دانشگاه صنعتی شریف
هسته پژوهشی هدایت و کنترل

سیستم‌های ناوبری اینرسی متصل‌به‌بدنه

ویرایش اول

نگارش
هادی نوبهاری و حامد محمدکریمی

آذر ۱۳۹۱

سیستم‌های ناوبری اینرسی متصل‌به‌بدنه

چکیده

مجموعه حاضر با هدف آموزش مبانی سیستم‌های ناوبری اینرسی از نوع متصل‌به‌بدنه، توسط «هسته پژوهشی هدایت و کنترل» دانشگاه صنعتی شریف تدوین شده‌است. برای این منظور مبانی فیزیکی و ریاضی مورد نیاز در استخراج روابط ناوبری سیستم‌های اینرسی متصل‌به‌بدنه، به‌طور اجمال بیان شده‌است. در استخراج این روابط، رویکرد تنسوری مدنظر بوده‌است.

فرایند ترازیابی اولیه سیستم ناوبری اینرسی متصل‌به‌بدنه نیز معرفی شده‌است. این فرآیند شامل دو مرحله «ترازیابی خام» و «ترازیابی دقیق» است. در ویرایش فعلی تنها مباحث مربوط به ترازیابی خام پوشش داده شده‌است. دراین روش با استفاده از حسگرهای اینرسی، وضعیت اولیه جسم تعیین می‌شود. همچنین دقت نهایی یک بلوک ناوبری اینرسی در الگوریتم ترازیابی خام، به‌صورت تحلیلی محاسبه شده‌است.

توجه:

هادی نوبهاری و حامد محمدکریمی، "سیستم‌های ناوبری اینرسی متصل به بدنه"، دانشگاه صنعتی شریف، هسته پژوهشی هدایت و کنترل، آذر ۱۳۹۱.

فهرست عناوین

صفحه

صفحه

فهرست اشکال

فهرست جداول

صفحه

فهرست علائم

لاتین

$\mathbf{E}$	تنسور یکانی مرتبه دوم
f_{x}	مقدار حقیقی خروجی شتاب‌سنج کانال x
f_{y}	مقدار حقیقی خروجی شتاب‌سنج کانال y
f_{z}	مقدار حقیقی خروجی شتاب‌سنج کانال z
$\mathbf{g}$	بردار جاذبه
h	ارتفاع از سطح بیضی‌گون مبنا
$\mathbf{r}_{\mathrm{BE}}$	موقعیت مبدا چهارچوب بدنی نسبت به مرکز زمین
R_{e}	شعاع زمین
$[\mathrm{T}]^{\mathrm{AB}}$	ماتریس تبدیل از چهارچوب B به چهارچوب A
v_n	مولفه سرعت نسبت به زمین در راستای شمال جغرافیایی
v_e	مولفه سرعت نسبت به زمین در راستای شرق جغرافیایی
v_d	مولفه سرعت نسبت به زمین و به سمت مرکز زمین
$\mathbf{v}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{E}}$	سرعت مبدا چهارچوب بدنی نسبت به چهارچوب زمین
$\hat{\mathbf{x}}$	تخمین بردار $\mathbf{x}$
$\hat{\mathbf{X}}$	تخمین تنسور مرتبه دوم $\mathbf{X}$

یونانی

ℓ	طول جغرافیایی
λ	عرض جغرافیایی
ε	عملگر اغتشاش
$\varepsilon\phi$	مولفه بردار انحراف در راستای شمال جغرافیایی
$\varepsilon\theta$	مولفه بردار انحراف در راستای شرق جغرافیایی

$\varepsilon\psi$	مولفه بردار انحراف به سمت مرکز زمین
$\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{N}N}$	بردار انحراف تخمین دستگاه جغرافیایی نسبت به دستگاه جغرافیایی واقعی
$\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}$	تنسور شبه‌متقارن بردار انحراف تخمین دستگاه جغرافیایی نسبت به دستگاه جغرافیایی واقعی
$\boldsymbol{\omega}^{AB}$	بردار سرعت زاویه‌ای چهارچوب A نسبت به چهارچوب B
$\boldsymbol{\Omega}^{AB}$	تنسور شبه‌متقارن بردار سرعت زاویه‌ای چهارچوب A نسبت به چهارچوب B
ω_x	مقدار حقیقی خروجی جایرو نرخی کانال x
ω_y	مقدار حقیقی خروجی جایرو نرخی کانال y
ω_z	مقدار حقیقی خروجی جایرو نرخی کانال z

بالانویس

N	چهارچوب ناوبری
I	چهارچوب اینرسی
E	چهارچوب زمین
B	چهارچوب بدنی

زیرنویس

A	نقطه A

۱ مقدمه

ناوبری علم تعیین موقعیت و وضعیت یک جسم است. کلمه Navigation از دو کلمه لاتین به معنی کشتی و حرکت گرفته شده و اساساً به معنی مسیریابی در دریا است؛ اما با شروع مسافرت‌های هوایی و فضایی این کلمه به مفهوم مسیریابی در هوا، خشکی و دریا نیز به‌کار رفته‌است. مسیریابی اولیه که توسط اجرام سماوی و قطب‌نمای مغناطیسی انجام می‌شد، بر پایه مشاهده استوار بود و با استفاده از نقشه و لوازم ترسیم، تکمیل می‌شد. با پیشرفت علوم و تکنولوژی امروزه برای ناوبری از سیستم‌های پیشرفته‌ای استفاده می‌شود که قادر به مشخص‌کردن طول و عرض جغرافیایی، ارتفاع، سرعت و وضعیت دورانی جسم با دقت بسیار زیاد هستند.

در سال‌های گذشته از روش‌های زیادی برای مسیریابی و تعیین موقعیت استفاده شده که هر یک ضمن داشتن مزایا، معایب خاص خود را نیز داشته‌اند. ناوبری اینرسی یکی از این روش‌ها است که در آن موقعیت وسیله بر اساس خروجی حسگرهای حرکتی (شتاب‌سنج و سرعت‌سنج زاویه‌ای) به‌روز می‌شود. مهم‌ترین مشکل این سیستم تجمیع خطا با گذشت زمان است. از مزایای ناوبری اینرسی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- بعد از تنظیم شرایط اولیه، دیگر نیازی به اطلاعات خارجی ندارد.
- این سیستم متاثر از شرایط آب و هوایی نیست.
- قابل شناسایی و جمینگ نیست.

سیستم‌های ناوبری اینرسی به دو دسته «متصل‌به‌بدنه»[1] و «صفحه پایدار»[2] تقسیم می‌شوند. در سیستم‌های صفحه پایدار، پارامترهای حرکت (شتاب و سرعت زاویه‌ای) در دستگاهی محاسبه می‌شود که نسبت به فضای اینرسی ثابت است. در سیستم‌های متصل‌به‌بدنه، پارامترهای حرکت در دستگاه بدنی بیان می‌شوند. این مجموعه به مباحث مربوط به سیستم ناوبری متصل‌به‌بدنه می‌پردازد.

---

[1] Strapdown

[2] Stable Platform

در سیستم ناوبری اینرسی متصل به بدنه هدف این است که با استفاده از حسگرهای اینرسی، شامل حداقل سه جایروی نرخی و سه شتاب‌سنج و به کمک الگوریتمی که در کامپیوتر سیستم پیاده‌سازی می‌شود، موقعیت و وضعیت جسم تعیین شود.

قبل از شروع به کار سیستم ناوبری اینرسی لازم است که شرایط اولیه شامل مکان و وضعیت اولیه سیستم مشخص شود. به این فرآیند ترازیابی اولیه گفته می‌شود. این فرآیند در دو مرحله متوالی انجام می‌شود و در هر مرحله به دقت آن افزوده می‌شود. این دو مرحله عبارتند از:

- ترازیابی خام[1]
- ترازیابی دقیق[2]

ترازیابی خام:

این مرحله شامل یک تخمین اولیه از وضعیت[3] جسم است. در این قسمت از موقعیت جسم و مدل زمین برای محاسبه گرانش و دوران اسمی زمین استفاده می‌شود؛ سپس با مقایسه مقادیر نامی گرانش و دوران با مقادیر اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها و جایروهای نرخی، یک تخمین اولیه از وضعیت جسم (ماتریس تبدیل) حاصل می‌شود. موفقیت در این مرحله مستلزم دانش دقیق از مدل زمین و دقت مناسب حسگرهای ناوبری است.

ترازیابی دقیق:

در این مرحله از یک الگوریتم فیلتر تخمین‌گر، مثلاً فیلتر کالمن، برای افزایش دقت ترازیابی خام استفاده می‌شود؛ فیلتر طراحی‌شده بر اساس خروجی حسگرها و مدل خطای آنها و همچنین معادلات خطی‌شده ناوبری، ترازیابی خام را اصلاح می‌کند. در این مرحله اختلاف تخمین ماتریس تبدیل و ماتریس تبدیل واقعی، با بردار انحراف[4] مدل می‌شود و الگوریتم ناوبری سعی در کوچک‌کردن اندازه این بردار می‌کند.

در فصل دوم این گزارش مبانی ریاضی و فیزیکی مورد نیاز در ناوبری اینرسی متصل‌به‌بدنه بیان می‌شود. در فصل سوم معادلات ناوبری این سیستم‌ها استخراج می‌شود. در فصل چهارم نحوه حل عددی معادلات ناوبری و همچنین برخی نکات لازم برای افزایش دقت ناوبری بیان می‌شود. در فصل پنجم معادلات ترازیابی خام، دقت ترازیابی خام و انواع روش‌های آن معرفی می‌شود. نهایتاً در پیوست الف، «مدل زمین» معرفی می‌شود.

[1] Coarse Alignment

[2] Fine Alignment

[3] Attitude

[4] Tilt Vector

۲ تعاریف، مفاهیم و مبانی ریاضی

در این فصل تعاریف اولیه و مبانی ریاضی مورد نیاز برای مدل‌سازی معادلات ناوبری سیستم‌های اینرسی متصل‌به‌بدنه تشریح می‌شود. بسیاری از مفاهیم ارائه‌شده در این فصل برگرفته از مرجع [۱] است. لذا درصورتیکه خواننده با این مفاهیم آشنایی دارد، می‌تواند از این فصل عبور کند.

خلاصه‌ای از واقعیت را مدل گویند. به بیان دیگر، نمایش فیزیکی یک شیئ یا سیستم را مدل آن می‌نامند. به فرایند ایجاد و انتخاب مدل، مدل‌سازی گفته می‌شود. پیاده‌سازی یک مدل در محیط رایانه‌ای را شبیه‌سازی می‌نامند. مدل‌سازی مقدمه شبیه‌سازی است و می‌توان گفت که مدل‌سازی مربوط به دنیای مدل‌ها و شبیه‌سازی مربوط به دنیای اعداد است. در شبیه‌سازی باید ارتباط دنیای مدل‌ها با دنیای اعداد برقرار شود. مقایسه‌ای بین عناصر مدل‌سازی و شبیه‌سازی در جدول ۱.۲ انجام شده‌است. موارد مطرح شده در این جدول در طول این فصل تبیین می‌شود.

جدول ۱.۲ مقایسه مدل‌سازی و شبیه‌سازی

دنیای مدل‌ها	دنیای اعداد
تنسور مرتبه اول (بردار فیزیکی)	بردار (بردار عددی)
تنسور مرتبه دوم	ماتریس
چهارچوب[۱]	دستگاه مختصات
تنسور دوران[۲]	ماتریس انتقال (ماتریس دوران)
مشتق دورانی[۳]	مشتق معمولی (مشتق عددی)

۱.۲ تعاریف

در این بخش تعاریف اولیه مورد نیاز برای مدل‌سازی سیستم ناوبری اینرسی متصل‌به‌بدنه بیان می‌شود.

[1] Frame

[2] Rotation Tensor

[3] Rotational Time Derivative

۱.۱.۲ نقطه[۱]

نقطه یک مدل ریاضی از اشیای فیزیکی است که بسط فضایی آن‌ها اهمیت ندارد. از نقطه برای مدل‌سازی موقعیت اجسام بدون درنظرگرفتن وضعیت آن‌ها استفاده می‌شود. برای نمایش نقطه از حروف بزرگ معمولی (غیرایتالیک) به‌صورت زیرنویس استفاده می‌شود.

۲.۱.۲ چهارچوب

چهارچوب یا قاب یک مجموعه به‌هم‌پیوسته از نقاط است که فواصل آنها نسبت به یکدیگر ثابت و حداقل شامل سه نقطه غیرهم‌خط می‌شود. یک چهارچوب علاوه بر موقعیت دارای وضعیت نیز هست. به‌طور مثال نقاط به‌هم‌پیوسته تشکیل‌دهنده بدنه یک وسیله پرنده را می‌توان چهارچوب بدنی نامید. برای نمایش چهارچوب از حروف بزرگ معمولی (غیرایتالیک) به‌صورت بالانویس استفاده می‌شود.

