۱ مقدمه

چنگیز که ترم سوم دانشگاهش تمام شده و از درس و دانشگاه خسته شده می‌خواهد به یک سفر برود. اما از آنجایی که او اطلاعات زیادی در مورد اماکن گردشگری ندارد تصمیم می گیرد با سپردن سرنوشتش به دست تقدیر سفری را آغاز کند. از آنجایی که او در درس آمار و احتمال مهارت زیادی ندارد از شما می‌خواهد تا در مورد تصمیماتش و کارهایی که به صورت تصادفی در این سفر انجام می‌دهد پیش‌بینی‌هایی انجام دهید.

تعاریف

فرآیند تصادفی به صورت کلی به مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی به صورت زیر می‌گوییم:

$$\{X(t):\ t \in I\}$$

که در آن به هر متغیر تصادفی یک پارامتر t که متعلق به یک مجموعه I است نسبت داده می‌شود که می‌تواند پیوسته یا گسسته یا حالت‌های دیگر که ما با آن‌ها کاری نداریم باشد. این پارامتر در واقع نشان دهنده زمان در فرآیند(در صورتی که پیوسته باشد) یا شماره مرحله فرآیند(در صورتی که گسسته باشد) است. به عنوان مثال برای مورد گسسته آن را با $n \in \mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم، یعنی این مجموعه از متغیر تصادفی را $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نویسیم. برای حالت پیوسته نیز در اکثر موارد $t \in \mathbb{R}^+$ در نظر می‌گیریم. تمامی این متغیرهای تصادفی مربوط به یک فضای احتمال((Ω, Σ, P)) که به ترتیب فضای نمونه، جبر سیگما، و measure احتمال هستند) هستند. به صورت خلاصه جنس متغیرهای تصادفی در این فرآیند تصادفی یکسان است در صورتی که توزیع آن‌ها می‌تواند متفاوت باشد و همچنین می‌توانند به هم وابسته باشند. این متغیرهای تصادفی مانند زمان می‌توانند پیوسته یا گسسته یا حالات دیگر که ما با آن‌ها کاری نداریم باشند.

دسته خاصی از فرآیندهای تصادفی که کارها و حرکات چنگیز از این جنس هستند فرآیندهای مارکوفی و زنجیرهای مارکوفی نام دارند. که این فرآیندها دارای ویژگی‌ای به نام خاصیت مارکوف هستند. دسته‌بندی این فرآیندها به صورت زیر است:

فضای حالت پیوسته	فضای حالت گسسته	فضای حالت / زمان
فرآیند مارکوف زمان گسسته	زنجیر مارکوف زمان گسسته	زمان گسسته
فرآیند مارکوف زمان پیوسته	زنجیر مارکوف زمان پیوسته	زمان پیوسته

که در اینجا منظور از فضای حالت همان مقادیری که متغیرهای تصادفی می‌توانند اختیار کنند است.

خاصیت مارکوف به صورت ساده برای زنجیرهای مارکوفی به صورت زیر:

$$\mathbb{P}[X(t_{n+1})|X(t_1),\ X(t_2),\dots,\ X(t_n)] = \mathbb{P}[X(t_{n+1})|X(t_n)], \quad \forall t_{n+1}\in I$$

و برای فرآیند مارکوف زمان پیوسته به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(X(t_{n+1})|X(t_1),\ X(t_2),\dots,\ X(t_n)) = f(X(t_{n+1})|X(t_n)), \quad \forall t_{n+1}\in I$$

طوری که برای هر دو داریم:

$$0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t_{n+1}$$

که این برای $I=\mathbb{N}$ و $I=\mathbb{R}^+$ برای هر دو یکسان و به صورت بالا است.

یک دسته بندی دیگر برای فرآیندها و زنجیرهای مارکوفی همگن بودن یا ناهمگن بودن در زمان است. به این معنا که عبارت‌هایی که در سمت راست روابط بالا آمده اند: $\mathbb{P}[X(t)|X(t')]$ یا $f(X(t)|X(t'))$ به ازای $t\ge t'$ مستقل از زمان باشند طوری که داشته باشیم:

$$f(X(t+\tau)|X(t'+\tau)) = f(X(t)|X(t'))$$
$$\mathbb{P}[X(t+\tau)|X(t'+\tau)] = \mathbb{P}[X(t)|X(t')]$$
$$\forall\tau\in I$$

در این حالت میگوییم که فرآیند یا زنجیر مارکوف همگن در زمان داریم. در غیر این صورت ناهمگن در زمان است.

اعمال تصادفی چنگیز در این سفر از جنس راه رفتن تصادفی است که مارکوفی است و هر چهار حالت ذکر شده در جدول صفحه قبل را می‌تواند داشته باشد. همچنین فرض کنید که راه رفتن تصادفی به گونه‌ای است که امکان رفتن به تمام نقاط فضای حالت را دارد. یعنی به ازای هر نقطه از فضای حالت وجود دارد زمانی که احتمال وجود در آن نقطه غیر صفر باشد(در مورد فضای حالت پیوسته چگالی احتمال در آن نقطه غیر صفر باشد).

ساده‌ترین نوع راه رفتن تصادفی به صورت زنجیره مارکوفی با زمان گسسته است که مثالی پرکاربرد از آن راه رفتن تصادفی 1 بعدی روی محور اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است. یعنی داریم $X_n\in\mathbb{Z}$ که این متغیرهای تصادفی نشان دهنده قدم برداشته شده در راستای محور اعداد صحیح در هر مرحله است. مکان چنگیز نیز در مرحله n ام با فرض اینکه در ابتدا در مبدا قرار دارد به صورت زیر است:

$$Z_n=\sum_{i=1}^{n}X_n$$

در اینجا نوع خاص ساده‌ای از این راه رفتن تصادفی را به علت پرتکرار بودن در پرسش ها تعریف می‌کنیم.
راه رفتن تصادفی ساده یک راه رفتن تصادفی یک بعدی روی محور اعداد صحیح با توزیع قدم‌های iid به صورت زیر است:

$$\mathbb{P}[X_n=x]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=\pm1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

در قسمت‌های پیش‌رو شما باید با استفاده از دانسته‌هایی که در درس آمار و احتمال کسب کردید و تعاریفی که در این قسمت خوانده‌اید. به چنگیز کمک کنید تا نتیجه اعمال تصادفی خود را پیش‌بینی کند.

۲ amir

پرسش تئوری ۱:
چنگیز پس از خروج از هتل وارد ایستگاه مترو می‌شود. او به صورت تصادفی وارد اولین ایستگاه مترو شده است. خط مترویی که چنگیز در آن قرار دارد به تعداد بی نهایت ایستگاه دارد که از شماره ۱ شروع شده و تا ∞ ادامه پیدا می‌کند. او می‌داند هر ۵ دقیقه یکبار مترو وارد ایستگاه می‌شود. اما او تصمیم می‌گیرد برای سوار شدن به مترو از یک سکه سالم استفاده کند . اگر نتیجه سکه شیر بود سوار مترو نمی‌شود. اما اگر او خط مشاهده کند سوار مترو می‌شود و در ایستگاه بعدی پیاده می‌شود و در هر ایستگاه به صورت مستقل همین فرایند را تکرار می‌کند.
الف) با چه احتمالی او بعد از ۳۰ پرتاب سکه در ایستگاه بیستم خواهد بود؟
ب) حال فرض کنید سکه ناسالم باشد و با احتمال p خط ظاهر شود. اگر متغیر تصادفی X را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر چنگیز سوار مترو شود و به ایستگاه بعدی برود} \\ 0 & \text{چنگیز سوار مترو نشده} \end{cases}$$

