



پرسش ۱. معین و کارت هایش

معین دقیقا ۳۰ کارت در دست دارد که ۱۵ تا از کارت‌ها یک طرفشان آبی و طرف دیگرشان قرمز است. و ۱۰ تا کارت دو رو قرمز و ۵ کارت دیگر دو رو آبی هستند. معین یک کارت به صورت تصادفی انتخاب می‌کند و تنها یک طرف آن را به شما نشان می‌دهد و شما باید رنگ طرف دیگر را حدس بزنید. شما که هیچ اطلاعات دیگری ندارید شروع به محاسبه احتمالات می‌کنید.

(آ) اگر رنگ دیده شده توسط شما آبی باشد چقدر احتمال دارد رنگ طرف دیگر قرمز باشد

(ب) اگر رنگ دیده شده توسط شما قرمز باشد چقدر احتمال دارد رنگ طرف دیگر آبی باشد

(ج) حال با دانستن مقادیر به دست آمده از دو قسمت قبلی بگویید اگر کارت دیده شده توسط شما قرمز باشد چه حدسی می‌زنید و اگر آبی باشد چه حدسی می‌زنید؟

پرسش ۲. سکه بازی

پارسا و پریسا شروع به انجام یک بازی می‌کنند. پارسا دقیقا $n+1$ سکه سالم را پرتاب می‌کند و پریسا دقیقا n سکه سالم را پرتاب می‌کند. احتمال اینکه تعداد شیرهای به دست آمده پارسا از پریسا بیشتر باشد چقدر است؟

پرسش ۳. عقده سخت است بر کیسه تهی

در کیسه‌ای ۲۰ مهره قرمز ۵۰ مهره سبز و ۳۰ مهره آبی وجود دارد ۴ مهره از این کیسه را بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

(آ) احتمال اینکه همه مهره هم‌رنگ باشند چقدر است.

(ب) احتمال اینکه از هر مهره حداقل یک رنگ وجود داشته باشد چقدر است.

(ج) احتمال اینکه رنگ سبز در بین مهره‌های انتخاب شده وجود نداشته باشد.

پرسش ۴. کرونا و مدافعان سلامت

(آ) یک مدافع سلامت می‌خواهد سه نفر از افراد مشکوک به کرونا را بدون تست کرونا گرفتن بستری کند. فرض کنید احتمال کرونا داشتن یک فرد مشکوک به کرونا، برابر با $p = 0.2$ است اگر بدانیم حداقل یک فرد کرونایی در بین این سه نفر وجود دارد. چقدر احتمال دارد هر سه نفر آن‌ها کرونا داشته باشند.

(ب) مدافع سلامت می‌داند یک نوع جدید از ویروس کرونا به نام Ω در حال انتشار است اما به دلیل اینکه به تازگی انتشار پیدا کرده است احتمال اینکه یک فرد مشکوک به کرونا به این نوع مبتلا شده باشد خیلی کم و برابر با $1 \ll \alpha$ است. حال اگر بدانیم از بین این سه نفر حداقل یک نفر مبتلا به کرونای Ω است چقدر احتمال دارد هر سه نفر به کرونا (هر نوعی) مبتلا شده باشند.

(ج) مدافع سلامت در نهایت به این نتیجه می‌رسد که چشم بسته تحلیل کردن کار دانشجویهای برق شریف است. پس یک تست کرونا از آن‌ها می‌گیرد تا ویروس Ω را تشخیص بدهد. او می‌داند این تست کمی خطا دارد و اگر یک فرد کرونای Ω داشته باشد به احتمال 0.05 نتیجه تست او منفی و اگر یک فرد کرونای Ω نداشته باشد به احتمال 0.1 نتیجه تست او مثبت می‌شود. حال اگر بدانیم تست یک نفر مثبت شده باشد، چقدر احتمال دارد او واقعا کرونا Ω داشته باشد (فرض کنید α که در قسمت قبل تعریف کردیم در این مساله برابر با 3×10^{-4} است).

