



آمار و احتمال مهندسی

نیم سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

مدرس: سید ابوالفضل مطهری

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین اول (۱۰۰ نمره)

زمان تحویل: تا آخر روز ۲۸ مهرماه.

لطفا پاسخ سوالات را به همراه نام و شماره دانشجویی در CW بارگذاری نمایید.

سوال اول: صف واکسیناسیون کرونا (۲۰ نمره)

بخش اول (۱۰ نمره)

در یک مرکز تزریق واکسن کرونا، ۳ صف واکسن برای واکسن‌های آسترازنکا، سینوفارم و برکت وجود دارد. در صف آسترازنکا، سینوفارم و برکت به ترتیب ۲۰۰، ۳۵۰ و ۳۰۰ نفر پشت سر هم قرار گرفته‌اند که در بین آن‌ها به ترتیب ۱۵، ۳۰ و ۲۰ نفر (که به صورت کاملاً تصادفی در صف قرار دارند) کرونا دارند. یک صف را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و از صف انتخاب شده نیز، به صورت تصادفی از یک نفر تست کرونا می‌گیریم.

۱. (۵ نمره) اگر دقت تست کرونا ۸۰٪ باشد احتمال اینکه نتیجه تست مثبت شود (یعنی مبتلا به کرونا باشد) چقدر است؟

۲. (۵ نمره) اگر دقت تست کرونا ۱۰۰٪ باشد و نتیجه‌ی آن نیز مثبت شود، احتمال اینکه شخص در صف واکسن آسترازنکا بوده باشد چقدر است؟

بخش دوم (۱۰ نمره)

در بخش قبلی، یک صف را تصادفاً انتخاب می‌کردیم و از صف انتخاب شده، از یک نفر به صورت تصادفی تست کرونا می‌گرفتیم. حال اگر به جای این کار، از بین تمام افراد هر سه صف، یک نفر را به صورت تصادفی انتخاب کنیم و از آن فرد تست کرونا با دقت ۸۰ درصد بگیریم و نتیجه مثبت شود، احتمال اینکه این شخص واقعا کرونا داشته باشد چقدر است؟

سوال دوم: امتحانات حضوری (۱) (۱۰ نمره)

فرض کنید تا امتحانات پایان ترم از ۱۰۰۰۰ دانشجوی شریف ۹۰۰۰ نفر واکسینه شده‌اند.

۱. (۵ نمره) اگر در طول امتحانات حضوری احتمال ابتلا به کرونا در فرد واکسینه شده و واکسینه نشده به ترتیب ۵٪ و ۴۰٪ باشد، آنگاه چند درصد دانشجویان در این مدت کرونا می‌گیرند؟

۲. (۵ نمره) با توجه به اینکه جان یک دانشجو هم مهم است می‌خواهیم به مسئولین دانشگاه ثابت کنیم که حتی با وجود اینکه ۹۰٪ دانشجویان واکسینه شده‌اند باز هم چند نفر فوت می‌کنند. برای اثبات این موضوع تعداد دانشجویانی که فوت می‌کنند را بیابید (فرض کنید احتمال فوت فرد واکسینه شده ۰.۵٪ و فرد واکسینه نشده ۲٪ است)

توجه: هیچ آمار دقیقی برای احتمال ابتلا به کرونا در دوران امتحانات و این چنین تجمعاتی در امتحان و در خوابگاه و وجود ندارد و اعدادی که در این سوال نوشته شده است فرضی هستند!

سوال سوم: امتحانات حضوری (۲) (۱۵ نمره)

فرض کنید که مسئولین دانشگاه قانع نشده و مصمم به برگزاری امتحانات به شکل حضوری‌ند. برای برگزاری امتحانات در سالن‌ها، به دلیل حفظ پروتکل‌های بهداشتی، نیاز است که تعداد کمتری دانشجو در هر سالن وجود داشته باشد و این کار مسئولین را با محدودیت فضا جهت برگزاری امتحانات روبه‌رو خواهد کرد. اما آن‌ها حدس می‌زنند که از هر ۲۰ دانشجو، ممکن است ۱ نفر به دلیل ابتلا به کرونا، در زمان امتحان حاضر نشود. به همین خاطر برای برخی از سالن‌ها، تعداد بیشتری دانشجو نسبت به ظرفیت آن در نظر گرفته‌اند.