۳.۱.۲ بردار فیزیکی

بردار فیزیکی یک مفهوم انتزاعی از یک پاره‌خط در فضای اقلیدسی است که جهت آن نیز مشخص شده‌است. به‌طور مثال اگر یک پاره‌خط مرکز زمین را به مرکز ماه وصل کند و برای آن جهت نیز درنظر گرفته شود، این پاره‌خط جهت‌دار یک بردار فیزیکی نامیده می‌شود. برای نمایش یک بردار فیزیکی از حروف کوچک ضخیم استفاده می‌شود.

۴.۱.۲ دستگاه مختصات[۲]

سه بردار فیزیکی غیرهم‌صفحه در یک فضای اقلیدسی یک دستگاه مختصات را ایجاد می‌کنند. برای نمایش دستگاه مختصات از حروف بزرگ معمولی (غیرایتالیک) استفاده می‌شود.

روی یک چهارچوب می‌توان بی‌شمار دستگاه مختصات تعریف کرد. اما، باید به این نکته توجه داشت که همه دستگاه‌های قابل تعریف روی یک چهارچوب، نسبت به چهارچوب (و بنابراین نسبت به هم) ثابت‌اند.

۵.۱.۲ دستگاه مختصات کارتزین

سه بردار فیزیکی متعامد در یک فضای اقلیدسی یک دستگاه مختصات کارتزین را ایجاد می‌کنند.

---

[1] Point

[2] Coordinate System

۶.۱.۲ بردار عددی

سه مولفه یک بردار فیزیکی در یک دستگاه مختصات خاص، یک بردار عددی را ایجاد می‌کنند. به‌طور مثال مولفه‌های بردار فیزیکی اول از دستگاه مختصات A، که معمولاً با $\mathbf{i}$ نشان داده می‌شود، در همین دستگاه مختصات به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\mathbf{i}]^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۱.۲)$$

در اینجا $\mathbf{i}$ بردار فیزیکی است، منظور از $[\mathbf{i}]^A$ بیان بردار $\mathbf{i}$ در دستگاه مختصات A است و بردار سمت راست بردار عددی است.

۷.۱.۲ تنسور مرتبه صفر

همان عدد اسکالر است (مانند جرم). بیان تنسور مرتبه صفر در دستگاه‌های مختصات متفاوت، یکسان است. تنسور مرتبه صفر با حروف کوچک نمایش داده می‌شود. اگر تنسور مرتبه صفر بیان‌کننده یک کمیت متغیر با زمان باشد، با حروف کوچک ایتالیک و در غیر اینصورت با حروف کوچک معمولی (غیر ایتالیک) نمایش داده می‌شود.

۸.۱.۲ تنسور مرتبه اول

منظور از تنسور مرتبه اول همان بردار فیزیکی است و بنابراین برای نمایش آن از حروف کوچک ضخیم (مثلاً $\mathbf{x}$) استفاده می‌شود.

۹.۱.۲ تنسور مرتبه دوم

مانند تنسور مرتبه اول یک مفهوم انتزاعی است که اگر در یک دستگاه مختصات بیان شود، به‌صورت یک ماتریس 3×3 ظاهر می‌شود. به‌طور مثال لختی دورانی یک جسم یک تنسور مرتبه دوم است و در صورت نیاز به کمی‌کردن آن در یک دستگاه مختصات، با یک ماتریس 3×3 قابل بیان است. تنسور مرتبه دوم با حروف بزرگ ضخیم (مثلاً $\mathbf{X}$) نمایش داده می‌شود.

۱۰.۱.۲ تنسورهای کارتزین

فرض کنید A و B بیان‌کننده دو دستگاه مختصات کارتزین باشند. اگر تنسور مرتبه اول **x** در رابطه زیر صدق کند، یک تنسور کارتزین نامیده می‌شود:

$$[\mathbf{x}]^{B} = [T]^{BA}[\mathbf{x}]^{A} \tag{۲.۲}$$

که $[T]^{BA}$ ماتریس انتقال از دستگاه مختصات A به دستگاه مختصات B است. لازم به ذکر است که **x** یک بردار فیزیکی و $[\mathbf{x}]^{B}$ یک بردار عددی است.

به‌همین‌ترتیب، اگر تنسور مرتبه دوم **X** در رابطه زیر صدق کند، یک تنسور کارتزین نامیده می‌شود:

$$[\mathbf{X}]^{B} = [T]^{BA}[\mathbf{X}]^{A}[\overline{T}]^{BA} \tag{۳.۲}$$

که $[\overline{T}]^{BA}$ ترانهاده ماتریس انتقال $[T]^{BA}$ و به بیان دیگر ماتریس انتقال از دستگاه مختصات B به دستگاه مختصات A است.

۱۱.۱.۲ تنسور شبه‌متقارن

برای یک تنسور مرتبه اول **x**، تنسور شبه‌متقارن **X** به‌صورت زیر تعریف می‌شود. در اینجا برای نمایش کمی تنسور شبه‌متقارن از یک دستگاه مختصات دلخواه D استفاده شده‌است:

$$[\mathbf{x}]^{D} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow [\mathbf{X}]^{D} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{۴.۲}$$

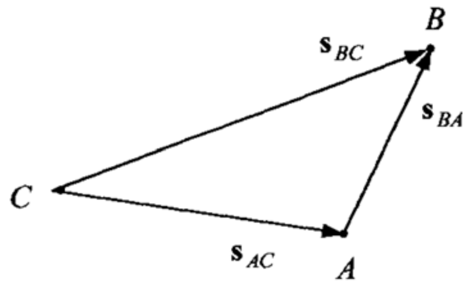
می‌توان نشان داد که روابط زیر در تنسورهای شبه‌متقارن برقرار است:

$$\left([\mathbf{X}]^{D}\right)^2 = \begin{bmatrix} -(x_2^{\,2}+x_3^{\,2}) & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & -(x_1^{\,2}+x_3^{\,2}) & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & -(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}) \end{bmatrix} \tag{۵.۲}$$

$$\left([\mathbf{X}]^{D}\right)^{n+2} = -(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2})\left([\mathbf{X}]^{D}\right)^{n} \quad \text{for } n \ge 1 \tag{۶.۲}$$

۱۲.۱.۲ بردار موقعیت

یک بردار فیزیکی است که توسط دو نقطه ساخته می‌شود. در شکل ۱.۲ سه بردار موقعیت بین سه نقطه نشان داده شده‌است. در این شکل منظور از $\mathbf{s}_{BC}$ بردار موقعیت نقطه B نسبت به نقطـه C و بـه عبـارت دیگر برداری است که از C شروع و به B ختم می‌شود.



شکل ۱.۲ نمایش سه بردار موقعیت بین سه نقطه

بردار موقعیت خواص زیر را دارد:

$$\begin{cases}\mathbf{s}_{BA} = -\mathbf{s}_{AB} \\ \mathbf{s}_{BC} = \mathbf{s}_{BA} + \mathbf{s}_{AC}\end{cases} \tag{۷.۲}$$

رابطه تنسوری (۷.۲)، در دستگاه مختصات دلخواه D به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\mathbf{s}_{BC}]^{D} = [\mathbf{s}_{BA}]^{D} + [\mathbf{s}_{AC}]^{D} \tag{۸.۲}$$

۲.۲ جبر تنسوری

در بخش ۱.۲ تعاریف تنسورهای مرتبه اول و مرتبه دوم بیان گردیـد. در ایـن بخـش عملگرهـا و قـوانین حاکم بر این تنسورها تشریح می‌شود.

۱.۲.۲ قواعد بنیادی

در ادامه قوانین سه‌گانه حاکم بر تنسورهای مرتبه اول معرفی می‌شود:

- **قاعده جابجایی**[1]

$$\mathbf{s}_{BC} = \mathbf{s}_{BA} + \mathbf{s}_{AC} = \mathbf{s}_{AC} + \mathbf{s}_{BA} \tag{۹.۲}$$

[1] Commutative Rule

- **قاعده شرکت‌پذیری[1]**

$$(\mathbf{s}_{BC} + \mathbf{s}_{CA}) + \mathbf{s}_{AB} = \mathbf{s}_{BC} + (\mathbf{s}_{CA} + \mathbf{s}_{AB}) \qquad (۱۰.۲)$$

- **قاعده توزیع‌پذیری[2]**

$$\begin{cases} \alpha(\beta\,\mathbf{s}_{AB}) = \beta(\alpha\,\mathbf{s}_{AB}) = (\alpha\beta)\mathbf{s}_{AB} \\ (\alpha+\beta)\mathbf{s}_{AB} = \alpha\,\mathbf{s}_{AB} + \beta\,\mathbf{s}_{AB} \end{cases} \qquad (۱۱.۲)$$

۲.۲.۲ عملگرهای ریاضی

در این بخش عملگرهای ریاضی موجود در جبر تنسوری معرفی می‌شوند.

- **ضرب داخلی**

ضرب داخلی یا ضرب اسکالر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}\,\mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta \qquad (۱۲.۲)$$

در رابطه (۱۲.۲)، θ زاویه بین دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ است و $|\mathbf{x}|$ اندازه $\mathbf{x}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}} \qquad (۱۳.۲)$$

- **ضرب خارجی**

ضرب خارجی یا ضرب برداری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{y} = -\mathbf{Y}\mathbf{x} = \mathbf{z} \qquad (۱۴.۲)$$

ضرب خارجی خواص زیر را دارد:

- ضرب خارجی دو بردار، یک بردار است ($\mathbf{z}$).
- بردار $\mathbf{z}$ بر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ عمود است و جهت آن از قانون دست راست بدست می‌آید.
- اندازه بردار $\mathbf{z}$، مساحت متوازی‌الاضلاعی است که توسط بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ ساخته می‌شود ($\mathbf{z} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\sin\theta$).

[1] Associative Rule

[2] Distributive Rule

- **ضرب سه‌گانه برداری**

ضرب سه‌گانه برداری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}\times\mathbf{z}=\mathbf{XYz} \tag{۱۵.۲}$$

اگر سه بردار $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ هم‌صفحه باشند، ضرب سه‌گانه برداری آنها صفر می‌شود. می‌توان نشان داد:

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}\times\mathbf{z}=\mathbf{y}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{z}-\mathbf{z}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{y} \tag{۱۶.۲}$$

- **ضرب سه‌گانه اسکالر**

ضرب سه‌گانه اسکالر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V=(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}=(\overline{\mathbf{Xy}})\mathbf{z}=\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{X}}\mathbf{z} \tag{۱۷.۲}$$

در رابطه فوق اسکالر V برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که توسط سه بردار $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ ساخته می‌شود.

۳.۲.۲ سایر روابط مورد استفاده

روابط تنسوری زیر نیز قابل اثبات هستند و بعضاً در مرتب‌سازی و مختصرنویسی معادلات تنسوری کاربرد دارند.

$$\mathbf{z}=\mathbf{Xy}\leftrightarrow\mathbf{Z}=\mathbf{XY}-\mathbf{YX} \tag{۱۸.۲}$$

$$\mathbf{XY}=\mathbf{y}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}-\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\,\mathbf{E} \tag{۱۹.۲}$$

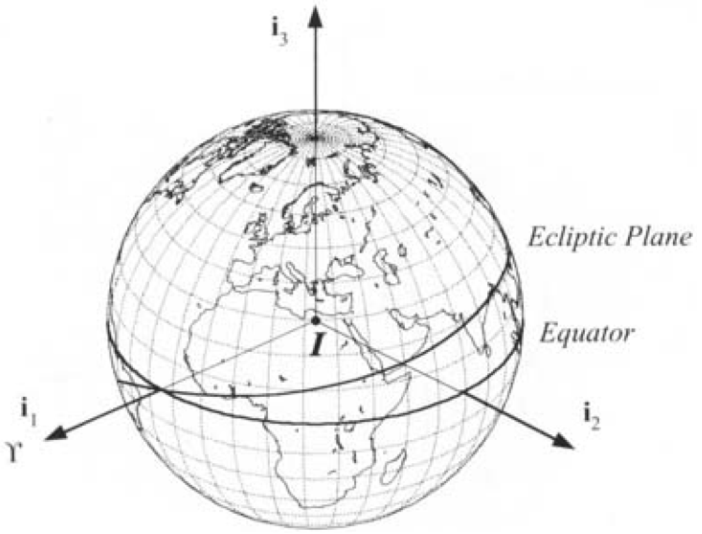
در رابطه فوق $\mathbf{E}$ تنسور یکانی است.

