**نظریه بازی‌ها**

بهار ۱۴۰۲

مدرس: دکتر محمد امین فضلی / مجتبی فیاض بخش

**پاسخ تمرین سری دوم**

## پرسش ۱ پاسخ خانم یلدا شعبان زاده

توابع امتیاز به صورت زیر هستند ($y_1, y_2, y_3$ استراتژی‌ها هستند):

$$U_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_1 y_2 - y_1^2$$
$$U_2(y_1, y_2, y_3) = y_2 + y_1 y_2 - y_2^2$$
$$U_3(y_1, y_2, y_3) = (10 - y_1 - y_2 - y_3) y_3$$

برای محاسبه‌ی تعادل نش داریم:

هر utility function مربوط به هر بازیکن نسبت به استراتژی آن بازیکن concave است. بنابراین ما می‌توانیم بهترین توابع پاسخ را با مشاهده شرایط مرتبه اول پیدا کنیم.

$$\frac{\partial U_1(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_1} = 1 + y_2 - 2y_1 \Rightarrow 1 + y_2 - 2BR_1(y_{2,3}) = 0 \Rightarrow BR_1(y_{2,3}) = \frac{1 + y_2}{2}$$

بازیکن دوم نسبت به بازیکن اول متقارن است پس می‌توان گفت:

$$BR_2(y_{1,3}) = \frac{1 + y_1}{2}$$

برای بازیکن سوم نیز داریم:

$$\frac{\partial U_3(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} = 10 - y_1 - y_2 - 2y_3 \Rightarrow 10 - y_1 - y_2 - 2BR_3(y_{1,2}) = 0 \Rightarrow BR_3(y_{1,2}) = \frac{(10 - y_1 - y_2)}{2}$$

در یک NE هر بازیکن بهترین پاسخ را به دیگری می دهد.

$$y_1^* = \frac{1 + y_2^*}{2}$$
$$y_2^* = \frac{1 + y_1^*}{2}$$
$$y_3^* = \frac{(10 - y_1^* - y_2^*)}{2}$$

پس می‌توان گفت:

$$y_1^* = \frac{1 + y_2^*}{2} = \frac{1 + \frac{1 + y_1^*}{2}}{2} = \frac{3 + y_1^*}{4} \Rightarrow y_1^* = 1 \Rightarrow y_2^* = 1 \Rightarrow y_3^* = 4$$

بنابراین تعادل نش برابر است با:

$$s = (1,1,4)$$

## پرسش ۲ پاسخ آقای روزبه پیراعیادی

همچنین توجه کنید که حضور یا عدم حضور خود سطر مغلوب در ترکیب خطی تاثیر ندارد. به عبارت ریاضی:

$$\exists T \ \forall c \in C: u_1(T(R), c) > u_1(r, c) \iff \exists T \ \forall c \in C: u_1(T(R - r), c) > u_1(r, c) \ (I)$$

اثبات طرف $\Longrightarrow$:

$$\exists T \ \forall c \in C: u_1(T(R), c) > u_1(r, c) \Longrightarrow u_1(\alpha \times T'(R - r) + (1 - \alpha) \times r, c) > u_1(r, c)$$

$$\Longrightarrow \alpha \times u_1\left(T'^{(R-r)}, c\right) + (1 - \alpha) u_1(r, c) > u_1(r, c)$$

$$\Longrightarrow \alpha \times u_1(T'(R - r), c) > \alpha \times u_1(r, c) \Longrightarrow u_1(T'(R - r), c) > u_1(r, c)$$

برای اثبات طرف $\Longleftarrow$ نیز کافیست ضریب $r$ را صفر در نظر بگیریم.

ابتدا به تعریف زیر توجه کنید.

استراتژی $s_1$ بر استراتژی $s_1'$ اکیدا غالب است اگر $\forall s_2 \in S_2: u_1(s_1, s_2) > u_1(s_1', s_2)$.

همچنین یک استراتژی اکیدا مغلوب است، اگر استراتژی دیگری بر آن اکیدا غالب باشد.