(د) جوابی که در بخش قبلی بدست آوردید آیا نشان‌دهنده پرخطا بودن تست مورد نظر است؟ (اختیاری)

پرسش ۵. کنترل کیفیت

علی در کارخانه‌ای به عنوان ناظر کیفیت کار می‌کند. او برای بررسی کیفیت روش زیر را در پی می‌گیرد. او در هر مرحله یک محصول از کارخانه را انتخاب می‌کند و کیفیت آن را بررسی می‌کند تا زمانی که اولین محصول خراب پیدا شود. اگر احتمال خراب بودن یک محصول برابر با 0.01 باشد.

(آ) چقدر احتمال دارد که علی این روش را دقیقاً ۴۰ مرحله تکرار کند؟

(ب) چقدر احتمال دارد علی این روش را حداقل ۴۰ بار تکرار کند؟

(ج) اگر احتمال سالم بودن یک محصول را به طور کلی p فرض کنیم چقدر احتمال دارد این روش n بار تکرار شود؟

علی متوجه می‌شود که این روش آنچنان هم برای کنترل کیفیت مناسب نیست. پس تصمیم می‌گیرد روش خود را به این شکل عوض کند که ۴۰ تا از محصولات را یکجا انتخاب می‌کند و کیفیت آن‌ها را بررسی کند. اگر بدانیم احتمال اینکه یک محصول خراب باشد مستقل از محصولات دیگر برابر با 0.01 باشد:

(د) احتمال اینکه هر ۴۰ محصول سالم باشند چقدر است؟

(ه) احتمال اینکه حداقل یک محصول خراب در بین این ۴۰ محصول باشد چقدر است؟

(و) احتمال اینکه دقیقاً یک محصول خراب در بین این ۴۰ محصول باشد چقدر است؟

(ز) احتمال اینکه دقیقاً ۱۰ محصول از ۴۰ محصول خراب باشد چقدر است؟

(ح) فرض کنید به طور کلی علی n محصول از خط تولید کارخانه انتخاب کند اگر احتمال سالم بودن هر یک از محصولات به طور مستقل p باشد چقدر احتمال دارد دقیقاً k محصول از این n محصول سالم باشند.

پرسش ۶. آمدمی وه که چه مشتاق و پریشان بودم

سارینا مشتاق دوستانش است و می‌خواهد ترتیب یک مهمانی بدهد پس تصمیم می‌گیرد برای دوستانش، مخصوص هر نفر یک دعوتنامه بفرستد ولی از آنجایی که بسیار آدم پریشانی است دعوتنامه‌ها را به صورت تصادفی برای افراد می‌فرستد. اگر تعداد دوستانش n نفر باشد :

(آ) احتمال اینکه همه دوستان سارینا دعوتنامه‌های خودشان (نه فرد دیگری) را دریافت کنند چقدر است؟

- (ب) احتمال اینکه هیچکدام از دوستان سارینا دعوتنامه‌ها خودشان را دریافت نکنند چقدر است؟
- (ج) احتمال اینکه دقیقا k نفر از دوستان سارینا دعوتنامه خودشان را دریافت کنند چقدر است؟
- (د) بررسی کنید برای مقادیر بزرگ n ، جواب مساله (ب) برابر با چه مقداری می‌شود؟

پرسش ۷. برف بازی

- (آ) مهرداد و رهام و سینا و اردلان بعد از بارش برف بدون سابقه در دانشگاه، تصمیم گرفتند برف‌بازی کنند در نتیجه باهم تیم شدند و دقیقا ۱۵۰ گلوله برفی ساختند و سپس شروع به تقسیم آن‌ها کردند. آن‌ها دوس دارند این تقسیم به شکلی باشد که به هر یک از آن‌ها حداقل ۱۷ گلوله برفی برسد. آن‌ها می‌خواهند بدانند حداقل به چند طریق می‌توانند اینکار را بکنند.
- (ب) آن‌ها بعد از کمی فکر به این نتیجه می‌رسند که مهرداد پرتاب دست خوبی ندارد. پس تصمیم می‌گیرند به همه افراد حداقل ۱۷ گلوله بدهند ولی مهرداد بیشتر از ۲۳ گلوله دریافت نکند. تعداد حالات تقسیم مطلوب را برای آن‌ها محاسبه کنید.
- (ج) سینا و رهام تصمیم به تبانی گرفتند تا بیشتر گلوله برفی‌ها را بالا بکشند. آن‌ها تصمیم گرفتند به شکلی گلوله برفی‌ها را تقسیم کنند که به همه حداقل ۱۷ گلوله برفی برسد ولی به مهرداد بیشتر از ۲۳ گلوله برفی و به اردلان بیشتر از ۳۰ گلوله برفی نرسد. تعداد حالات تقسیم مطلوب آن‌ها را محاسبه کنید.