۳.۲ چهارچوب‌ها و دستگاه‌های مختصات مرسوم

در این بخش چهارچوب‌ها و دستگاه‌های مختصات مرسوم شامل دستگاه مختصات اینرسی، زمین، جغرافیایی و بدنی معرفی می‌شوند. برای یک چهارچوب، بردارهای ارجح به‌عنوان بردارهایی تعریف می‌شوند که استفاده از آن‌ها باعث سهولت محاسبات مرتبط با آن چهارچوب می‌شود. همچنین دستگاه مختصات ارجح، دستگاه مختصاتی است که بردارهای یکه آن با بردارهای ارجح چهارچوب متناظر تطابق دارند.

۱.۳.۲ چهارچوب اینرسی J2000

مبدا دستگاه مختصات ارجح این چهارچوب، منطبق بر مرکز زمین است و جهت بردارهای ارجح نسبت به صفحه مدار حرکت زمین به دور خورشید (Ecliptic Plane) تعریف می‌شود. بردارهای ارجح این چهارچوب با i_1، i_2 و i_3 نشان داده می‌شود (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲ چهارچوب اینرسی J2000 و دستگاه مختصات متناظر با آن

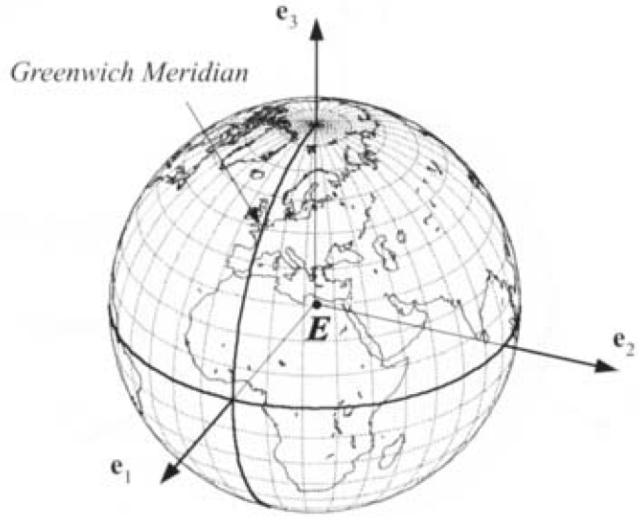
صفحه مدار چرخش زمین به دور خورشید نسبت به فضای اینرسی ثابت است. صفحه استوا نیز عمود بر محور دوران است و نسبت به فضای اینرسی ثابت است. این دو صفحه یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند که این خط از مرکز زمین می‌گذرد و در امتداد صورت فلکی حمل (γ) است. این خط در اولین روز بهار (اعتدال بهاری) رو به خورشید و در اولین روز پاییز (اعتدال پاییزی) پشت به آن است (در اولین روز بهار و پاییز مرکز زمین، خورشید و کله قوچ در یک امتداد قرار می‌گیرند). محور i_1 دستگاه J2000 در امتداد کله قوچ و رو به سوی آن است. بردار i_3 در جهت دوران زمین است و بردار i_2 یک دستگاه راست‌گرد متعامد را کامل می‌کند.

صفحه استوا، صفحه ecliptic و محور دوران زمین با گذشت زمان به‌کندی تغییر می‌کنند. لذا هر ۵۰ سال این دستگاه بروز می‌شود که آخرین آنها در سال ۲۰۰۰ انجام شد و معروف به Julian Epoch یا J2000 می‌باشد.

۲.۳.۲ چهارچوب زمین

مبدا دستگاه مختصات ارجح این چهارچوب منطبق بر مرکز زمین است و بردارهای ارجح این چهارچوب با e_1، e_2 و e_3 نشان داده می‌شود. اگر مرکز زمین را به نقطه تلاقی نصف‌النهار گرینویچ و دایره استوا

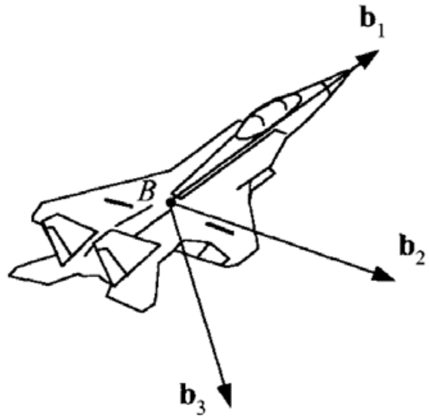
وصل کنیم، بردار e_1 مشخص می‌شود. بردار e_3 در جهت دوران زمین است و e_2 یک دستگاه راست‌گرد متعامد را کامل می‌کند.



شکل ۳.۲ چهارچوب زمین و دستگاه مختصات متناظر با آن

۳.۳.۲ چهارچوب بدنی

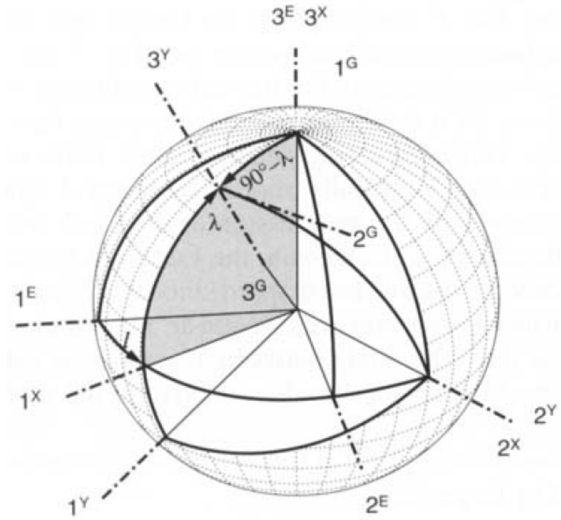
از این چهارچوب برای بررسی موقعیت و وضعیت جسم مورد مطالعه استفاده می‌شود. بردارهای ارجح این چهارچوب با b_1، b_2 و b_3 نشان داده می‌شوند. بردار b_1 این چهارچوب در راستای محور طولی وسیله (موشک و هواپیما) و به‌سمت دماغه است، b_2 در راستای بال راست و به‌سمت خارج است و b_3 یک دستگاه راست‌گرد متعامد را تکمیل می‌کند. معمولاً نقطه ثابتی از بدنه به‌عنوان مرکز دستگاه مختصات بدنی درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۴.۲ چهارچوب بدنی و دستگاه مختصات متناظر با آن

۴.۳.۲ دستگاه مختصات جغرافیایی

از این دستگاه برای ناوبری در سطح زمین یا اطراف آن استفاده می‌شود. در واقع برای بیان موقعیت و سرعت روی یک سطح کروی، کارکردن با طول و عرض جغرافیایی ساده‌تر است. در یک موقعیت مشخص (طول و عرض جغرافیایی معین) بر روی سطح زمین، دستگاه مختصات جغرافیایی (G) به این صورت تعریف می‌شود: بردار 1^G و 2^G منطبق بر افق محلی هستند. بردارهای 1^G، 2^G و 3^G به‌ترتیب به‌سمت شمال، شرق و مرکز زمین هستند.



شکل ۵.۲ دستگاه مختصات جغرافیایی

۵.۳.۲ دستگاه مختصات زمین تخت[1]

این دستگاه، منطبق بر یک دستگاه جغرافیایی است که همراه با زمین در حال چرخش است. دستگاه مختصات زمین تخت، L، به این صورت تعریف می‌شود: بردار 1^L به سمت شمال محلی اشاره می‌کند، بردار 3^L به سمت مرکز زمین اشاره می‌کند و بردار 2^L با تکمیل یک دستگاه متعامد راست‌گرد، به سمت شرق محلی اشاره خواهد کرد. از این دستگاه در صورتی استفاده می‌کنیم که برد پرتابه کمتر از ۳۰ کیلومتر و ماخ آن کمتر از ۵ باشد.

قبلاً اشاره شد که روی یک چهارچوب می‌توان بی‌شمار دستگاه مختصات تعریف کرد که البته همه این دستگاه‌ها نسبت به چهارچوب و نسبت به هم ثابت هستند. به‌طور مثال فرض کنید یک پرتابه (P) از نقطه‌ای در سطح زمین پرتاب شود. تنسور سرعت پرتابه از دید ناظر دستگاه زمین (E) و ناظر دستگاه

[1] Local Level

زمین تخت (L)، یکسان است؛ زیرا این دو دستگاه نسبت به هم ثابت هستند. ولی، بیان بردار سرعت در این دو دستگاه متفاوت است؛ به بیان ریاضی داریم:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{E}} = \mathbf{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{L}} \\ [\mathbf{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{E}}]^{\mathrm{E}} \neq [\mathbf{v}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{L}}]^{\mathrm{L}} \end{cases} \tag{۲۰.۲}$$

۴.۲ دوران جسم و مباحث مرتبط با آن

در این بخش مطالب مرتبط با دوران نسبی دو چهارچوب تشریح می‌شود. در ابتدا خصوصیات ماتریس‌های انتقال بیان شده و سپس چند ماتریس انتقال مهم که غالباً در مباحث ناوبری مورد استفاده هستند، معرفی و نحوه محاسبه آن‌ها بیان می‌شود. سپس تعاریف، خواص و قضایای مرتبط با تنسور دوران ذکر می‌شود. در انتها نیز فرآیند انتشار، دوران‌های کوچک و انواع مختلف عملگرهای خطی‌ساز تشریح می‌شود.

۱.۴.۲ ماتریس انتقال و خصوصیات آن

قبلا گفته شد که $[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}$ ماتریس انتقال از دستگاه مختصات A به دستگاه مختصات B است. فرض کنید که سه بردار راست‌گرد متعامد یکه $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ سازنده دستگاه مختصات A و سه بردار راست‌گرد متعامد یکه $\mathbf{b}_1$، $\mathbf{b}_2$ و $\mathbf{b}_3$ سازنده دستگاه مختصات B باشند. ماتریس انتقال $[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_1]^{\mathrm{B}} & [\mathbf{a}_2]^{\mathrm{B}} & [\mathbf{a}_3]^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\overline{\mathbf{b}}_1]^{\mathrm{A}} \\ [\overline{\mathbf{b}}_2]^{\mathrm{A}} \\ [\overline{\mathbf{b}}_3]^{\mathrm{A}} \end{bmatrix} \tag{۲۱.۲}$$

حال فرض کنید که مولفه‌های ماتریس انتقال به‌صورت زیر باشد:

$$[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \tag{۲۲.۲}$$

می‌توان نشان داد که:

$$t_{ik} = \cos\angle(\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_k) \quad , \quad \text{where } i, k = 1, 2, 3 \tag{۲۳.۲}$$

به عبارت دیگر:

$$\mathrm{T}_{ik}=\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{a}_k=\overline{\mathbf{b}}_i\,\mathbf{a}_k \quad , \quad \text{where } i, k=1, 2, 3 \tag{۲۴.۲}$$

ماتریس انتقال بین دو دستگاه مختصات را می‌توان بر اساس روابط فوق محاسبه کرد. لازم به ذکر است که ماتریس انتقال را «ماتریس کسینوس‌های هادی» و «ماتریس تبدیل» نیز نامیده‌اند. ماتریس‌های انتقال خواصی دارند که در ادامه معرفی می‌شود:

۱- ماتریس انتقال متعامد[1] است. به بیان ریاضی خواهیم داشت:

$$[\overline{\mathrm{T}}]^{\mathrm{BA}}=\left([\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}\right)^{-1} \tag{۲۵.۲}$$

رابطه بیان می‌کند که در حل عددی مسائل شبیه‌سازی، نیازی به محاسبه ماتریس وارون نیست و به همین دلیل رابطه‌ای بسیار مهم و کاربردی است.

۲- دترمینان ماتریس انتقال بین دو دستگاه راست‌گرد $+1$ است.

$$\left|[\overline{\mathrm{T}}]^{\mathrm{BA}}\right|=+1 \tag{۲۶.۲}$$

از رابطه فوق در کاهش خطای عددی محاسبات ماتریس انتقال استفاده می‌شود.

۳- نُرم هر سطر یا ستون از ماتریس انتقال $+1$ است.

