دانشکده مهندسی هوافضا

دینامیک پرواز ۲

Flight Dynamics 2

فصل ۱

معادلات حرکت هواپیما

معادلات حرکت هواپیما (انعطاف ناپذیر)

جایگاه بحث

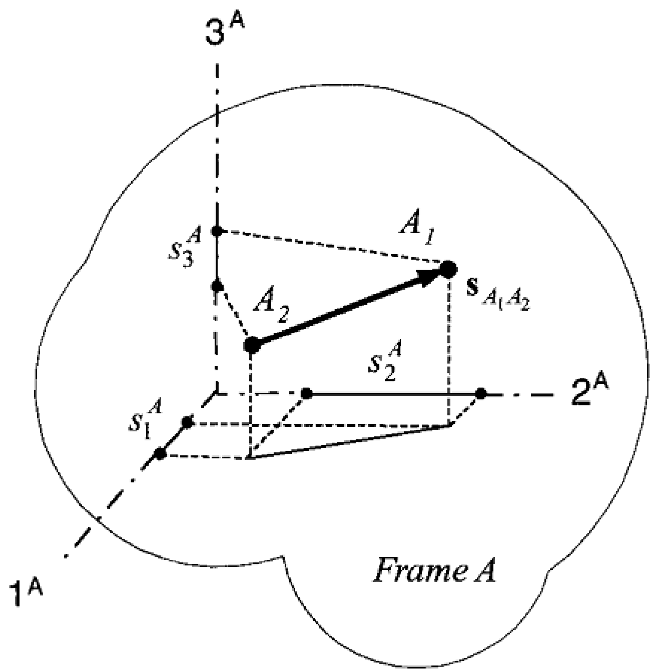
در نقشه راه درس

- Aircraft Equations of Motion
- Modeling of Aerodynamic and Thrust Forces and Moments
- Aircraft Stability and Design for Trim Conditions
- Aircraft Stability and Control for Perturbed-State Flight
- Supplementary Topics

• قاب‌ها و دستگاه‌های مختصات

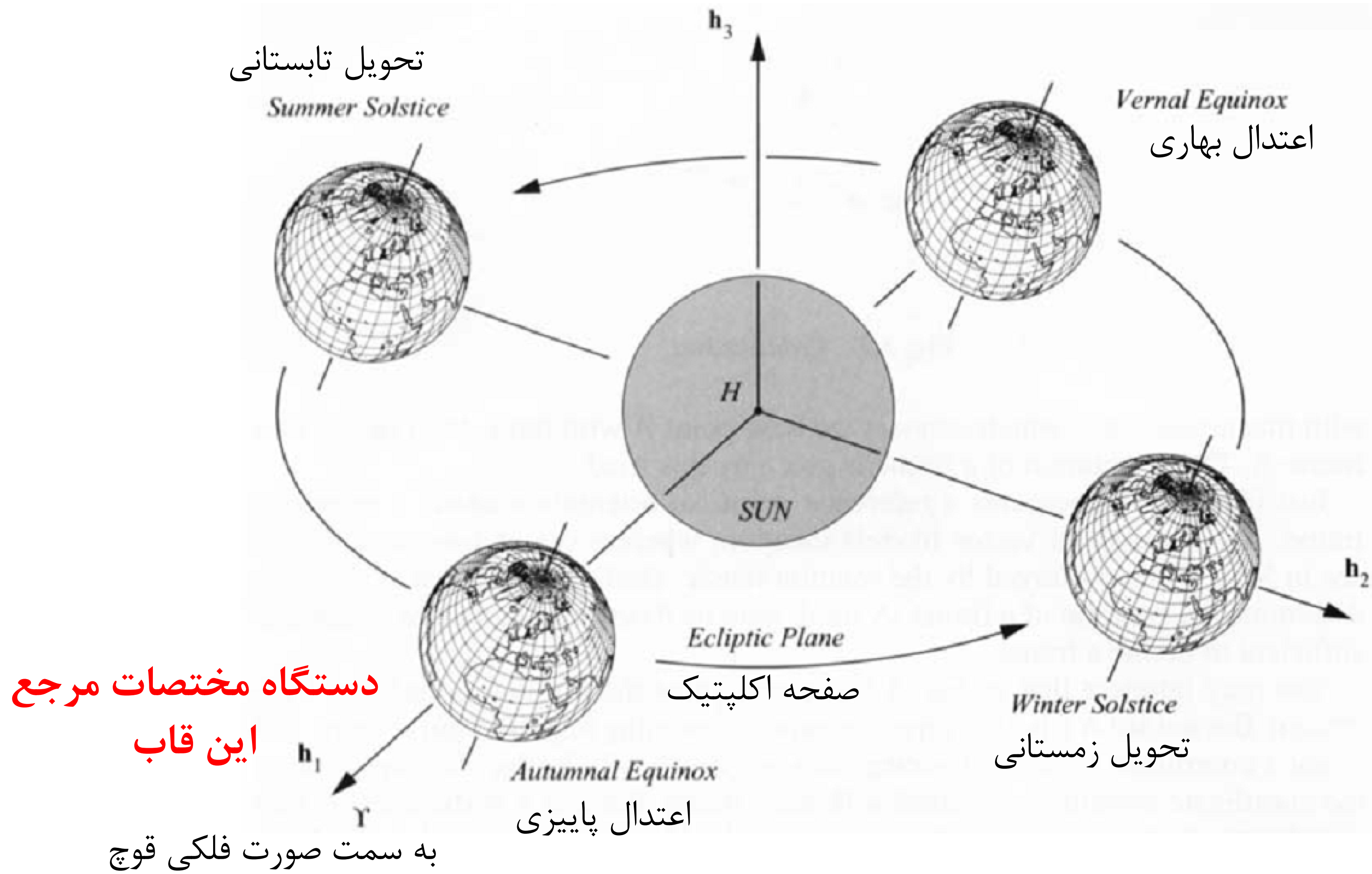
✓ **قاب**، مجموعه‌ی پیوسته‌ای از نقاط در فضای اقلیدوسی سه‌بعدی است که این نقاط، باید نسبت به هم دارای فواصل ثابت بوده و حداقل دارای سه نقطه‌ی غیرهم‌خط باشد.

✓ **دستگاه مختصات**، یک موجودیت انتزاعی است که **ارتباط** تک-به-تک المان‌های فضای اقلیدوسی و **مختصات** را بیان می‌کند.



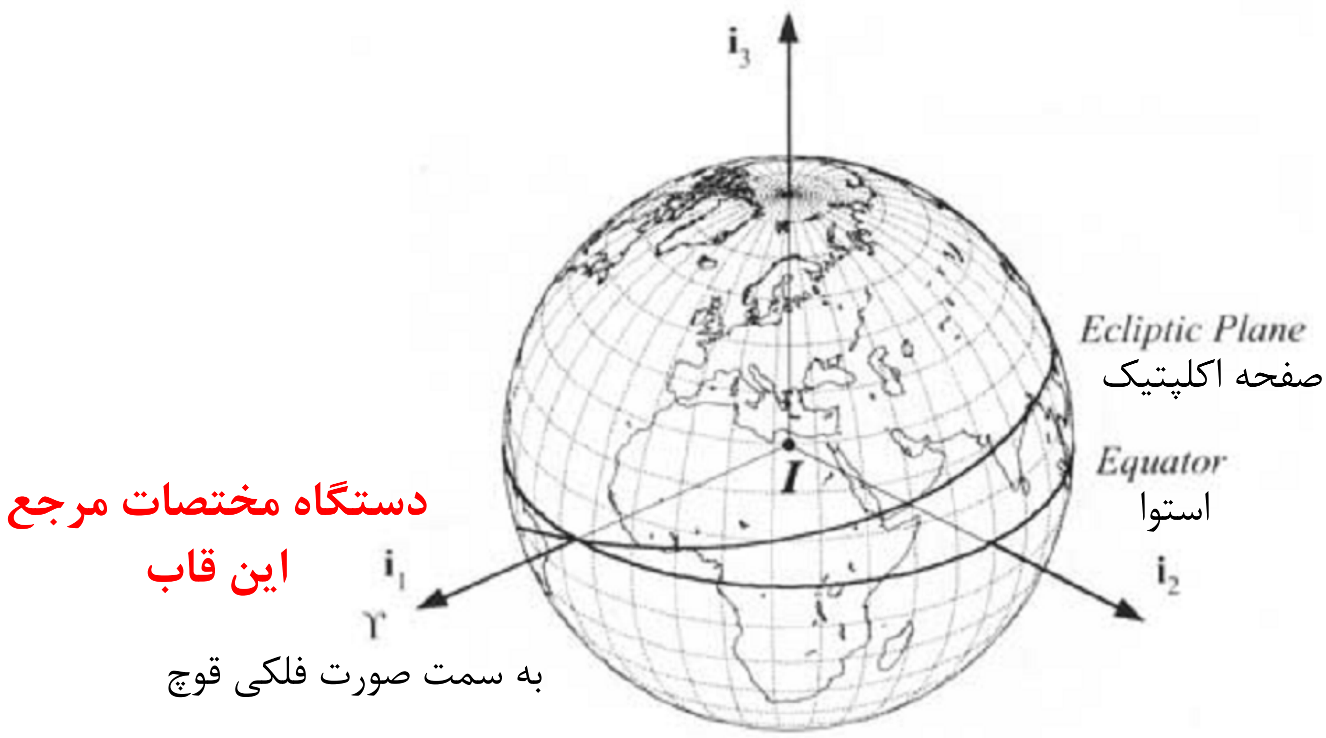
• انواع قاب‌های مرجع

➢ Heliocentric Frame قاب خورشید-مرکز



- انواع قاب‌های مرجع

➢ **Geocentric-inertial Frame قاب اینرسی زمین-مرکز**



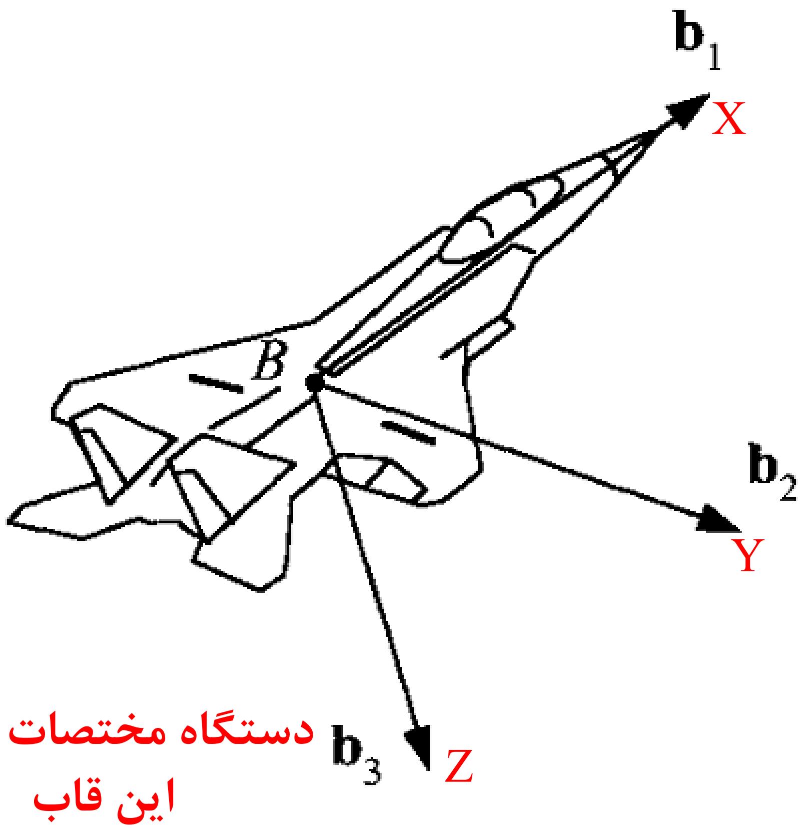
- انواع قاب‌های مرجع

➢ **Earth Frame قاب زمینی**

**دستگاه مختصات مرجع
این قاب**

- انواع قاب‌های مرجع

➢ **Body Frame قاب بدنی**

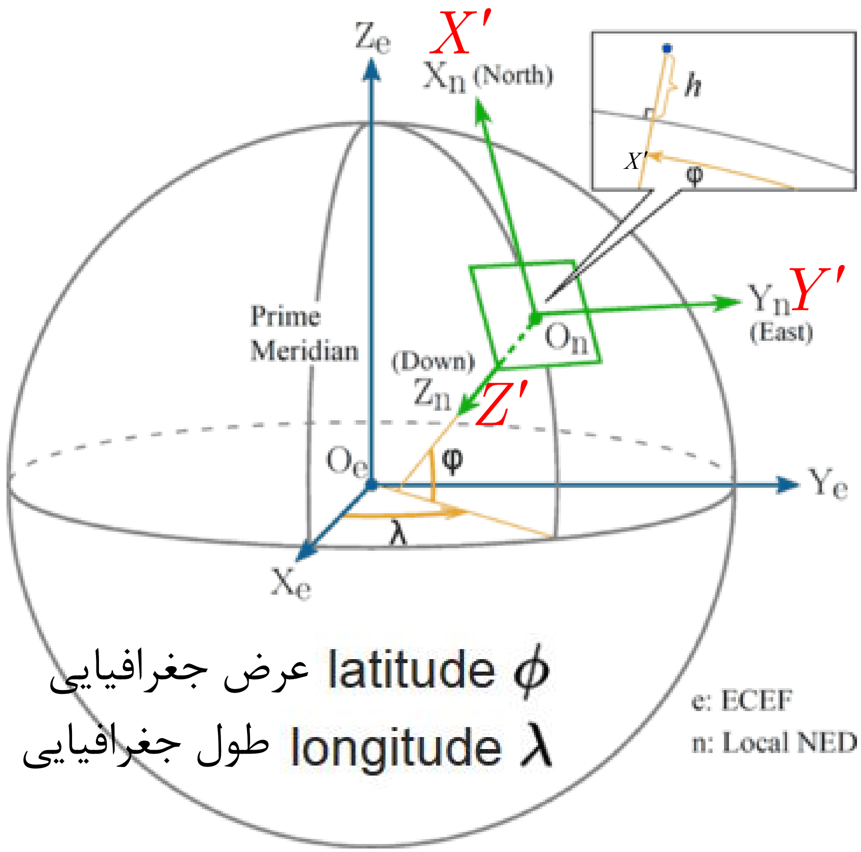


- انواع قاب‌های مرجع

Frame	Base point	Base vectors	First direction	Third direction
Heliocentric	H center of sun	$\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$	$\boldsymbol{h}_1$ Aries	$\boldsymbol{h}_3$ normal of ecliptic
Inertial	I center of Earth	$\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$	$\boldsymbol{i}_1$ vernal equinox	$\boldsymbol{i}_3$ Earth's spin axis
Earth	E center of Earth	$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$ Greenwich	$\boldsymbol{e}_3$ Earth's spin axis
Body	B center of mass	$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$	$\boldsymbol{b}_1$ nose	$\boldsymbol{b}_3$ down