$E[X]$ و $VAR(X)$ را محاسبه کنید.
ج)فرض کنید $Z_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$ که نشان دهنده شماره ایستگاه مقصد چنگیز بعد از nمرحله پرتاب سکه است. ابتدا توزیع احتمال متغیر تصادفی Z را به دست بیاورید.
حال $E[Z]$ و $VAR(Z)$ را حساب کنید.
چه احساسی نسبت به $E[Z]$ دارید؟ این مولفه چه چیزی را توصیف می‌کند ؟
د) چنگیز که از تجربه دیروز مسافرت خود راضی نبوده به یکی از دوستانش زنگ می‌زند تا با او ملاقات کند اما از بد حادثه پس از وارد شدن به اولین ایستگاه رومینگ سیم کارت او فعال می‌شود و او نمی‌تواند ایستگاه مقصد را که قرار است او و دوستش را در آن ملاقات کند از او بپرسد. او تصمیم می‌گیرد که یکی یکی در ایستگاه ها پیاده شود تا در نهایت دوست خود را پیدا کند.و زمانی که موفق شد دوستش را پیدا کند حرکت او متوقف می شود. فرض کنید X متغیر تصادفی شماره ایستگاهی باشد که او دوستش را در آن ملاقات می‌کند. با فرض اینکه دوست او در هر ایستگاه مستقل از دیگر ایستگاه ها حاضر باشد برابر با p باشد توزیع احتمال X را پیدا کنید. سپس $E[X]$ و $VAR(X)$ را محاسبه کنید(باز هم چنگیز حرکت را از ایستگاه اول خطی که بی نهایت ایستگاه دارد شروع کرده است).
پرسش شبیه سازی ۱:
$Z_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$ که نشان دهنده شماره ایستگاه مقصد چنگیز بعد از nمرحله پرتاب سکه است. الف)فرض کنید چنگیز با سکه ای به احتمال خط آمدن p و احتمال شیر آمدن p-۱ می‌خواهد سفر در ایستگاه مترو را انجام دهد. نمودار جرم احتمال را برای متغیر تصادفی Z و با احتمال $p = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$ و برای $n = 10, 20, 50, 100, 1000$ مرحله پرتاب سکه رسم کنید.
پرسش تئوری ۲:
چنگیز از صحبت به زبان غیر مادری متنفر است برای همین از هیچ کس درباره اماکن گردشگری سوال نمی‌پرسد . او که هک کردن و کار با هوش مصنوعی را بلد است دست به کار جالبی می‌زند. ابتدا با هک کردن اطلاعات متروی شهر به مبدا و مقصد تمام مسافران دسترسی پیدا می‌کند و با کمک الگوریتمی که طراحی می‌کند اطلاعات مسافران را استخراج می‌کند. او با آنالیز اطلاعات کارت مترو هایی که مخصوص گردشگران خارجیست متوجه می‌شود که به طور میانگین ۷۵ درصد گردشگران در ایستگاه سیرک شهر رفت و آمد دارند و واریانس رفت و آمد آن ها در ایستگاه ۲۵ است..
الف) کران احتمال بالا را برای احتمال این که فردا میزان رفت و آمد مسافران در ایستگاه سیرک بیشتر از ۸۵ درصد باشد پیدا کنید.
ب) حال احتمال اینکه فردا ۶۵ تا ۸۵ درصد مسافران در ایستگاه سیرک رفت و آمد کنند را حساب کنید.

ج) چند مسافر باید در ایستگاه رفت و آمد کنند تا مطمئن حداقل با احتمال ۰.۹ میانگین رفت و آمد ها بین ۷۰ تا ۸۰ درصد بوده است.

د) : چنگیز که دیروز داشت به سمت موزه می‌رفت کارت های خود را در ایستگاه ها گم کرده است. او ۲۰۰ کارت به رنگ های آبی ، قرمز ،سبز و زرد و از هر کدام به تعداد ۵۰ تا داشت. او ابتدا با مرکز مترو تماس می‌گیرد و متوجه می‌شود به دلیل پارگی که در جیب او وجود داشته در هر ایستگاه یکی از کارت هایش را گم کرده است.او تصمیم می‌گیرد ایستگاه ها را یکی یکی طی کند و کارت هایش را خودش جمع کند(چون مرکز مترو از او پول زیادی در عوض جمع کردن کارت ها خواسته است). نشان دهید در هر موقعیتی احتمال شرطی اینکه کارت گم شده در ایستگاه بعدی قرمز باشد با احتمال شرطی آخرین کارت گم شده بودن یک کارت قرمز برابر است. (توجه کنید چنگیز در ۲۰۰ ایستگاه مجاور کارت گم کرده و ایستگاه ها را به ترتیب می‌پیماید)

پرسش شبیه سازی ۳: الف) به تعداد ۱۰۰۰۰ بار کارت های مختلف را در ایستگاه های مختلف پخش کنید(چون فاصله بین ایستگاه ها مهم نیست تعداد ایستگاه ها را به تعداد کارت ها در نظر بگیرید و حرکت را به صورت یکی یکی از ایستگاه اول تا آخر انجام دهید) سپس با پیمایش ایستگاه ها به ترتیب احتمال قسمت د پرسش تئوری قبلی را به دست بیاورید. آیا جواب شما با قسمت قبلی یکسان است؟
ب) اینبار شبیه سازی را برای ۴۰۰۰،۱۰۰۰،۴۰۰ و ۱۰۰۰۰ کارت انجام دهید. آیا تغییر زیادی در نتیجه شبیه سازی مشاهده می‌کنید؟

پرسش تئوری ۳:
این بار چنگیز می‌خواهد شانس خود را برای رسیدن به یک مقصد ایده آل با کمک یک توزیع پواسون X با میانگین ۱ امتحان کند. یعنی او همانند قبل وارد ایستگاه اول مترو می‌شود و در هر بار یک بلیط می‌خرد سپس با آن بلیط سوار مترو می‌شود و در هر مرحله x عدد ایستگاه رد می‌کند که در آن x از توزیع X پیروی می‌کند. با فرض اینکه $X_1, X_2, ..., X_{20}$ توزیع های (iid) باشند. و $Z_{20} = X_1 + ... + X_{20}$ باشد.
الف)با کمک نامساوی مارکف کران بالای عبارت زیر را پیدا کنید

$$P\Big\{Z_{20} = \sum_{i=1}^{20} X_i < 15\Big\}$$

ب) با کمک قضیه حد مرکزی احتمال زیر را تخمین بزنید.

$$P\Big\{Z_{20} = \sum_{i=1}^{20} X_i < 15\Big\}$$

پرسش تئوری ۴: چنگیز موفق شد نهایتا محل موزه شهر را پیدا کند او فهمید که برای رفتن به موزه باید ایستگاه $300-$ام را رد کند اما فقط یک مشکل وجود دارد . او با هر بلیط فقط می‌تواند یک تا شش ایستگاه جابه‌جا شود(توجه کنید او با احتمال یکسان در هر ۶ ایستگاه پیش رو می تواند پیاده شود اما حتما بعد از طی ۶ ایستگاه باید پیاده شود) و برای اینکه تعداد ایستگاه دیگری به سمت جلو حرکت کند باید از مترو پیاده شود و یک بلیط دیگر تهیه کند. احتمال اینکه حداقل ۸۰ بلیط برای رد کردن ایستگاه $300-$ام نیاز باشد را حساب کنید.

پرسش شبیه سازی ۲:
الف) حال فرض کنید که جابه‌جایی در بین ایستگاه ها را به کمک شبیه سازی می‌خواهیم حساب کنیم. همانطور که در پرسش تئوری ۴ دیدید فرد برای رفتن به موزه باید با هر بلیط بین یک تا ده ایستگاه جابه‌جا شود. حال به

کمک شبیه سازی احتمال اینکه برای جابه‌جایی و رد شدن از ۳۰۰ ایستگاه به کمک دقیقا ۸۰ بلیط را محاسبه کنید. برای ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی را انجام دهید و تعداد حالت هایی که با کمک ۸۰ بلیط از ۳۰۰ ایستگاه رد شده را در خروجی نمایش دهید.
ب) نموداری رسم کنید و احتمال استفاده از حداقل ۷۰ تا ۱۵۰ بلیط را برای طی کردن ۳۰۰ ایستگاه رسم کنید.(یعنی برای تک تک حالت های استفاده از ۷۰ تا ۱۵۰ بلیط)
پرسش تئوری ۵:
چنگیز که در حال گشت و گذار در خیابان های چین است. با یک بازی مواجه می‌شود. به این شکل که یک ماشین اسباب بازی داخل یک محفظه قرار دارد و فقط می‌تواند به سمت جلو یا عقب حرکت کند. اگر فرض کنیم ماشین اسباب بازی به شکل یک نقطه روی محور اعداد حقیقی است و الان در نقطه $Z_0 = 100$ قرار دارد و متغیر تصادفی Z_n نقطه مقصد او را نشان می‌دهد به طوری که $Z_n = Z_{n-1} + X_n$ باشد و X_n در هر مرحله یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 = 1$باشد با چه احتمالی بعد از n=۱۰ حرکت جلوتر از نقطه ۱۰۵ قرار بگیرد.

ب): اگر جابه‌جایی ماشین اسباب بازی را با متغیر تصادفی X_i که در قدم $i-$ام انجام شده و یک متغیر تصادفی (iid) است مدل کنیم. نشان دهید که توزیع احتمال توام دنباله $(X_1, X_2, ..., X_n)$ با توزیع احتمال توام دنباله$(X_n, X_{n-1}, ..., X_2, X_1)$ یکسان است.
ج) فرض کنید که X_i ها متغیر های تصادفی (iid) هستند. و می‌دانیم که $0 < E[X]$. اگر تعریف کنیم:

$$N = min\{n : X_1 + X_2 + ... + X_n > 0\}$$

آنگاه ثابت کنید :

$$E[N] < \infty$$

د) می‌دانیم که مقصد ماشین را در مرحله $n-$ام را با $Z_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ نشان می‌دهیم. اگر R_n را به صورت تعداد مقدارهای متمایز $(Z_0, Z_1, Z_2, ...)$ تعریف کنیم آنگاه نشان دهید:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{E[R_n]}{n} = P[\text{car never returns to 0}]$$

ه) حال فرض کنید ماشین اسباب بازی در هر مرحله یک قدم به جلو یا عقب می‌رود. حال ثابت کنید برای هر $k \neq 0$ امید ریاضی تعداد دفعاتی که محل حضور ماشین بعد از برداشتن قدم برابر با k می‌شود پیش از صفر شدن دوباره محل حضور ماشین ، برابر با ۱ است.