۴- ترانهاده ماتریس انتقال از دستگاه مختصات A به دستگاه مختصات B، برابر با ماتریس انتقال از دستگاه مختصات B به دستگاه مختصات A است:

$$[\overline{\mathrm{T}}]^{\mathrm{BA}}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{AB}} \tag{۲۷.۲}$$

۵- حاصل‌ضرب چند ماتریس انتقال در یکدیگر، خود یک ماتریس انتقال است:

$$[\mathrm{T}]^{\mathrm{AB}}[\mathrm{T}]^{\mathrm{BC}}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{AC}} \tag{۲۸.۲}$$

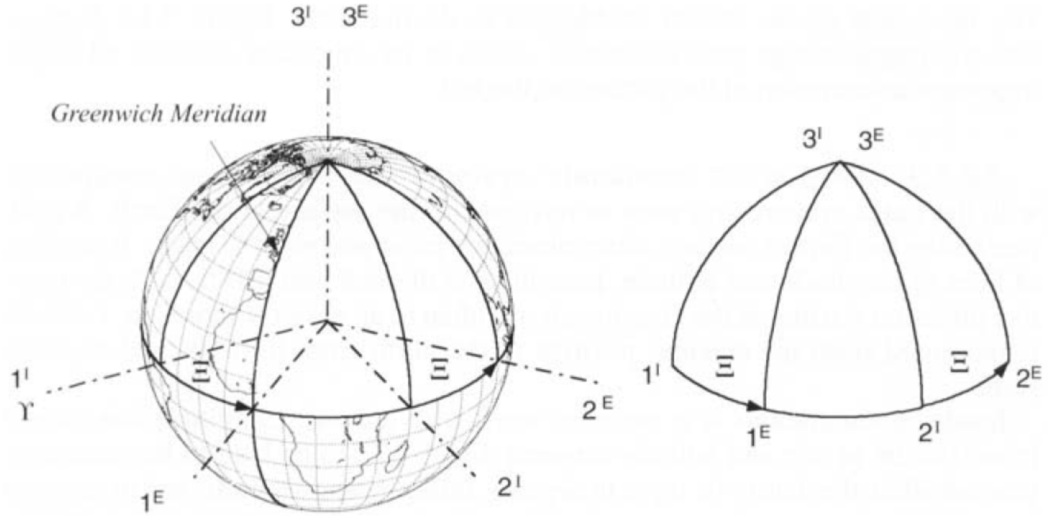
۲.۴.۲ ماتریس‌های انتقال پرکاربرد

در این بخش نحوه محاسبه ماتریس‌های انتقالی که در ناوبری نسبت به دستگاه جغرافیایی مورد استفاده قرار می‌گیرند، تشریح می‌شود. لازم به ذکر است که مطالب بخش ۳.۲، پیش‌نیاز مطالب این بخش است.

[1] Orthogonal

۱.۲.۴.۲ ماتریس انتقال از دستگاه مختصات اینرسی (I) به دستگاه مختصات زمین (E)

مطابق شکل زیر با چرخش به اندازه زاویه Ξ حول محور 3^{I}، از دستگاه مختصات اینرسی به دستگاه مختصات زمین منتقل می‌شویم. این مسئله در شکل ۶.۲ تشریح شده‌است.



شکل ۶.۲ ارتباط دستگاه‌های مختصات اینرسی و زمین

به بیان ریاضی می‌توان گفت:

$$]^{E} \xleftarrow{3(\Xi)}]^{I} \rightarrow [T]^{EI} = \begin{bmatrix} \cos\Xi & \sin\Xi & 0 \\ -\sin\Xi & \cos\Xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۹.۲)$$

۲.۲.۴.۲ ماتریس انتقال از دستگاه مختصات زمین (E) به دستگاه مختصات جغرافیایی (G)

مطابق شکل ۷.۲ برای انتقال از دستگاه مختصات زمین به دستگاه مختصات جغرافیایی، ابتدا حول محور 3^{E} به اندازه طول جغرافیایی (ℓ) می‌چرخیم تا به دستگاه مختصات میانی X برسیم:

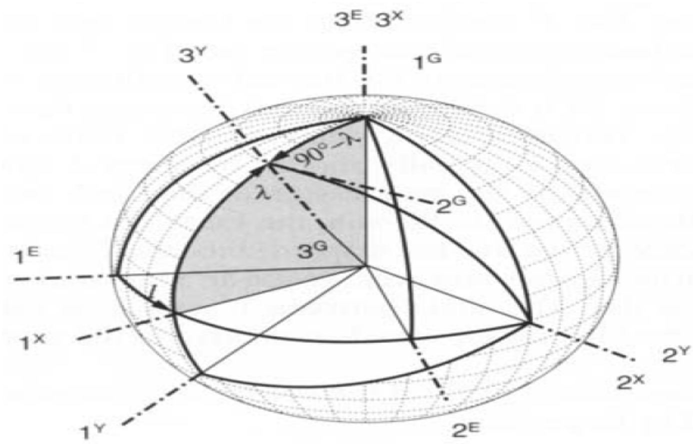
$$]^{X} \xleftarrow{3(\ell)}]^{E} \rightarrow [T]^{XE} = \begin{bmatrix} \cos\ell & \sin\ell & 0 \\ -\sin\ell & \cos\ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳۰.۲)$$

سپس حول محور 2^{X} به اندازه متتم عرض جغرافیایی ($90-\lambda$) می‌چرخیم تا به دستگاه مختصات میانی Y برسیم:

$$]^{Y} \xleftarrow{2(90-\lambda)}]^{X} \rightarrow [T]^{YX} = \begin{bmatrix} \sin\lambda & 0 & -\cos\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \end{bmatrix} \qquad (۳۱.۲)$$

سپس حول محور 2^{Y} به اندازه 180 درجه می‌چرخیم تا به دستگاه مختصات G برسیم:

$$]^{G} \xleftarrow{2(180)}]^{Y} \rightarrow [T]^{GY} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (۳۲.۲)$$



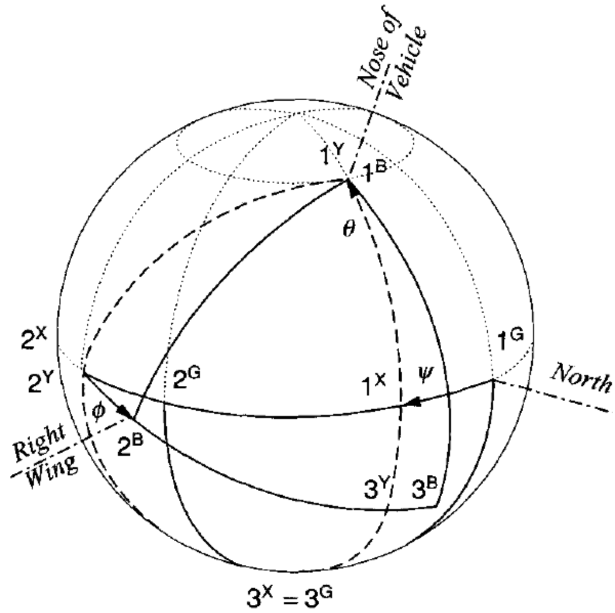
شکل ۷.۲ ارتباط دستگاه‌های مختصات زمین و جغرافیایی

با استفاده از روابط (۳۰.۲)، (۳۱.۲) و (۳۲.۲) می‌توان نوشت:

$$[T]^{GE} = [T]^{GY}[T]^{YX}[T]^{XE} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda\cos\ell & -\sin\lambda\sin\ell & \cos\lambda \\ -\sin\ell & \cos\ell & 0 \\ -\cos\lambda\cos\ell & -\cos\lambda\sin\ell & -\sin\lambda \end{bmatrix} \qquad (۳۳.۲)$$

۳.۲.۴.۲ ماتریس انتقال از دستگاه مختصات جغرافیایی (G) به دستگاه مختصات بدنی (B)

این ماتریس انتقال توسط زوایای اویلر (ψ، θ و ϕ) مدل می‌شود. برای این کار مطابق شکل ۸.۲، ابتدا حول محور 3^{G} به اندازه زاویه ψ می‌چرخیم تا به دستگاه مختصات میانی X برسیم. سپس حول محور 2^{X} به اندازه زاویه θ می‌چرخیم تا به دستگاه مختصات میانی Y برسیم. در نهایت حول محور 1^{Y} به اندازه زاویه ϕ می‌چرخیم تا به دستگاه مختصات B برسیم. لذا ماتریس استاندارد انتقال (ترتیب دوران: Z، Y، X) از دستگاه جغرافیایی به دستگاه بدنی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:



شکل ۸.۲ ارتباط دستگاه‌های مختصات جغرافیایی و بدنی

$$]^{B} \xleftarrow{1(\phi)}]^{Y} \xleftarrow{2(\theta)}]^{X} \xleftarrow{3(\psi)}]^{G} \rightarrow$$

$$[T]^{BG}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta\\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi-\sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi+\cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi-\cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{bmatrix} \quad (۳۴.۲)$$

گاهی در شبیه‌سازی ماتریس انتقال $[T]^{AB}$ داده می‌شود و از ما خواسته می‌شود که زوایای اویلر بین دستگاه B و A را محاسبه کنیم؛ در این حالت از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{cases}\psi=\arctan(T_{12}/T_{11})\\ \theta=\arcsin(-T_{13})\\ \phi=\arctan(T_{23}/T_{33})\end{cases} \quad (۳۵.۲)$$

یا:

$$\begin{cases}\psi=\arccos\left(\dfrac{T_{11}}{\cos\theta}\right)\mathrm{sgn}(T_{12})\\ \theta=\arcsin(-T_{13})\\ \phi=\arccos\left(\dfrac{T_{33}}{\cos\theta}\right)\mathrm{sgn}(T_{23})\end{cases} \quad (۳۶.۲)$$

تذکر: اگر ترتیب دوران‌های استاندارد ($3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$) را عوض کنیم، به ماتریس انتقال دیگری می‌رسیم که رابطه آن با رابطه (۳۴.۲) متفاوت است؛ مگر اینکه از زوایای اویلر کوچک باشند که در این‌صورت دیگر ترتیب دوران‌ها مهم نیست.

۴.۲.۴.۲ ماتریس انتقال از دستگاه مختصات زمین تخت (L) به دستگاه مختصات بدنی (B)

همانند رابطه (۳۴.۲) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

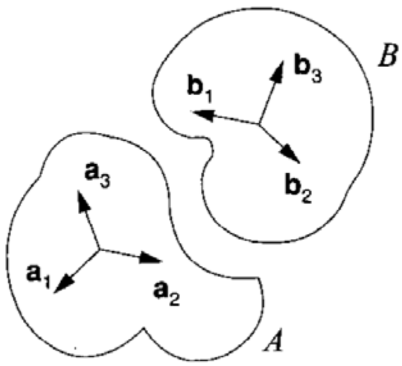
$$]^{B} \xleftarrow{1(\phi)}]^{Y} \xleftarrow{2(\theta)}]^{X} \xleftarrow{3(\psi)}]^{L} \rightarrow$$

$$[T]^{BL} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (۳۷.۲)$$

۳.۴.۲ تنسور دوران

وضعیت چهارچوب B نسبت به چهارچوب A، توسط تنسور دوران $\mathbf{R}^{BA}$ مشخص می‌شود. فرض کنید که سه بردار راست‌گرد متعامد یکه $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ سازنده چهارچوب A و سه بردار راست‌گرد متعامد یکه $\mathbf{b}_1$، $\mathbf{b}_2$ و $\mathbf{b}_3$ سازنده چهارچوب B باشند (شکل ۹.۲). تنسور دوران $\mathbf{R}^{BA}$، $\mathbf{a}_i$ ها را بر روی $\mathbf{b}_i$ تصویر می‌کند.

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{R}^{BA}\mathbf{a}_i \qquad i = 1,2,3 \quad (۳۸.۲)$$



شکل ۹.۲ چهارچوب‌های A و B و بردارهای یکه آن‌ها

خواص تنسور دوران به شرح زیر است:

۱- تنسور دوران، یک تنسور مرتبه دوم کارتزین است. به بیان ریاضی داریم:

$$[\mathbf{R}^{BA}]^{C} = [T]^{CD}[\mathbf{R}^{BA}]^{D}[\overline{T}]^{CD} \quad (۳۹.۲)$$

۲- حاصل‌ضرب چند تنسور دوران در یکدیگر، خود یک تنسور دوران است:

$$\mathbf{R}^{CA} = \mathbf{R}^{CB}\mathbf{R}^{BA} \tag{۴۰.۲}$$

۳- بیان تنسور دوران $\mathbf{R}^{BA}$ در دستگاه‌های مختصات A و B یکسان است:

$$[\mathbf{R}^{BA}]^{A} = [\mathbf{R}^{BA}]^{B} \tag{۴۱.۲}$$

۴- تنسور دوران ترانهاده ماتریس تبدیل است:

$$[\mathbf{R}^{BA}]^{A} = [\overline{\mathrm{T}}]^{BA} \tag{۴۲.۲}$$

۵- ترانهاده $\mathbf{R}^{BA}$، $\mathbf{R}^{AB}$ است:

$$\overline{\mathbf{R}}^{BA} = \mathbf{R}^{AB} \tag{۴۳.۲}$$

۶- تنسور دوران متعامد است:

$$\left(\mathbf{R}^{BA}\right)^{T} = \left(\mathbf{R}^{BA}\right)^{-1} \tag{۴۴.۲}$$

۴.۴.۲ مشتق دورانی[۱]

مشتق معمولی با $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ نمایش داده می‌شود. مشتق معمولی یک عملگر در دنیای اعداد است. متناظر این عملگر در دنیای مدل‌ها عملگر مشتق دورانی است که با D نمایش داده می‌شود. به‌عنوان مثال $\mathrm{D}^{A}\mathbf{x}$ به‌معنی مشتق دورانی بردار $\mathbf{x}$ نسبت به ناظر چهارچوب A است.