هر سطر نیز خود یک استراتژی خالص است. بنابراین سطر $r$ را زمانی اکیدا مغلوب می‌نامیم که

$$\exists s_1: \forall s_2 \in S_2: u_1(s_1, s_2) > u_1(r, s_2)$$

می‌توان رابطه‌ی بالا را تنها بر حسب سطرها و ستون‌ها نوشت. برای اینکار کافیست توجه کنیم که $s_1$ چیزی نیست به جز یک ترکیب خطی از سطرها. این ترکیب خطی را با $T$ نمایش می‌دهیم و در تمام ترکیب‌های خطی شرط اینکه مجموع ضرایب باید برابر با ۱ باشند، صادق است. همچنین منظور از $R$ مجموعه‌ی تمام سطرهاست.

$$\exists T \ \forall c \in C: u_1(T(R), c) > u_1(r, c)$$

در ادامه دو قضیه را اثبات می‌کنیم.

- **حذف یک سطر تاثیری روی حذف شدن یا نشدن دیگر سطرها ندارد. (همین طور حذف ستون تاثیری روی ستون‌ها ندارد.)**

برای اثبات این موضوع نشان می‌دهیم

۱. اگر سطر $r_*$ قبل از حذف $r$ قابل حذف باشد، بعد از آن نیز قابل حذف است.

$$r \text{ can be deleted} \Longrightarrow \exists T \ \ \forall c \in C: u_1(S(R), c) > u_1(r, c) \ \ (II)$$

$$r_* \text{ could be deleted} \Longrightarrow \exists T_* \ \ \forall c \in C: u_1(T_*(R), c) > u_1(r_*, c) \ \Longrightarrow$$

$$\forall c \in C: u_1(\alpha T'(R-r) + (1-\alpha) r \,, c) > u_1(r_*, c) \Longrightarrow$$

$$\forall c \in C: \alpha \times u_1(T'(R-r), c) + (1-\alpha) u_1(r, c) > u_1(r_*, c) \xRightarrow{(II)}$$

$$\forall c \in C: \alpha \times u_1(T'(R-r), c) + (1-\alpha) u_1(S(R), c) > u_1(r_*, c) \xRightarrow{(I)}$$

$$\forall c \in C: \alpha \times u_1(T'(R-r), c) + (1-\alpha) u_1(S'(R-r), c) > u_1(r_*, c) \Longrightarrow$$

$$\forall c \in C: u_1(T''(R-r), c) > u_1(r_*, c)$$

حالا بنابر برهان خلف فرض کنید با حذف به صورت دو دنباله‌ی زیر به جدول‌های متفاوتی رسیده‌ایم. $a_i$ و $b_i$ ها نشان دهنده‌ی سطرها و ستون‌های حذف شده هستند. همچنین دقت کنید که حذف کردن سطرها و ستون‌های اکیدا مغلوب را تا جای ممکن ادامه داده‌ایم.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

$$b_1, b_2, a_3, \dots, b_m$$

با توجه به فرض خلفی که انجام دادیم، $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \neq \{b_1, b_2, a_3, \dots, b_m\}$. چون در غیر اینصورت یعنی سطرها و ستون‌های یکسانی را حذف کرده‌ایم و این یعنی دو جدول یکسان خواهند شد. پس دست‌کم یکی از مجموعه‌ها عضوی دارد که در دیگری نیست. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید عضوی مثل $a_i$ وجود دارد که در مجموعه‌ی اول هست، اما در مجموعه‌ی دوم نیست. همچنین فرض کنید $a_i$ اولین عضو با این ویژگی است و یک سطر است. (سطر فرض کردن $a_i$ صرفا برای ساده‌تر شدن توضیحات است و گرنه تمام این موارد برای ستون‌ها نیز برقرار است.)

۲. اگر سطر $r_*$ بعد از حذف $r$ قابل حذف باشد، قبل از حذف آن نیز قابل حذف بوده است.

برای این بخش نیز کافیست ضریب $r$ را در ترکیب خطی برابر صفر قرار دهیم.