پرسش شبیه سازی ۳:
الف) با توجه به قسمت الف پرسش قبلی موقعیت مکانی ماشین اسباب بازی را به کمک شبیه سازی تعیین کنید. به طوری که همانند مثال قبلی $Z_n = Z_{n-1} + X_n$ مقصد ماشین را نشان می‌دهد و متغیر تصافی X_i یک متغیر تصادفی گاوسی با میانگین ۰ و واریانس 1 باشد. به ازای ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی برای گام های $n = 10, 20, 50, 100, 200$ حساب کنید چند دفعه مقصد نهایی این ماشین جلو تر ار نقطه ۱۰۵ خواهد بود.

ب)با توجه به قسمت ب پرسش تئوری قبلی فرض کنید متغیر تصادفی X_i از توزیع نرمال با میانگین ۵ و واریانس ۱ تبعیت می‌کند. حال با توجه به تعریف $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ که نشان دهنده مقصد ماشین اسباب‌بازی بعد از n قدم است. احتمال هرگز صفر نشدن مقصد آن بعد از شروع بازی را به کمک شبیه سازی به دست بیاورید. به این صورت که ۱۰۰۰ بار شبیه سازی را انجام دهید و هر بار ۱۰۰ قدم بردارید تعداد

دفعاتی که ماشین اسباب بازی به نقطه صفر بازگشته(برابر یا کوچکتر از صفر شده) را به عنوان حالت مطلوب در نظر بگیرید.
ج)قسمت قبلی را به ازای توزیع نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۵ تکرار کنید.
د)اینبار با توجه به تعریف R_n در پرسش تئوری قبلی شبیه سازی را با نرمال با میانگین ۵ و واریانس ۱ انجام دهید و مقدار $\frac{E[R_n]}{n}$ را با جواب قسمت ب مقایسه کنید.
د) شبیه سازی را برای نرمال میانگین ۲ و واریانس ۵ تکرار کنید و پاسخ را با قسمت ج مقایسه کنید.

پرسش تئوری ۶: تعریف Cumulant generatnig function
تابع K_Xبه شکل زیر تعریف می شود.

$$K_X(t) = log \sum_{n=0}^{\infty} p(x)e^{tx}$$

الف)چنگیز که در کویر زندگی می‌کند به ندرت باران را در طول سال می‌بیند. حال که از پنجره هتل بارش باران را مشاهده کرده می‌خواهد در خیابان های شهر به صورت تصادفی قدم بزند. هر گام او به صورت مستقل از سایر گام ها از توزیع X پیروی می‌کند. که به طور کلی توزیع X می‌تواند هر توزیع احتمالی باشد. با توجه به $Z_n = X_1 + X_2 + ...X_n$ نشان دهید که $K_Z = nK_X$
ب) ثابت کنید که

$$P[Z_n \geq \beta n] \leq e^{(r.n)}$$

به طوری که در آن

$$r := \sup_{t \geq 0}\{t.\beta - K_X(t)\}$$

و

$$\beta > E[X]$$

پرسش تئوری ۷: الف) با توجه به تعریف K این تابع را برای توزیع گاوسی با میانگین صفر و واریانس σ^2 حساب کنید.

$$N \hookrightarrow Normal(0, \sigma^2) \longrightarrow K_N(t) =?$$

ب)می دانیم متغیر تصادفی X را داریم به شرطی که $|X| \leq \sigma$و $E[X] = 0$ ثابت کنید:

$$P[Z_n \geq \beta n] \leq e^{-\frac{\beta^2}{2.\sigma^2}.n}$$

به طوری که $\beta > 0$
راهنمایی : میدانیم برای هر متغییر تصادفی Y با $E[Y] = 0$ و $|Y| < \sigma$داریم : $K_Y(t) \leq \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$

پرسش تئوری ۸: چنگیز که حالا در مرکز شهر قرار دارد می خواهد وارد خط متروی اصلی شهر شود . این خط مترو دارای بی نهایت ایستگاه است که از $-\infty$تا ∞ شماره گذاری شده اند.چنگیز که به علم احتمال علاقه فراوانی دارد می خواهد احتمال حضور در ایستگاه $x-$ام را محاسبه کند.او فرض می کند که در هر ایستگاه مستقلا می تواند به ایستگاه سمت چپ یا راست با احتمال برابر برود یعنی اگر در ایستگاه صفرم قرار دارد با احتمال $\frac{1}{2}$به ایستگاه 1 و با احتمال $\frac{1}{2}$به ایستگاه -1 می رود.
الف)فرض کنید که متغیر تصادفی Xنشان دهنده شماره مقصد چنگیز است و n تعداد کل جابه‌جایی های اوست. ابتدا$P[X, n]$ را به کمک تابع احتمال $P[X - 1, n - 1]$ و $P[X + 1, n - 1]$ به دست بیاورید.
ب) حال به کمک رابطه بازگشتی که قسمت قبل به دست آوردید نشان دهید که

$$P[x, n] = \frac{n!}{(\frac{n-X}{2})!(\frac{n+X}{2})!}.(\frac{1}{2})^n$$

ج) حال اینبار فرض کنید که $E[X]=\mu\neq 0$ است. به ازای هر $A,B>0$ می‌خواهیم احتمال اینکه $Z_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ به مقدار A یا بیشتر برسد ، قبل از اینکه به مقدار $-B$ یا کمتر از آن برسد را حساب کنیم.این احتمال را با P_A نشان می‌دهیم. نقطه توقف چنگیز از این رابطه به دست می‌آید:

$$N=\min\{n:Z_n\geq A|Z_n\leq -B\}$$

راهنمایی : ابتدا با تعریف $E[e^{\theta X}]=1$ و با فرض وجود و یکتا بودن θ احتمال P_A را محاسبه کنید.
ه) حال با کمک جواب به دست آمده در قسمت قبلی تخمینی از $E[N]$ به دست بیاورید.

پرسش شبیه سازی۳: الف)تابع جرم احتمالی را که در بخش ب پرسش قبلی به دست آورده اید شبیه سازی کنید فرض کنید چنگیز بعد از $n=100000$حرکت ایستگاه $X-$ام پیاده شده در نمودار جرم احتمال را برای بازه

$$-100000<X<100000$$

رسم کنید. نمودار نهایی شبیه کدام توزیع شده؟

پرسش شبیه سازی ۲ قبلی ب)با توجه به بخش ج پرسش قبلی با دانستن این که خط مترو دارای بی‌نهایت ایستگاه است، جابه‌جایی چنگیز را شبیه سازی کنید. محدوده حرکت چنگیز را به ازای $M=10,100,1000$ به تعداد ۱۰۰۰۰۰ بار شبیه سازی کنید و درمورد بازگردنده بودن یا نبودن حرکت چنگیز اظهار نظر کنید.
ج) حال اینبار با فرض کنید که حرکت چنگیز از توزیع نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۲ تبعین می‌کند شبیه سازی مربوطه در قسمت ب را انجام دهید. فرض کنید $A=10,B=2,$ حال برای ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی که در هر بار چنگیز ۱۰۰ بار جابه‌جا می‌شود P_A را به کمک شبیه سازی حساب کنید.

پرسش تئوری ۹: چنگیز در ادامه مسافرت خود وارد یک زمین بازی می‌شود.که اساس بازی بر جابه‌جا شدن است چنگیز می‌خواهد صرفا شانس خود را در این بازی امتحان کند. او در هر دقیقه یک قدم با طول ثابت α و با زاویه تصادفی بر می‌دارد. مقصد نهایی چنگیز را با متغیر تصادفی X نشان می‌دهیم.
الف)$E[X]$ را محاسبه کنید.
ب)$E[X^2]$ را محاسبه کنید.
ج)$E[X^4]$ را محاسبه کنید.

پرسش تئوری ۱۰: چنگیز امروز می‌خواهد به پارک جنگلی شهر برود. طبق پرس و جویی که کرده تصمیم دارد به شکل زیر عمل کند. ابتدا وارد ایستگاه صفرم مترو شود و سپس در هر مرحله مستقلا از سایر مراحل با احتمال p به سمت ایستگاه سمت راست و به احتمال $q = 1 - p$ به ایستگاه سمت چپ برود(در هر حرکت فقط یک ایستگاه جابه‌جا می‌شود).
الف) با فرض اینکه چنگیز پس از n بار قدم برداشتن r ایستگاه به سمت راست رفته باشد و l ایستگاه به سمت چپ ، $P[r, l, n]$ را محاسبه کنید.
ب) با کمک جوابی که در مرحله قبلی به دست آوردید.$P[X, n]$ را حساب کنید.
ج) با توجه به رابطه $ln(n!) = nln(n)-n+O(n)$ تابع $P[X, n]$ را برای n های بزرگ به دست بیاورید.

پرسش شبیه سازی۴:
الف)تابع جرم احتمال که در پرسش تئوری ۱۰ قسمت ب به دست آورده اید را رسم کنید.$p = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$ و $n = 1000$ را فرض کنید و به ازای p های مختلف تابع جرم احتمال را رسم کنید.
ب) به کمک شبیه سازی برای $N = 10000$ بار میانگین مقصد نهایی را برای چنگیز بعد از $n = 10000$ قدم در خروجی نمایش دهید. $p = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$
ج)نمودار توزیع مقصد های چنگیز را برای $N = 100000$ بار شبیه سازی رسم کنید. فرض کنید $p = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$ و $n = 10000$ قدم است.