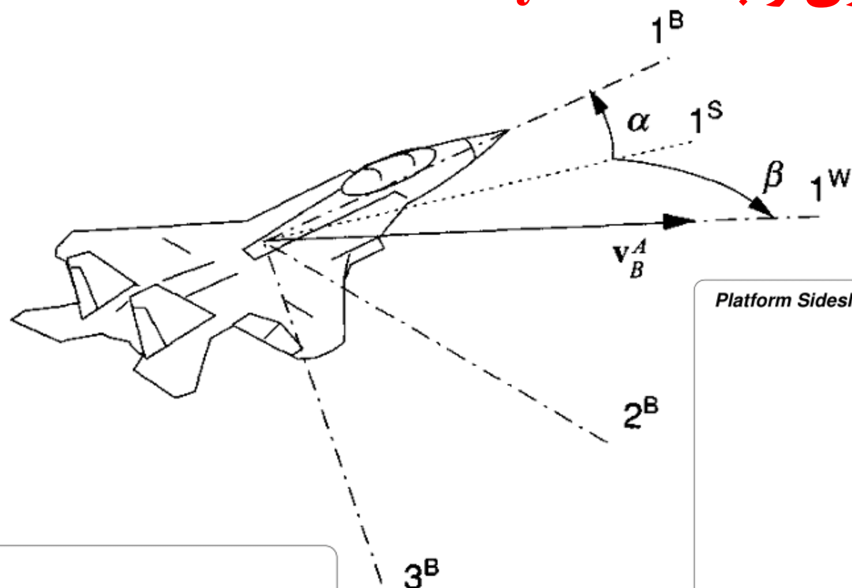
• دستگاه‌های مختصات دیگر (مورد نیاز)

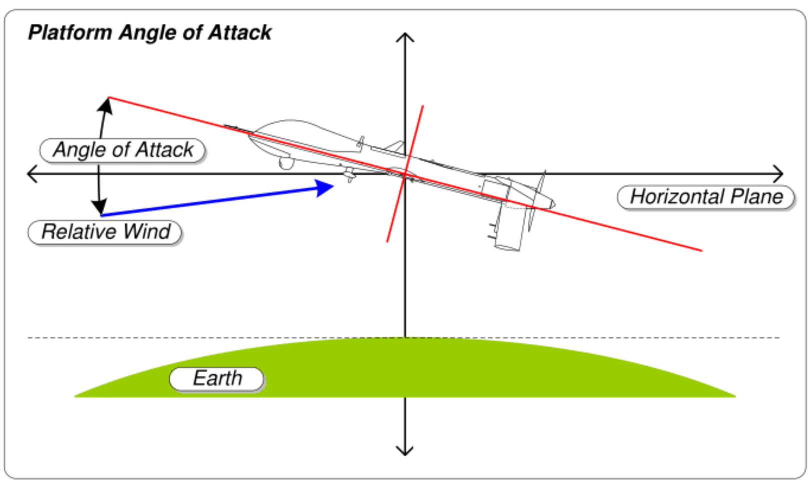
➢ **Geographic Coordinate System دستگاه مختصات جغرافیایی (محلی)**

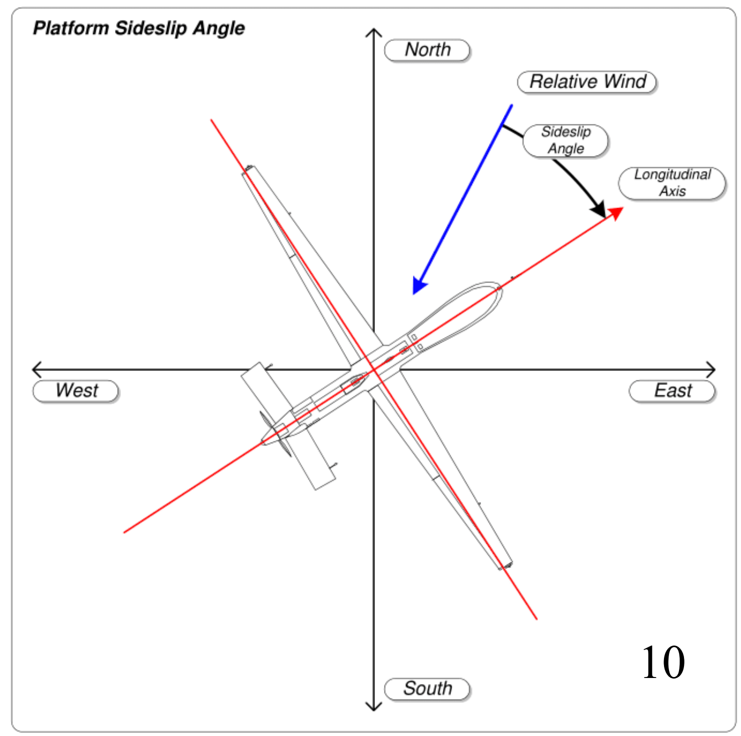


- دستگاه‌های مختصات دیگر (مورد نیاز)

➢ **Stability & Wind Coordinate System دستگاه مختصات پایداری و باد**







• فرضیات مدل‌سازی

فرض ۱:

هواپیما، یک جسم صلب است، یعنی **فاصلهٔ میان هر دو نقطهٔ هواپیما** نسبت به قاب بدنی هواپیما نامتغیر با زمان Time-invariant است. این فرض برای هواپیماهایی که تغییر شکل الاستیک قابل توجهی را در طول پرواز تجربه می‌کنند، مانند هواپیماهای مسافربری بزرگ، ترابری نظامی و بمب‌افکن‌ها با مقادیر بالای ضریب منظری بال، نامعتبر است.

فرض ۲:

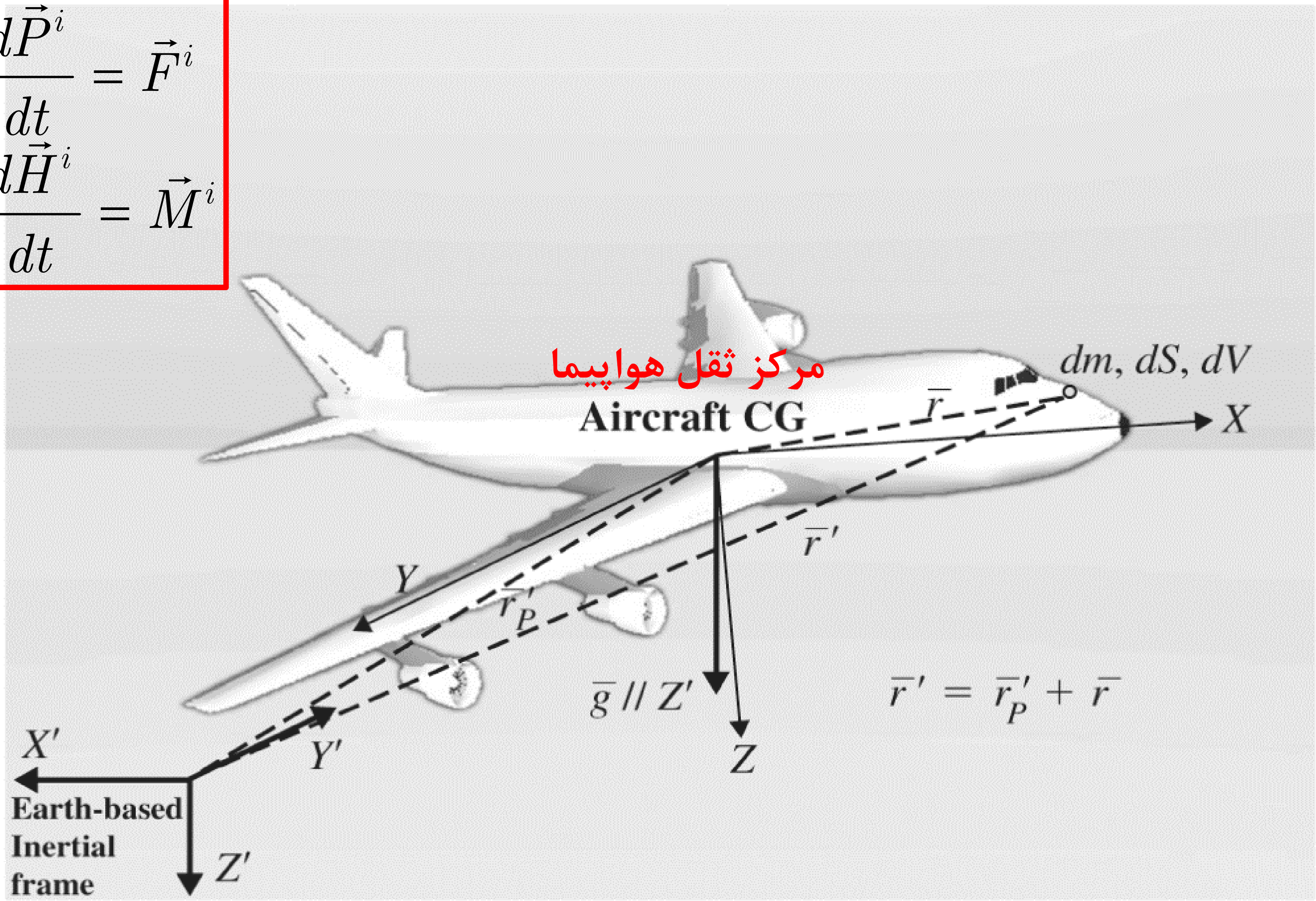
جرم هواپیما ثابت است، این فرض ممکن است با در نظر گرفتن مصرف سوخت، غیرواقعی به نظر برسد؛ اما می‌توان در یک مدت زمان محدود این فرض را قابل‌قبول دانست. این فرض برای راکت‌ها، که کاهش جرم قابل توجهی را در مدت زمان کوتاهی در فاز پرتاب تجربه می‌کنند، معتبر نیست.

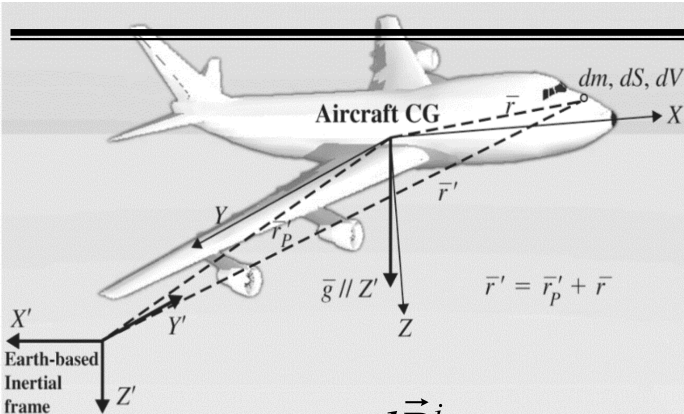
فرض ۳:

توزیع جرمی در طول زمان ثابت است، این فرض بیان‌کنندهٔ این است که **مشخصات اینرسی هواپیما** (ممان‌های اصلی و ضربی) را می‌توان در یک مدت زمان محدود ثابت فرض کرد. در واقع این مشخصات اینرسی با مصرف سوخت تغییر می‌کنند؛ اما نرخ تغییرات این پارامترها کم است زیرا در طراحی، مرکز ثقل مخازن سوخت در نزدیکی مرکز ثقل هواپیما تعیین می‌شود.

- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\vec{P}^i}{dt} &= \vec{F}^i \\ \frac{d\vec{H}^i}{dt} &= \vec{M}^i\end{aligned}}$$





• فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

نیروهای سطحی   نیروهای حجمی

بقای ممنتوم خطی

به i بیانگر اینرسی دقت شود

$$\frac{d\vec{P}^i}{dt} = \vec{F}^i \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_V \rho_A \frac{d\bar{r}'}{dt}\, dV = \int_V \rho_A \bar{g}\, dV + \int_S \left(\bar{f}_A + \bar{f}_T\right) dS$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_A \frac{d\bar{r}'}{dt}\, dV = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\int_V \rho_A \bar{r}'\, dV = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\int_V \rho_A \left(\bar{r}_P' + \bar{r}\right) dV$$

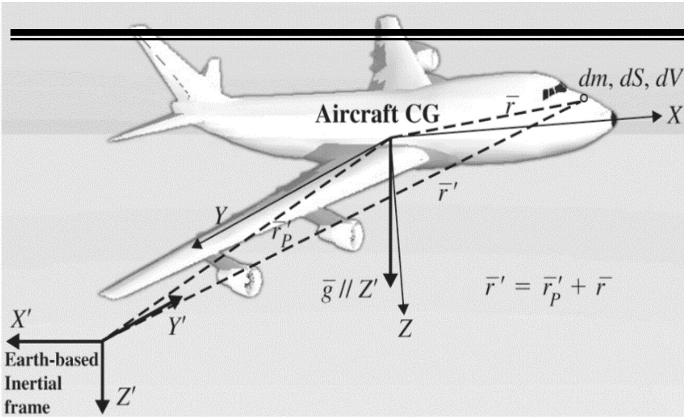
سمت چپ معادله

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left\{\int_V \rho_A \bar{r}_P'\, dV + \overbrace{\cancel{\int_V \rho_A \bar{r}\, dV}}^{=0}\right\} = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left\{\bar{r}_P'\int_V \rho_A\, dV\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left(m\bar{r}_P'\right) = m\frac{d\bar{V}_P}{dt}$$

سمت راست معادله

$$\int_V \rho_A \bar{g}\, dV + \int_S \bar{F}\, dS = m\bar{g} + \left(\bar{F}_A + \bar{F}_T\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{m\frac{d\bar{V}_P}{dt} = m\bar{g} + \left(\bar{F}_A + \bar{F}_T\right)}$$



- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

$$\boxed{m\frac{d\bar{V}_P}{dt} = m\bar{g} + \left(\bar{F}_A + \bar{F}_T\right)}$$

معادله سرعت نسبت به اینرسی
بیان شده در دستگاه اینرسی

بقای ممنتوم خطی

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{C}$$

تکنیک بیان در
قاب متحرک

از آنجایی که بیان نیرو و ممان‌های روی هواپیما، در دستگاه بدنی ساده و ملموس‌تر است مایلیم که معادلات حرکت را در دستگاه بدنی بنویسیم:

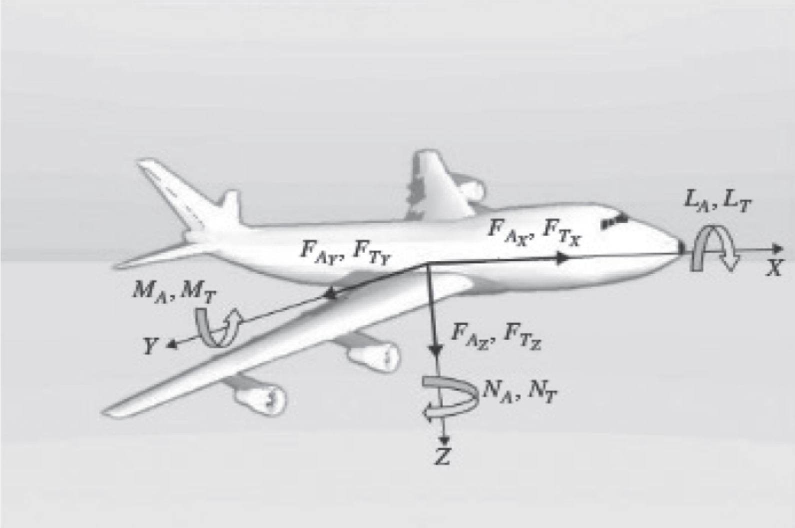
$$\rightarrow \quad m\frac{d\bar{V}_P}{dt} = m\left(\frac{\partial \bar{V}_P}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{V}_P\right) = m\left(\dot{\bar{V}}_P + \bar{\omega} \times \bar{V}_P\right) = m\bar{g} + \left(\bar{F}_A + \bar{F}_T\right)$$