- **حذف یک ستون می‌تواند به سطرهای قابل حذف اضافه کند اما نمی‌تواند از آنها بکاهد (و همین‌طور برای سطرها).**

باید نشان دهیم حذف ستون $c_*$ نمی‌تواند جلوی حذف شدن $r_*$ که قبلا قابل حذف بوده است را بگیرد.

$$r_* \text{ could be deleted} \Longrightarrow \exists T_* \ \forall c \in C: u_1(T_*(R), c) > u_1(r_*, c) \Longrightarrow$$
$$\forall c \in C - c_*: u_1(T_*(R), c) > u_1(r_*, c)$$

چون $a_i$ اولین عضو با این ویژگی است:

$$a_1, a_2, \dots a_{i-1} \in \{b_1, b_2, a_3, \dots, b_m\}$$

حالا وضعیت جدول در انتهای دنباله‌ی $b$ را با $B_m$ بنامید و آن را با وضعیت جدول در مرحله‌ی i-1 ام دنباله a که آن را $A_{i-1}$ می‌نامیم، مقایسه کنید. تفاوتی که وجود دارد این است که $B_m$ تعدادی سطر یا ستون حذف شده‌اند. توجه داشته باشید که $B_m$ سطر یا ستون بیشتری نسبت به $A_{i-1}$ ندارد. چون هرچه در $A_{i-1}$ حذف شده است در $B_m$ نیز حذف شده است.

طبق قضیه‌ی اول حذف شدن یک سطر تاثیری روی حذف شدن یا نشدن دیگر سطرها ندارد. این یعنی سطرهای حذف شده در $B_m$ نمی‌توانند تاثیر روی حذف شدن یا نشدن $a_i$ بگذارند.

همچنین طبق قضیه‌ی دوم حذف یک ستون نمی‌تواند جلوی حذف شدن سطری که قبلا قابل حذف بوده است را بگیرد.

پس در کل می‌توان نتیجه گرفت هیچ‌کدام از تفاوت‌های $B_m$ نسبت به $A_{i-1}$ نمی‌توانند تاثیری روی حذف شدن یا نشدن $a_i$ داشته باشند. پس چون $a_i$ در $A_{i-1}$ قابل حذف است، باید بتوانیم آن را در $B_m$ نیز حذف کنیم. این موضوع با اینکه در دنباله‌ی b حذف سطرها و ستون‌های مغلوب را تا جای ممکن ادامه داده‌ایم در تناقض است.

پس می‌فهمیم هر دو دنباله باید سطرها و ستون‌های یکسانی را حذف کنند و این یعنی به جدول یکسانی خواهیم رسید.

**پرسش ۳ پاسخ آقای محمد حسین حاجی سید سلیمان**

- الف)

  - جدول بازی و احتمالات مربوط به هر سطر و ستون در ادامه آورده شده است.

| نیما / رستم | | p | 1 - p |
|---|---|---|---|
| | | **C** | **D** |
| q | **A** | 6,-10 | 0,10 |
| 1 - q | **B** | 4,1 | 1,0 |

  - ابتدا تعادل Nash ترکیبی بازی محاسبه می‌شود.
  - Row Player (Rostam):
    - $6p = 4p + (1 - p) \Longrightarrow p = \frac{1}{3}$
  - Column Player (Nima):
    - $-10q + (1 - q) = 10q \Longrightarrow q = \frac{1}{21}$
  - اثبات می‌شود تعادل $strategy\ profile\ =\ ([\frac{1}{3}(C), \frac{2}{3}(D)], [\frac{1}{21}(A), \frac{20}{21}(B)])$ تنها تعادل Nash (ترکیبی) بازی است.
    - اگر تمام استراتژی‌ها با احتمال بیش از صفر بازی شوند؛ باید دستگاه فوق همواره برقرار باشد که در این صورت فقط یک تعادل Nash به دست می‌آید.
    - در غیر این صورت حداقل یکی از بازیکنان باید با استراتژی خالص بازی کند. در این حالت از آنجا که بیشینه سود نیما در هر سطر و بیشینه سود رستم در هر ستون فقط در یک terminal node موجود است؛ باید یک pure Nash equilibrium به دست بیاید. اما طبق جدول زیر هیچ تعادل Nash خالصی وجود ندارد.

| | |
|---|---|
| **6**,-10 | 0,**10** |
| 4,**1** | **1**,0 |

- ○ بنابراین تعادل ترکیبی به دست آمده تنها تعادل Nash این بازی می‌باشد.