پرسش تئوری ۱۱: چنگیز در تالار هتل ایستاده و در موقعیتی قرار دارد که درب سمت چپ با او یک متر و درب سمت راست با او دو متر فاصله دارد. چنگیز که در نوجوانی عضو تیم ملی پرش طول بوده می‌خواهد یاد ایام جوانی را تکرار کند. او به صورت تصادفی با احتمال برابر به چپ یا راست می‌پرد. می‌دانیم طول هر پرش او یک متر است. او تا زمانی که از هتل خارج نشده به پریدن ادامه می‌دهد. و هر پرش او مستقل از پرش های دیگر است. با چه احتمالی او از درب سمت راست خارج می‌شود؟ با چه احتمالی از درب سمت چپ خارج می‌شود؟

پرسش شبیه سازی ۵: مطابق آنچه در سوال قبلی بود چنگیز دو متر با درب راست و یک متر با درب چپ فاصله دارد. و طول هر پرش او یک متر است. و در هر مرحله با احتمال برابر به سمت چپ یا راست می‌پرد. به ازای ۱۰۰۰۰۰ بار شبیه سازی چنگیز چند بار از سمت چپ خارج می‌شود

پرسش تئوری ۱۲: چنگیز در محله قاچاقچی ها گیر افتاده او به سرعت وارد مترو می شود.خط مترو $L + 1$ ایستگاه دارد که از ایستگاه ۰ تا L شماره گذاری شده اند. او وارد ایستگاه $n-$ ام می‌شود. واگن مترو با احتمال pیک ایستگاه به سمت Lو با احتمال $1 - p$یک ایستگاه به سمت ۰ می رود. اگر P_n را احتمال خروج چنگیز از خط مترو در ایستگاه $L-$ ام هنگامی که او در ایستگاه $n-$ ام سوار مترو شده باشد، قرار دهیم. P_n را به دست بیاورید. (می‌دانیم که چنگیز به محض اینکه مترو وارد ایستگاه ۰ یا L می‌شود از خط خارج می‌شود و فرایند جابه‌جایی او متوقف می‌شود.دقت کنید چنگیز فقط در ایستگاه $0-$ام یا $L-$ام می تواند پیاده شود.)

پرسش شبیه سازی ۶: تابع جرم احتمال را برای $L = 20$ و $p = 0.45, 0.5, 0.55$ رسم کنید.

پرسش تئوری ۱۳: با توجه به پرسش قبلی، اگر زمان t_n میانگین زمان لازم برای خارج شدن از خط مترو از

ایستگاه 0 یا L باشد به طوری که حرکت از ایستگاه n شروع شده باشد.
الف) t_n را به دست بیاورید.
ب) شروع حرکت از کدام ایستگاه این زمان را بیشینه می‌کند؟

پرسش تئوری ۱۴:
رکب خوردی چنگیز جان. خط متروی قاچاقچی ها دارای بی نهایت ایستگاه است که از ۰ تا ∞ شماره گذاری شده. اگر چنگیز در ایستگاه $n-$ام سوار مترو شود و با احتمال p یک ایستگاه به سمت راست(خط مترو را به شکل محور اعداد در نظر بگیری) و با احتمال $q = 1 - p$ یک ایستگاه به سمت چپ حرکت کند.P_n را که احتمال خروج او از ایستگاه با فرض شروع از n است به دست بیاورید.می‌دانیم که او به محض رسیدن به ایستگاه ۰ از خط خارج می‌شود.

پرسش تئوری ۱۵:
با توجه به مدل پرسش ۱۴ t_n را که متوسط زمان لازم برای خروج از خط مترو(به عبارتی وارد شدن به ایستگاه ۰) را به دست بیاورید. جواب حدی را برای حالت های $p = q$و $p > q$ بررسی کنید.
پرسش تئوری ۱۶: چنگیز از وقتی فهمیده که در هر ایستگاه خط متروی دارای بی‌نهایت ایستگاه (که شماره ایستگاه هایش از $-\infty$ تا ∞ شماره گذاری شده اند) یکی از پدیده های مهم شهر وجود دارد تصمیم گرفته که از تمامی آن ها بازدید کند. اما مشکلی که وجود دارد او مثل همیشه به صورت تصادفی بین ایستگاه ها جابه‌جا می‌شود. بنابراین نگران است شاید تعدادی از ایستگاه ها را نبیند. او از شما می خواهد که به او کمک کنید تا با انتخاب نحوه حرکت صحیح از تمامی ایستگاه ها بازدید کند.
الف) فرض کنید او با احتمال p یک ایستگاه به سمت ∞ و با احتمال $p - 1$ یک ایستگاه به سمت $-\infty$ حرکت می‌کند. یک می‌دانیم که حرکت های پیچیده چنگیز را می‌توان به کمک حرکت های ساده تر او مدل کرد. برای مثال به جای اینکه بگوییم چنگیز سه قدم به سمت راست رفت می‌توان گفت که چنگیز سه بار و هر بار یک قدم به سمت راست برداشته است. در واقع به جای اینکه طول قدم ها برایمان مهم باشد، تعداد تک قدم ها برایمان مهم می‌شود. حال مدل توصیف شده را به زبان ریاضی بنویسید.

ب) حال با کمک مدلسازی قسمت قبلی احتمال حضور در ایستگاه ۱ را در صورتی که او حرکتش را از ایستگاه 0 شروع کرده باشد را به دست بیاورید.
مدلسازی چنگیزی: اگر P_x را احتمال حضور در ایستگاه $x-$ام تعریف کنیم با توجه به مدلسازی قسمت قبلی می توان گفت که $P_1 = p + qP_2$ یعنی اگر به احتمال pبه سمت راست حرکت کرده باشد به ایستگاه ۱ رسیده در غیر اینصورت باید بعد از رسیدن به ایستگاه -۱ حرکتی مشابه جابه‌جایی از ایستگاه صفر به ایستگاه ۲ انجام دهد تا به ایستگاه یک برسد.(در واقع در مدلسازی ما نقطه مبدا عوض می‌شود و طول جابه‌جایی های یکسان یک نوع مدلسازی حرکتی را نشان می‌دهند.)

پرسش تئوری ۱۷: با توجه به مدلسازی چنگیزی برای به دست آوردن جواب P_1 باید به یک معادله درجه دو برسید. این معادله را به دست آورده و ریشه های آن را حساب کنید.
درباره ریشه های به دست آمده بر حسب pو q صحبت کنید هر یک از ریشه به ازای چه مقداری از p و q معتبر هستند؟ راهنمایی : برای ساده کردن حل معادله می‌توانید از $p + q = 1$ کمک بگیرید.

پرسش تئوری ۱۸: با کمک جواب های به دست آمده در قسمت قبلی احتمال حضور در ایستگاه $k-$ام را محاسبه کنید.

پرسش تئوری ۱۹: رفتار تابع احتمال قسمت قبلی را به ازای حالت های $p > \frac{1}{2}$ و $p < \frac{1}{2}$ بررسی کنید.

همچنین توضیح دهید اگر $p=\frac{1}{2}$ باشد درباره حضور چنگیز در کلیه ایستگاه چه می‌توان گفت؟

پرسش تئوری ۲۰: به ازای $p=0.3$ احتمال حضور چنگیز در ایستگاه $5-$ام را به دست بیاورید.

پرسش شبیه سازی ۷ : با فرض $p=0.3$ جابه‌جایی چنگیز را شبیه سازی کنید. چنگیز چند بار وارد ایستگاه ۲ شده؟

پرسش تئوری ۲۱: الف) فرض کنید T_k را زمان لازم برای حرکت از نقطه 0 به نقطه k در نظر می‌گیریم. نشان دهید $E[T_k]=kE[T_1]$

ب) حال سعی کنید $E[T_1]$ را برحسب p، q و $E[T_2]$ به دست بیاورید.سپس با حل معادله به دست آمده $E[T_1]$ را بر حسب p و q به دست بیاورید.

ج) $E[T_k]=?$

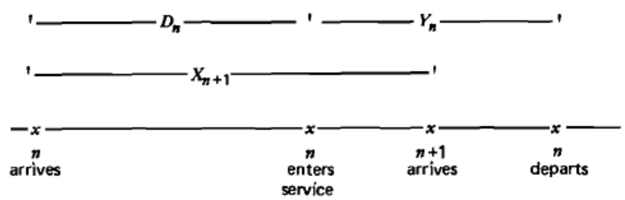
د) $E[T_{50}]$ را به ازای $p=0.55$ محاسبه کنید.