۱. (۵ نمره) اگر سالن A با حفظ پروتکل‌های بهداشتی، برای ۵۰ نفر از دانشجویان فضا داشته باشد اما ظرفیت آن را ۵۲ نفر در نظر گرفته باشند احتمال آن که در این تالار مشکلی از نظر فضا پیش نیاید، (یعنی از ۵۲ دانشجو حداکثر به اندازه ظرفیت ۵۰ نفری دانشجو شرکت کند) چقدر است؟

۲. (۵ نمره) مسئولین برای سالن B ریسک نکرده و دقیقاً ظرفیت ۵۰ دانشجو را برای این سالن تعیین می‌کنند. فرض کنید یکی از دانشجویان مبتلا به کروناست و در امتحان شرکت کرده است! اما به دلیل اثرات بیماری، به جای نشستن در صندلی تعیین شده، در صندلی دیگری می‌نشیند. دانشجویان بعدی، در صورت خالی بودن جایشان، روی صندلی خود نشسته و در صورت پر بودن آن، به صورت تصادفی صندلی دیگری را انتخاب می‌کنند. احتمال این که نفر آخر روی صندلی خود بنشیند چقدر است؟

۳. (۵ نمره) قسمت قبل را با این تفاوت که نفر اول به صورت کاملاً تصادفی روی یکی از این ۵۰ صندلی نشسته باشد، تکرار کنید.

سوال چهارم: امتحانات حضوری (۳) (۱۰ نمره)

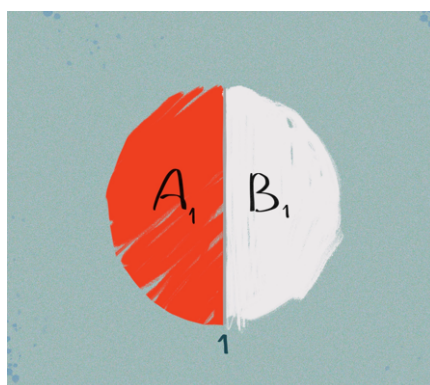
حالا که امتحانات حضوری شده، فرض کنید شما و یکی از دوستانتان قبل امتحان آمار هماهنگ می کنید که با هم به دانشگاه بیاید و با دیدن هم بعد مدت ها، رنج ناشی از امتحانات حضوری را کم کنید. برای این کار تصمیم می گیرید بین ساعت ۸:۳۰ تا ۹ در دانشگاه باشید. شما ۴ دقیقه منتظر می مانید و دوستان ۵ دقیقه و اگر در این مدت یکدیگر را نبینید به جلسه امتحان می روید.

۱. (۵ نمره) با این فرض که زمان رسیدن شما و دوستان از هم مستقل است، احتمال این که بتوانید یکدیگر را ببینید، چقدر است؟

۲. (۵ نمره) اگر یکدیگر را ببینید، احتمال اینکه شما زودتر از دوستان رسیده باشید چقدر است؟

سوال پنجم: هک فیسبوک (۱) (۱۵ نمره)

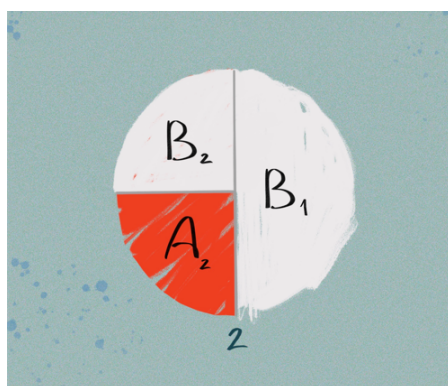
در طی قطع چند ساعته ی فیسبوک، واتساپ و اینستاگرام، شایعه شد این شرکت توسط یک هکر چینی ۱۳ ساله هک شده است! 😊! فرض کنیم این اتفاق افتاده است و این هکر، ایمیل ۱،۰۷۳،۷۴۱،۸۲۴ کاربر این شرکت را بدست آورده است. این هکر نابغه می خواهد مجددا از نبوغ خود استفاده کند و از ایمیل های کاربران سوء استفاده کند. او در زمان مسابقه های فوتبال، به این کاربرانی که اطلاعاتشان را دارد، پیام می دهد و نتیجه بازی را پیش بینی می کند. در بازی اول که بین تیم A_1 و B_1 برگزار شده، به نصف کاربران ایمیل می دهد که تیم A_1 بازی را می برد و به نصف دیگر کاربران ایمیل می دهد که تیم B_1 بازی را می برد (فرض کنید مساوی نداریم!). واضح است که قطعا یکی از این پیش بینی ها درست است. بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم A_1 برده است.



شکل ۱: به کاربران با رنگ قرمز ایمیل با پیش بینی درست داده شده است.

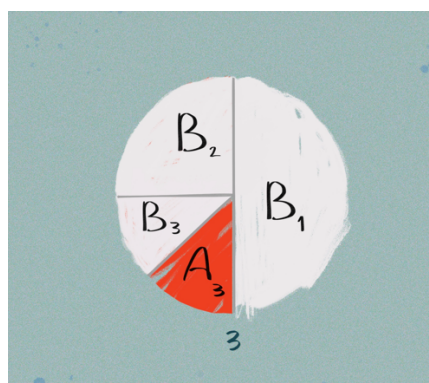
در بازی فوتبال بعدی که بین تیم A_2 و B_2 است به نصف کاربران که درست پیش بینی کرده بود (یعنی به کاربرانی که ایمیل داده بود تیم A_1 می برد) ایمیل می دهد که تیم A_2 خواهد برد و به نصف دیگر ایمیل می دهد تیم B_2 خواهد برد.