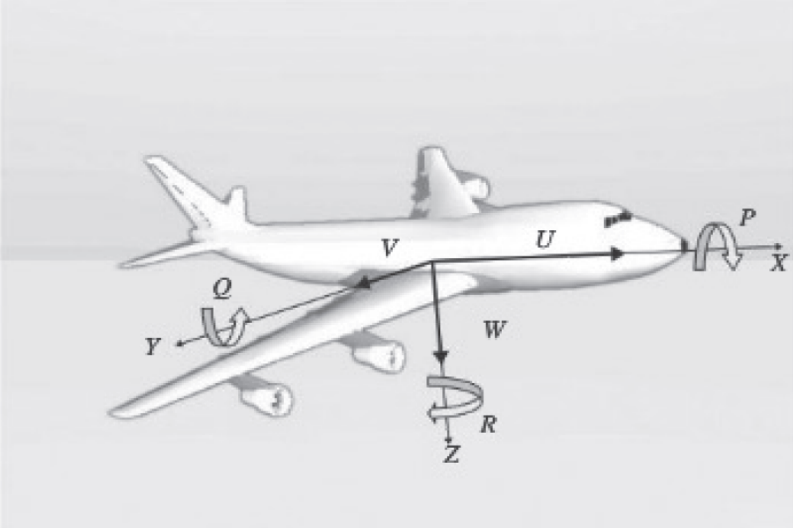
$$\bar{\omega} \times \bar{V}_P = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix}$$

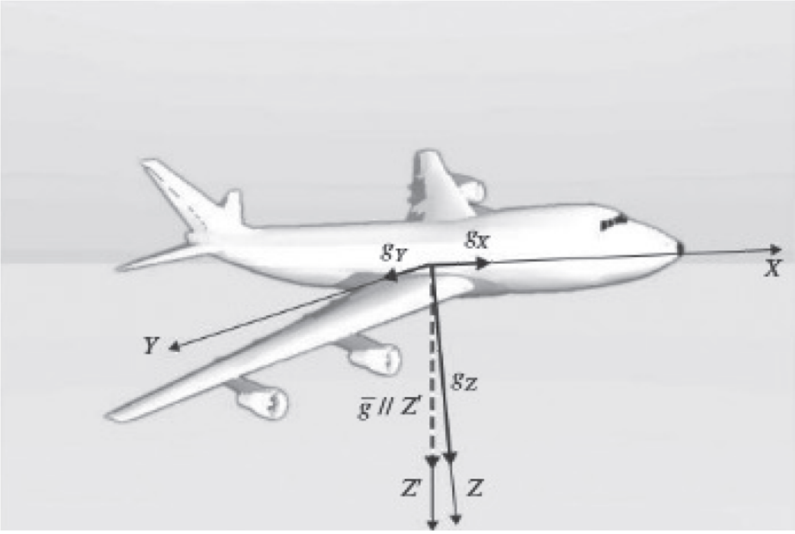
$$\boxed{\begin{aligned} m\left(\dot{U} + QW - RV\right) &= mg_X + \left(F_{A_X} + F_{T_X}\right) \\ m\left(\dot{V} + UR - PW\right) &= mg_Y + \left(F_{A_Y} + F_{T_Y}\right) \\ m\left(\dot{W} + PV - QU\right) &= mg_Z + \left(F_{A_Z} + F_{T_Z}\right) \end{aligned}}$$

معادله سرعت نسبت به اینرسی
بیان شده در دستگاه بدنی هواپیما

- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما







• فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

$$\vec{F}^b = (m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T)\Big|_b ;\vec{M}^b = (\vec{M}_A + \vec{M}_T)\Big|_b$$

$$\vec{V}_P^b = \left[U,V,W\right]^T ;$$

$$\vec{\omega}^b = \left[P,Q,R\right]^T \square\ Roll, Pitch, Yaw\ Rates$$

$$\vec{F}_A = F_{A_X}\vec{i} + F_{A_Y}\vec{j} + F_{A_Z}\vec{k}$$

$$\vec{F}_T = F_{T_X}\vec{i} + F_{T_Y}\vec{j} + F_{T_Z}\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = L_A\vec{i} + M_A\vec{j} + N_A\vec{k}$$

$$\vec{M}_T = L_T\vec{i} + M_T\vec{j} + N_T\vec{k}$$

$\vec{F}_A$: Total Aeroynamic Forces

$\vec{F}_T$: Total Thrust Forces

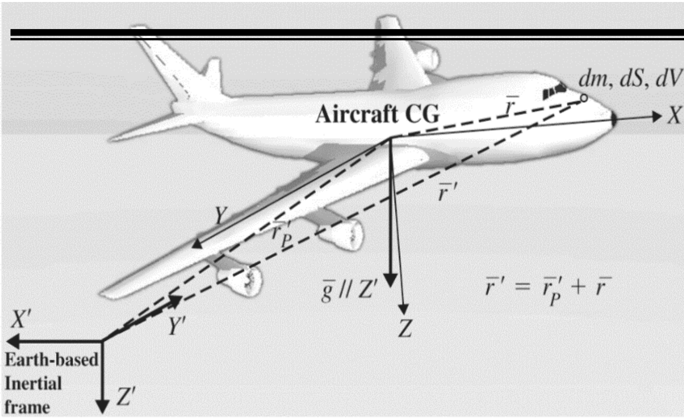
$\vec{M}_A$: Total Aeroynamic Moments

$\vec{M}_T$: Total Thrust Moments

L_A : Rolling Moment

M_A : Pitching Moment

N_A : Yawing Moment



- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

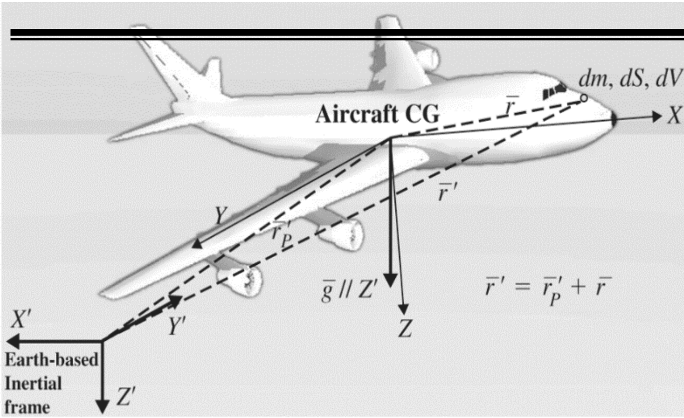
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_A \frac{d\bar{r}'}{dt}\, dV = \int_V \rho_A \bar{g}\, dV + \int_S \left(\bar{f}_A + \bar{f}_T\right) dS$$

بقای مومنتوم زاویه‌ای

$$\frac{d\vec{H}^i}{dt} = \vec{M}^i \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_V \bar{r}' \times \rho_A \frac{d\bar{r}'}{dt}\, dV = \int_V \bar{r}' \times \rho_A \bar{g}\, dV + \int_S \bar{r}' \times \left(\bar{f}_A + \bar{f}_T\right) dS$$

$$\xrightarrow[-\bar{r}_P'\left(\frac{d\vec{P}^i}{dt} = \vec{F}^i\right)]{\bar{r}' = \bar{r}_P' + \bar{r} \quad ; \quad \int_V \bar{r}\rho_A\, dV = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \bar{r} \times \rho_A \frac{d\bar{r}}{dt}\, dV = \int_S \bar{r} \times \left(\bar{f}_A + \bar{f}_T\right) dS = \bar{M}_A + \bar{M}_T$$



- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

$$\frac{d}{dt}\int_V \bar{r}\times\rho_A \frac{d\bar{r}}{dt}\, dV = \bar{M}_A + \bar{M}_T$$

بقای مومنتوم زاویه‌ای

$$\frac{d}{dt}\int_V \bar{r}\times\rho_A \frac{d\bar{r}}{dt}\, dV = \int_V \rho_A \overbrace{\cancel{\frac{d\bar{r}}{dt}}\times\frac{d\bar{r}}{dt}}^{=0} dV + \int_V \bar{r}\times\rho_A \frac{d}{dt}\frac{d\bar{r}}{dt} dV$$

$$= \int_V \bar{r}\times\rho_A \frac{d}{dt}\frac{d\bar{r}}{dt} dV \xrightarrow{\frac{d}{dt}\frac{d\bar{r}}{dt}=\ddot{\bar{r}}+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+2\bar{\omega}\times\dot{\bar{r}}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})}$$

$$= \int_V \bar{r}\times\left[\cancel{\ddot{\bar{r}}}^{=0} + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r} + 2\bar{\omega}\times\cancel{\dot{\bar{r}}}^{=0} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\right]\rho_A dV$$

$$= \int_V \bar{r}\times\left[\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\right]\rho_A dV = \bar{M}_A + \bar{M}_T$$

- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

$$\int_V \bar{r}\times\left[\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right)\right]\rho_A dV=\bar{M}_A+\bar{M}_T$$

$$\bar{A}\times\left(\bar{B}\times\bar{C}\right)=\bar{B}\left(\bar{A}.\bar{C}\right)-\bar{C}\left(\bar{A}.\bar{B}\right)\rightarrow\begin{cases}\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right)=\bar{\omega}\left(\bar{\omega}.\bar{r}\right)-\bar{r}\left(\bar{\omega}.\bar{\omega}\right)\\ \bar{r}\times\left(\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}\right)=\dot{\bar{\omega}}\left(\bar{r}.\bar{r}\right)-\bar{r}\left(\bar{r}.\dot{\bar{\omega}}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{r}\ .\ \bar{r}=X^2+Y^2+Z^2\\ \bar{r}\ .\ \dot{\bar{\omega}}=X\dot{P}+Y\dot{Q}+Z\dot{R}\\ \bar{\omega}\ .\ \bar{r}=XP+YQ+ZR\end{cases}$$

$$I_{XX}=\int_V\left(Y^2+Z^2\right)\rho_A dV,\ \ I_{YY}=\int_V\left(X^2+Z^2\right)\rho_A dV,\ \ I_{ZZ}=\int_V\left(X^2+Y^2\right)\rho_A dV$$

$$I_{XY}=I_{YX}=\int_V XY\rho_A dV=\int_V YX\rho_A dV$$

$$I_{XZ}=I_{ZX}=\int_V XZ\rho_A dV=\int_V ZX\rho_A dV$$

$$I_{YZ}=I_{ZY}=\int_V YZ\rho_A dV=\int_V ZY\rho_A dV$$

بقای ممنتوم زاویه‌ای

- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

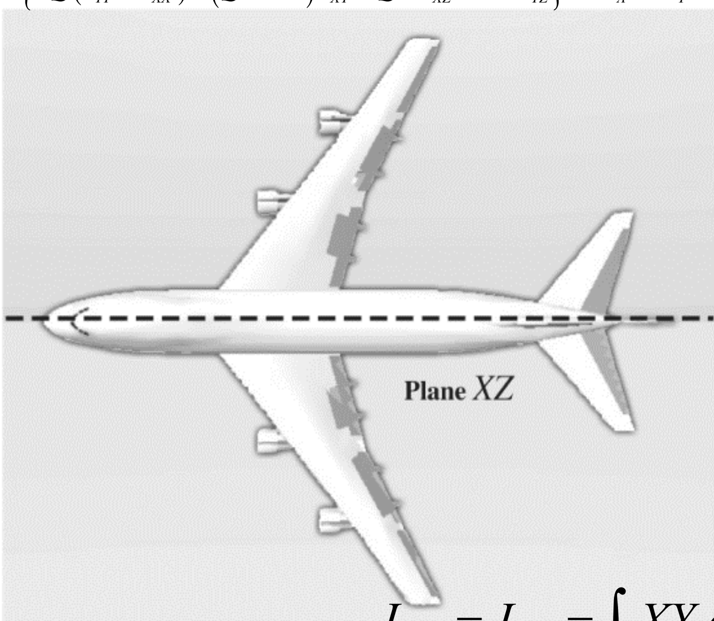
$$\int_V \bar{r}\times\left[\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right)\right]\rho_A dV=\bar{M}_A+\bar{M}_T$$

بقای مومنتوم زاویه‌ای

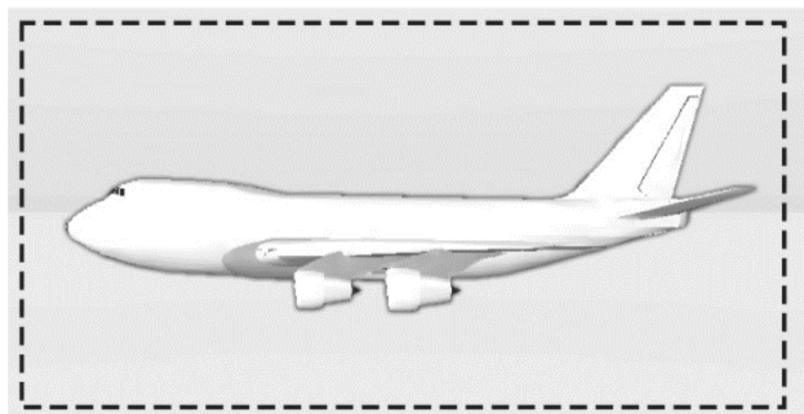
$$\begin{aligned}
&\bar{i}\left\{\dot{P}I_{XX}-\dot{Q}I_{XY}-\dot{R}I_{XZ}\right\}\\
&+\bar{j}\left\{\dot{Q}I_{YY}-\dot{P}I_{XY}-\dot{R}I_{YZ}\right\}\\
&+\bar{k}\left\{\dot{R}I_{ZZ}-\dot{P}I_{XZ}-\dot{Q}I_{ZY}\right\}\\
&+\bar{i}\left\{PR\,I_{XY}+\left(R^2-Q^2\right)I_{YZ}-PQ\,I_{XZ}+\left(I_{ZZ}-I_{YY}\right)RQ\right\}\\
&+\bar{j}\left\{PR\left(I_{XX}-I_{ZZ}\right)+\left(P^2-R^2\right)I_{XZ}-QR\,I_{XY}+PQ\right\}\\
&+\bar{k}\left\{PQ\left(I_{YY}-I_{XX}\right)+\left(Q^2-P^2\right)I_{XY}+QR\,I_{XZ}-PR\,I_{YZ}\right\}=\bar{M}_A+\bar{M}_T
\end{aligned}$$

- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

$$
\begin{aligned}
&\bar{i}\left\{\dot{P}I_{XX}-\dot{Q}I_{XY}-\dot{R}I_{XZ}\right\}+\bar{j}\left\{\dot{Q}I_{YY}-\dot{P}I_{XY}-\dot{R}I_{YZ}\right\}+\bar{k}\left\{\dot{R}I_{ZZ}-\dot{P}I_{XZ}-\dot{Q}I_{ZY}\right\}\\
&+\bar{i}\left\{PR\,I_{XY}+\left(R^2-Q^2\right)I_{YZ}-PQ\,I_{XZ}+\left(I_{ZZ}-I_{YY}\right)RQ\right\}\\
&+\bar{j}\left\{PR\left(I_{XX}-I_{ZZ}\right)+\left(P^2-R^2\right)I_{XZ}-QR\,I_{XY}+PQ\right\}\\
&+\bar{k}\left\{PQ\left(I_{YY}-I_{XX}\right)+\left(Q^2-P^2\right)I_{XY}+QR\,I_{XZ}-PR\,I_{YZ}\right\}=\bar{M}_A+\bar{M}_T
\end{aligned}
$$