قوانین زیر بر مشتق دورانی حاکم است:

$$\mathrm{D}^{A}(\mathrm{k}\mathbf{x}) = \mathrm{k}\mathrm{D}^{A}\mathbf{x} \tag{۴۵.۲}$$

$$\mathrm{D}^{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathrm{D}^{A}\mathbf{x} + \mathrm{D}^{A}\mathbf{y} \tag{۴۶.۲}$$

$$\mathrm{D}^{A}(\mathbf{Y}\mathbf{x}) = (\mathrm{D}^{A}\mathbf{Y})\mathbf{x} + \mathbf{Y}(\mathrm{D}^{A}\mathbf{x}) \tag{۴۷.۲}$$

$$\begin{cases} [\mathrm{D}^{A}\mathbf{x}]^{A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{x}]^{A} \\ [\mathrm{D}^{A}\mathbf{X}]^{A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{X}]^{A} \end{cases} \tag{۴۸.۲}$$

[1] Rotational Time Derivetive

$$\begin{cases}[\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\mathbf{x}]^{\mathrm{C}} = [\mathrm{T}]^{\mathrm{CB}}[\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\mathbf{x}]^{\mathrm{B}} \\ [\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\mathbf{X}]^{\mathrm{C}} = [\mathrm{T}]^{\mathrm{CB}}[\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\mathbf{X}]^{\mathrm{B}}[\overline{\mathrm{T}}]^{\mathrm{CB}}\end{cases} \tag{۴۹.۲}$$

۵.۴.۲ سرعت زاویه‌ای

در این قسمت با توجه به ابزار ریاضی معرفی‌شده، تعریف سرعت زاویه‌ای نسبی دو چهارچوب ارائه می‌شود. می‌توان نشان داد که تنسور سرعت زاویه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}} = (\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\mathbf{R}^{\mathrm{BA}})\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{BA}} \tag{۵۰.۲}$$

تنسور سرعت زاویه‌ای دارای خواص زیر است:

$$\mathbf{\Omega}^{\mathrm{CA}} = \mathbf{\Omega}^{\mathrm{CB}} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}} \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{CA}} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{CB}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}} \tag{۵۱.۲}$$

$$\mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}} = -\mathbf{\Omega}^{\mathrm{AB}} = \overline{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{BA}} \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}} = -\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{AB}} \tag{۵۲.۲}$$

$$\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}} = \mathrm{D}^{\mathrm{B}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}} \tag{۵۳.۲}$$

$$[\mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}}]^{\mathrm{A}} = [\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}]^{\mathrm{BA}}[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}} \quad , \quad [\mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}}]^{\mathrm{B}} = [\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}[\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}]^{\mathrm{BA}} \tag{۵۴.۲}$$

۶.۴.۲ قانون انتقال اویلر

مشتق دورانی برای تنسورهای مرتبه اول، به‌صورت زیر بین چهارچوب‌های مختلف انتقال می‌یابد:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\mathbf{x} = \mathrm{D}^{\mathrm{B}}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}} \times \mathbf{x} = \mathrm{D}^{\mathrm{B}}\mathbf{x} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}}\mathbf{x} \tag{۵۵.۲}$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}}$ سرعت زاویه‌ای چهارچوب B نسبت به چهارچوب A و $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}}$ تنسور شبه‌متقارن تنسور $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}}$ است. به‌عنوان مثال، اگر بردار موقعیت نقطه B (نقطه مرجع چهارچوب بدنی) نسبت به نقطه I (نقطه مرجع چهارچوب اینرسی) با $\mathbf{s}_{\mathrm{BI}}$ نشان داده شود، رابطه سرعت زمینی ($\mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathbf{s}_{\mathrm{BI}}$) و سرعت اینرسی ($\mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathbf{s}_{\mathrm{BI}}$) به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathbf{s}_{\mathrm{BI}} = \mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathbf{s}_{\mathrm{BI}} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{s}_{\mathrm{BI}} \tag{۵۶.۲}$$

همچنین مشتق دورانی برای تنسورهای مرتبه دوم، به‌صورت زیر بین چهارچوب‌های مختلف منتقل می‌شود:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{A}}\mathbf{X} = \mathrm{D}^{\mathrm{B}}\mathbf{X} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{BA}}\mathbf{X} + \mathbf{X}\overline{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{BA}} \tag{۵۷.۲}$$

۷.۴.۲ روش‌های محاسبه وضعیت

فرض کنید $[\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}$ از حل معادله اویلر و یا به‌وسیله حسگرهای اینرسی حاصل شده‌است. با داشتن این بردار، وضعیت جسم نسبت به چارچوب مرجع (I) چگونه مشخص می‌شود؟ حل این مسئله را «انتشار[1]» نامیده‌اند:

$$[\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}=\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\psi\\\theta\\\phi\end{bmatrix}=\,? \tag{۵۸.۲}$$

روش‌های مختلفی برای حل این مسئله ابداع شده‌است که در ادامه برخی از آن‌ها معرفی می‌شوند:

۱- زوایای اویلر

۲- کسینوس‌های هادی

۳- کواترنیون‌ها

۱.۷.۴.۲ زوایای اویلر

در این روش برای محاسبه زوایای اویلر از معادلات زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}&=p+q\sin\phi\tan\theta+r\cos\phi\tan\theta\\\dot{\theta}&=q\cos\phi-r\sin\phi\\\dot{\psi}&=q\sin\phi\sec\theta+r\cos\phi\sec\theta\end{aligned} \tag{۵۹.۲}$$

با دانستن شرایط اولیه $[\psi_0 \quad \theta_0 \quad \phi_0]$، معادلات دیفرانسیلی فوق حل می‌شوند و زوایای اویلر در هر لحظه محاسبه می‌شود.

مزایا:

- زوایای اویلر مستقیماً محاسبه می‌شوند.

معایب:

- تکینگی فرایند انتشار در $\theta=\pm\pi/2$ (نامناسب برای عمودپرتاب‌ها)؛
- ماتریس انتقال مستقیماً محاسبه نمی‌شود.

[1] Propagation

۲.۷.۴.۲ کسینوس‌های هادی

در این روش برای محاسبه زوایای اویلر، ابتدا معادلات دیفرانسیلی زیر با داشتن شـرایط اولیـه $[\mathrm{T}]^{\mathrm{BI}}\Big|_{t=0}$ حل می‌شود تا $[\mathrm{T}]^{\mathrm{BI}}$ در هر لحظه حاصل شود:

$$[\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}]^{\mathrm{BI}} = -[\mathbf{\Omega}^{\mathrm{BI}}]^{\mathrm{B}}[\mathrm{T}]^{\mathrm{BI}} \xrightarrow{\int} [\mathrm{T}]^{\mathrm{BI}} \qquad (۶۰.۲)$$

سپس در هر لحظه زوایای اویلر از روی ماتریس انتقال به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin\left(-t_{13}\right) \\ \phi &= \arccos\left(t_{33} / \cos\theta\right)\mathrm{sign}(t_{23}) \\ \psi &= \arccos\left(t_{11} / \cos\theta\right)\mathrm{sign}(t_{12}) \end{aligned} \qquad (۶۱.۲)$$

مزایا:

- عدم وجود تکینگی در فرایند انتشار؛
- ماتریس انتقال مستقیماً محاسبه می‌شود.

معایب:

- حجم محاسبات؛
- زوایای اویلر مستقیماً محاسبه نمی‌شوند.
- وجود تکینگی در محاسبه زوایای رول و یاو در $\theta = \pm\pi/2$

۳.۷.۴.۲ کواترنیون‌ها

بردار چهارتایی کواترنیون‌ها را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \qquad (۶۲.۲)$$

نشان داده می‌شود که ارتباط بردار کواترنیون‌ها با $[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BI}}]^{\mathrm{B}}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \qquad (۶۳.۲)$$

برای حل معادلات دیفرانسیلی فوق، شرایط اولیه بردار کواترنیون‌ها مورد نیاز است که به‌صورت زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
q_0\big|_{t=0} &= \cos(\psi_0/2)\cos(\theta_0/2)\cos(\phi_0/2)+\sin(\psi_0/2)\sin(\theta_0/2)\sin(\phi_0/2)\\
q_1\big|_{t=0} &= \cos(\psi_0/2)\cos(\theta_0/2)\sin(\phi_0/2)-\sin(\psi_0/2)\sin(\theta_0/2)\cos(\phi_0/2)\\
q_2\big|_{t=0} &= \cos(\psi_0/2)\sin(\theta_0/2)\cos(\phi_0/2)+\sin(\psi_0/2)\cos(\theta_0/2)\sin(\phi_0/2)\\
q_3\big|_{t=0} &= \sin(\psi_0/2)\cos(\theta_0/2)\cos(\phi_0/2)-\cos(\psi_0/2)\sin(\theta_0/2)\sin(\phi_0/2)
\end{aligned} \qquad (۶۴.۲)$$

بعد از محاسبه بردار کواترنیون‌ها طبق رابطه (۶۳.۲)، ماتریس انتقال و زوایای اویلر طبق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$[\mathrm{T}]^{\mathrm{BI}}=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2+q_0q_3) & 2(q_1q_3-q_0q_2)\\ 2(q_1q_2-q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3+q_0q_1)\\ 2(q_1q_3+q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \qquad (۶۵.۲)$$

$$\begin{cases} \psi=\arctan\left(\dfrac{2(q_1q_2+q_0q_3)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}\right)\\ \theta=\arcsin\big(-2(q_1q_3-q_0q_2)\big)\\ \phi=\arctan\left(\dfrac{2(q_2q_3+q_0q_1)}{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2}\right) \end{cases} \qquad (۶۶.۲)$$

مزایا:

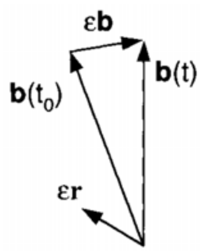
- عدم وجود تکینگی در فرایند انتشار؛
- حجم محاسبات کم؛

معایب:

- ماتریس انتقال مستقیماً محاسبه نمی‌شود.
- زوایای اویلر مستقیماً محاسبه نمی‌شوند.
- وجود تکینگی در محاسبه زوایای رول و یاو در $\theta=\pm\pi/2$

۸.۴.۲ دوران‌های کوچک

مطابق قضیه اویلر، تبدیل از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر، با سه دوران متوالی میسر می‌شود. اما این دوران‌ها از قاعده جابجایی تبعیت نمی‌کنند؛ مگر اینکه اندازه هر سه دوران کوچک باشد؛ در این صورت دیگر ترتیب دوران‌ها مهم نیست.



شکل ۱۰.۲ دوران کوچک

مطابق شکل ۱۰.۲ فرض کنید که بردار $\mathbf{b}(t)$ بر اثر دوران $\mathbf{R}$، از مقدار اولیه $\mathbf{b}(t_0)$، حاصل می‌شود:

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{R}\,\mathbf{b}(t_0) \tag{۶۷.۲}$$

اغتشاش بردار $\mathbf{b}$ به‌صورت زیر تعریف و محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon\mathbf{b} = \mathbf{b}(t) - \mathbf{b}(t_0) = \mathbf{R}\mathbf{b}(t_0) - \mathbf{b}(t_0) = (\mathbf{R} - \mathbf{E})\,\mathbf{b}(t_0) \tag{۶۸.۲}$$

حال اغتشاش تنسور دوران ($\varepsilon\mathbf{R}$) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon\mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{E} \tag{۶۹.۲}$$

با جایگذاری رابطه (۶۹.۲) در رابطه (۶۸.۲) خواهیم داشت:

$$\varepsilon\mathbf{b} = \varepsilon\mathbf{R}\mathbf{b}(t_0) \tag{۷۰.۲}$$

از آنجا که تنسور دوران یک تنسور متعامد است، خواهیم داشت:

$$\mathbf{R}\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} = (\mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{R})(\overline{\mathbf{E}} + \varepsilon\overline{\mathbf{R}}) = \mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{R} + \varepsilon\overline{\mathbf{R}} + \varepsilon\mathbf{R}\varepsilon\overline{\mathbf{R}} \tag{۷۱.۲}$$

اگر در رابطه (۷۱.۲) از ترم مرتبه دوم صرف‌نظر کنیم، خواهیم داشت:

$$\varepsilon\mathbf{R} + \varepsilon\overline{\mathbf{R}} = 0 \rightarrow \varepsilon\overline{\mathbf{R}} = -\varepsilon\mathbf{R} \tag{۷۲.۲}$$

مطابق رابطه (۷۲.۲)، اغتشاش تنسور دوران نیز یک تنسور شبه‌متقارن است؛ لذا می‌توان آن را با یک بردار فیزیکی (تنسور مرتبه اول) مدل کرد. فرض کنید که بیان این بردار در دستگاه مختصات دلخواه A به‌صورت زیر باشد:

$$[\varepsilon\mathbf{r}]^{\mathrm{A}} = [\varepsilon\mathrm{r}_1 \quad \varepsilon\mathrm{r}_2 \quad \varepsilon\mathrm{r}_3]^{\mathrm{T}} \tag{۷۳.۲}$$

مطابق رابطه (۶۹.۲) خواهیم داشت:

$$[\mathbf{R}]^{A} = [\mathbf{E}]^{A} + [\varepsilon\mathbf{R}]^{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon r_3 & \varepsilon r_2 \\ \varepsilon r_3 & 1 & -\varepsilon r_1 \\ -\varepsilon r_2 & \varepsilon r_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{۷۴.۲}$$

۹.۴.۲ عملگرهای خطی‌ساز

با استخراج معادلات ناوبری، مشاهده می‌شود که این معادلات غیرخطی هستند. درصورتیکه بخواهیم از فیلترهای خطی برای تخمین استفاده کنیم، لازم است که صورت خطی معادلات ناوبری استخراج گردد. این کار با استفاده از عملگرهای خطی‌ساز انجام می‌شود که در این قسمت تشریح می‌شوند.