باز هم قطعا یکی از این دو پیش بینی درست است! مجددا بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم A_2 برده است.



شکل ۲: به کاربران با رنگ قرمز ایمیل با پیش بینی درست داده شده است.

تا اینجا به $\frac{1}{4}$ کاربران دو پیش بینی درست ارسال شده است. مجددا در بازی بین A_3 و B_3 نیز به همین ترتیب ایمیل می زند و در پایان این بازی به $\frac{1}{8}$ کاربران سه پیش بینی درست ارسال شده است و آنها تا حدی اعتماد به ارسال کننده ایمیل پیدا می کنند و فکر می کنند احتمالا پیش بینی های بعدی این شخص ناشناس نیز درست است.



شکل ۳: به کاربران با رنگ قرمز ایمیل با پیش بینی درست داده شده است.

اما در مرحله ی بعدی دیگر به طور رایگان پیش بینی نمی کند! هر ۱۳ ساله در متن ایمیل به این $\frac{1}{8}$ از کاربران می گوید: ”برای دریافت پیش بینی بازی بعدی معادل ۱۰۰ دلار بیت کوین برای من ارسال کنید. شما می توانید چند هزار دلار شرط بندی کنید و این ۱۰۰ دلار را جبران نمایید.“ (ایمیل مرحله ۱) فرض کنید در این مرحله (مرحله ۱)، ۵ درصد کاربران، این هزینه را به این امید که با شرط بندی روی نتیجه بازی بتوانند این ۱۰۰ دلار را جبران کنند، پرداخت نمایند. در مرحله ۲ که به $\frac{1}{16}$ از کل کاربران ایمیل می دهد و مجددا برای پیش بینی درخواست هزینه کند و این کار را تا تمام شدن کاربران انجام دهد.

۱. (۵ نمره) فرض کنید در مرحله i ام هر درخواست $\max\{1000, 100i\}$ دلار کند و از $\frac{1}{2^{(i+2)}}$ کاربر باقیمانده

$\max\{30, 5i\}$ درصدشان این هزینه را پرداخت کنند. محاسبه کنید که در پایان کار، این هکر به چه ثروتی دست پیدا می‌کند؟! ($i \geq 1$)

۲. (۱۰ نمره) احتمال دستگیر شدن هکر در مرحله اول ۵ درصد است. برای $i > 1$ اگر احتمال اینکه هکر در مرحله i ام دستگیر شود (با فرض اینکه در مرحله $i-1$ ام دستگیر نشده باشد) $\max\{30, 5i\}$ درصد باشد، آنگاه احتمال اینکه هکر در مرحله i ام دستگیر شود و احتمال اینکه تا پایان دستگیر نشود را بیابید.

سوال ششم: هک فیسبوک (۲) (۱۰ نمره)

این هکر ۱۳ ساله علاقه‌مند است تاریخ تولد کاربران را بررسی کند. برای این منظور از ۱,۰۷۳,۷۴۱,۸۲۴ کاربر، n نفر را بصورت تصادفی انتخاب می‌کند.

۱. (۵ نمره) احتمال اینکه از این n نفر، بیش از یک نفر روز تولد یکسانی داشته باشند چقدر است؟

۲. (۵ نمره) او می‌خواهد ثروتی که در سوال قبل بدست آورده است را با افرادی که روز تولدشان با روز تولد خودش یکسان تقسیم کند. احتمال اینکه حداقل یک نفر روز تولد یکسانی با این هکر داشته باشد چقدر است؟

سوال هفتم: Game Squid (۱۰ نمره)

در این بازی در مرحله نخست n نفر شرکت کرده‌اند که هر کاربر با یک شماره مشخص شده است. یکی از تماشاگران بازی شرط بسته است که از k نفری که در مرحله نخست حذف (!!!) نمی‌شوند، هیچ دو نفری از آن‌ها شماره‌ی متوالی نخواهند داشت. احتمال این که حرف این تماشاگر درست از آب دربیاید چقدر است.

سوال هشتم: کدگشایی (۱۰ نمره)

فرض کنید که نام‌های کدگذاری شده درباره یک بمب‌گذاری به طول G نوشته شده‌است. پس از آن که خرابکاران فهمیدند که پلیس از وجود این نام آگاه شده است، تمام نسخه‌های موجود از این نام را به قطعاتی به طول L تقسیم کرده‌اند که هر قطعه می‌تواند از یک نقطه تصادفی در این نام‌های به طول G شروع شده باشد. حالا پلیسی که مخفیانه عضو این گروه شده‌است می‌خواهد با برداشتن N قطعه از قطعاتی که طول L دارند، این متن کدگذاری شده را به طور کامل بازیابی نماید و پس از آن با کدگشایی به محل بمب‌گذاری دست پیدا کند. با توجه به این موضوع و زمان محدودی که پلیس برای یافتن قطعات دارد، تعداد N مورد نظر را برحسب G و L بیابید.

موفق باشید.