Plane XZ



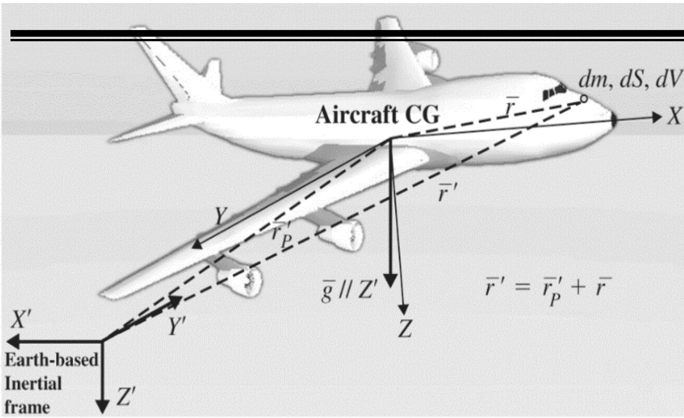
بقای مومنتوم زاویه‌ای

$$I_{XY}=I_{YX}=\int_V XY\rho_A dV=\int_V YX\rho_A dV=0$$

$$I_{XZ}=I_{ZX}=\int_V XZ\rho_A dV=\int_V ZX\rho_A dV\neq 0$$

$$I_{YZ}=I_{ZY}=\int_V YZ\rho_A dV=\int_V ZY\rho_A dV=0$$

در راستاهای x و z هر چه در y+ داریم، در y- هم داریم



- فرایند مدل‌سازی دینامیک حرکت هواپیما

بقای ممنتوم زاویه‌ای

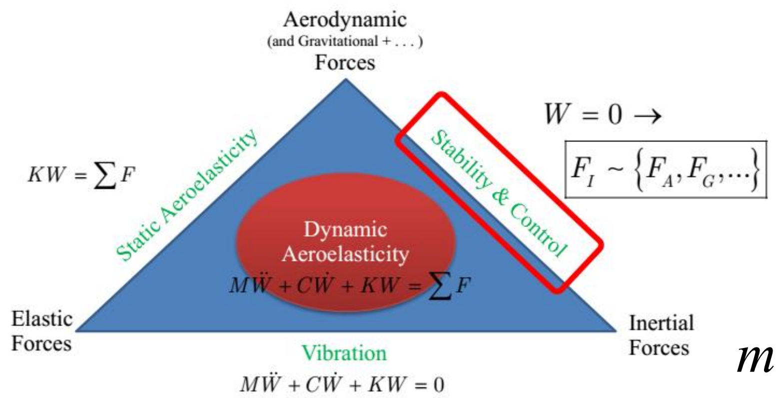
$$\frac{d}{dt}\int_V \bar{r}' \times \rho_A \frac{d\bar{r}'}{dt}\, dV = \int_V \bar{r}' \times \rho_A \bar{g}\; dV + \int_S \bar{r}' \times \left(\bar{f}_A + \bar{f}_T\right) dS$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{P}\, I_{XX} - \dot{R}\, I_{XZ} - PQ\, I_{XZ} + RQ\left(I_{ZZ} - I_{YY}\right) = L_A + L_T \\ &\dot{Q}\, I_{YY} + PR\left(I_{XX} - I_{ZZ}\right) + \left(P^2 - R^2\right) I_{XZ} = M_A + M_T \\ &\dot{R}\, I_{ZZ} - \dot{P}\, I_{XZ} + PQ\left(I_{YY} - I_{XX}\right) + QR\, I_{XZ} = N_A + N_T \end{aligned}}$$

Aircraft Equations of Motion

معادلات حرکت هواپیما (انعطاف ناپذیر)

➢ ***Collar's Aeroelastic Triangle*** **مثلث آیروالاستیک کولار**



- **معادلات دینامیک حرکت هواپیما**

$$m\left(\dot{U} + QW - RV\right) = mg_X + \left(F_{A_X} + F_{T_X}\right)$$

$$m\left(\dot{V} + UR - PW\right) = mg_Y + \left(F_{A_Y} + F_{T_Y}\right)$$

$$m\left(\dot{W} + PV - QU\right) = mg_Z + \left(F_{A_Z} + F_{T_Z}\right)$$

$$\dot{P}\, I_{XX} - \dot{R}\, I_{XZ} - PQ\, I_{XZ} + RQ\left(I_{ZZ} - I_{YY}\right) = L_A + L_T$$

$$\dot{Q}\, I_{YY} + PR\left(I_{XX} - I_{ZZ}\right) + \left(P^2 - R^2\right) I_{XZ} = M_A + M_T$$

$$\dot{R}\, I_{ZZ} - \dot{P}\, I_{XZ} + PQ\left(I_{YY} - I_{XX}\right) + QR\, I_{XZ} = N_A + N_T$$

سمت راست — **نیروها و گشتاورهای خارجی**

سمت چپ — **نیروها و گشتاورهای اینرسی**

- معادلات دینامیک حرکت هواپیما (با ملاحظه عضوهای چرخان)

$$\bar{h} = \sum_{i=1}^{N} \bar{h}_i = \sum_{i=1}^{N} I_{RR_i} \; \bar{\omega}_{RR_i} = h_X \bar{i} + h_Y \bar{j} + h_Z \bar{k} \xrightarrow{\frac{d\vec{H}^i}{dt}=\vec{M}^i}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \bar{r} \times \rho_A \frac{d\bar{r}}{dt}\, dV + \frac{d\bar{h}}{dt} = \bar{M}_A + \bar{M}_T \xrightarrow{\frac{d\bar{h}}{dt} = \cancel{\dot{\bar{h}}}^{=0\ \left(\dot{\bar{\omega}}_{RR_i}=0\right)} + \bar{\omega}\times\bar{h}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\dot{P}\, I_{XX} - \dot{R}\, I_{XZ} - PQ\, I_{XZ} + RQ\left(I_{ZZ} - I_{YY}\right) + Qh_Z - Rh_Y = L_A + L_T \\
&\dot{Q}\, I_{YY} + PR\left(I_{XX} - I_{ZZ}\right) + \left(P^2 - R^2\right) I_{XZ} + Rh_X - Ph_Z = M_A + M_T \\
&\dot{R}\, I_{ZZ} - \dot{P}\, I_{XZ} + PQ\left(I_{YY} - I_{XX}\right) + QR\, I_{XZ} + Ph_Y - Qh_X = N_A + N_T
\end{aligned}}$$

- معادلات دینامیک حرکت هواپیما

$$m\left(\dot{U}+QW-RV\right)=mg_X+\left(F_{A_X}+F_{T_X}\right)$$
$$m\left(\dot{V}+UR-PW\right)=mg_Y+\left(F_{A_Y}+F_{T_Y}\right)$$
$$m\left(\dot{W}+PV-QU\right)=mg_Z+\left(F_{A_Z}+F_{T_Z}\right)$$
$$\dot{P}\,I_{XX}-\dot{R}\,I_{XZ}-PQ\,I_{XZ}+RQ\left(I_{ZZ}-I_{YY}\right)=L_A+L_T$$
$$\dot{Q}\,I_{YY}+PR\left(I_{XX}-I_{ZZ}\right)+\left(P^2-R^2\right)I_{XZ}=M_A+M_T$$
$$\dot{R}\,I_{ZZ}-\dot{P}\,I_{XZ}+PQ\left(I_{YY}-I_{XX}\right)+QR\,I_{XZ}=N_A+N_T$$

ملاحظات و مشکلات:

- معادلات عمومی حرکت، دیفرانسیلی، غیرخطی و درگیر می‌باشند.
- حل معادلات نیاز به علم نیرو و ممان‌ها (یا الگوهای توصیفی از آنها) دارد.
- نیرو و ممان‌ها به نوبه خود، تابعی از مجهولات هستند!
- برای معرفی مولفه‌های بردار جاذبه، نیاز به مشخص بودن ارتباط لحظه‌ای میان دو دستگاه بدنی و اینرسی خواهد بود.
- لازم است این ارتباط (میان دو دستگاه بدنی و اینرسی) برقرار و انتشار(Propagation) یابد.

بعد از یافتن معادلات دیفرانسیلی که انتگرالشان، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای را به دست می‌دهد، در ادامه باید معادلاتی بیابیم که با حل آنها، موقعیت Position و وضعیت Attitude وسیله بدست بیاید.

❖تعاریف پایه‌ای

جهت Direction در برابر وضعیت Orientation/Attitude

یک بردار، دارای جهت است و یک جسم، دارای وضعیت.

تعریف ماتریس‌های تبدیل مختصات مربوطه

ماتریس تبدیل مختصات به ماتریسی اطلاق می‌گردد که می‌تواند ارتباط بین مولفه‌های یک بردار را در دستگاه‌های مختلف، برقرار کند.

$$\underbrace{R}_{\text{Rotation Matrix}} = \text{Transpose of } \underbrace{T}_{\text{Transformation Matrix}}$$

مثلاً فرض کنید بردار $\vec{r}$ را در دو دستگاه v, u براساس بردارهای پایه آنها داشته باشیم، یعنی

$$\vec{r}^{\,u} = \sum \alpha_i \vec{u}_i; \quad or \quad \vec{r}^{\,u} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}^T$$

$$\vec{r}^{\,v} = \sum \beta_i \vec{v}_i; \quad or \quad \vec{r}^{\,v} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}^T$$

در صورتی که بتوان ارتباط بین مولفه‌ها را در دو دستگاه v, u برای بردار $\vec{r}$ به وجود آورد، این ارتباط ماتریسی است:

$$\vec{r}^{\,v} = C_u^v \vec{r}^{\,u} = T^{vu}\, \vec{r}^{\,u} \qquad or \qquad \vec{r}^{\,u} = C_v^u \vec{r}^{\,v} = T^{uv}\, \vec{r}^{\,v}$$

❖ تعاریف پایه‌ای

برخی خواص ماتریس تبدیل مختصات:

۱. ماتریس تبدیل مختصات متعامد است. $\left(C_u^v\right)^{-1} = \left(C_u^v\right)^T = C_v^u$

۲. دترمینان ماتریس تبدیل مختصات برابر $+1$ است: (مثبت در دستگاه‌های مختصات راستگرد) $\left|\left(C_u^v\right)\right| = +1$

۳. با ترانهاده کردن ماتریس تبدیل مختصات، می‌توان ترتیب تبدیل را تعویض نمود، یعنی: $\left(C_u^v\right)^T = C_v^u$

۴. قاعده ترکیب : برای هر سه سیستم مختصات مجاز u، v و w داریم: $C_u^w = C_v^w C_u^v$

۵. ماتریس‌های تبدیل مختصات حول محورهای اصلی

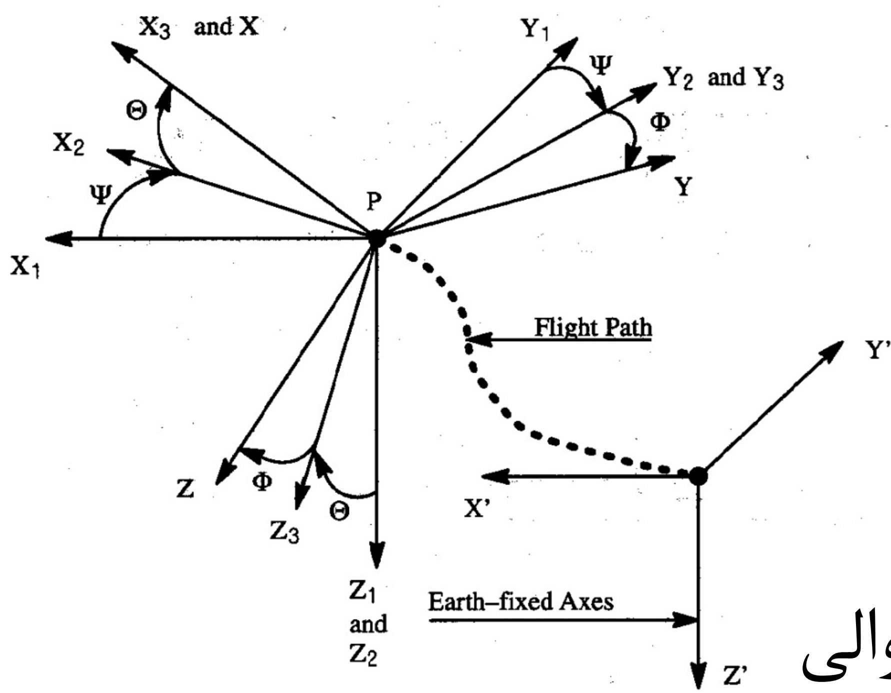
$$\text{Rotation about X: } T(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotation about Y: } T(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotation about Z: } T(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال به سراغ محاسبه ماتریس تبدیل مختصات بین دستگاه‌های مختصات اینرسی و بدنی می‌رویم.

- گام اول: انتقال مبدأ دستگاه مختصات اینرسی $X'Y'Z'$ مرکز ثقل هواپیما (دستگاه را منتقل نمی‌کنیم بلکه برای تعریف دوران، معادل آن در مرکز ثقل هواپیما قرار می‌دهیم)



$$U_1 = \dot{X}_1 = \dot{X}'$$

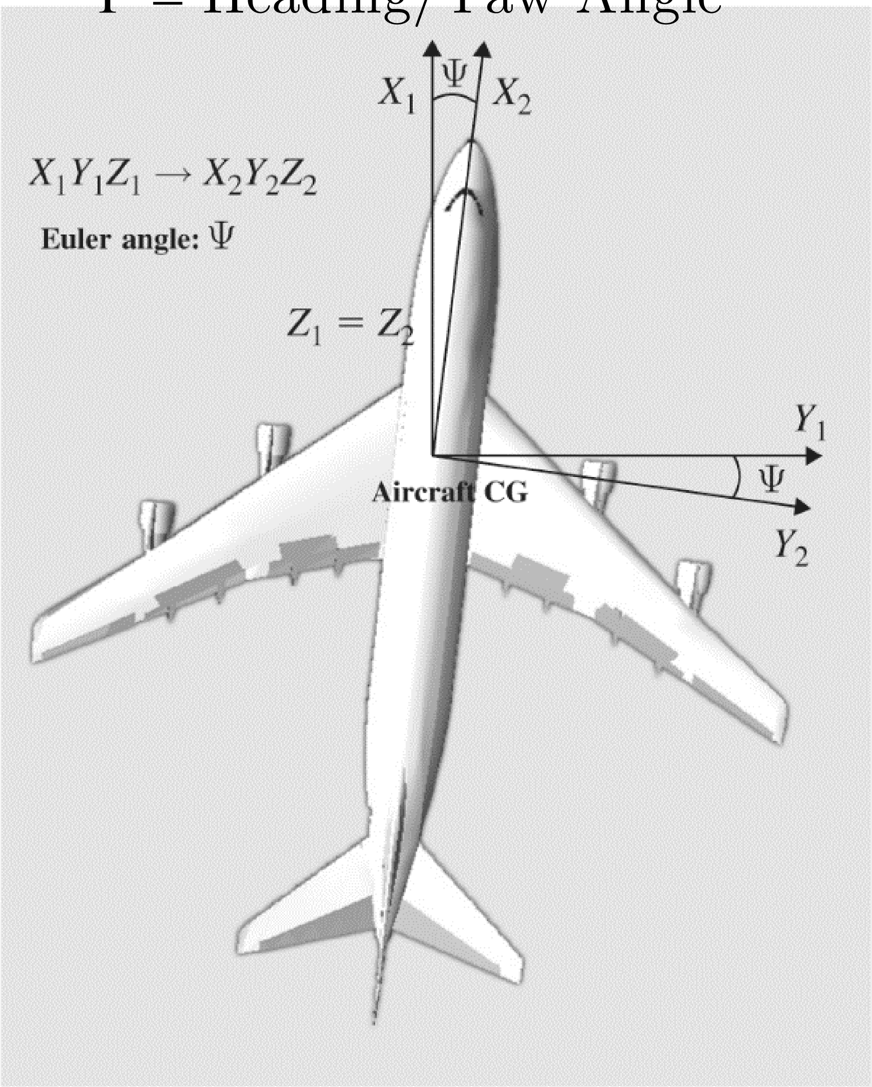
$$V_1 = \dot{Y}_1 = \dot{Y}'$$

$$W_1 = \dot{Z}_1 = \dot{Z}'$$

- گام دوم: دنبال‌کردن سه دوران متوالی

هشدار: دو دستگاه میانی، انتزاعی هستند و قابل مشاهده نمی‌باشند!
حتی در صورت تغییر ترتیب دوران، تعریفشان متفاوت است.