۱.۹.۴.۲ عملگر اغتشاش δ

اغتشاش یک تنسور مرتبه اول با عملگر δ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_r \tag{۷۵.۲}$$

در رابطه (۷۵.۲) زیرنویس r معرف شرایط مرجع و زیرنویس p معرف شرایط اغتشاش است. با بیان این رابطه در دستگاه اغتشاشی خواهیم داشت:

$$[\delta\mathbf{x}]^{D_p} = [\mathbf{x}_p]^{D_p} - [\mathbf{x}_r]^{D_p} \tag{۷۶.۲}$$

اغتشاش یک تنسور مرتبه دوم با عملگر δ نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon\mathbf{X} = \mathbf{X}_p - \mathbf{X}_r \tag{۷۷.۲}$$

با بیان این رابطه (۷۷.۲) در دستگاه اغتشاشی خواهیم داشت:

$$[\varepsilon\mathbf{X}]^{D_p} = [\mathbf{X}_p]^{D_p} - [\mathbf{X}_r]^{D_p} \tag{۷۸.۲}$$

۲.۹.۴.۲ عملگر اغتشاش ε

اغتشاش یک تنسور مرتبه اول با عملگر ε به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon\mathbf{x} = \mathbf{x}_p - \mathbf{R}^{D_pD_r}\mathbf{x}_r \tag{۷۹.۲}$$

که زیرنویس r معرف شرایط مرجع و زیرنویس p معرف شرایط اغتشاش است. تنسور $\mathbf{R}^{D_pD_r}$، تنسور دوران چهارچوب اغتشاشی (D_p) نسبت به چهارچوب مرجع (D_r) است. نماد ε نیز نشانه عملگر اغتشاش است. با بیان این رابطه در دستگاه اغتشاشی خواهیم داشت:

$$[\varepsilon \mathbf{x}]^{D_p} = [\mathbf{x}_p]^{D_p} - [\mathbf{R}^{D_pD_r}]^{D_p}[\mathrm{T}]^{D_pD_r}[\mathbf{x}_r]^{D_r} = [\mathbf{x}_p]^{D_p} - [\mathbf{x}_r]^{D_r} \quad (۸۰.۲)$$

اغتشاش یک تنسور مرتبه دوم نیز با استفاده از عملگر ε به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon \mathbf{X} = \mathbf{X}_p - \mathbf{R}^{D_pD_r}\mathbf{X}_r\overline{\mathbf{R}}^{D_pD_r} \quad (۸۱.۲)$$

با بیان رابطه (۸۱.۲) در دستگاه اغتشاشی خواهیم داشت:

$$[\varepsilon \mathbf{X}]^{D_p} = [\mathbf{X}_p]^{D_p} - [\mathbf{R}^{D_pD_r}]^{D_p}[\mathrm{T}]^{D_pD_r}[\mathbf{X}_r]^{D_r}[\overline{\mathrm{T}}]^{D_pD_r}[\overline{\mathbf{R}}^{D_pD_r}]^{D_p} = [\mathbf{X}_p]^{D_p} - [\mathbf{X}_r]^{D_r} \quad (۸۲.۲)$$

با استفاده از هر دو عملگر δ و ε می‌توان معادلات اغتشاشی را به‌صورت تنسوری استخراج کرد. اما، مزیت عملگر ε در این است که در صورت استفاده از آن تنسورهای مرجع در دستگاه مرجع و تنسورهای اغتشاشی در دستگاه اغتشاشی بیان می‌شوند (رابطه (۸۰.۲) و (۸۲.۲)). بنابراین استفاده از عملگر ε با واقعیت تطابق بیشتری دارد. لازم به‌ذکر است که برای تنسورهای مرتبه صفر (اسکالر)، عملگر δ و ε یکسان هستند.

۳ معادلات ناوبری در سیستم‌های متصل‌به‌بدنه

در این فصل روابط مورد نیاز برای برپاسازی یک سیستم ناوبری اینرسی متصل‌به‌بدنه با فرضیات زیر ارائه می‌شود:

- وجود حسگرهای اینرسی (سه شتاب‌سنج و سه جایرو نرخی) ایده‌آل
- عدم وجود خطا در شرایط اولیه
- داشتن مدل دقیق از گرانش زمین

طبیعی است که شرایط فوق هیچ‌گاه محقق نمی‌شود. لذا در فصول آتی روش‌هایی برای افزایش دقت محاسبات ناوبری در شرایط غیرایده‌آل مطرح می‌شود.

در این فصل، ابتدا مدل‌سازی حرکت انتقالی در حد مورد نیاز برای ناوبری اینرسی مطرح می‌شود. سپس معادلات ناوبری در دستگاه جغرافیایی بدست می‌آیند.

۱.۳ مدل‌سازی حرکت انتقالی

در این بخش نحوه ارتباط شتاب اینرسی جسم و برآیند نیروهای وارد بر آن بیان می‌شود.

۱.۱.۳ سرعت و شتاب

با توجه به مفاهیم ارائه‌شده، تعاریف زیر در مورد سرعت خطی و شتاب خطی ارائه می‌شود:

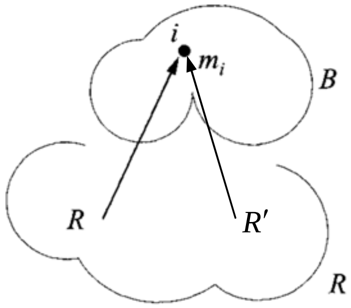
$$\mathbf{v}_{B}^{A} = D^{A}\mathbf{s}_{BA} \tag{۱.۳}$$

$$\mathbf{a}_{B}^{A} = D^{A}\mathbf{v}_{B}^{A} = D^{A}D^{A}\mathbf{s}_{BA} \tag{۲.۳}$$

که در اینجا نقطه A نقطه مرجع چهارچوب A است و B یک نقطه است که سرعت و شتاب آن نسبت به چهارچوب A تعریف شده‌است.

۲.۱.۳ مومنتوم خطی

مومنتوم خطی ذره i نسبت به چهارچوب R، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۱.۳ مومنتوم خطی یک ذره

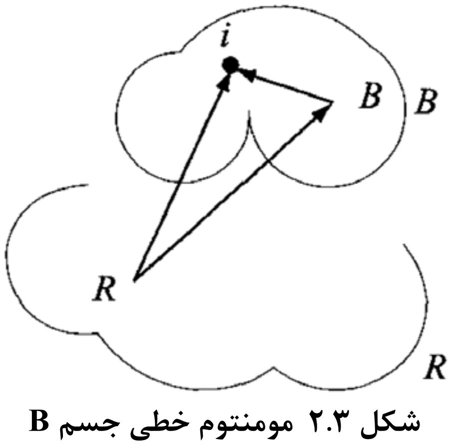
$$\mathbf{p}_i^R = m_i \mathbf{v}_i^R = m_i D^R \mathbf{s}_{iR} \qquad (۳.۳)$$

که $\mathbf{v}_i^R$ تنسور سرعت خطی ذره i نسبت به چهارچوب R و m_i جرم این ذره است. اگر در شکل ۱.۳ به جای نقطه R نقطه R' از چهارچوب R انتخاب شود، خواهیم داشت:

$$D^R \mathbf{s}_{iR} = D^R (\mathbf{s}_{iR'} + \mathbf{s}_{R'R}) = D^R \mathbf{s}_{iR'} + D^R \mathbf{s}_{R'R} = D^R \mathbf{s}_{iR'} + 0 = D^R \mathbf{s}_{iR'} \qquad (۴.۳)$$

لذا بردار مومنتوم خطی مستقل از نقطه‌ای است که روی چهارچوب تعریف می‌شود و فقط بستگی به خود چهارچوب دارد.

با تعمیم مفهوم مومنتوم خطی یک ذره، به یک مجموعه از ذرات (شکل ۲.۳) و با فرض اینکه نقطه B مرکز جرم جسم B باشد، خواهیم داشت:



شکل ۲.۳ مومنتوم خطی جسم B

$$\sum_i \mathbf{p}_i^{\mathrm{R}} = \sum_i \mathrm{m}_i \mathrm{D}^{\mathrm{R}} \mathbf{s}_{i\mathrm{R}} = \sum_i \mathrm{m}_i \mathrm{D}^{\mathrm{R}} (\mathbf{s}_{i\mathrm{B}} + \mathbf{s}_{\mathrm{BR}}) = \sum_i \mathrm{m}_i \mathrm{D}^{\mathrm{R}} \mathbf{s}_{i\mathrm{B}} + \sum_i \mathrm{m}_i \mathrm{D}^{\mathrm{R}} \mathbf{s}_{\mathrm{BR}} \\ = \mathrm{D}^{\mathrm{R}} \sum_i \mathrm{m}_i \mathbf{s}_{i\mathrm{B}} + \mathrm{D}^{\mathrm{R}} \mathbf{s}_{\mathrm{BR}} \sum_i \mathrm{m}_i = 0 + \mathrm{m}^{\mathrm{B}} \mathbf{v}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} = \mathbf{p}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \tag{۵.۳}$$

بنابراین، اندازه حرکت خطی جسم B نسبت به چهارچوب R برابر با حاصلضرب جرم جسم در سرعت مرکز جرم آن نسبت به چهارچوب R است. توجه کنید که در استخراج رابطه فوق نیازی به فرض صلبیت جسم B ($\mathrm{D}^{\mathrm{B}}\mathbf{s}_{i\mathrm{B}} = 0$) نیست.

۳.۱.۳ قوانین نیوتن

در سال ۱۶۸۷ نیوتن قوانین خود را به شرح زیر ارائه کرد:

۱- یک جسم در سکون می‌ماند و یا به حرکت مستقیم‌الخط خود ادامه می‌دهد، مگر اینکه تحت اثر نیرویی قرار گیرد.

۲- نرخ تغییر مومنتوم خطی یک جسم برابر با اندازه نیروی وارد شده بر آن و در جهت نیروی اعمالی است.

۳- در برابر هر عملی، عکس‌العملی وجود دارد که مخالف آن است.