- ب)
  - ○ ابتدا payoff بازیکنان در حالت تعادل محاسبه می‌شود.
  - ○ $payoff_{ROSTAM} = \frac{1}{21}\left(\frac{1}{3} \times 6 + \frac{2}{3} \times 0\right) + \frac{20}{21}\left(\frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 1\right) = 2$
  - ○ $payoff_{NIMA} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{21} \times (-10) + \frac{20}{21} \times 1\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{21} \times 10 + \frac{20}{21} \times 0\right) = \frac{10}{21}$
  - ○ حال فرض کنید رستم متعهد شده است که استراتژی A را با احتمال به اندازه epsilon کمتر از حالت تعادل بازی کند. در این صورت سطر دوم با احتمال بیشتری بازی خواهد شد. در این سطر خانه سمت چپ سود بیشتری برای نیما خواهد داشت. بنابراین استراتژی خود را به pure strategy C تغییر می‌دهد.
  - ○ دقت کنید در حالت تعادل هر دو ستون برای نیما سود یکسانی دارد. اکنون که رستم با احتمال بیشتری با استراتژی B بازی می‌کند؛ نیما باید همواره انتخاب C را داشته باشد. زیرا دیگر حالت تعادل از بین رفته است.
  - ○ در ادامه payoff هر دو بازیکن در شرایط جدید محاسبه شده و نشان داده خواهد شد که سود آنها نسبت به حالت تعادل بیشتر شده است.
  - ○ $payoff_{ROSTAM} = \left(\frac{1}{21} - \varepsilon\right)(1 \times 6 + 0 \times 0) + \left(\frac{20}{21} + \varepsilon\right)(1 \times 4 + 0 \times 1) = \frac{6}{21} - 6\varepsilon + \frac{80}{21} + 4\varepsilon = \frac{86}{21} - 2\varepsilon > equilibrium\ payoff = 2$

- $payoff_{NIMA} = 1 \times \left(\left(\frac{1}{21} - \varepsilon\right) \times (-10) + \left(\frac{20}{21} + \varepsilon\right) \times 1\right) = -\frac{10}{21} + 10\varepsilon + \frac{20}{21} + \varepsilon = \frac{10}{21} + 11\varepsilon > equilibrium\ payoff = \frac{10}{21}$

- ج)
  - به طریق مشابه بخش قبل رستم با احتمال ۱۰۰٪ استراتژی A را بازی می‌کند. در ادامه payoff بازیکنان محاسبه خواهد شد.
  - $payoff_{NIMA} = \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)(1 \times (-10) + 0 \times 1) + \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)(1 \times 10 + 0 \times 0) = -\frac{10}{3} - 10\varepsilon + \frac{20}{3} - 10\varepsilon = \frac{10}{3} - 20\varepsilon > equilibrium\ payoff = \frac{10}{21}$
  - $payoff_{ROSTAM} = 1 \times \left(\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) \times 6 + \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right) \times 0\right) = \frac{6}{3} + \varepsilon > equilibrium\ payoff = 2$

**پرسش ۴ پاسخ آقای محمدجواد هزاره**

**آ)** این بازی تعادل نش خالص ندارد. برای هر استراتژی ثابتی که در نظر بگیریم، طرف مقابل می‌تواند به نحوی بازی کند که آورده‌ی آن برابر ۵/۵ و آورده‌ی دیگری ۴/۵ یا ۳/۵ باشد. بنابراین به ازای هر دو تایی استراتژی‌های خالص، حداقل یکی از آن‌ها بهترین جواب به دیگری نخواهد بود و در نتیجه در استراتژی‌های خالص تعادل نش نداریم. برای اثبات این‌که می‌توان در پاسخ به یک استراتژی به نحوی که در بالا گفته شد بازی کرد نیز حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:

- استراتژی فیکس $(\cdots, 10, \cdots, a_1, a_2)$ است: یا به عبارتی در این استراتژی بازیکن کارت ۱۰ را در دو مرحله‌ی آخر بازی نمی‌کند. در این حالت با حفظ کلیت مسئله فرض کنیم $a_1 > a_2$، بنابراین استراتژی $(\cdots, a_2, \cdots, 10, a_1)$ هفت تساوی داشته و نفر اول (آن که استراتژی فیکس را بازی می‌کرد) دو باخت خواهد داشت بنابراین می‌توان به آورده‌ی ۵/۵ برای نفر دوم و ۴/۵ برای نفر اول رسید. شاید بتوان بهتر هم بازی کرد (بسته به تعداد زندگی بازیکنان) اما می‌دانیم هر دو بازیکن حداقل ۲ زندگی دارند و چون باخت‌ها در دو کارت آخر صورت گرفته (یا یک باخت در وسط بازی صورت گرفته) بازی تا اتمام تمام کارت‌ها ادامه پیدا خواهد کرد.
- استراتژی فیکس $(\cdots, a_1, 10, a_2)$ است: یا به عبارتی بازیکن کارت ۱۰ را یکی مانده به آخر بازی کند. در این حالت باز با حفظ کلیت مسئله فرض کنیم $a_1 > a_2$، استراتژی $(\cdots, 10, a_2, a_1)$ باز هم هفت تساوی و دو برد به دست خواهد آورد که خواسته‌ی مسئله را برقرار می‌کند. باخت دوم نیز در آخرین کارت صورت گرفته بنابراین هر دو بازیکن می‌توانند از این استراتژی در پاسخ به دیگری استفاده کنند و بازی تا اتمام تمام کارت‌ها ادامه پیدا کند.
- استراتژی فیکس $(\cdots, a_1, a_2, 10)$ است. با حفظ کلیت فرض کنیم $a_1 > a_2$ بنابراین استراتژی $(\cdots, 10, a_1, a_2)$ به هفت تساوی و دو برد می‌رسد که خواسته‌ی ما را برآورده می‌کند. نکته‌ی مهم آن است که در این استراتژی باخت دوم حریف در کارت یکی‌مانده به آخر صورت می‌گیرد و بنابراین اگر حریف بازیکن دوم باشد بازی در این مرحله به اتمام می‌رسد. اما چون مرحله‌ی آخر باخت است، بازی کردن آن در آورده‌ي ما تاثیری ندارد. فقط آورده‌ی حریف به اندازه‌ی یک برد کم می‌شود که برابر ۳/۵ خواهد شد.

از آن جایی که این بازی تقارن ندارد محاسبه ی تعادل های ترکیبی در این حالت کار ساده ای نیست و می‌بایست به ازای همه ی استراتژی های یک بازیکن payoff را محاسبه نمود و با برابر قرار دادن این مقدار به ازای payoff های مختلف احتمالات را به دست آورد.

**ب)** خیر، استراتژی خالص اکیدا غالب برای بازیکنان وجود ندارد. برای هر دو استراتژی $r_1$ و $r_2$ برای بازیکن اول، استراتژی $c_1$ برای بازیکن دوم وجود دارد که $r_1$ برای آن مطابق قسمت (آ) بهترین بازی‌ست بنابراین $U(r_1, c_1) \geq U(r_2, c_1)$. همینطور استراتژی $c_2$ای وجود خواهد داشت که در آن عکس این اتفاق رخ خواهد داد و $U(r_1, c_2) \leq U(r_2, c_2)$. بنابراین هیچ استراتژی خالص اکیدا غالبی برای بازیکنان در این بازی وجود ندارد.

**ج)** بهترین نتیجه‌ای که بازیکن اول می‌تواند به آن برسد آن است که بازی را با ۷ تساوی و ۲ برد به پایان برساند و برای این اتفاق نیز باید دومین برد آخرین مرحله یا مرحله‌ی ماقبل آخر باشد. بازیکن اول می‌تواند مطابق آنچه در قسمت (آ) گفته شد به این نحو بازی کند. دانستن اینکه بازیکن دوم همیشه بالاترین کارت خود را بازی می‌کند نمی‌تواند سود بازیکن اول را بیش‌تر کند.