Ψ = Heading/Yaw Angle

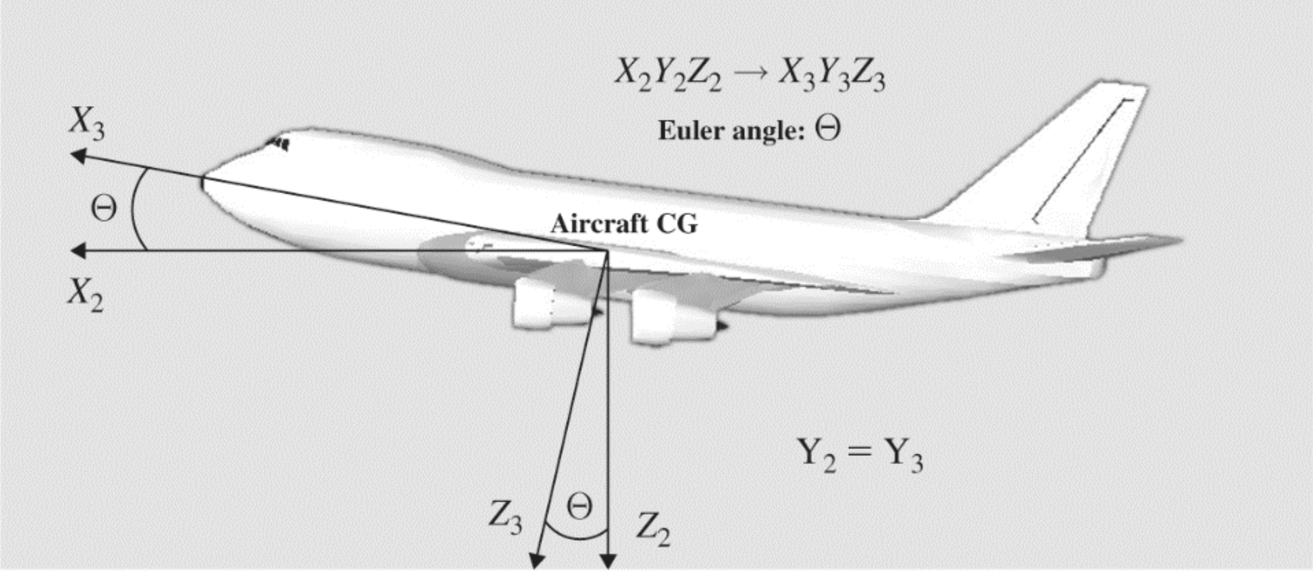


$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{Bmatrix}$$

$$= T^{X_1Y_1Z_1 \rightarrow X_2Y_2Z_2} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{Bmatrix}$$

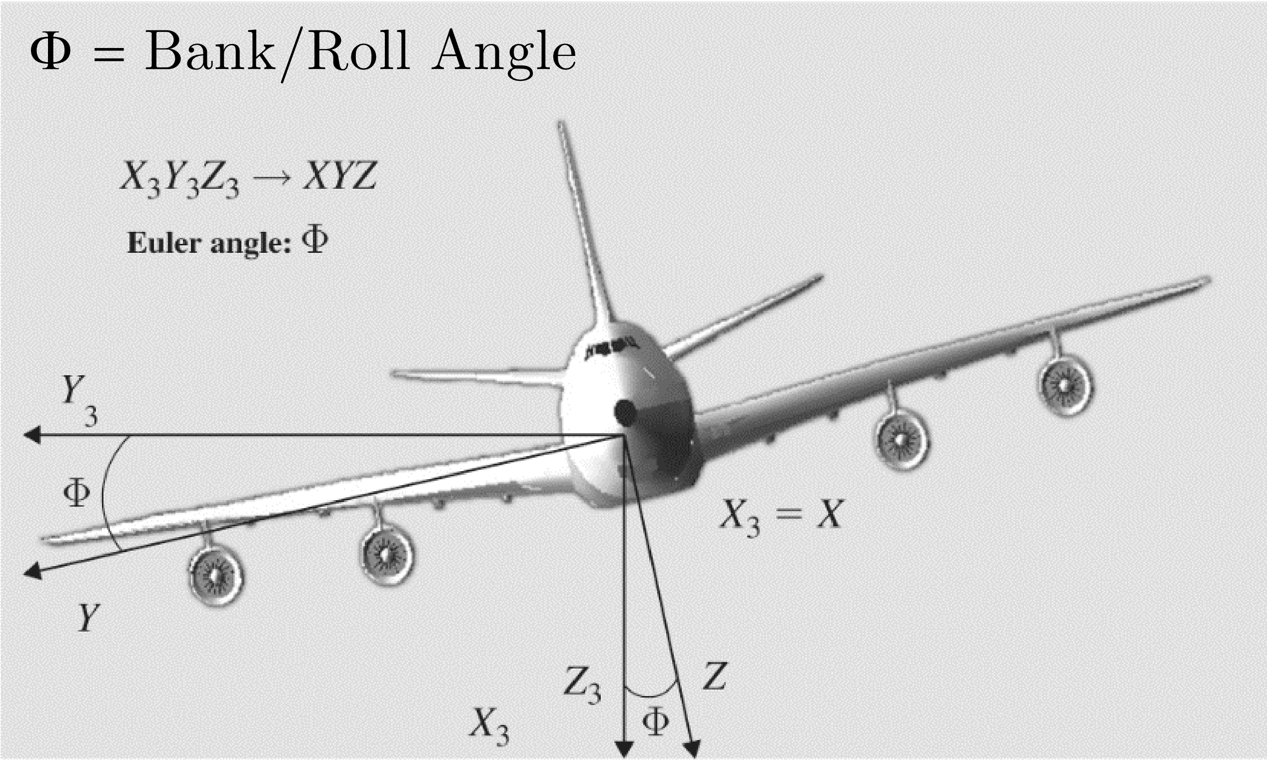
حول محور Z_1، به اندازه‌ای دوران می‌دهیم که محور X هواپیما، در صفحه X_2Z_2 قرار بگیرد.

Θ = Pitching/Attitude Angle



سپس حول محور Y_2 به اندازه‌ای دوران می‌دهیم
که محور X_3 بر محور X هواپیما، منطبق شود.

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} = T^{X_2Y_2Z_2 \rightarrow X_3Y_3Z_3} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix}$$



در نهایت کافی است حول محور X_3 به اندازه‌ای دوران بدهیم که دستگاه‌ها بر هم منطبق شوند.

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ W_3 \end{Bmatrix} = T^{X_3Y_3Z_3 \rightarrow XYZ} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ W_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = T^{X_3Y_3Z_3 \rightarrow XYZ} T^{X_2Y_2Z_2 \rightarrow X_3Y_3Z_3} T^{X_1Y_1Z_1 \rightarrow X_2Y_2Z_2} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{X_1Y_1Z_1 \rightarrow XYZ} = T^{X'Y'Z' \rightarrow XYZ} = T^{BI}} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{Bmatrix}$$

- **Flight Path Equations معادلات مسیر پرواز**

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{Y}' \\ \dot{Z}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{Bmatrix} = \left(T^{BI}\right)^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{Y}' \\ \dot{Z}' \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & -\sin\Psi\cos\Phi + \cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi & \sin\Psi\sin\Phi + \cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi \\ \sin\Psi\cos\Theta & \cos\Psi\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi & -\sin\Phi\cos\Psi + \sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi \\ -\sin\Theta & \cos\Theta\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix}}_{T^{IB}} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}}$$

سؤال: خود زوایای اویلر را چه طور در لحظه محاسبه کنیم؟

• معادلات سینماتیکی Kinematics Equations

انتشار زوایای اویلر (یا ماتریس تبدیل مختصات)

$$\begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} = \bar{\omega}\Big|_b = \bar{\dot{\Phi}}\Big|_b + \bar{\dot{\Theta}}\Big|_b + \bar{\dot{\Psi}}\Big|_b$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} - \sin\Theta\ \dot{\Psi} \\ \cos\Phi\ \dot{\Theta} + \cos\Theta\sin\Phi\ \dot{\Psi} \\ \cos\Theta\cos\Phi\ \dot{\Psi} - \sin\Phi\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & \cos\Phi & \cos\Theta\sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \dfrac{\sin\Phi}{\cos\Theta} & \dfrac{\cos\Phi}{\cos\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix}}$$

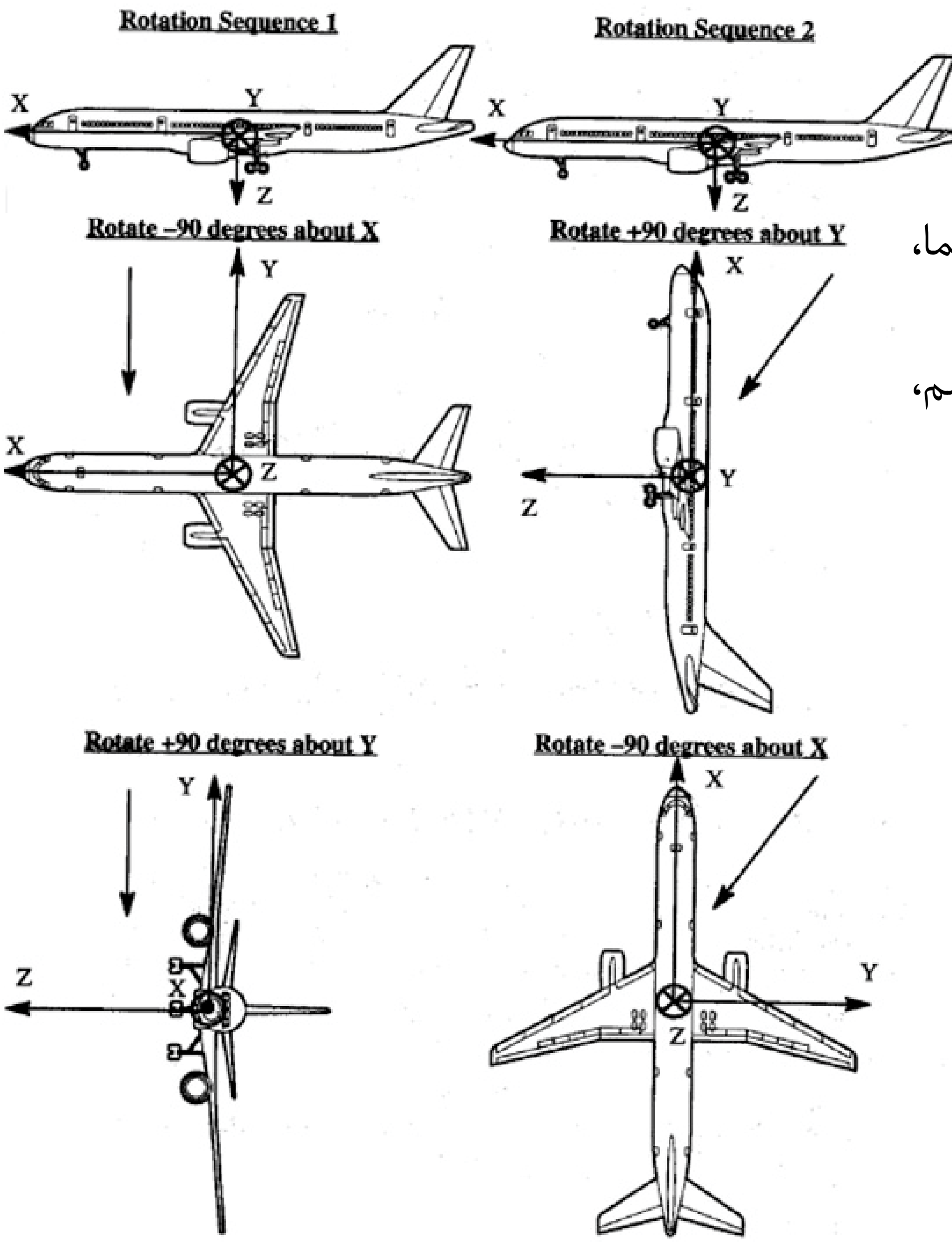
هشدار: معادله ماتریسی، در $\Theta = 90^\circ$ دارای تکینگی است.(تغییر ترتیب دوران - کواترنیون)

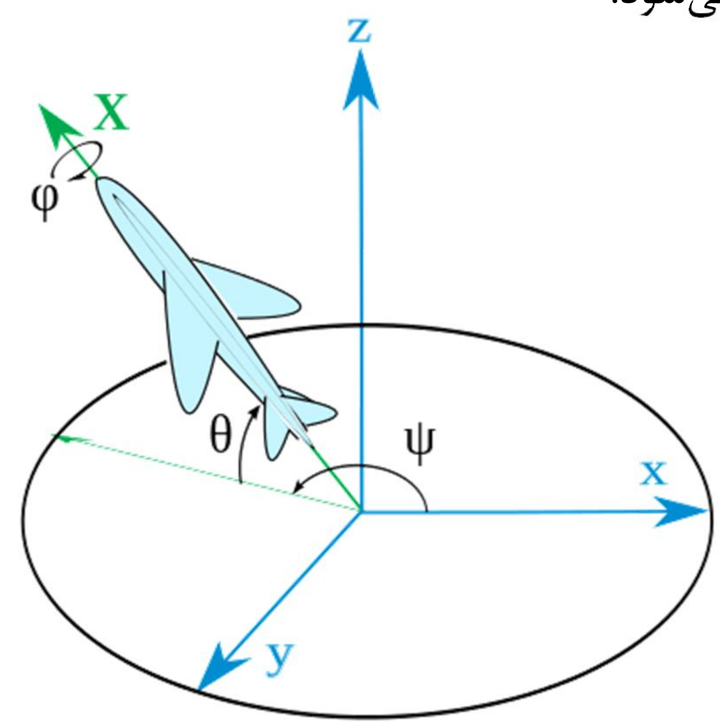
نکات تکمیلی در مورد زوایای اویلر

۱. اهمیت ترتیب دوران‌های اویلر و انتزاعی بودن آنها

این زوایا، انتزاعی و ذهنی هستند و با نگاه اولیه به هواپیما، به سادگی قابل اندازه‌گیری نیستند.

ترتیب‌های دوران‌های مختلف، به وضعیت‌های مختلف جسم، منجر می‌شود.