۱.۳.۱.۳ قانون دوم نیوتن برای یک جرم نقطه‌ای

بیان ریاضی قانون دوم نیوتن به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{I}} \mathbf{p}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} = \mathbf{f}_{\mathrm{i}} \tag{۶.۳}$$

از طرفی داریم:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{I}} \mathbf{p}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} = \mathrm{D}^{\mathrm{I}} (\mathrm{m}_{\mathrm{i}} \mathrm{D}^{\mathrm{I}} \mathbf{s}_{\mathrm{iI}}) = (\mathrm{D}^{\mathrm{I}} \mathrm{m}_{\mathrm{i}}) \mathrm{D}^{\mathrm{I}} \mathbf{s}_{\mathrm{iI}} + \mathrm{m}_{\mathrm{i}} \mathrm{D}^{\mathrm{I}} \mathrm{D}^{\mathrm{I}} \mathbf{s}_{\mathrm{iI}} = 0 + \mathrm{m}_{\mathrm{i}} \mathbf{a}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} = \mathrm{m}_{\mathrm{i}} \mathbf{a}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} \tag{۷.۳}$$

بنابراین، با توجه به رابطه (۷.۳)، رابطه (۶.۳) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathrm{m}_{\mathrm{i}} \mathbf{a}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} = \mathbf{f}_{\mathrm{i}} \tag{۸.۳}$$

۲.۳.۱.۳ قانون دوم نیوتن برای یک جسم

مطابق شکل ۲.۳، با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۸.۳)، بیان قانون دوم نیوتن برای یک مجموعه جرم به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_i \mathrm{m}_i \mathbf{a}_i^{\mathrm{I}} = \sum_i \mathbf{f}_i = \sum_i \mathbf{f}_{\mathrm{in}\,i} + \sum_i \mathbf{f}_{\mathrm{ex}\,i} = 0 + \sum_i \mathbf{f}_{\mathrm{ex}\,i} = \sum_i \mathbf{f}_{\mathrm{ex}\,i} = \mathbf{f}_{\mathrm{ex}} \qquad (۹.۳)$$

با توجه به اینکه نقطه B مرکز جرم جسم B است، $\sum_i \mathrm{m}_i \mathbf{s}_{i\mathrm{B}} = 0$ و در نتیجه $\sum_i \mathrm{m}_\mathrm{i} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathbf{s}_{\mathrm{iB}} = 0$ خواهد بود. پس سمت چپ رابطه (۹.۳) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathrm{m}_\mathrm{i} \mathbf{a}_\mathrm{i}^{\mathrm{I}} &= \sum_i \mathrm{m}_\mathrm{i} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathbf{s}_{\mathrm{iI}} = \sum_i \mathrm{m}_\mathrm{i} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathrm{D}^\mathrm{I} (\mathbf{s}_{\mathrm{iB}} + \mathbf{s}_{\mathrm{BI}}) \\ \sum_i \mathrm{m}_\mathrm{i} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathbf{s}_{\mathrm{iB}} + \sum_i \mathrm{m}_\mathrm{i} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathbf{s}_{\mathrm{BI}} &= 0 + \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathrm{D}^\mathrm{I} \mathbf{s}_{\mathrm{BI}} \sum_i \mathrm{m}_\mathrm{i} = \mathrm{m}^\mathrm{B} \mathbf{a}_\mathrm{B}^\mathrm{I} \end{aligned} \qquad (۱۰.۳)$$

با استفاده از رابطه (۱۰.۳)، رابطه (۹.۳) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathrm{m}^\mathrm{B} \mathbf{a}_\mathrm{B}^\mathrm{I} = \mathbf{f}_{\mathrm{ex}} \qquad (۱۱.۳)$$

تذکر: در استخراج رابطه (۱۱.۳) نیازی به فرض صلبیت جسم B نیست. به‌عبارت دیگر، این رابطه برای اجسام غیرصلب نیز برقرار است.

۲.۳ ناوبری نسبت به دستگاه جغرافیایی

در این بخش به استخراج معادلات موقعیت، سرعت و وضعیت جسم نسبت به دستگاه NED، که دستگاه مختصات جغرافیایی و نیز دستگاه ناوبری نامیده می‌شود، می‌پردازیم.

۱.۲.۳ معادله موقعیت

فرض کنید که $[\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E}]^\mathrm{N}$ را با $[v_\mathrm{n} \quad v_\mathrm{e} \quad v_\mathrm{d}]^\mathrm{T}$ نمایش دهیم. مطابق پیوست الف داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{v_\mathrm{e}}{(R_{\mathrm{normal}} + h)\cos\lambda} \\ \dot{\lambda} &= \frac{v_\mathrm{n}}{R_{\mathrm{meridian}} + h} \\ \dot{h} &= -v_\mathrm{d} \end{aligned} \qquad (۱۲.۳)$$

در رابطه (۱۲.۳)، ℓ، λ، h، R_{meridian} و R_{normal} به ترتیب طول جغرافیایی، عرض جغرافیایی، ارتفاع جسم از سطح زمین، شعاع انحنای زمین در صفحه نصف‌النهار محلی و شعاع انحنای تقاطع صفحه عمود بر نصف‌النهار محلی با سطح زمین است.

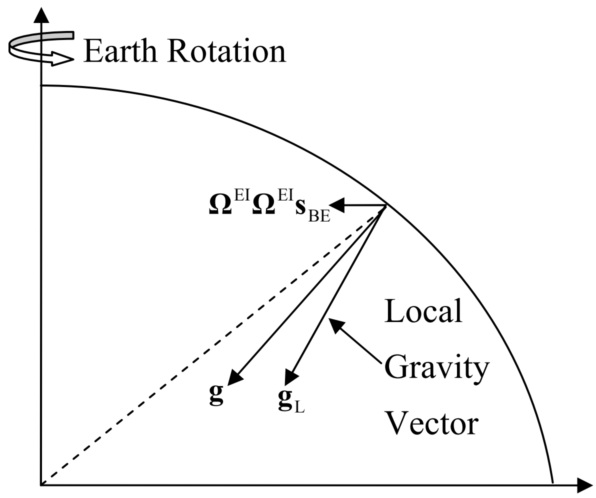
۲.۲.۳ معادله سرعت

مطابق قانون دوم نیوتن داریم:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathbf{s}_{\mathrm{BI}} = \mathbf{f} + \mathbf{g} \qquad (۱۳.۳)$$

در رابطه (۱۳.۳) منظور از $\mathbf{f}$، شتاب یا نیروی مخصوص غیرجاذبی و منظور از $\mathbf{g}$، شتاب جاذبی ناشی از گرانش زمین است. اگر برای اندازه‌گیری امتداد بردار گرانش زمین از شاقول استفاده شود، امتدادی که بدست می‌آید با امتداد $\mathbf{g}$ متفاوت است. دلیل این تفاوت دوران زمین است. به شکل ۳.۳ توجه کنید. در این شکل بردار گرانش محلی قابل اندازه‌گیری توسط شاقول با $\mathbf{g}_{\mathrm{L}}$ نمایش داده شده‌است. بین $\mathbf{g}$ و $\mathbf{g}_{\mathrm{L}}$ رابطه زیر برقرار است:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\mathrm{L}} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{s}_{\mathrm{BE}} \qquad (۱۴.۳)$$



شکل ۳.۳ اختلاف بین امتداد بردار گرانش زمین ($\mathbf{g}$) با امتداد گرانش محلی قابل اندازه‌گیری توسط شاقول ($\mathbf{g}_{\mathrm{L}}$)

حال سمت چپ رابطه (۱۳.۳) به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathbf{s}_{\mathrm{BI}} &= \mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathrm{D}^{\mathrm{I}}\mathbf{s}_{\mathrm{BE}} = \mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathbf{s}_{\mathrm{BE}} + 2\mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathbf{s}_{\mathrm{BE}} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{s}_{\mathrm{BE}} + (\mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}})\mathbf{s}_{\mathrm{BE}} \\ &= \mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathbf{v}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{E}} + 2\mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{v}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{E}} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{s}_{\mathrm{BE}}\end{aligned} \qquad (۱۵.۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۴.۳) و (۱۵.۳) در رابطه (۱۳.۳) خواهیم داشت:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{E}}\mathbf{v}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{E}} + 2\mathbf{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{v}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{E}} = \mathbf{f} + \mathbf{g}_{\mathrm{L}} \qquad (۱۶.۳)$$

با استفاده از قانون اویلر رابطه (۱۶.۳) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathrm{D^N}\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E} + \mathbf{\Omega}^\mathrm{NE}\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E} + 2\mathbf{\Omega}^\mathrm{EI}\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E} = \mathbf{f} + \mathbf{g}_\mathrm{L} \qquad (۱۷.۳)$$

رابطه (۱۷.۳) نیز به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathrm{D^N}\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E} = \mathbf{f} + \mathbf{g}_\mathrm{L} - (2\mathbf{\Omega}^\mathrm{EI} + \mathbf{\Omega}^\mathrm{NE})\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E} \qquad (۱۸.۳)$$

با بیان روابط فوق در دستگاه جغرافیایی خواهیم داشت:

$$[\mathrm{D^N}\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E}]^\mathrm{N} = [\mathbf{f}]^\mathrm{N} + [\mathbf{g}_\mathrm{L}]^\mathrm{N} - \left(2[\mathbf{\Omega}^\mathrm{EI}]^\mathrm{N} + [\mathbf{\Omega}^\mathrm{NE}]^\mathrm{N}\right)[\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E}]^\mathrm{N} \qquad (۱۹.۳)$$

در نهایت معادله دیفرانسیل سرعت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E}]^\mathrm{N} = [\mathrm{T}]^\mathrm{NB}[\mathbf{f}]^\mathrm{B} + [\mathbf{g}_\mathrm{L}]^\mathrm{N} - (2[\mathrm{T}]^\mathrm{NE}[\mathbf{\Omega}^\mathrm{EI}]^\mathrm{E}[\overline{\mathrm{T}}]^\mathrm{NE} + [\mathbf{\Omega}^\mathrm{NE}]^\mathrm{N})[\mathbf{v}_\mathrm{B}^\mathrm{E}]^\mathrm{N} \qquad (۲۰.۳)$$

تمام بردارهای سمت راست رابطه (۲۰.۳) مشخص هستند، مگر $[\mathbf{\Omega}^\mathrm{EI}]^\mathrm{E}$ و $[\mathbf{\Omega}^\mathrm{NE}]^\mathrm{N}$ که در ادامه نحوه محاسبه آن‌ها تشریح می‌شود. مطابق رابطه (۲۹.۲) داریم:

$$]^\mathrm{E} \xleftarrow{3(\Xi)}]^\mathrm{I} \rightarrow \boldsymbol{\omega}^\mathrm{EI} = \dot{\Xi}3^\mathrm{E} \rightarrow [\boldsymbol{\omega}^\mathrm{EI}]^\mathrm{E} = \dot{\Xi}[3^\mathrm{E}]^\mathrm{E} \qquad (۲۱.۳)$$

اگر $\dot{\Xi}$ را برابر با مقدار ثابت ω^EI فرض کنیم، رابطه فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$[\boldsymbol{\omega}^\mathrm{EI}]^\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^\mathrm{EI} \end{bmatrix} \qquad (۲۲.۳)$$

همچنین مطابق روابط (۳۰.۲) تا (۳۲.۲) داریم:

$$]^\mathrm{N} \xleftarrow{2(180)}]^\mathrm{Y} \xleftarrow{2(90-\lambda)}]^\mathrm{X} \xleftarrow{3(\ell)}]^\mathrm{E} \rightarrow \boldsymbol{\omega}^\mathrm{NE} = \boldsymbol{\omega}^\mathrm{NX} + \boldsymbol{\omega}^\mathrm{XE} = -\dot{\lambda}2^\mathrm{Y} + \dot{\ell}3^\mathrm{X} \qquad (۲۳.۳)$$

رابطه فوق در دستگاه ناوبری به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{\omega}^{NE}]^{N} &= \dot{\ell}[T]^{NY}[T]^{YX}[3^{X}]^{X} - \dot{\lambda}[T]^{NY}[2^{Y}]^{Y} \\
&= \dot{\ell}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\lambda & 0 & -\cos\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \dot{\lambda}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\ell}\cos\lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\ell}\sin\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (۲۴.۳)
$$

با جایگذاری رابطه (۱۲.۳) در رابطه (۲۴.۳) خواهیم داشت:

$$
[\boldsymbol{\omega}^{NE}]^{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_{e}}{(R_{\text{normal}} + h)} \\ -\dfrac{v_{n}}{R_{\text{meridian}} + h} \\ -\dfrac{v_{e}}{(R_{\text{normal}} + h)}\tan\lambda \end{bmatrix} \qquad (۲۵.۳)
$$

تذکر: در نزدیک قطب $\tan\lambda$ بزرگ می‌شود. بنابراین اندکی سرعت در امتداد شرق باعث بزرگ‌شدن مولفه سوم نرخ چرخش دستگاه جغرافیایی نسبت به دستگاه زمین می‌شود. با توجه به محدودبودن گام انتگرال‌گیری از معادلات ناوبری، افزایش غیرمتعارف سرعت زاویه‌ای دستگاه جغرافیایی نسبت به دستگاه زمین، باعث افزایش خطای ناوبری می‌شود. به‌همین دلیل برای ناوبری در نواحی قطبی به جای دستگاه جغرافیایی متداول، که محور N آن همواره رو به شمال است، از دستگاه جغرافیایی با سمت ثابت (WA)[1] استفاده می‌شود. اگر به جای دستگاه N از دستگاه WA، که به اختصار با W نشان داده می‌شود، استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$
[\boldsymbol{\omega}^{WE}]^{W} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_{e}}{(R_{\text{normal}} + h)} \\ -\dfrac{v_{n}}{R_{\text{meridian}} + h} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۶.۳)
$$

بنابراین، مشکل تکینگی موجود در محاسبه سرعت زاویه‌ای دستگاه جغرافیایی نسبت به دستگاه زمین حل می‌شود.

