



طراحی به کمک کامپیوتر - نیمسال دوم ۹۹-۱۳۹۸

شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۸۳۷۸

نام و نام خانوادگی: علی بنی اسد
عنوان تمرین: تمرین منحنی اسپلاین ۱۳۹۹/۰۲/۳

سوال:

معادله منحنی اسپلاین درجه سوم طبیعی را بدست آورید که از نقاط کنترلی $P_3(-2,1), P_2(7,5), P_1(2,0), P_0(0,0)$ عبور کند.

برای محور X معادلات را می نویسیم.

تعداد نقاط کنترلی ما 4 است پس ما به اندازه 1-4 تا منحنی داریم.

$$C_{(u)_x} = au^3 + bu^2 + cu + d \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{1(u)_x} = a_1u^3 + b_1u^2 + c_1u + d_1 \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{2(u)_x} = a_2u^3 + b_2u^2 + c_2u + d_2 \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{3(u)_x} = a_3u^3 + b_3u^2 + c_3u + d_3 \quad 0 \leq u \leq 1$$

معادلات:

$$C_{1(0)_x} = 0, \quad C_{1(1)_x} = 0, \quad C_{2(0)_x} = 0, \quad C_{2(1)_x} = 5, \quad C_{3(0)_x} = 5, \quad C_{3(1)_x} = 1$$

$$\dot{C}_{1(1)_x} = \dot{C}_{2(0)_x}, \quad \dot{C}_{2(1)_x} = \dot{C}_{3(0)_x}$$

$$\ddot{C}_{1(1)_x} = \ddot{C}_{2(0)_x}, \quad \ddot{C}_{2(1)_x} = \ddot{C}_{3(0)_x}$$

$$\ddot{C}_{1(0)_x} = 0, \quad \ddot{C}_{3(1)_x} = 0$$

در بالا 12 مجهول داریم و 12 معلوم.

$$C_{1(0)_x} = a_1 \times 0^3 + b_1 \times 0^2 + c_1 \times 0 + d_1 = 0$$

$$C_{1(1)_x} = a_1 \times 1^3 + b_1 \times 1^2 + c_1 \times 1 + d_1 = 2$$

$$C_{2(0)_x} = a_2 \times 0^3 + b_2 \times 0^2 + c_2 \times 0 + d_2 = 2$$

$$C_{2(1)_x} = a_2 \times 1^3 + b_2 \times 1^2 + c_2 \times 1 + d_2 = 7$$

$$C_{3(0)_x} = a_3 \times 0^3 + b_3 \times 0^2 + c_3 \times 0 + d_3 = 7$$

$$C_{3(1)_x} = a_3 \times 1^3 + b_3 \times 1^2 + c_3 \times 1 + d_3 = -2$$

$$\dot{C}_{1(1)_x} = \dot{C}_{2(0)_x} \rightarrow 3a_1 \times 1^2 + 2b_1 \times 1 + c_1 + 0 \times d_1 - 3a_2 \times 0^2 - 2b_2 \times 0 - c_2 + 0 \times d_2 = 0$$

$$\dot{C}_{2(1)_x} = \dot{C}_{3(0)_x} \rightarrow 3a_2 \times 1^2 + 2b_2 \times 1 + c_2 + 0 \times d_2 - 3a_3 \times 0^2 - 2b_3 \times 0 - c_3 + 0 \times d_3 = 0$$

$$\ddot{C}_{1(1)_x} = \ddot{C}_{2(0)_x} \rightarrow 6a_1 \times 1 + 2b_1 \times 1 + c_1 \times 0 + 0 \times d_1 - 6a_2 \times 0 - 2b_2 - c_2 \times 0 + 0 \times d_2 = 0$$

$$\ddot{C}_{2(1)_x} = \ddot{C}_{3(0)_x} \rightarrow 6a_2 \times 1 + 2b_2 \times 1 + c_2 \times 0 + 0 \times d_2 - 6a_3 \times 0 - 2b_3 - c_3 \times 0 + 0 \times d_3 = 0$$