نکات تکمیلی در مورد زوایای اویلر

۲. انواع دوران‌های اویلر

بر اساس دو نوع تقسیم‌بندی، در کل، ۲۴ نوع دوران وجود دارد که صرفا یکی، در هوافضا و دریا، رایج است.

۱- دسته‌بندی بر اساس ۲ یا ۳ محور درگیر با دوران:

1. Proper/Clasic Euler angles (z-x-z, x-y-x, y-z-y, z-y-z, x-z-x, y-x-y)
2. Tait–Bryan angles (x-y-z, y-z-x, z-x-y, x-z-y, **z-y-x**, y-x-z)

هر دو به زوایای اویلر معروف هستند. مورد اول صرفا از دو محور برای دوران استفاده می‌کند. مورد دوم از سه محور استفاده می‌کند. ترتیب z-y-x یا 3-2-1 در هوانوردی و دریانوردی رایج می‌باشد که به heading-elevation-bank یا yaw-pitch-roll هم معروف است.

۲- نوع دوران

1. Extrinsic rotations
2. Intrinsic rotations

در رویکرد Extrinsic، دوران‌ها حول دستگاه مختصات فیکس اعمال می‌شود در حالیکه در رویکرد Intrinsic، دوران‌های متوالی حول دستگاه چرخیده لحاظ می‌گردند (شبیه به رویکرد متداول در مهندسی هوافضا).

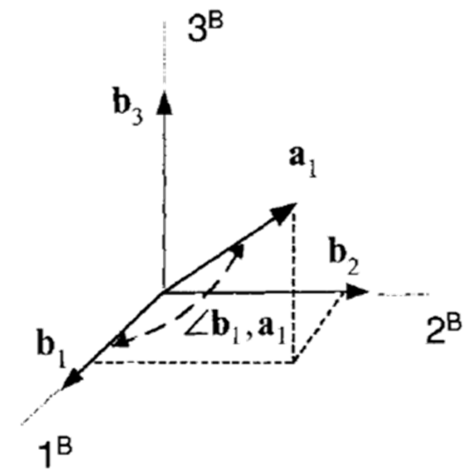
انتشار زوایای اویلر (یا ماتریس تبدیل مختصات)

- روش ماتریس کسینوس‌های هادی **DCM: Direction Cosine Matrix**

$$T^{IB} = \left[\cos\theta_{ij}\right] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

$$where\ \ t_{ij} = \cos\angle\left(b_i, a_j\right)\ \ i = 1,2,3;\ \ j = 1,2,3$$

$$t_{11} = \cos\theta_{11} = \cos\angle\left(b_1, a_1\right)$$



- روش بردار دوران **Rotation Vector**

$$T^{IB} = \left[\cos\theta_{ij}\right] = \left(\cos\Gamma\right) I - \frac{\sin\Gamma}{\Gamma}\underbrace{\left[\bar{\Gamma}\times\right]}_{\text{skew-symmetric}} + \frac{1-\cos\Gamma}{\Gamma^2}\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}^T$$

$\bar{\Gamma}$: Rotation Vector

Γ: Rotation Angle

• رویکرد کواترنیون Quaternions

انتشار زوایای اویلر (یا ماتریس تبدیل مختصات)

در این روش از مفهوم بردار دوران برای تولید یک بردار چهارتایی به نام کواترنیون، که ارتباط بین دو دستگاه را بیان می‌کند استفاده می‌گردد. جهت عملیات ریاضی روی کواترنیون‌ها همیلتون در سال ۱۸۴۳ نظریه جبر کواترنیونی را معرفی نمود.کواترنیون‌ها بردارهایی در فضای چهاربعدی هستند که شامل یک بخش اسکالر و یک بخش برداری در فضای سه بعدی می‌باشند. مدل ساده‌تری از کواترنیون‌ها با الگوبرداری از بردارهای مختلط نیز وجود دارد.

$$\vec{q} = \begin{Bmatrix} \cos \Gamma/2 \\ \vec{\Gamma} \sin \Gamma/2 \end{Bmatrix}$$

$$q = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \qquad \dot{q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ Q \\ R \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \cos\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Psi}{2} + \sin\frac{\Phi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Psi}{2} \\ b = \sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Psi}{2} - \cos\frac{\Phi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Psi}{2} \\ c = \cos\frac{\Phi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Psi}{2} + \sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Psi}{2} \\ d = \cos\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Psi}{2} + \sin\frac{\Phi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Psi}{2} \end{cases}$$

$$T^{IB} = \begin{bmatrix} \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right) & 2\left(bc-ad\right) & 2\left(bd+ac\right) \\ 2\left(bc+ad\right) & \left(a^2-b^2+c^2-d^2\right) & 2\left(cd-ab\right) \\ 2\left(bd-ac\right) & 2\left(cd+ab\right) & \left(a^2-b^2-c^2+d^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Phi = \tan^{-1}\left(2\dfrac{cd+ab}{a^2-b^2-c^2+d^2}\right) \\ \Theta = \sin^{-1}\left(2ac-2bd\right) \\ \Psi = \tan^{-1}\left(2\dfrac{bc+ad}{a^2+b^2-c^2-d^2}\right) \end{cases}$$

- معادلات گرانش

$$m\left(\dot{U}+QW-RV\right)=mg_X+\left(F_{A_X}+F_{T_X}\right)$$
$$m\left(\dot{V}+UR-PW\right)=mg_Y+\left(F_{A_Y}+F_{T_Y}\right)$$
$$m\left(\dot{W}+PV-QU\right)=mg_Z+\left(F_{A_Z}+F_{T_Z}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} g_X \\ g_Y \\ g_Z \end{Bmatrix} = \bar{g}\Big|_b = T^{BI}\,\bar{g}\Big|_I$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & -\sin\Psi\cos\Phi+\cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi & \sin\Psi\sin\Phi+\cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi \\ \sin\Psi\cos\Theta & \cos\Psi\cos\Phi+\sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi & -\sin\Phi\cos\Psi+\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi \\ -\sin\Theta & \cos\Theta\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} -g\sin\Theta \\ g\cos\Theta\sin\Phi \\ g\cos\Theta\cos\Phi \end{Bmatrix}$$

- تجمیع معادلات دیفرانسیل حرکت عمومی هواپیما

$$\begin{cases}\dot{U} = -g\sin\Theta + \dfrac{1}{m}\left(F_{A_X} + F_{T_X}\right) - \left(QW - RV\right) \\ \dot{V} = g\cos\Theta\sin\Phi + \dfrac{1}{m}\left(F_{A_Y} + F_{T_Y}\right) - \left(UR - PW\right) \\ \dot{W} = g\cos\Theta\cos\Phi + \dfrac{1}{m}\left(F_{A_Z} + F_{T_Z}\right) - \left(PV - QU\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{P}\, I_{XX} - \dot{R}\, I_{XZ} = L_A + L_T - \left[-PQ\, I_{XZ} + RQ\left(I_{ZZ} - I_{YY}\right)\right] \\ \dot{Q}\, I_{YY} = M_A + M_T - \left[PR\left(I_{XX} - I_{ZZ}\right) + \left(P^2 - R^2\right) I_{XZ}\right] \\ \dot{R}\, I_{ZZ} - \dot{P}\, I_{XZ} = N_A + N_T - \left[PQ\left(I_{YY} - I_{XX}\right) + QR\, I_{XZ}\right]\end{cases}$$

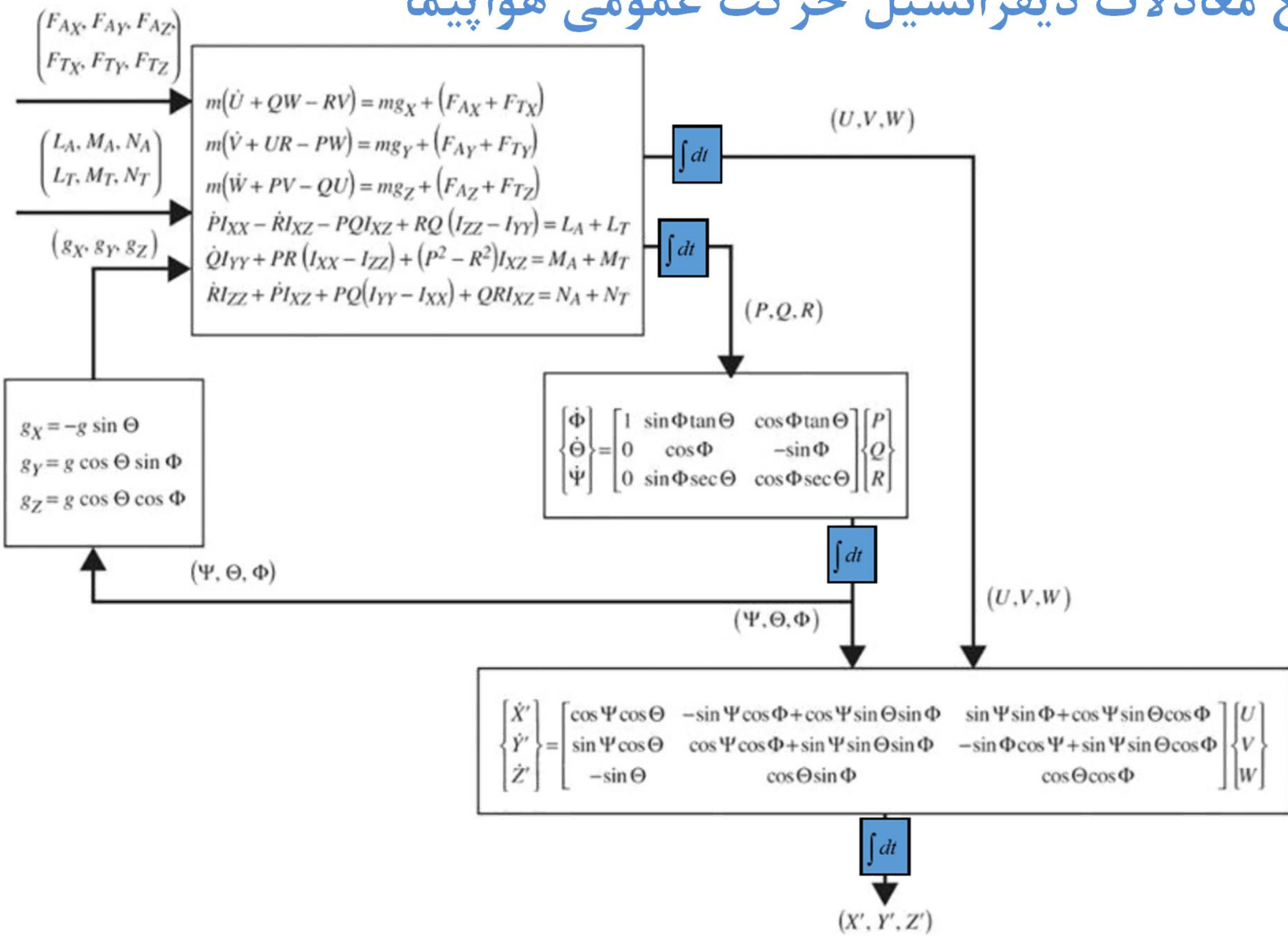
تعداد ۱۲ یا ۱۳ معادله

$$\begin{Bmatrix}\dot{X}' \\ \dot{Y}' \\ \dot{Z}'\end{Bmatrix} = T^{IB}\begin{Bmatrix}U \\ V \\ W\end{Bmatrix}$$

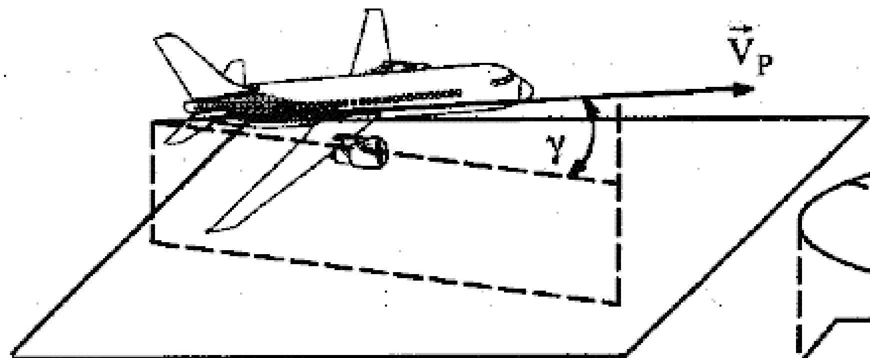
$$\begin{cases}\Phi = \tan^{-1}\left(2\dfrac{cd+ab}{a^2-b^2-c^2+d^2}\right) \\ \Theta = \sin^{-1}\left(2ac - 2bd\right) \\ \Psi = \tan^{-1}\left(2\dfrac{bc+ad}{a^2+b^2-c^2-d^2}\right)\end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi\sec\Theta & \cos\Phi\sec\Theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P \\ Q \\ R\end{Bmatrix} \quad ; \quad or \quad \begin{Bmatrix}\dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \\ \dot{d}\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0 \\ P \\ Q \\ R\end{Bmatrix}$$

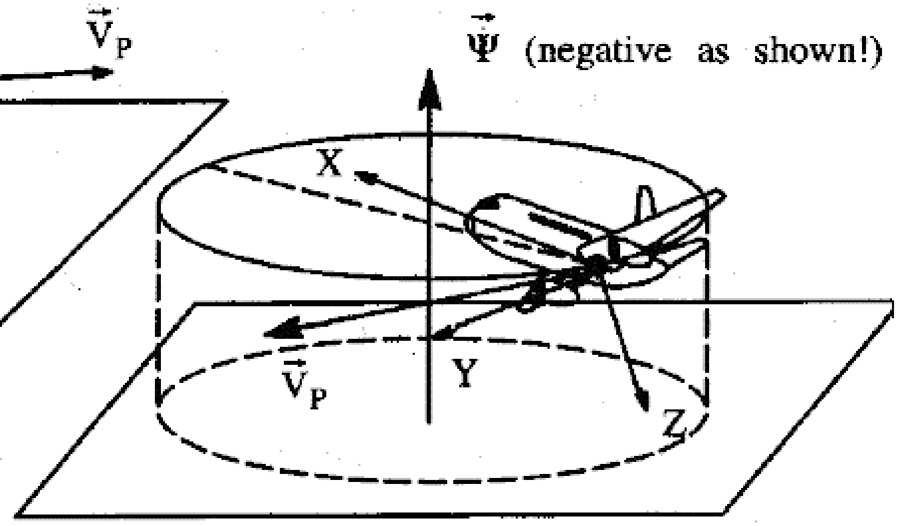
- تجمیع معادلات دیفرانسیل حرکت عمومی هواپیما