پرسش ۸. رویداد علمی

- پارسا امسال مسئولیت برگزاری یک رویداد علمی بزرگ در دانشگاه را پذیرفته است. او دقیقا ۱۵ نفر انتخاب کرده است که در برگزاری رویداد به او کمک کنند. او می‌خواهد آن‌ها را گروه‌بندی کند تا به هر یک از این گروه‌ها یک وظیفه محول کند.
- (آ) او به چند طریق می‌تواند این افراد را به سه گروه ۳، ۷، ۵ نفره تقسیم‌بندی کند
- (ب) او به چند طریق می‌تواند این افراد را به سه گروه ۵ نفره تقسیم‌بندی کند.
- (ج) زهرا و پریسا دو دوست از بین این ۱۵ نفر هستند که دوست دارند در یک گروه باشند. پارسا به چند طریق می‌تواند ۱۵ نفر را به سه گروه ۵ نفره تقسیم‌بندی کند به طوری که پریسا و زهرا حتما در یک گروه باشند.

پرسش ۹. رخدادهای متوالی

- فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. k رخداد تصادفی به نام A_1, A_2, \dots, A_k از این فضای نمونه در نظر بگیرید. چقدر احتمال دارد که به ازای هر i از ۱ تا k احتمال $P(A_i | A_{i+1})$ برابر با ۱ باشد.

سوالات غیر تحویلی

پرسش ۱. شطرنج احتمالاتی

- (آ) ۵ مهره رخ را به صورت تصادفی در صفحه شطرنج 8×8 می‌گذاریم چقدر احتمال دارد حداقل دو مهره از این ۵ مهره همدیگر را تهدید کنند؟
- (ب) دو مهره اسب سفید و سیاه را به صورت تصادفی در صفحه شطرنج 8×8 می‌گذاریم چقدر احتمال دارد این دو مهره همدیگر را تهدید نکنند؟

پرسش ۲. کاردینالیتی

- (آ) اثبات کنید مجموعه \mathbb{Z} و \mathbb{Q} شمارا هستند.
- (ب) مجموعه زیر مجموعه‌های مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید، اثبات کنید این مجموعه نامشمارا است.
- $$\mathcal{P}_1 = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$$
- (ج) با استفاده از قسمت (ب) اثبات کنید بازه $[0, 1]$ از اعداد حقیقی نامشمارا است.
- (د) با استفاده از قسمت قبلی اثبات کنید مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} نامشمارا است.
- (ه) به نظر شما آیا مجموعه‌ای وجود دارد که نامشمارا تر از مجموعه اعداد حقیقی باشد؟!!! یعنی آیا مجموعه‌ای وجود دارد که به هیچکدام از مجموعه‌های \mathbb{N} و \mathbb{R} تناظر یک به یک پیدا نکند و در عین حال نامتناهی باشد؟ (اختیاری)

پرسش ۳. مثلث مرکز دوست

کیان عاشق مثلث است مخصوصا از نوع مرکز دوستش! به یک مثلث مرکز دوست می‌گوییم اگر مرکز دایره محیطی آن درون خودش باشد. کیان می‌خواهد بداند احتمال اینکه یک مثلث تصادفی مرکز دوست باشد چقدر است برای همین یک دایره با شعاع تصادفی رسم و سه نقطه از دایره را انتخاب می‌کند او می‌خواهد بداند چقدر احتمال دارد این سه نقطه یک مثلث مرکز دوست بسازند.

سوالات کتاب

- کتاب پیشرو نیک فصل ۱ : سوالات ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۴، ۲۵، ۳۳، ۳۴
- کتاب پیشرو نیک فصل ۲ : سوالات ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۶، ۱۸
- کتاب پاپولس فصل ۲ : سوالات ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۱۹، ۲۴، ۲۵، ۲۷