پرسش شبیه سازی ۸ : مدت زمانی را که طول می‌کشد که چنگیز به ایستگاه $k-$ام وارد شود را با کمک شبیه سازی به دست بیاورید. آیا نتیجه به دست آمده با قسمت قبلی مطالقت دارد؟

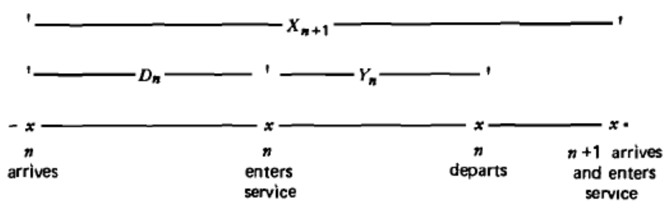
۳ stochastic process sheldon ross

پرسش تئوری ۲: چنگیز به مرکز خرید رفته اما امروز که یکشنبه آخر ماه است، یعنی شلوغ‌ترین روز فروش!!! به دلیل ازدیاد جمعیت و حجم بالای خرید ها صف های طولانی تشکیل شده. می‌دانیم ورود مشتریان به صف از توزیع F ، مدت زمان لازم برای اتمام کار آنها در صندوق از توزیع G تبعیت می‌کند. و زمان ورود مشتریان را با متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ برای مشتری $n-$ام و مدت زمانی که هر مشتری پای صندوق منتظر می‌ماند را با متغیر های تصادفی $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ نشان دهیم.آنگاه D_n مدت زمانی است که مشتری $n+1-$ام باید در صف منتظر بماند. واضح است که

$$D_{n+1} = \begin{cases} D_n + Y_n - X_{n+1} & \text{if } D_n + Y_n \geq X_{n+1} \\ 0 & \text{if } D_n + Y_n < X_{n+1} \end{cases}$$



or



با گسترش رابطه تاخیر می‌توان به نتیجه زیر رسید(فرض می‌کنیم $U_n = Y_n - X_{n+1}$):

$D_{n+1} = max\{0, D_n + U_n\}$
$D_{n+1} = max\{0, U_n + max\{0, D_{n-1} + U_{n-1}\}\}$
$D_{n+1} = max\{0, U_n, U_n + U_{n-1} + D_{n-1}\}$
$D_{n+1} = max\{0, U_n, U_n + U_{n-1} + max\{0, U_{n-2} + D_{n-2}\}\}$
$D_{n+1} = max\{0, U_n, U_{n-1}, U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + D_{n-2}\}$
.
.
.
$D_{n+1} = max\{0, U_n, U_n + U_{n-1}, U_n + U_{n-1} + U_{n-2}, ..., U_n + U_{n-1} + ... + U_1\}$

بسیار واضح است که $D_1 = 0$
اگر تعریف کنیم به ازای هر $c > 0$:

$$P[D_{n+1} \geq c] = P[max(0, U_n, U_n + U_{n-1}, ..., U_n + U_{n-1} + ... + U_1) \geq c]$$
$$P[D_{n+1} \geq c] = P[max(0, U_1, U_1 + U_2, ..., U_1 + U_2 + ... + U_n) \geq c]$$
به طور دیگر می‌توان بیان کرد که برای $j \geq 1$
$$P[D_{n+1} \geq c] = P[S_j \text{ crosses c by times n}]$$
که:

$$S_J = \sum_{t=1}^{J} (Y_t - X_{t+1})$$

همچنین در صورتی که $n \longrightarrow \infty$

$$P[D_\infty \geq c] = lim_{n \longrightarrow \infty} P[D_n \geq c] = P[S_j, j \geq 1, \text{ ever crosses c}]$$

اگر $E[U] = E[Y] - E[X]$ بزرگتر از صفر باشد. با کمک قانون اعداد بزرگ می‌توان گفت :

$$P[D_\infty \geq c] = 1$$

برای هر $c > 0$

الف)فرض می‌کنیم که $M_n = max(0, S_1, S_2, ..., S_n)$ برای $n \geq 1$ ثابت کنید:

$$E[M_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E[S_k^+]$$

ب) فرض کنید که زمان ورود مشتریان به صندوق و مدت زمان سرویس دهی به مشتری از توزیع $gamma$ پیروی می‌کنند. به طوری که توزیع زمان ورود مشتری $G(s, \lambda)$ و توزیع زمان سرویس دهی $G(r, \mu)$ هستند.$E[D_{n+1}]$ را برای این حالت حساب کنید.

پرسش تئوری ۴: چنگیز دیوانه وار قدم می‌زند. چنگیز تصمیم گرفته در فرودگاه تا زمانی که منتظر هواپیماست قدم بزند. اما او الگوریتم جالبی برای قدم زدن خود انتخاب کرده است. او هر ۵ دقیقه یکبار قدم می‌زند و ۲ دقیقه استراحت می‌کند. اگر تعداد قدم های او را در هر مرحله از قدم زدن با متغیر تصادفی X نشان دهیم ، و بدانیم که دنباله قدم های او ($X_1, X_2, ... X_n$) می تواند یکی از $n!$ حالت ممکن از ترکیب های ۱ تا n باشد ثابت کنید که:

$$P[\sum_{i=1}^{n} i.X_i \leq a] = P[\sum_{i=1}^{n} i.X_i \frac{n^2(n+1)}{2-a}]$$

پرسش تئوری ۵:
چنگیز که به تازگی با مفهوم استقلال در احتمالات آشنا شده می‌خواهد رد پایی از خودش در جهان ریاضیات ثبت کند. او مفهوم جدید تحت عنوان جابه‌جا شونده را تعریف می‌کند. تعریف او به این شکل است که متغیر ها تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ قابل جابه‌جایی هستند اگر $X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tn}$ توزیع احتمال توام یکسانی

داشته باشند برای هر جایگشت $(i_1, i_2, .., i_n)$ از $(1, 2, ..., n)$. برای مثال فرض کنید که بدون جایگذاری و به صورت تصادفی در هر مرحله توپی را از درون سبدی برمی‌داریم که k توپ از n توپ داخل آن سفید هستند.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر توپ } k-\text{ام سفید باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

در نتیجه $X_1, ..., X_n$ قابل جابه‌جایی هستند ولی مستقل نیستند. الف) فرض کنید که متغیر های تصادفی X_1و X_2 قابل جابه‌جایی هستند. و توابع f و g توابعی صعودی هستند. می‌دانیم به ازای هر x_1 و x_2ای داریم:

$$(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0 \longrightarrow E[(f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2)) \geq 0$$

ثابت کنید:

$$E[f(X_1)g(X_1)] \geq E[f(X_1)g(X_2)]$$

ب) برای هر دنباله بی‌نهایتی از متغیرهای تصادفی قابل جابه‌جایی $X_1, X_2, ...$ که می‌توانند مقادیر صفر یا یک بگیرند ، تابع توزیع احتمالی همانند G روی بازه $[0, 1]$وجود دارد. به ازای تمامی $0 \leq k \leq n$ ها ثابت کنید که:

$$P[X_1 = X_2 = ... = X_k = 1, X_{k+1} = ... = X_n = 0] = \int_0^1 \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} dG(\lambda)$$

ج)فرض کنید $X_1, X_2, X_3, ...$ قابل جابه‌جایی هستند.$E[X_1|X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}]$ را حساب کنید . می‌دانیم ترتیب قرارگیری آن ها به ترتیب شماره‌شان است و $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$

پرسش تئوری۷: فرض کنید که Z_n یک متغیر تصادفی قدم زدن تصادفی است. و $E[Z_{n+1} - Z_n] = \mu \neq 0$ است.ثابت کنید: برای هر $A > 0, B > 0$ که:

$$N = \min\{n : Z_n \geq A | Z_n \leq -B)\}$$

(علامت | معنی یا می‌دهد)
ثابت کنید: $E[N] \leq \infty$
راهنمایی: ابتدا نشان دهید که $k-$ای وجود دارد که $P[Z_k > A + B] > 0$ سپس نشان دهید که $E[N] \leq E[G]$ به طوی که G یک متغیر تصادفی هندسی است.

پرسش تئوری ۸: فرض کنید که Z_n یک متغیر تصادفی رندوم واک است که X_i در آن از توزیع F تبعیت می‌کند.تابع $G(t, s)$ احتمال اینکه اولین مقداری که در آن Z_n از t بیشتر می‌شود کمتر یا مساوی $t + s$ است را نشان می‌دهد.

$$G(t, s) = P[\text{ first sum exceeding t is } \leq t + s]$$

حال ثابت کنید:

$$G(t, s) = F(t + s) - F(t) + \int_{-\infty}^{t} G(t - y, s) dF(y)$$

۴ simulation

پرسش شبیه سازی ۱: چنگیز می‌خواهد برای کاهش هزینه مترو خود که با توجه به مقصد نهایی مسافر مشخص می‌شود و نه تعداد سفر های او، اقدامی انجام دهد. او که سر رشته‌ای از آمار و احتمال ندارد می‌خواهد با آزمون و خطا مقصد نهایی خود را پیدا کند. او ابتدا دو نقطه A, B که دو عدد حقیقی بین ۰ و ۱ هستند را انتخاب می‌کند.سپس هر بار یک عدد با توزیع $uniform(0, 1)$ انتخاب می‌کند. می‌دانیم $A > B$ اگر عدد انتخاب شده بزرگتر از A بود چنگیز یک ایستگاه جلو تر می‌رود و اگر عدد از B کوچکتر بود چنگیز یک ایستگاه عقب تر حرکت می‌کند .

الف) حال برنامه ای بنویسید و برای ۱۰۰۰ قدم با انجام فرایند احتمالاتی گفته شده موقعیت مکانی چنگیز را رسم کنید. مقادیر A و B را بع ترتیب $(0.95, 0.05), (0.75, 0.25), (0.6, 0.4)$ در نظر بگیرید و نمودار موقعیت مکانی چنگیز را رسم کنید.

ب) حال به جای استفاده از توزیع $uniform$ چنگیز تصمیم دارد از توزع نرمال استاندارد استفاده کند اینبار اگر عدد انتخاب شده بزرگتر از A بود باز یک ایستگاه به جلو و اگر عدد از B کوجکتر بود یک ایستگاه به عقب حرکت می‌کند. نمودار موقعیت مکانی را به ازای مقادیر $A = 5, B = -5$ و برای ۱۰۰۰ بار حرکت چنگیز به دست بیاورید.