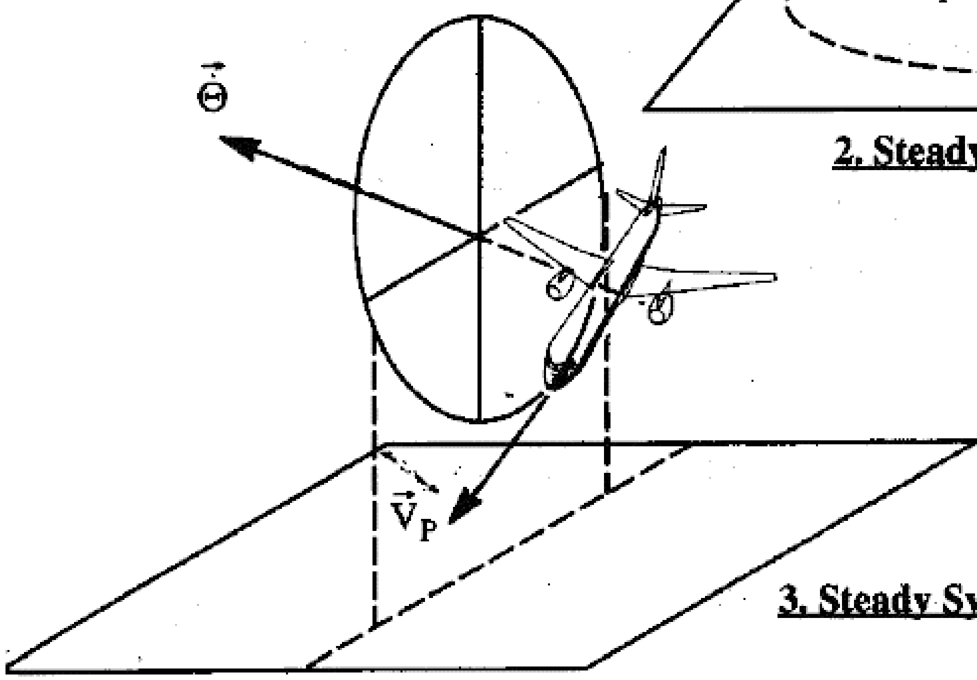
- **Steady State Flight** معادلات حرکت حالت پایا هواپیما (حرکت دائم)



1. Steady Rectilinear Flight



2. Steady Level Turn



3. Steady Symmetrical Pull–up

$$\dot{\bar{V}}_P = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{V}_P = \text{const.}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\omega} = \text{const.}$$

- **Steady State Flight (حرکت دائم) معادلات حرکت حالت پایا هواپیما**

$$m(W_1Q_1 - V_1R_1) = -mg\sin\Theta_1 + F_{A_{X_1}} + F_{T_{X_1}}$$

$$m(U_1R_1 - W_1P_1) = mg\sin\Phi_1\cos\Theta_1 + F_{A_{Y_1}} + F_{T_{Y_1}}$$

$$m(V_1P_1 - U_1Q_1) = mg\cos\Phi_1\cos\Theta_1 + F_{A_{Z_1}} + F_{T_{Z_1}}$$

$$-I_{xz}P_1Q_1 + (I_{zz} - I_{yy})R_1Q_1 = L_{A_1} + L_{T_1}$$

$$(I_{xx} - I_{zz})P_1R_1 + I_{xz}(P_1^2 - R_1^2) = M_{A_1} + M_{T_1}$$

$$(I_{yy} - I_{xx})P_1Q_1 + I_{xz}Q_1R_1 = N_{A_1} + N_{T_1}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Psi}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi_1\tan\Theta_1 & \cos\Phi_1\tan\Theta_1 \\ 0 & \cos\Phi_1 & -\sin\Phi_1 \\ 0 & \sin\Phi_1\sec\Theta_1 & \cos\Phi_1\sec\Theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ R_1 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\bar{V}}_P = 0$$

$$\dot{\bar{\omega}} = 0$$

معادلات جبری

- **معادلات حرکت حالت پایا هواپیما (حرکت دائم) Steady State Flight**

❖ **پرواز مستقیم الخط Cruise**

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{V}_1 = \dot{W}_1 = 0 \\ \dot{P}_1 = \dot{Q}_1 = \dot{R}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{and also} \quad \begin{cases} P_1 = Q_1 = R_1 = 0 \\ \dot{\Phi}_1 = \dot{\Theta}_1 = \dot{\Psi}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(-V_1R_1 + W_1Q_1) = -mg\sin\Theta_1 + F_{A_{X_1}} + F_{T_{X_1}} \\ m(U_1R_1 - W_1P_1) = mg\sin\Phi_1\cos\Theta_1 + F_{A_{Y_1}} + F_{T_{Y_1}} \\ m(U_1Q_1 + V_1P_1) = mg\cos\Phi_1\cos\Theta_1 + F_{A_{Z_1}} + F_{T_{Z_1}} \\ -I_{xz}P_1Q_1 + (I_{zz} - I_{yy})R_1Q_1 = L_{A_1} + L_{T_1} \\ (I_{xx} - I_{zz})P_1R_1 + I_{xz}(P_1^2 - R_1^2) = M_{A_1} + M_{T_1} \\ (I_{yy} - I_{xx})P_1Q_1 + I_{xz}Q_1R_1 = N_{A_1} + N_{T_1} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} 0 &= -mg\sin\Theta_1 + F_{A_{X_1}} + F_{T_{X_1}} \\ 0 &= mg\cos\Theta_1\sin\Phi_1 + F_{A_{Y_1}} + F_{T_{Y_1}} \\ 0 &= mg\cos\Theta_1\cos\Phi_1 + F_{A_{Z_1}} + F_{T_{Z_1}} \\ 0 &= L_{A_1} + L_{T_1} \\ 0 &= M_{A_1} + M_{T_1} \\ 0 &= N_{A_1} + N_{T_1} \end{aligned}}$$

- **Steady State Flight (حرکت دائم) معادلات حرکت حالت پایا هواپیما**

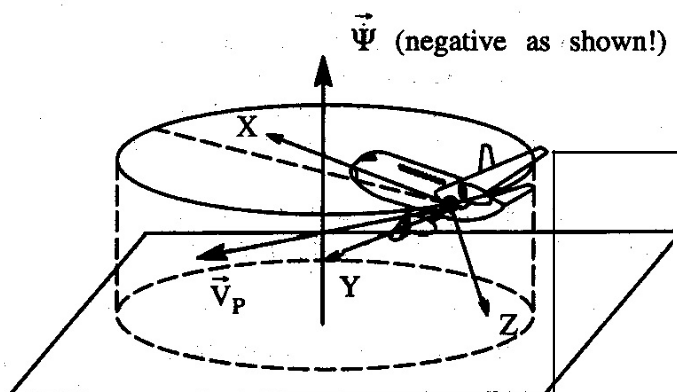
❖ **Coordinated Turn پرواز دور موزون**

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{V}_1 = \dot{W}_1 = 0 \\ \dot{P}_1 = \dot{Q}_1 = \dot{R}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{and also} \quad \begin{cases} \dot{\Phi}_1 = \dot{\Theta}_1 = 0 \\ \bar{\omega} = \bar{k}' \; \dot{\Psi}_1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & \cos\Phi & \cos\Theta\sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{cases} P_1 = -\dot{\Psi}_1 Sin\Theta_1 \\ Q_1 = \dot{\Psi}_1 Cos\Theta_1 \; Sin\Phi_1 \\ R_1 = \dot{\Psi}_1 Cos\Theta_1 \; Cos\Phi_1 \end{cases}}$$

سه حالت حدی



$$\begin{cases} m(-V_1R_1 + W_1Q_1) = -mg\sin\Theta_1 + F_{A_{X_1}} + F_{T_{X_1}} \\ m(U_1R_1 - W_1P_1) = mg\sin\Phi_1\cos\Theta_1 + F_{A_{Y_1}} + F_{T_{Y_1}} \\ m(U_1Q_1 + V_1P_1) = mg\cos\Phi_1\cos\Theta_1 + F_{A_{Z_1}} + F_{T_{Z_1}} \\ -I_{xz}P_1Q_1 + (I_{zz} - I_{yy})R_1Q_1 = L_{A_1} + L_{T_1} \\ (I_{xx} - I_{zz})P_1R_1 + I_{xz}(P_1^2 - R_1^2) = M_{A_1} + M_{T_1} \\ (I_{yy} - I_{xx})P_1Q_1 + I_{xz}Q_1R_1 = N_{A_1} + N_{T_1} \end{cases} \rightarrow$$

$$m\left(Q_1W_1 - R_1V_1\right) = -mg\sin\Theta_1 + \left(F_{A_{X_1}} + F_{T_{X_1}}\right)$$

$$m\left(U_1R_1 - P_1W_1\right) = mg\cos\Theta_1\sin\Phi_1 + \left(F_{A_{Y_1}} + F_{T_{Y_1}}\right)$$

$$m\left(P_1V_1 - Q_1U_1\right) = mg\cos\Theta_1\cos\Phi_1 + \left(F_{A_{Z_1}} + F_{T_{Z_1}}\right)$$

$$-P_1Q_1\, I_{XZ} + R_1Q_1\left(I_{ZZ} - I_{YY}\right) = L_{A_1} + L_{T_1}$$

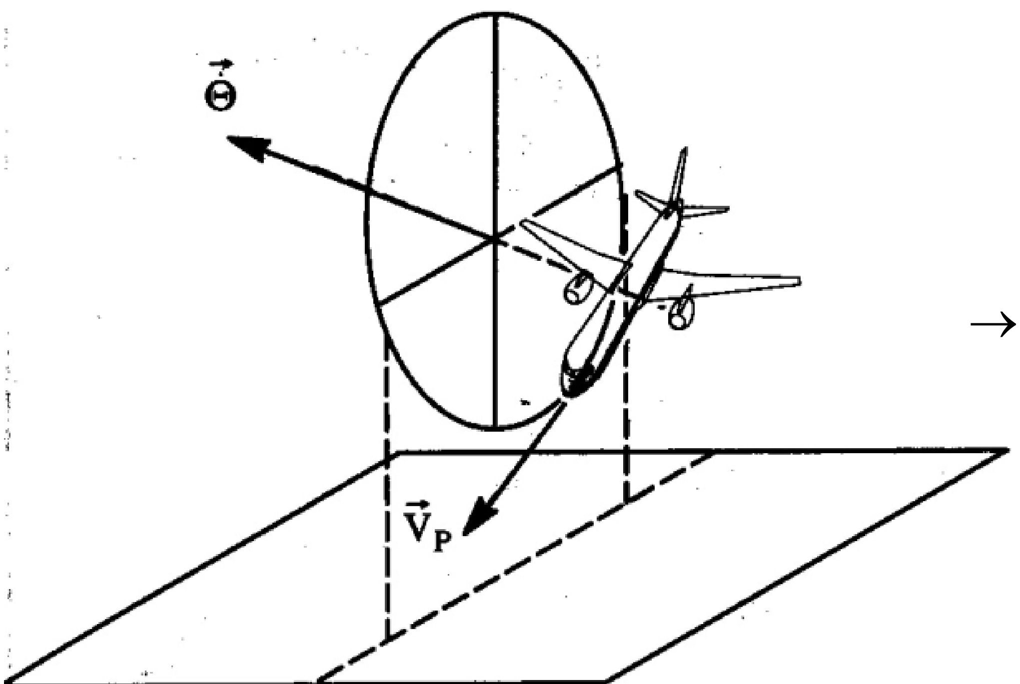
$$P_1R_1\left(I_{XX} - I_{ZZ}\right) + \left(P_1^2 - R_1^{\,2}\right) I_{XZ} = M_{A_1} + M_{T_1}$$

$$P_1Q_1\left(I_{YY} - I_{XX}\right) + Q_1R_1\, I_{XZ} = N_{A_1} + N_{T_1}$$

• معادلات حرکت حالت پایا هواپیما (حرکت دائم) Steady State Flight

❖ پرواز حلقه بینهایت Infinite Loop (Pull up & Push over)

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{V}_1 = \dot{W}_1 = 0 \\ \dot{P}_1 = \dot{Q}_1 = \dot{R}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{and also} \quad \begin{cases} \dot{\Phi}_1 = \dot{\Psi}_1 = 0 \\ \bar{\omega} = \bar{j}'\,\dot{\Theta}_1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & \cos\Phi & \cos\Theta\sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix}} \begin{cases} P_1 = 0 \\ Q_1 = \dot{\Theta}_1 \\ R_1 = 0 \end{cases}$$

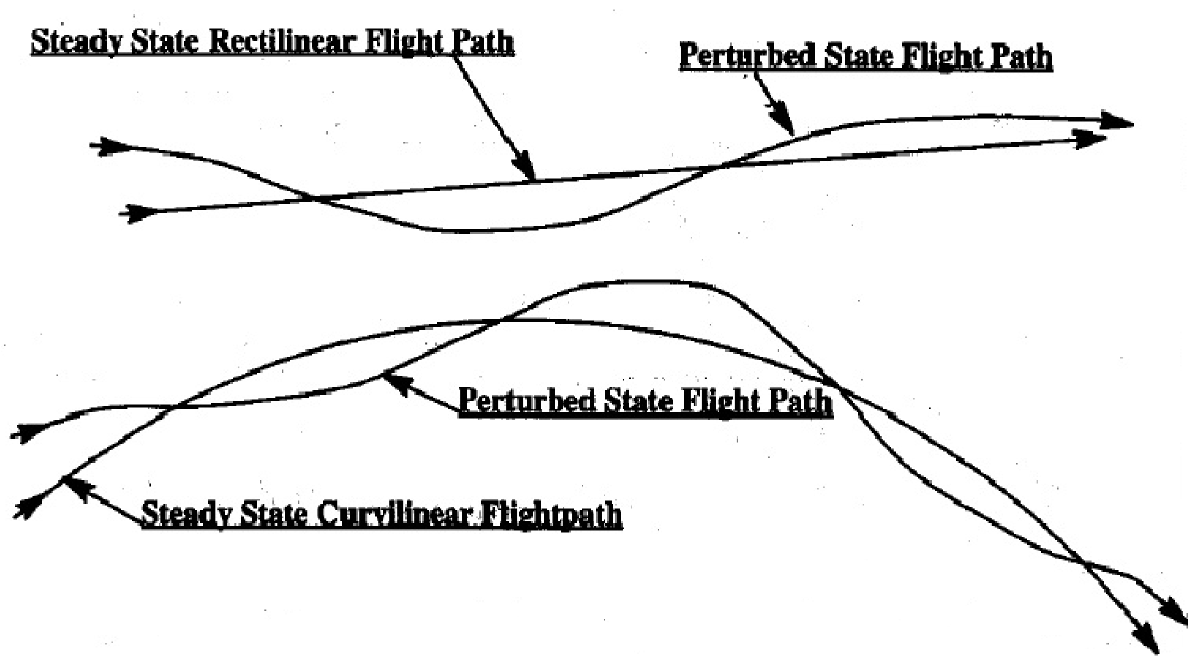


$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} mW_1Q_1 &= -mg\sin\Theta_1 + \left(F_{A_{X_1}} + F_{T_{X_1}}\right) \\ 0 &= mg\cos\Theta_1\sin\Phi_1 + \left(F_{A_{Y_1}} + F_{T_{Y_1}}\right) \\ -mU_1Q_1 &= mg\cos\Theta_1\cos\Phi_1 + \left(F_{A_{Z_1}} + F_{T_{Z_1}}\right) \\ 0 &= L_{A_1} + L_{T_1} \\ 0 &= M_{A_1} + M_{T_1} \\ 0 &= N_{A_1} + N_{T_1} \end{aligned}}$$

این پرواز از جمله پروازهای دائمی است که برای بازیافت از واماندگی (Stall) و نزول مارپیچی (Spin) استفاده می‌شود.

- **معادلات حرکت اختلالی هواپیما Perturbed Flight**

با فرض اختلالات کوچک بر روی معادلات حرکت روابط مربوطه حاصل می‌گردد.



