}y^2$$

تخمین های زیر را محاسبه کنید:

(آ) تخمین MMSE برای X با دانستن مقدار Y

(ب) تخمین خطی MMSE برای X با دانستن مقدار Y

(ج) تخمین MAP برای X با دانستن مقدار Y

(د) تخمین ML برای X با دانستن مقدار Y

پرسش ۶. گوسی در گوسی

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیر تصادفی iid با توزیع $\mathcal{N}(\mu, \sigma_v^2)$ باشند. فرض کنید σ_v عددی دانسته است اما از مقدار دقیق μ اطلاع دقیقی نداریم و تنها می دانیم که μ متغیری تصادفی با توزیع $\mathcal{N}(\mu, \sigma_m^2)$ است که پارامترهای آن دانسته اند.

(آ) پاسخ فرم بسته تخمین گر MAP کمیت μ را بیابید.

(ب) تخمین ML کمیت μ را نیز بدست آورید.

پرسش ۷. احتمال خطا

(آ) فرض کنید یک بیت را توسط یک کانال ارسال می کنیم. و در سمت گیرنده اگر مقدار A_p مشاهده کردیم یعنی بیت ۱ ارسال شده است و اگر $-A_p$ مشاهده بکنیم یعنی بیت ارسال شده 0 می باشد. اما این کانال نویزی بوده و مقدار اصلی پیام با یک متغیر تصادفی X که

$$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

می باشد جمع می شود.

حال برای این سیستم مرز تصمیم گیری و احتمال خطا در تصمیم گیری را به صورت پارامتری بدست آورید.

(ب) قسمت قبلی را با توزیع لاپلاس به صورت :

$$f_N(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(\frac{-|x|}{b}\right)$$

حل کنید.