ج) به ازای تغییر مقادیر $\sigma = 1, 1.1, 1.3, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 5$ رفتار حرکت چنگیز را بررسی کنید. با افزایش σ رفتار چنگیز چه تغییری می‌کند. دلیل این نوع رفتار چیست توضیح دهید.

د) حال با فرض اینکه مقادیر A, B همان مقادیر قسمت قبل هستند و تنها میانگین توزیع نرمال برابر با ۱۰ شده. رفتار حرکت چنگیز را به ازای $\sigma = 1, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10000, 100000$ بررسی کنید. با افزایش σ رفتار چنگیز چه تغییری می‌کند؟

پرسش شبیه سازی ۲: حال فرض کنید که چنگیز می‌خواهد به جای استفاده از توزیع ها و احتمال شرطی که در پرسش قبلی با کران گذاری در پیش گرفته بود ، از همین توزیع ها برای حرکت خود و تعیین تعداد گام ها در هر مرحله از حرکت استفاده کند.
الف) با فرض اینکه او در ایستگاه صفرم مترو قرار دارد و تعداد ایستگاه هایی که در هر مرحله به چپ یا راست حرکت می‌کند از توزیع $N(0.1)$ تبعیت می‌کند. نمودار حرکت او را به ازای ۱۰۰۰۰ مرحله حرکت شبیه سازی کنید.
ب) شبیه سازی را برای ۵ حرکت انجام دهید (که در هر نوبت حرکت هزار بار جابه‌جا می‌شود و نتایج را در یک تصویر به نمایش بگذارید.
ج) حال با نمودار قسمت های قبلی را به ازای میانگین $\mu = 2, 3, 4, 5$ رسم کنید.
د) برای تک تک میانگین های بخش ج مقدار $\sigma = 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 200$ را شبیه سازی و رسم کنید.

پرسش شبیه سازی ۳: حال فرض کنید که چنگیز می‌خواهد به جای استفاده از توزیع ها و احتمال شرطی که در پرسش قبلی با کران گذاری در پیش گرفته بود ، از همین توزیع ها برای حرکت خود و تعیین تعداد گام ها در هر مرحله از حرکت استفاده کند.
الف) با فرض اینکه او در ایستگاه صفرم مترو قرار دارد و تعداد ایستگاه هایی که در هر مرحله به چپ یا راست حرکت می‌کند از توزیع گاما$G(0, 1)$ تبعیت می‌کند. نمودار حرکت او را به ازای ۱۰۰۰۰ مرحله حرکت شبیه سازی کنید.

ب) شبیه سازی را برای ۵ حرکت انجام دهید (که در هر نوبت حرکت هزار بار جابه‌جا می‌شود و نتایج را در یک تصویر به نمایش بگذارید.
ج) حال با نمودار قسمت های قبلی را به ازای پارامتر اول $A = 2, 3, 4, 5$ رسم کنید.
د) برای تک تک A های بخش ج مقدار $B = 1, 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 200$ را شبیه سازی و رسم کنید.

پرسش شبیه سازی ۴: چنگیز حالا وارد یک بازاچه محلی شده که به تعداد بی‌نهایت مغازه دارد که در یک فضای $\mathbb{R}^2$ قرار دارند فرض کنید چنگیز در حال حاضر در مغازه$(0, 0)$ قرار دارد.

الف) فرض کنید که او هر بار با احتمال برابر با $\frac{1}{4}$ در چهار جهت بالا ،پایین ، چپ و راست حرکت می‌کند. جهت حرکت او در هر مرحله تصادفی و مستقل از بقیه حرکات اوست. تابعی بنویسید که حرکت او را برای $n = 10, 100, 1000, 10000, 100000$ قدم شبیه سازی کند. نمودار موقعیت مکانی او را رسم کنید.

ب) اینبار فرض کنید در هر مرحله از حرکت او می‌تواند در جهت های مختلفی حرکت کند. یعنی هر بار که می‌خواهد حرکت کند به احتمال $\frac{1}{2}$ به بالا یا پایین و با احتمال $\frac{1}{2}$ به چپ یا راست حرکت می‌کند.تابعی بنویسید که حرکت اینبار چنگیز را شبیه سازی کند.(در قسمت قبلی چنگیز در هر مرحله به احتمال برابر یک قدم در راستای یکی از جهت ها برمی‌داشت اما اینبار او یک قدم در راستی افقی و یک قدم در راستای عمودی و با جهت های تصافی در هر مرحله برمی‌دارد) تعداد مراحل حرکت او را $n = 10, 100, 1000, 10000, 100000$ بار در نظر بگیرید. نمودار موقعیت مکانی چنگیز را رسم کنید

ج)در قسمت قبل علاوه بر اینکه جهت حرکت به صورت تصادفی انتخاب می‌شود فرض کنید که تعداد قدم نیز لزوما برابر یک نیست و می‌تواند عددی از ۱ تا ۱۰ باشد. نمودار حرکت چنگیز را برای $n = 10, 100, 1000, 10000, 100000$ حرکت رسم کنید.

د) حال اینبار مدل جرکتی چنگیز در هر مرحله را به شکل یک توزیع نرمال در نظر بگیرید.یعنی در هر مرحله از جابه‌جایی او با توزیع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ در راستای عمودی و با $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ در راستای افقی در حرکت است. نمودار موقعیت مکانی را با شبیه سایزی حرکت چنگیز برای $n = 10, 100, 100, 1000, 10000$ مرحله به دست بیاورید . همچنین مقادیر $\mu_i = 0, \pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \sigma_i^2 = 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ در نظر بگیرید.

پرسش شبیه سازی ۵: چنگیز اینبار مشغول قدم زدن در پاساژ است و در فضای $\mathbb{R}$ در حال قدم زدن است.
الف) او در شش جهت بالا ،پایین ،چپ ، راست،جلو و عقب می‌تواند حرکت کند(به صورت مستقل در هر مرحله و با احتمال یکسان).نمودار حرکت چنگیز را به ازای ۱۰۰۰ قدم رسم کنید.
ب) حال فرض کنید در هر مرحله حرکت او می‌تواند یک قدم جلو یا عقب برود و ۲ قدم چپ یا راست حرکت کند و ۴ قدم بالا یا پایین برود. توجه کنید حرکت او در هر مرحله حرکت تصافی بوده و همچنین در هر مرحله در هر ۳ راستا می‌تواند حرکت کند به طوری که احتمال جرکت در جهت های مختلف یک راستا برابر با $\frac{1}{2}$ است. نمودار حرکت چنگیز در پاساژ را رسم کنید.
ج) حال نمودار حرکتی را به ازای حرکت در راستای x به صورت نرمال با میانگین 0 و واریانس 4 در نظر بگیرید. حرکت در راستای y را با توزیع گاما با $G(s, t)$ که $s = 5$ و $t = 2$ و حرکت در راستای z را با توزیع لاپلاس با $Laplace(\mu, b)$ که $\mu = -10$ و $b = 3$ برای هزار مرحله حرکت رسم کنید و نمایش دهید.

پرسش شبیه سازی ۶: حال چنگیز می‌خواهد احتمال بازگشت به مبدا را بعد از قدم زدن به صورت تصادفی به دست بیاورد. برنامه ای بنویسید که حرکت چنگیز را شبیه سازی کند.(به نحوه حرکت چنگیز در هر مکان

دقت کنید و تمام حرکت ها را به صورت قدم برداشتن ساده تصافی فرض کنید) الف) فرض کنید او در ایستگاه متروست و در هر مرحله یک ایستگاه جلو یا عقب می‌رود.احتمال رد شدن از نقطه مبدا را بعد از ۱۰۰ ایستگاه جابه‌جایی و به ازای ۱۰۰۰۰ بار آزمایش به دست بیاورید.
ب) حال او در بازار سرپوشیده قرار دارد که می تواند در ۴ جهت بالا و پایین و چپ و راست حرکت کند. دقت کنید او در هر مرحله فقط یک قدم در یکی از جهت ها می‌تواند جابه‌جا شود. حال احتمال بازگشت به مبدا را به ازای ۱۰۰۰ بار شبیه سازی و در هر بار ۱۰۰۰ قدم جابه‌جا شدن را به دست بیاورید.
ج) این بار فرض کنید حرکت چنگیز در بازار سرپوشیده در هر مرحله قدم برداشتن در هر دو راستا صورت می‌گیرد یعنی در هر مرحله یک قدم به چپ یا راست و یک قدم به بالا یا پایین می‌تواند حرکت کند. حال احتمال بازکشت به مبدا را به ازای ۱۰۰۰ بار شبیه سازی و ۱۰۰۰ مرحله قدم برداشتن شبیه سازی کنید.
د) حال فرض کنید چنگیز در پاساژ که یک فضای سه بعدی است قرار دارد. اینبار مانند قسمت ج فرض کنید در هر مرحله او یک قدم در هر راستا بر می‌دارد. احتمال بازگشت به مبدا را به ازای ۱۰۰۰ بار شبیه سازی و ۱۰۰ قدم به دست بیاورید.
ه) حال چنگیز را در سینما ۴ بعدی تصور کنید. اینبار فرض کنید که چنگیز که در هر مرحله قدم زدن فقط یک گام در یکی از کل جهات ممکن می‌تواند قدم بردارد. احتمال بازگشت به مبدا را به دست بیاورید.
درباره جواب قسمت های ب و ج صحبت کنید. چه چیزی از این جواب های این دو قسمت نتیجه می‌گیرید؟؟
مرتبه جواب های قسمت های مختلف را به دست بیاورید.