- معادلات حرکت اختلالی هواپیما **Perturbed Flight**

با فرض اختلالات کوچک بر روی معادلات حرکت روابط مربوطه حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} U = U_1 + u & V = V_1 + v & W = W_1 + w \\ P = P_1 + p & Q = Q_1 + q & R = R_1 + r \\ \Phi = \Phi_1 + \phi & \Theta = \Theta_1 + \theta & \Psi = \Psi_1 + \psi \\ F_{A_X} = F_{A_{X_1}} + f_{A_X} & F_{A_Y} = F_{A_{Y_1}} + f_{A_Y} & F_{A_Z} = F_{A_{Z_1}} + f_{A_Z} \\ L_A = L_{A_1} + l_A & M_A = M_{A_1} + m_A & N_A = N_{A_1} + n_A \\ F_{T_X} = F_{T_{X_1}} + f_{T_X} & F_{T_Y} = F_{T_{Y_1}} + f_{T_Y} & F_{T_Z} = F_{T_{Z_1}} + f_{T_Z} \\ L_T = L_{T_1} + l_T & M_T = M_{T_1} + m_T & N_T = N_{T_1} + n_T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{u} = \dot{u} & \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{v} = \dot{v} & \dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{w} = \dot{w} \\ \dot{P} = \dot{P}_1 + \dot{p} = \dot{p} & \dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{q} = \dot{q} & \dot{R} = \dot{R}_1 + \dot{r} = \dot{r} \end{cases}$$

• معادلات حرکت اختلالی هواپیما Perturbed Flight

با فرض اختلالات کوچک بر روی معادلات حرکت روابط مربوطه حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} m\left(\dot{U}+QW-RV\right)=mg_X+\left(F_{A_X}+F_{T_X}\right) \\ m\left(\dot{V}+UR-PW\right)=mg_Y+\left(F_{A_Y}+F_{T_Y}\right) \\ m\left(\dot{W}+PV-QU\right)=mg_Z+\left(F_{A_Z}+F_{T_Z}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{P}\,I_{XX}-\dot{R}\,I_{XZ}-PQ\,I_{XZ}+RQ\left(I_{ZZ}-I_{YY}\right)=L_A+L_T \\ \dot{Q}\,I_{YY}+PR\left(I_{XX}-I_{ZZ}\right)+\left(P^2-R^2\right)I_{XZ}=M_A+M_T \\ \dot{R}\,I_{ZZ}-\dot{P}\,I_{XZ}+PQ\left(I_{YY}-I_{XX}\right)+QR\,I_{XZ}=N_A+N_T \end{cases}$$

$$m\left[\dot{u}+(Q_1+q)(W_1+w)-(R_1+r)(V_1+v)\right]=-mg\sin(\Theta_1+\theta)+\left(F_{A_{X_1}}+f_{A_X}\right)+\left(F_{T_{X_1}}+f_{T_X}\right)$$

$$m\left[\dot{v}+(U_1+u)(R_1+r)-(P_1+p)(W_1+w)\right]=mg\cos(\Theta_1+\theta)\sin(\Phi_1+\phi)+\left(F_{A_{Y_1}}+f_{A_Y}\right)+\left(F_{T_{Y_1}}+f_{T_Y}\right)$$

$$m\left[\dot{w}+(P_1+p)(V_1+v)-(Q_1+q)(U_1+u)\right]=mg\cos(\Theta_1+\theta)\cos(\Phi_1+\phi)+\left(F_{A_{Z_1}}+f_{A_Z}\right)+\left(F_{T_{Z_1}}+f_{T_Z}\right)$$

$$\dot{p}I_{XX}-\dot{r}I_{XZ}-(P_1+p)(Q_1+q)I_{XZ}+(R_1+r)(Q_1+q)(I_{ZZ}-I_{YY})=\left(L_{A_1}+l_A\right)+\left(L_{T_1}+l_T\right)$$

$$\dot{q}I_{YY}+(P_1+p)(R_1+r)(I_{XX}-I_{ZZ})+\left((P_1+p)^2-(R_1+r)^2\right)I_{XZ}=\left(M_{A_1}+m_A\right)+\left(M_{T_1}+m_T\right)$$

$$\dot{r}I_{ZZ}-\dot{p}I_{XZ}+(P_1+p)(Q_1+q)(I_{YY}-I_{XX})+(Q_1+q)(R_1+r)I_{XZ}=\left(N_{A_1}+n_A\right)+\left(N_{T_1}+n_T\right)$$

• معادلات حرکت اختلالی هواپیما Perturbed Flight

فرض ۱:

برای ترم‌های اختلالیِ سرعت‌های خطی و زاویه‌ای u, v, w, p, q, r حاصلضرب‌ها همیشه قابل صرف نظر هستند.

$$\boxed{\psi\theta = \psi\phi = \theta\phi \approx 0}$$

فرض ۲:

برای ترم‌های اختلالی زوایای اویلر، از حاصلضرب‌های غیر خطی صرف نظر می‌گردد ضمن اینکه شرایط مثلثاتی زیر به کار گرفته می‌شوند:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\psi \approx \psi, \quad \sin\theta \approx \theta, \quad \sin\phi \approx \phi \\ &\cos\psi \approx 1, \quad \cos\theta \approx 1, \quad \cos\phi \approx 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(\Theta_1 + \theta) \approx \sin\Theta_1 + \theta\cos\Theta_1 \\ &\cos(\Theta_1 + \theta)\sin(\Phi_1 + \phi) \approx \sin\Phi_1\cos\Theta_1 - \theta\sin\Phi_1\sin\Theta_1 + \phi\cos\Phi_1\cos\Theta_1 - \theta\phi\cos\Phi_1\sin\Theta_1 \\ &\cos(\Theta_1 + \theta)\cos(\Phi_1 + \phi) \approx \cos\Phi_1\cos\Theta_1 - \theta\cos\Phi_1\sin\Theta_1 - \phi\sin\Phi_1\cos\Theta_1 + \theta\phi\sin\Phi_1\sin\Theta_1 \end{aligned}}$$

- **Perturbed Flight معادلات حرکت اختلالی هواپیما**

$$m\left[\dot{u}+\left(\underline{Q_1W_1}+Q_1w+qW_1+\underline{\underline{qw}}\right)-\left(\underline{R_1V_1}+R_1v+rV_1+\underline{\underline{vr}}\right)\right]$$

$$=\underline{-mg\sin\Theta_1}-mg\ \theta\cos\Theta_1+\left(\underline{F_{A_{X_1}}}+f_{A_X}\right)+\left(\underline{F_{T_{X_1}}}+f_{T_X}\right)$$

$$m\left[\dot{v}+\left(\underline{U_1R_1}+U_1r+uR_1+\underline{\underline{ur}}\right)-\left(\underline{P_1W_1}+P_1w+pW_1+\underline{\underline{pw}}\right)\right]$$

$$=\underline{mg\sin\Phi_1\cos\Theta_1}-mg\ \theta\sin\Phi_1\sin\Theta_1+mg\phi\cos\Phi_1\cos\Theta_1\underline{\underline{-mg\theta\phi\cos\Phi_1\sin\Theta_1}}$$

$$+\left(\underline{F_{A_{Y_1}}}+f_{A_Y}\right)+\left(\underline{F_{T_{Y_1}}}+f_{T_Y}\right)$$

$$m\left[\dot{w}+\left(\underline{P_1V_1}+P_1v+pV_1+\underline{\underline{pv}}\right)-\left(\underline{Q_1U_1}+Q_1u+U_1q+\underline{\underline{uq}}\right)\right]$$

$$=\underline{mg\cos\Phi_1\cos\Theta_1}-mg\ \theta\cos\Phi_1\sin\Theta_1-mg\ \phi\sin\Phi_1\cos\Theta_1\underline{\underline{+mg\ \theta\phi\sin\Phi_1\sin\Theta_1}}$$

عبارت‌های دارای دو زیرخط: حذف به دلیل کوچکی

عبارت‌های دارای یک زیرخط: حذف به دلیل وجود در معادله بقای مومنتوم (حالت پایا)

- **معادلات حرکت اختلالی هواپیما Perturbed Flight**

عبارت‌های دارای دو زیرخط: حذف به دلیل کوچکی

عبارت‌های دارای یک زیرخط: حذف به دلیل وجود در معادله بقای مومنتوم (حالت پایا)

$$\dot{p}I_{XX} - \dot{r}I_{XZ} - \left(\underline{P_1Q_1} + P_1q + Q_1p + \underline{\underline{pq}}\right)I_{XZ} + \left(\underline{R_1Q_1} + R_1q + Q_1r + \underline{\underline{rq}}\right)\left(I_{ZZ} - I_{YY}\right)$$

$$= \left(\underline{L_{A_1}} + l_A\right) + \left(\underline{L_{T_1}} + l_T\right)$$

$$\dot{q}I_{YY} + \left(\underline{P_1R_1} + P_1r + pR_1 + \underline{\underline{pr}}\right)\left(I_{XX} - I_{ZZ}\right) + \left(\underline{P_1^2} + 2P_1p + \underline{\underline{p^2}} - \underline{R_1^2} - 2R_1r - \underline{\underline{r^2}}\right) I_{XZ}$$

$$= \left(\underline{M_{A_1}} + m_A\right) + \left(\underline{M_{T_1}} + m_T\right)$$

$$\dot{r}I_{ZZ} - \dot{p}I_{XZ} + \left(\underline{P_1Q_1} + P_1q + pQ_1 + \underline{\underline{pq}}\right)\left(I_{YY} - I_{XX}\right) + \left(\underline{Q_1R_1} + Q_1r + R_1q + \underline{\underline{rq}}\right)I_{XZ}$$

$$= \left(\underline{N_{A_1}} + n_A\right) + \left(\underline{N_{T_1}} + n_T\right)$$

- معادلات حرکت اختلالی هواپیما **Perturbed Flight**

$$m\left[\dot{u}+Q_1 w+qW_1-R_1 v-rV_1\right]=-mg\ \theta\cos\Theta_1+\left(f_{A_X}+f_{T_X}\right)$$
$$m\left[\dot{v}+U_1 r+uR_1-P_1 w-pW_1\right]=-mg\ \theta\sin\Phi_1\sin\Theta_1+mg\ \phi\cos\Phi_1\cos\Theta_1+\left(f_{A_Y}+f_{T_Y}\right)$$
$$m\left[\dot{w}+P_1 v+pV_1-Q_1 u-U_1 q\right]=-mg\ \theta\cos\Phi_1\sin\Theta_1-mg\ \phi\sin\Phi_1\cos\Theta_1+\left(f_{A_Z}+f_{T_Z}\right)$$
$$\dot{p}I_{XX}-\dot{r}I_{XZ}-\left(P_1 q+Q_1 p\right)I_{XZ}+\left(R_1 q+Q_1 r\right)\left(I_{ZZ}-I_{YY}\right)=\left(l_A+l_T\right)$$
$$\dot{q}I_{YY}+\left(P_1 r+pR_1\right)\left(I_{XX}-I_{ZZ}\right)+\left(2P_1 p-2R_1 r\right)I_{XZ}=\left(m_A+m_T\right)$$
$$\dot{r}I_{ZZ}-\dot{p}I_{XZ}+\left(P_1 q+pQ_1\right)\left(I_{YY}-I_{XX}\right)+\left(Q_1 r+R_1 q\right)I_{XZ}=\left(n_A+n_T\right)$$

شبیه به روند فوق داریم:

$$p=\dot{\phi}-\dot{\Psi}_1\theta\cos\Theta_1-\psi\sin\Theta_1$$
$$q=-\dot{\Theta}_1\phi\sin\Phi_1+\dot{\theta}\cos\Phi_1-\dot{\Psi}_1\theta\sin\Phi_1\sin\Theta_1+\dot{\Psi}_1\phi\cos\Phi_1\cos\Theta_1+\dot{\psi}\sin\Phi_1\cos\Theta_1$$
$$r=-\dot{\Psi}_1\theta\cos\Phi_1\sin\Theta_1-\dot{\Psi}_1\phi\sin\Phi_1\cos\Theta_1+\dot{\psi}\cos\Phi_1\cos\Theta_1-\dot{\Theta}_1\phi\cos\Phi_1-\dot{\theta}\sin\Phi_1$$

• معادلات حرکت اختلالی هواپیما Perturbed Flight

❖ پرواز مستقیم الخط Cruise

$$
\begin{aligned}
&m\left[\dot{u}+Q_1 w+qW_1-R_1 v-rV_1\right]=-mg\;\theta\cos\Theta_1+\left(f_{A_X}+f_{T_X}\right)\\
&m\left[\dot{v}+U_1 r+uR_1-P_1 w-pW_1\right]=-mg\;\theta\sin\Phi_1\sin\Theta_1+mg\;\phi\cos\Phi_1\cos\Theta_1+\left(f_{A_Y}+f_{T_Y}\right)\\
&m\left[\dot{w}+P_1 v+pV_1-Q_1 u-U_1 q\right]=-mg\;\theta\cos\Phi_1\sin\Theta_1-mg\;\phi\sin\Phi_1\cos\Theta_1+\left(f_{A_Z}+f_{T_Z}\right)\\
&\dot{p}I_{XX}-\dot{r}I_{XZ}-\left(P_1 q+Q_1 p\right)I_{XZ}+\left(R_1 q+Q_1 r\right)\left(I_{ZZ}-I_{YY}\right)=\left(l_A+l_T\right)\\
&\dot{q}I_{YY}+\left(P_1 r+pR_1\right)\left(I_{XX}-I_{ZZ}\right)+\left(2P_1 p-2R_1 r\right)I_{XZ}=\left(m_A+m_T\right)\\
&\dot{r}I_{ZZ}-\dot{p}I_{XZ}+\left(P_1 q+pQ_1\right)\left(I_{YY}-I_{XX}\right)+\left(Q_1 r+R_1 q\right)I_{XZ}=\left(n_A+n_T\right)
\end{aligned}
$$

$$P_1=Q_1=R_1=V_1=\Phi_1=0$$

$$\Theta_1=\text{const},\ \Psi_1=\text{const}$$

$$\sin\Phi_1=0,\ \cos\Phi_1=1$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
m\left[\dot{u}+qW_1\right]&=-mg\,\theta\cos\Theta_1+\left(f_{A_X}+f_{T_X}\right)\\
m\left[\dot{v}+U_1 r-pW_1\right]&=mg\,\phi\cos\Theta_1+\left(f_{A_Y}+f_{T_Y}\right)\\
m\left[\dot{w}-U_1 q\right]&=-mg\,\theta\sin\Theta_1+\left(f_{A_Z}+f_{T_Z}\right)\\
\dot{p}I_{XX}-\dot{r}I_{XZ}&=\left(l_A+l_T\right)\\
\dot{q}I_{YY}&=\left(m_A+m_T\right)\\
\dot{r}I_{ZZ}-\dot{p}I_{XZ}&=\left(n_A+n_T\right)\\
p&=\dot{\phi}-\dot{\psi}\sin\Theta_1\\
q&=\dot{\theta}\\
r&=\dot{\psi}\cos\Theta_1
\end{aligned}
}
$$

- جمع‌بندی فصل

نوع	خاصیت	کاربرد
معادلات عمومی ۶ درجه آزادی حرکت	• درگیر • دیفرانسیلی غیرخطّی	• شبیه‌سازی • بازسازی سوانح • بررسی اثر اختلالات بزرگ
معادلات حرکت‌های دائم	معادلات جبری	• امکان‌پذیری • تریم‌پذیری • خواص مطلوب پایداری
معادلات اختلالی حرکت	• دیفرانسیل خطّی	• سنجش پایداری دینامیکی از طریق تاریخچه اختلالات • توابع تبدیل هواپیما • معادله شاخصه

پایان فصل اول