**د)** باز هم بازی تعادل خالص نخواهد داشت. با این تفاوت که در این سبک از بازی هر بازیکن می‌تواند وقتی حریف کارت ۱۰ خود را بازی می‌کند کارت ۱ خود را بازی کند و در تمام کارت‌های دیگر مانند $i$ کارت $i+1$ خود را بازی کند. به این نحو بازیکن می‌تواند به امتیاز ۹ برسد و حریف امتیاز ۱ کسب می‌کند. این استراتژی متقارن است و هر یک از طرفین با دانستن استراتژی طرف دیگر می‌تواند به این نحو بازی کند.

در این حالت با استفاده از تقارن بازی می‌توان یکی از تعادل‌های ترکیبی را به دست آورد.

دو نکته زیر را در نظر بگیرید:

- بازی برای دو نفر متقارن است
- یکی از نفرات را در نظر بگیرید اگر x بازی کن به ازای هرحالتی که نفر دیگر بازی می‌کند . حالتی وجود دارد که نفر اول اگر $x^*$ بازی کند همان payoff را به دست می‌آورد. مثلا:

X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}    y={10,9,8,7,6,5,4,3,2,10}

↓    ↓

$X^*$={4,2,6,1,5,3,7,10,9,8}    y*={7,9,6,10,6,8,4,1,2,3}

باتوجه به نکات گفته شده یکی از تعادل های ترکیبی این است که هر استراتژی زا با احتمال برابر انتخاب کنند و به صورت رندوم عمل کنند.

## پرسش ۵ پاسخ آقای حمیدرضا کلباسی

در این تعادل نش چون نفر اول هر سه استراتژی را به احتمال ناصفر بازی می کند پس هیچ کدام برایش فرقی نمی کند پس داریم:

$$P_C + 7P_D + 6P_E = 9P_C + 7P_D + 4P_E$$
$$P_C + 7P_D + 6P_E = 2P_C + 2P_D + 10P_E$$
$$P_C + P_D + P_E = 1$$

که نتیجه می دهد:

$$6P_D + 5P_E + 1 = 8P_E + 2$$
$$P_D = \frac{3P_E + 1}{6}$$
$$P_E = 4P_C$$
$$P_C + 2P_C + \frac{1}{6} + 4P_C = 1$$
$$P_C = \frac{5}{42}$$
$$P_E = \frac{20}{42}$$

$$P_D = \frac{17}{42}$$

به طور مشابه برای نفر دوم هیچ کدام از انتخاب ها نباید فرقی کند پس داریم:

$$7P_C + 4P_B + P_A = P_C + 7P_B + 4P_A$$
$$7P_C + 4P_B + P_A = 2P_C + 5P_B + 8P_A$$
$$P_C + P_B + P_A = 1$$

که نتیجه می دهد:

$$6P_C - 3P_B - 3P_A = 0$$
$$P_C = \frac{1}{3}$$
$$5P_C - 1P_B - 7P_A = 0$$
$$6P_C - 6P_A = 1$$
$$P_A = \frac{1}{6}$$
$$P_B = \frac{1}{2}$$

در صورتی که نفر دوم به صورت خالص استراتژی $D$ را بازی کند، نفر اول ترکیبی از $A$ و $B$ را بازی باید بکند چون در غیر این صورت رفتارش بهینه نخواهد بود. و هم چنین دی باید بهترین پاسخ به استراتژی نفر اول باشد پس باید داشته باشیم

$$4P_A + 7(1 - P_A) \geq 1P_A + 4(1 - P_A)$$
$$4P_A + 7(1 - P_A) \geq 8P_A + 5(1 - P_A)$$

نامعادله اول همیشه برقرار است. نامعادله دوم وقتی برقرار است که

$$2 \geq 6P_A$$
$$\frac{1}{3} \geq P_A$$

پس هر استراتژی که آ در آن به احتمالی کمتر از یک سوم و بی به احتمالی بیشتر از دو سوم بازی شود با استراتژی خالص دی یک تعادل نش تشکیل می دهد.

تعادل نش خالص این بازی فقط $BD$ است که حالت خاصی از سناریو بالاست.