$$\ddot{C}_{1(0)_x} = 6a_1 \times 0 + 2b_1 = 0$$

$$\ddot{C}_{3(1)_x} = 6a_3 \times 1 + 2b_3 = 0$$

طراحی به کمک کامپیوتر - نیمسال دوم ۹۹-۱۳۹۸

شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۸۳۷۸

نام و نام خانوادگی: علی بنی اسد
عنوان تمرین: تمرین منحنی اسپلاین ۱۳۹۹/۰۲/۳

در بالا ۱۲ معادله ۱۲ مجهول داریم.
ماتریس معادلات:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 b_1 \\
 c_1 \\
 d_1 \\
 a_2 \\
 b_2 \\
 c_2 \\
 d_2 \\
 a_3 \\
 b_3 \\
 c_3 \\
 d_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 2 \\
 2 \\
 7 \\
 7 \\
 -2 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 b_1 \\
 c_1 \\
 d_1 \\
 a_2 \\
 b_2 \\
 c_2 \\
 d_2 \\
 a_3 \\
 b_3 \\
 c_3 \\
 d_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1.7333 \\
 0 \\
 0.2667 \\
 0 \\
 -5.6667 \\
 5.2000 \\
 5.4667 \\
 2.0000 \\
 3.9333 \\
 -11.8000 \\
 -1.1333 \\
 7.0000
 \end{bmatrix}$$

طراحی به کمک کامپیوتر - نیمسال دوم ۹۹-۱۳۹۸

شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۸۳۷۸

نام و نام خانوادگی: علی بنی اسد
عنوان تمرین: تمرین منحنی اسپلاین ۱۳۹۹/۰۲/۳

بر اساس حل معادله بالا جواب ها به صورت زیر در می آید.

$$C_{1(u)x} = 1.7333u^3 + 0u^2 + 0.2667u + 0 = 1.7333u^3 + 0.2667u \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{2(u)x} = -5.6667u^3 + 5.2u^2 + 5.4667u + 2 \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{3(u)x} = 3.9334u^3 + -11.8u^2 - 1.1334u + 7 \quad 0 \leq u \leq 1$$

همین روش بالا را برای محور y انجام می دهیم.

تعداد نقاط کنترلی ما 4 است پس ما به اندازه 1-4 تا منحنی داریم.

$$C_{(u)y} = au^3 + bu^2 + cu + d \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{1(u)y} = a_1u^3 + b_1u^2 + c_1u + d_1 \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{2(u)y} = a_2u^3 + b_2u^2 + c_2u + d_2 \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{3(u)y} = a_3u^3 + b_3u^2 + c_3u + d_3 \quad 0 \leq u \leq 1$$

معادلات:

$$C_{1(0)y} = 0, \quad C_{1(1)y} = 2, \quad C_{2(0)y} = 2, \quad C_{2(1)y} = 7, \quad C_{3(0)y} = 7, \quad C_{3(1)y} = -2$$

$$\dot{C}_{1(1)y} = \dot{C}_{2(0)y}, \quad \dot{C}_{2(1)y} = \dot{C}_{3(0)y}$$

$$\ddot{C}_{1(1)y} = \ddot{C}_{2(0)y}, \quad \ddot{C}_{2(1)y} = \ddot{C}_{3(0)y}$$

$$\ddot{C}_{1(0)y} = 0, \quad \ddot{C}_{3(1)y} = 0$$

در بالا 12 مجهول داریم و 12 معلوم.

$$C_{1(0)y} = a_1 \times 0^3 + b_1 \times 0^2 + c_1 \times 0 + d_1 = 0$$

$$C_{1(1)y} = a_1 \times 1^3 + b_1 \times 1^2 + c_1 \times 1 + d_1 = 0$$

$$C_{2(0)y} = a_2 \times 0^3 + b_2 \times 0^2 + c_2 \times 0 + d_2 = 0$$

$$C_{2(1)y} = a_2 \times 1^3 + b_2 \times 1^2 + c_2 \times 1 + d_2 = 5$$

$$C_{3(0)y} = a_3 \times 0^3 + b_3 \times 0^2 + c_3 \times 0 + d_3 = 5$$

$$C_{3(1)y} = a_3 \times 1^3 + b_3 \times 1^2 + c_3 \times 1 + d_3 = 1$$

$$\dot{C}_{1(1)y} = \dot{C}_{2(0)y} \rightarrow 3a_1 \times 1^2 + 2b_1 \times 1 + c_1 + 0 \times d_1 - 3a_2 \times 0^2 - 2b_2 \times 0 - c_2 + 0 \times d_2 = 0$$

$$\dot{C}_{2(1)y} = \dot{C}_{3(0)y} \rightarrow 3a_2 \times 1^2 + 2b_2 \times 1 + c_2 + 0 \times d_2 - 3a_3 \times 0^2 - 2b_3 \times 0 - c_3 + 0 \times d_3 = 0$$