۵ sepehr

چنگیز که به علت گشت و گذار فراوان حسابی خسته شده میخواهد ببیند این گشت و گذار به صورت تصادفی چه آخر و عاقبتی دارد و آیا به ایستگاه مترو نزدیک هتل خود (مبدا) باز خواهد گشت یا خیر.
تعریف: میگوییم حرکت تصادفی چنگیز بی‌وفا است اگر احتمال بازگشت او به مبدا کمتر از 1 باشد و وفادار می‌گوییم اگر احتمال بازگشت او به مبدا 1 باشد.
پرسش تیوری۱: اگر احتمال بازگشت به مبدا p باشد که بازگشت به مبدا را به صورت رویداد زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{\exists n \in \mathbb{N} : \ Z_n = 0\}, \quad p = \mathbb{P}[R]$$

و تعداد بازگشت به مبدا را N نشان دهیم، $\mathbb{E}[N]$ را حساب کنید. برای راه رفتن تصادفی ساده احتمال p و $\mathbb{E}[N]$ را به صورت مستقیم حساب کنید.

پرسش تیوری۲: برای راه رفتن تصادفی 1 بعدی با توزیع قدم iid به صورت زیر، p و $\mathbb{E}[N]$ را به صورت مستقیم حساب کنید.

$$\mathbb{P}[X_n = x] = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x = 1 \\ \frac{1}{3}, & x = -1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

پرسش شبیه سازی: برای راه رفتن تصادفی پرسش قبل با برداشتن $k = 1000$ قدم به تعداد $m = 10$ مرتبه راه رفتن تصادفی را شبیه سازی کرده و با استفاده از رابطه بین p و $\mathbb{E}[N]$، p را تخمین بزنید و با پرسش تئوری قبل مقایسه کنید.

پرسش تیوری۳: ثابت کنید حرکت تصادفی چنگیز وفادار است اگر و فقط اگر به صورت تقریبا قطعی بیشمار دفعه به مبدا بازگردد.

تعریف: به تابعی مثل $f(x)$ طوری که $x \in Z$ باشد و داشته باشیم:

$$f(x) = \sum_y f(x+y)\, p(y)$$

که $p(y)$ احتمال حرکت به y ایستگاه بعد است، تابع متوسط دوست می‌گوییم.

پرسش تیوری۴: اگر شماره ایستگاه در مرحله n ام را با Z_n نشان دهیم. رویداد O_x را تعریف می‌کنیم احتمال آنکه چنگیز پس از شروع از مبدا به ایستگاه $-1-x$ زودتر از ایستگاه $M-x$ برسد. به عبارت دیگر رویداد $Z_n = -1-x$ زودتر از رویداد $Z_n = M-x$ رخ بدهد. تابع $f(x)$ را به این صورت تعریف میکنیم:

$$\{-1, 0, \ldots, M-1, M\} \to \mathbb{R} : \ f(x) = P[O_x]$$

که داریم: $f(-1) = 1, \ f(M) = 0$. برای حرکت تصادفی ساده نشان دهید که داریم:

$$f(x) = \frac{1}{2} f(x+1) + \frac{1}{2} f(x-1)$$

و بنابراین متوسط دوست است. سپس فرم کلی این تابع را بدست آورید.

پرسش تیوری۵: حالا این تابع را برای $x = 0$ بنویسید. سپس با توجه به اینکه رویداد ((هرگز نرسیدن به ایستگاه -1)) با رویداد ((به ازای هر $M \in \mathbb{N}$ به ایستگاه M زودتر از ایستگاه -1 رسیدن)) هم ارز است و رابطه‌ای که برای $f(0)$ بدست آوردید استدلال کنید که با احتمال 1 یعنی به صورت تقریبا قطعی چنگیز به ایستگاه -1 خواهد رفت. با استفاده از تقارن و کمی استدلال نشان دهید که حرکت چنگیز وفادار است.

پرسش شبیه سازی: برای حرکت تصادفی ساده به ازای $M = 5, 10, 15, 25, 30$، $f(0)$ را با شبیه سازی بدست آورید.(برای بدست آوردن احتمال باید به تعداد زیاد مثلا ۱۰۰۰ بار و هر بار تعداد زیادی قدم مثلا ۱۰۰۰ قدم را شبیه سازی کنید و سپس با شمردن تعداد دفعات اتفاق افتادن رویداد مد نظر به دفعات کل احتمال را بدست بیاورید)

پرسش تیوری۶: با استفاده از فرم قوی قانون اعداد بزرگ برای راه رفتن تصادفی با توزیع iid قدمی که $E[X] \neq 0$ باشد(به اصطلاح drift داشته باشد.) نشان دهید که این حرکت قطعا بی‌وفا است.

برای یک حرکت تصادفی، تعداد دفعات عبور از x را با R_x نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $r(x) = E[R_x]$

پرسش تیوری۷: $r(x)$ را بر حسب یک جمع روی احتمالات حضور در ایستگاه x ام در مراحل مختلف حرکت بدست بیاورید.

پرسش تیوری۸: با شرطی کردن احتمال روی رسیدن یا عدم رسیدن به نقطه x نشان دهید که تابع $r(x)$ در $x = 0$ به مقدار بیشینه خود می‌رسد.

پرسش تیوری۹: فرض کنید که قدم‌ها طوری باشند که به صورت تقریبا قطعی(با احتمال 1) $|X| \leq M$. با استفاده از نامساوی مارکف نشان دهید:

$$P[|Z_n| \leq 2M\sqrt{n}] \geq \frac{1}{2}$$

سپس به نامساوی زیر برسید، و با به تناقض رسیدن ناشی از آن نشان دهید که یک x ای وجود دارد که $r(x)$ در آن بی نهایت شده و در نتیجه حرکت تصادفی با $E[X] = 0$ بازگردنده است:

$$\sum_{x=-2M\sqrt{n}}^{2M\sqrt{n}} r(x) \geq \frac{n}{2}$$

در حین سفر در این کشور غریب ناگهان چنگیز داخل یک چاله می‌افتد و سر از یک ایستگاه فضایی میان شبکه‌ای مکعبی از استگاه‌های فضایی درمی‌آورد!

او در هر مرحله سفر بین این ایستگاه‌های فضایی در هر بعد از فضا یک راه رفتن تصادفی ساده انجام می‌دهد. چنگیز بسیار از وضع کنونی ترسیده و می‌خواهد ببیند که آیا به ایستگاه زمین باز خواهد گشت یا خیر. بعد فضا را d در نظر بگیرید.

پرسش تیوری۱۰: با استفاده از تقریب استرلینگ می‌توان نشان داد که داریم:

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

شکل ۱: چنگیز در میان ایستگاه‌های فضایی

با استفاده از این نامساوی روی مراحل زوج حرکت تصادفی چنگیز استدلال کنید که برای یک شبکه ۲ بعدی حرکت او بازگردنده و برای شبکه ۳ بعدی حرکت او گذرا است.

پرسش شبیه سازی: برای یک شبکه ۲ بعدی و یک شبکه ۳ بعدی حرکت تصادفی تا ۱۰۰۰ قدم را شبیه سازی کرده و مسیر حرکت چنگیز را در نمودار نمایش دهید.

چنگیز پس از سردرگمی فراوان در میان ایستگاه‌های فضایی تصمیم می‌گیرد تا به پارکینگ سفینه‌های فضایی در نزدیکی یک ایستگاه برود و سوار سفینه‌ای شود و با اختیار خود آن را به صورت تصادفی هدایت کند. فرض کنید حرکت تصادفی او به صورت زیر مدل می‌شود:

$$P_{N+1}(\mathbf{r}) = \int p(\mathbf{x}) P_N(\mathbf{r}-\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

که در آن $P_N(\mathbf{r})$ توزیع احتمال مکان سفینه در مرحله Nام و $p(\mathbf{x})$ توزیع احتمال جابه‌جایی او در هر مرحله است. حالا می‌خواهیم بدون داشتن اطلاعات نه چندان زیاد در مورد توزیع حرکت تصادفی او نظر بدهیم. فرض کنید که در هر مرحله حرکت او به صورت متوسط صفر باشد و واریانس جابه‌جایی‌اش را نیز دانسته بگیرید.

پرسش تیوری۱۱: می‌خواهیم در Nهای بزرگ ببنیم که توزیع مکان او به چه شکل هست. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که به صورت متوسط در هر مرحله جابه‌جایی خیلی بزرگی در مقایسه با فاصله‌اش نسبت به مبدا ندارد. بنابراین در انتگرال بالا می‌توانیم عبارت $P_N(\mathbf{r}-\mathbf{x})$ را نسبت به بردار $\mathbf{x}$ بسط داده. این بسط را تا مرتبه دوم انجام دهید و عبارت $P_{N+1}(\mathbf{r})$ را بنویسید. (راهنمایی: در بسط دادن یک تابع اسکالر نسبت به یک بردار تا مرتبه دوم کمیت‌های بردارد گرادیان و ماتریس هسیان ظاهر می‌شوند.)