طراحی به کمک کامپیوتر - نیمسال دوم ۹۹-۱۳۹۸

شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۸۳۷۸

نام و نام خانوادگی: علی بنی اسد
عنوان تمرین: تمرین منحنی اسپلاین ۱۳۹۹/۰۲/۳

$$\ddot{C}_{1(1)y} = \ddot{C}_{2(0)y} \rightarrow 6a_1 \times 1 + 2b_1 \times 1 + c_1 \times 0 + 0 \times d_1 - 6a_2 \times 0 - 2b_2 - c_2 \times 0 + 0 \times d_2 = 0$$

$$\ddot{C}_{2(1)y} = \ddot{C}_{3(0)y} \rightarrow 6a_2 \times 1 + 2b_2 \times 1 + c_2 \times 0 + 0 \times d_2 - 6a_3 \times 0 - 2b_3 - c_3 \times 0 + 0 \times d_3 = 0$$

$$\ddot{C}_{1(0)y} = 6a_1 \times 0 + 2b_1 = 0$$

$$\ddot{C}_{3(1)y} = 6a_3 \times 1 + 2b_3 = 0$$

در بالا ۱۲ معادله ۱۲ مجهول داریم.

ماتریس معادلات:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9334 \\ 0 \\ -1.9334 \\ 0 \\ -4.6667 \\ 5.8 \\ 3.8667 \\ 0 \\ 2.7334 \\ -8.2 \\ 1.4667 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بر اساس حل معادله بالا جواب ها به صورت زیر در می آید.

$$C_{1(u)y} = 1.9334u^3 + 0u^2 - 1.9334u + 0 = 1.9334u^3 - 1.9333u \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$C_{2(u)y} = -4.6667u^3 + 5.8u^2 + 3.8667u \quad 0 \leq u \leq 1$$

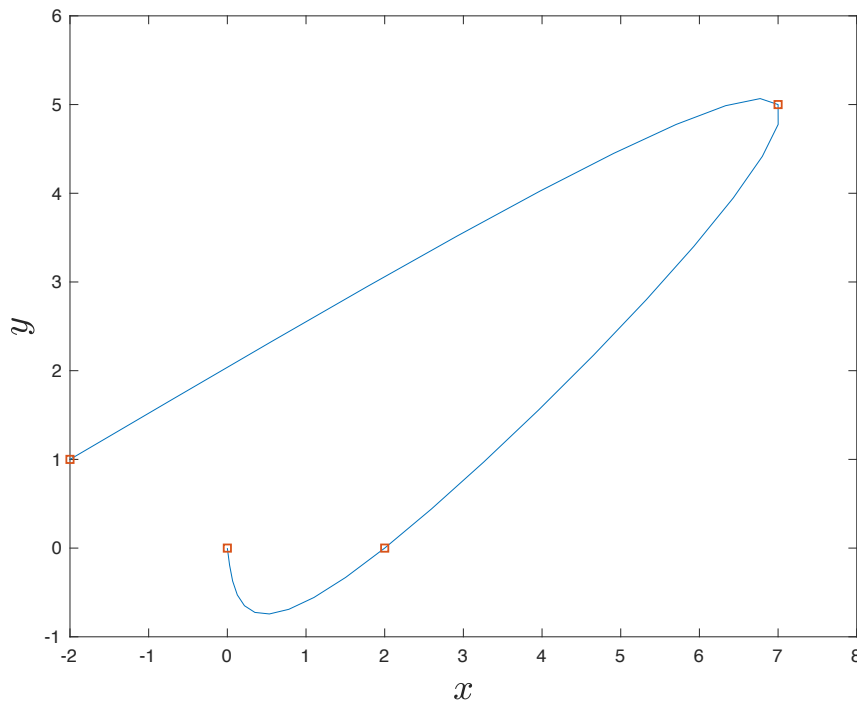
$$C_{3(u)y} = 2.7334u^3 - 8.2u^2 + 1.4667u + 5 \quad 0 \leq u \leq 1$$

طراحی به کمک کامپیوتر - نیمسال دوم ۹۹-۱۳۹۸

شماره دانشجویی: ۹۶۱۰۸۳۷۸

نام و نام خانوادگی: علی بنی اسد
عنوان تمرین: تمرین منحنی اسپلاین ۱۳۹۹/۰۲/۳

نمودار کشیده شده با متلب



کد متلب حل سوال ضمیمه شده است و شما می توانید در گیت‌هاب من نیز کد و پاسخ سوال را ببینید.

[Alibaniasad1999](https://github.com/Alibaniasad1999)