پرسش تیوری۱۲: حالا فرض کنید که زمانی که هر مرحله طول می‌کشد زمان کوتاه Δt باشد. با توجه به کوتاه بودن این زمان و کوچک بودن واریانس جابه‌جایی در هر مرحله به یک معادله دیفرانیسل پاره‌ای برسید که در آن فرض زمان حد پیوستار را برای زمان در نظر می‌گیریم. تمامی ضرایب ثابت اضافه را نیز با هم یکی کرده و α بنامید. جواب شما باید فرم زیر را داشته باشد:

$$LHS = \alpha\, RHS$$

که سمت چپ معادله شامل مشتق‌های زمانی تابع چگالی احتمال حضور در زمان t، $P(\mathbf{r},t)$ باشد و سمت راست معادله تنها شامل مشتق‌های مکانی تابع چگالی احتمال باشد.

پرسش تیوری۱۳: از تابع چگالی‌ای که در قسمت قبلی بدست آوردید نسبت به مکان تبدیل فوریه بگیرید و معادله دیفرانسیل جدید را که تنها شامل مشتق زمانی است حل کنید. سپس با توجه به اینکه در لحظه صفر فرض می‌کنیم که سفینه چنگیز در مبدا مختصات قرار دارد تابع چگالی احتمال نقاط مختلف را برحسب زمان بدست بیاورید. پس از آن تابع چگالی اندازه فاصله از مبدا مختصات، متوسط اندازه فاصله از مبدا مختصات و واریانس آن را بدست آورید.

پریسش تیوری۱۴: حالا نتیجه را برحسب شماره مرحله N به جای زمان برگردانید و پارامتر α که تعریف کردید را نیز بر حسب پارامترهای قبلی برگردانید. سپس نتیجه را با قضیه حدمرکزی مقایسه کنید.

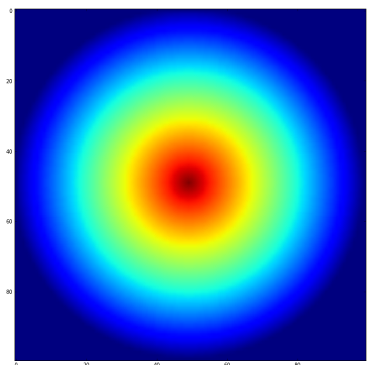
پرسش تیوری۱۵: بدون انجام محاسبات پیچیده، برای حالتی که ما مکان اولیه چنگیز را ندانیم و برای تابع چگالی اولیه داشته باشیم:

$$P(\mathbf{r},0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} exp\big(-\frac{\mathbf{r}.\mathbf{r}}{2\sigma^2}\big)$$

تابع چگالی احتمال را بر حسب زمان بدست آورید.

پرسش شبیه سازی: با تنظیم پارامتر α به طریق مناسب اندازه تابع چگالی بر حسب زمان را به صورت یک انیمیشن Heatmap دوبعدی(برشی از فضای سه‌بعدی، برای مثال صفحه $x-y$ مختصات) بکشید.

طوری که به صورت کاملا نرم و پیوسته بتوان تغییرات را مشاهده کرد.



شکل ۲: تصویر یک لحظه از انیمیشن به عنوان مثال

حالا فرض کنید که زمین در ناحیه Ω_1 و یک سیاه‌چاله در ناحیه Ω_2 از فضا قرار دارد. چنگیز می‌خواهد که به زمین برگردد و اگر قبل از آن به سیاه‌چاله برسد دار فانی را وداع می‌گوید. احتمال با جان سالم به زمین رسیدن چنگیز را هنگامی که در مختصات $\mathbf{x}$ از فضا هست با $P_{success}(\mathbf{x})$ نشان می‌دهیم.

پرسش تیوری۱۶: معادله دیفرانسیلی در مختصات دکارتی بیابید که $P_{success}(\mathbf{x})$ در آن صدق کند، و اگر حل شود به صورت یکتا $P_{success}(\mathbf{x})$ تعیین شود.(بنابراین شرایط مرزی معادله نیز باید نوشته شوند).

این دفعه فرض کنید سیاه‌چاله‌ای در کار نیست. مرکز کره زمین را مبدا مختصات در نظر بگیرید و شعاع آن را R_1 در نظر بگیرید. فرض کنید در شعاع R_2 که $R_2 > R_1$ از مبدا مختصات پر از زباله فضایی است و اگر چنگیز با آن ها برخورد کند منحرف می‌شود و به زمین نخواهد رسید.

پرسش تیوری۱۷: با استفاده از معادله دیفرانسیل قسمت قبل احتمال با موفقیت به زمین رسیدن چنگیز را برحسب فاصله او از مرکز کره زمین r بدست بیاورید.(راهنمایی: از تقارن کروی مساله استفاده کنید)

پرسش تیوری۱۸: معادله دیفرانسیلی بیابید که متوسط زمان سردرگمی چنگیز در فضا در آن صدق کند. شرایط مرزی را هم بنویسید. سپس آن را حل کنید و متوسط زمان سردرگمی را تابعی از فاصله چنگیز از مرکز زمین بدست بیاورید.(راهنمایی: از تقارن کروی مساله استفاده کنید)

حالا می‌خواهیم نگاه دقیق تری به حرکت تصادفی سفینه فضایی چنگیز داشته باشیم. مدلی که قبل تر برای حرکت تصادفی او معرفی کردم حالت خاصی از مدل زیر است:

$$P_N(\mathbf{r}) = \int p_N(\mathbf{x}|\mathbf{r}-\mathbf{x})P_{N-1}(\mathbf{r}-\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

اگر همچنان فرض کنیم که توزیع احتمال جابه‌جایی او در هر مرحله تابع مکان او در مرحله قبل نباشد عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر ساده کرد.

$$P_N(\mathbf{r}) = \int p_N(\mathbf{x})P_{N-1}(\mathbf{r}-\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

فرض کنید که تبدیل فوریه تابع چگالی جابه‌جایی در مرحله Nام با $\tilde{p}_N(\mathbf{k})$ نشان داده شود.

پرسش تیوری۱۹: با فرض اینکه سفینه چنگیز در ابتدا در مبدا مختصات بوده، تابع چگالی $P_N(\mathbf{r})$ را به صورت یک انتگرال که شامل $\tilde{p}_N(\mathbf{k})$ ها می‌شود بدست آورید.

حالا فرض کنید که چنگیز مانند قبل هر مرحله با یک توزیع گوسی جابه‌جا شود اما با گذشت زمان کنترل پذیری سفینه کم شده و در هر مرحله از حرکت واریانس جابه‌جایی افزایش می‌یابد.

پرسش تیوری۲۰: برای وقتی که توزیع جابه‌جایی سفینه در مرحله kام به صورت زیر باشد:

$$p_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi k^2\sigma_0^2)^{\frac{3}{2}}} exp\big(-\frac{\mathbf{r}.\mathbf{r}}{2k^2\sigma_0^2}\big)$$

تابع چگالی احتمال $P_N(\mathbf{r})$ را بدست بیاورید.

چنگیز با هزار بدبختی بالاخره توانسته به جو زمین نزدیک شود و از این موضوع بسی خوشحال است. اما دیگر از سفر خود خسته شده و قصد دارد به شهرش برگردد. بنابراین هنگامی که سفینه خود به بالای شهرش می‌رسد موتورهای آن را مجددا روشن می‌کند و سعی به نزدیک شدن به زمین و رسیدن به شهرش می‌کند. اما سفینه همچنان خطا دارد و نمی‌تواند دقیقا در جهت دلخواه او حرکت کند. فرض کنید این‌بار سفینه در هر مرحله ارتفاع h کم می‌کند اما جهت کلی حرکت او تصادفی است طوری که بردار جابه‌جایی او در جهت بردار یکه $\hat{\mathbf{n}}$ است و توزیع جهت حرکت آن به صورت زیر است:

$$P(\theta,\phi) = A\ cos^2(\theta) \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

که θ و ϕ زوایای موجود در مختصات قطبی کروی هستند.

پرسش تیوری۲۱: ضریب تناسب A را تعیین کنید.

پرسش تیوری۲۲: اگر جابه‌جایی او در هر مرحله با بردار

$$\mathbf{r}_n = x_n\hat{\mathbf{i}} + y_n\hat{\mathbf{j}} + h\hat{\mathbf{k}}$$

داده شود، تابع توزیع $P(x_n, y_n)$ را بدست آورید و میانگین و واریانس x_n و y_n و کوواریانس بین آن‌ها را پیدا کنید.

پرسش تیوری۲۳: ارتفاع اولیه چنگیز از سطح زمین را H بگیرید و مختصات نقطه فرود آمدن او را X و Y بگیرید. شهر چنگیز را به صورت یک دایره به شعاع ρ در نظر بگیرد. ρ باید چقدر باشد تا رابطه

$$\rho^2 > Var(X) + Var(Y)$$

برقرار باشد؟ برای اینکه با احتمال بیشتری به شهر خود برسد بهتر است تا کاهش ارتفاع در هر مرحله h کم باشد یا زیاد؟ با قضیه حد مرکزی نیز توجیه کنید.