[1] Wander Azimuth

۳.۲.۳ معادله وضعیت

برای بیان معادله دیفرانسیل وضعیت دستگاه بدنی نسبت به دستگاه جغرافیـایی، مطـابق خـواص تنسـور سرعت زاویه‌ای خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\omega}^{BI} = \boldsymbol{\omega}^{BN} + \boldsymbol{\omega}^{NE} + \boldsymbol{\omega}^{EI} \tag{۲۷.۳}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\omega}^{BN} = \boldsymbol{\omega}^{BI} - \boldsymbol{\omega}^{NE} - \boldsymbol{\omega}^{EI} \tag{۲۸.۳}$$

با بیان رابطه فوق در دستگاه بدنی خواهیم داشت:

$$[\boldsymbol{\omega}^{BN}]^B = [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B - [\boldsymbol{\omega}^{NE}]^B - [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B \tag{۲۹.۳}$$

رابطه فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$[\boldsymbol{\omega}^{BN}]^B = [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B - [T]^{BN}[\boldsymbol{\omega}^{NE}]^N - [T]^{BN}[T]^{NE}[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^E \tag{۳۰.۳}$$

۴ حل معادلات ناوبری

همان‌گونه که گفته شد، شبیه‌سازی به‌معنای حل عددی معادلات ریاضی سیستم توسط رایانـه اسـت. در این فصل نحوه حل عددی معادلات ناوبری تشریح می‌شود. همچنین برخی نکات لازم برای افزایش دقـت ناوبری بیان می‌شود.

۱.۴ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت

دستگاه معادلات زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{۱.۴}$$

در رابطه فوق $\mathbf{x}$ بردار متغیرهای حالت و $\mathbf{A}$ مـاتریس ضـرایب ثابـت دسـتگاه اسـت. حـل ایـن مسـئله به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{۲.۴}$$

که $e^{\mathbf{A}t}$ ماتریس تبدیل حالت است. حال معادلات زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) \tag{۳.۴}$$

در رابطه فوق $\mathbf{X}$ یک ماتریس اسـت و $\mathbf{A}$ مـاتریس ضـرایب ثابـت دسـتگاه اسـت. اگـر مـاتریس $\mathbf{X}$ را به‌صورت $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]^{\mathrm{T}}$ تجزیه کنیم، با استفاده از رابطه (۲.۴) خواهیم داشت:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0) \tag{۴.۴}$$

۲.۴ انتشار گسسته

در این بخش صورت گسسته روابط انتشار بیان می‌شود.

۱.۲.۴ کسینوس‌های هادی

رابطه (۶۰.۲) که بیان ارتباط ماتریس انتقال و تنسور سرعت زاویه‌ای است را درنظر بگیرید:

$$[\dot{\mathrm{T}}]^{\mathrm{BA}} = [\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{BA}}]^{\mathrm{B}}[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}} \tag{۵.۴}$$

اگر فرض کنیم که $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}}$ در بازه زمانی کوچک $t \in [t_k \quad t_{k+1}]$ ثابت باشد، مطابق رابطه (۴.۴) خواهیم داشت:

$$[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}\Big|_{t_{k+1}} = e^{[\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{BA}}]^{\mathrm{B}}(t_{k+1}-t_k)}[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}\Big|_{t_k} \tag{۶.۴}$$

از این به بعد برای راحتی رابطه (۶.۴) به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}\Big|_{k+1} = e^{-[\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{BA}}]^{\mathrm{B}}\Delta t}[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}\Big|_{k} = e^{\mathrm{S}}[\mathrm{T}]^{\mathrm{BA}}\Big|_{k} \tag{۷.۴}$$

در رابطه فوق $\mathbf{S}$ یک ماتریس شبه‌متقارن است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{s} = -[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}}]^{\mathrm{B}}\Delta t = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \qquad s = |\mathbf{s}| = \sqrt{{s_1}^2 + {s_2}^2 + {s_3}^2} \tag{۸.۴}$$

در رابطه (۷.۴)، بسط تیلور e^{S} به‌صورت زیر است:

$$e^{\mathrm{S}} = \mathbf{E} + \mathbf{S} + \frac{\mathbf{S}^2}{2!} + \frac{\mathbf{S}^3}{3!} + \frac{\mathbf{S}^4}{4!} + \cdots \tag{۹.۴}$$

مطابق روابط (۵.۲) تا (۶.۲) داریم:

$$\mathbf{S}^2 = \begin{bmatrix} -({s_2}^2 + {s_3}^2) & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_2 s_1 & -({s_1}^2 + {s_3}^2) & s_2 s_3 \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & -({s_1}^2 + {s_2}^2) \end{bmatrix} \tag{۱۰.۴}$$

$$\mathbf{S}^3 = -({s_1}^2 + {s_2}^2 + {s_3}^2)\mathbf{S} = -s^2\mathbf{S} \tag{۱۱.۴}$$

$$\mathbf{S}^4 = -({s_1}^2 + {s_2}^2 + {s_3}^2)\mathbf{S}^2 = -s^2\mathbf{S}^2 \tag{۱۲.۴}$$

با جایگذاری روابط (۱۰.۴) تا (۱۲.۴) در رابطه (۹.۴) خواهیم داشت:

$$e^{\mathbf{S}} = \mathbf{E} + \mathbf{S} + \frac{\mathbf{S}^2}{2!} - \frac{s^2\mathbf{S}}{3!} - \frac{s^2\mathbf{S}^2}{4!} + \cdots$$
$$= \mathbf{E} + \left[1 - \frac{s^2}{3!} + \frac{s^4}{5!} - \cdots\right]\mathbf{S} + \left[\frac{1}{2!} - \frac{s^2}{4!} + \frac{s^4}{6!} - \cdots\right]\mathbf{S}^2 \qquad (۱۳.۴)$$

رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$e^{\mathbf{S}} = \mathbf{E} + \frac{\sin(s)}{s}\mathbf{S} + \frac{1-\cos(s)}{s^2}\mathbf{S}^2 \qquad (۱۴.۴)$$

۲.۲.۴ کواترنیون‌ها

مطابق رابطه (۶۳.۲) ارتباط بردار کواترنیون‌ها، $\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^{\mathrm{T}}$، با بردار سرعت زاویه‌ای نسبی قاب‌های مبدا و مقصد، $[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}}]^{\mathrm{B}} = [p \quad q \quad r]^{\mathrm{T}}$، به‌صورت زیر است:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{W}\mathbf{q} \qquad (۱۵.۴)$$

که ماتریس $\mathbf{W}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۶.۴)$$

حال اگر فرض کنیم که $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BA}}$ در بازه زمانی کوچک $t \in [t_k \quad t_{k+1}]$ ثابت باشد، مطابق رابطه (۴.۴) خواهیم داشت:

$$\mathbf{q}\big|_{t_{k+1}} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{W}(t_{k+1}-t_k)}\mathbf{q}\big|_{t_k} \qquad (۱۷.۴)$$

از این به بعد برای راحتی رابطه (۱۷.۴) به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{q}\big|_{k+1} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{W}\Delta t}\mathbf{q}\big|_{k} = e^{\mathbf{Z}}\mathbf{q}\big|_{k} \qquad (۱۸.۴)$$

در رابطه فوق $\mathbf{Z}$ یک ماتریس شبه‌متقارن است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{Z}=\frac{1}{2}\mathbf{W}\Delta t=\begin{bmatrix}0 & -z_1 & -z_2 & -z_3\\ z_1 & 0 & z_3 & -z_2\\ z_2 & -z_3 & 0 & z_1\\ z_3 & z_2 & -z_1 & 0\end{bmatrix},\qquad z=\sqrt{{z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2} \tag{۱۹.۴}$$

در رابطه (۱۸.۴)، بسط تیلور $e^{\mathbf{Z}}$ به‌صورت زیر است:

$$e^{\mathbf{Z}}=\mathbf{I}+\mathbf{Z}+\frac{\mathbf{Z}^2}{2!}+\frac{\mathbf{Z}^3}{3!}+\frac{\mathbf{Z}^4}{4!}+\frac{\mathbf{Z}^5}{5!}\cdots \tag{۲۰.۴}$$

می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرار است:

$$\mathbf{Z}^2=-({z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2)\mathbf{I}=-z^2\mathbf{I} \tag{۲۱.۴}$$

$$\mathbf{Z}^3=-({z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2)\mathbf{Z}=-z^2\mathbf{Z} \tag{۲۲.۴}$$

$$\mathbf{Z}^4=({z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2)^2\mathbf{I}=z^4\mathbf{I} \tag{۲۳.۴}$$

$$\mathbf{Z}^5=({z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2)^2\mathbf{Z}=z^4\mathbf{Z} \tag{۲۴.۴}$$

با جایگذاری روابط (۲۱.۴) تا (۲۳.۴) در رابطه (۲۰.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{Z}}&=\mathbf{I}+\mathbf{Z}-\frac{z^2}{2!}\mathbf{I}-\frac{z^2}{3!}\mathbf{Z}+\frac{z^4}{4!}\mathbf{I}+\frac{z^4}{5!}\mathbf{Z}+\cdots\\ &=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)\mathbf{I}+\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)\mathbf{Z}\end{aligned} \tag{۲۵.۴}$$

رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$e^{\mathbf{Z}}=\cos(z)\mathbf{I}+\frac{\sin(z)}{z}\mathbf{Z} \tag{۲۶.۴}$$

در انجام محاسبات وضعیت، استفاده از کواترنیون‌ها بهتر از کسینوس‌های هادی است [۲].

۳.۴ متعامدسازی[1]

سطرهای ماتریس دوران باید بر هم عمود باشند، ستون‌های آن نیز باید بر هم عمود باشند؛ اما به‌دلیل خطاهای عددی این شرایط دقیقاً محقق نمی‌شود و منجر به‌خطایی می‌شود که به «خطای تعامد»

[1] Orthogonalisation

معروف است. در مراجع مختلف روش‌های مختلفی برای کاهش این خطا ذکر شده‌است؛ در ابتدا روش مرجع [۱] بیان می‌شود. در این روش از الگوریتم بازگشتی زیر برای متعامدسازی ماتریس دوران استفاده می‌شود:

$$[T(n+1)]^{BI} = [T(n)]^{BI} + \frac{1}{2}\Big[[I] - [T(n)]^{BI}[\overline{T(n)}]^{BI}\Big][T(n)]^{BI} \qquad (۲۷.۴)$$

نشان داده می‌شود که اعمال شرط فوق، خطای تعامد را به‌اندازه یک مرتبه کوچک می‌کند.

همچنین مرجع [۳] رابطه اصلاحی زیر استخراج شده‌است:

$$[T(n+1)]^{BI} = \frac{3}{2}[T(n)]^{BI} - \frac{1}{2}[T(n)]^{BI}[\overline{T(n)}]^{BI}[T(n)]^{BI} \qquad (۲۸.۴)$$

۴.۴ نرمالیزه‌کردن[1]

اندازه هر یک از سطرها و ستون‌های ماتریس انتقال باید یک باشد. همچنین، اندازه بردار کواترنیون باید برابر یک باشد. اما خطاهای عددی باعث تغییر اندازه آن‌ها نسبت به مقدار یک می‌شود و لذا باید در هر گام از حل معادلات ناوبری، ماتریس انتقال را نرمالیزه کرد. روش انجام این کار را به‌صورت مجزا در مورد کواترنیون‌ها و ماتریس‌های انتقال بیان می‌کنیم.

۱.۴.۴ کواترنیون‌ها

اندازه بردار کواترنیون باید برابر یک باشد. در این جا روش مرجع [۲] برای کاهش این خطا ذکر می‌شود. فرض کنید که خطای انحراف از واحد به‌صورت زیر باشد:

$$\Delta q = 1 - \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} \qquad (۲۹.۴)$$

لذا بردار نرمال کواترنیون به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{q}_{\text{normal}} = \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}}} = (1-\Delta q)^{-0.5}\,\mathbf{q} \approx (1+\frac{1}{2}\Delta q)\mathbf{q} \qquad (۳۰.۴)$$

همچنین مولفه‌های قطری رابطه (۶۵.۲) نیز به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

---

[1] Normalization

$$
\begin{aligned}
t_{11} &: \left\{ q_0^{\ 2} + q_1^{\ 2} - q_2^{\ 2} - q_3^{\ 2} \right\} \to \left\{ 1 - 2(q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}) \right\} \\
t_{22} &: \left\{ q_0^{\ 2} - q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} - q_3^{\ 2} \right\} \to \left\{ 1 - 2(q_1^{\ 2} + q_3^{\ 2}) \right\} \\
t_{33} &: \left\{ q_0^{\ 2} - q_1^{\ 2} - q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2} \right\} \to \left\{ 1 - 2(q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2}) \right\}
\end{aligned}
\tag{۳۱.۴}
$$

۲.۴.۴ ماتریس انتقال

اندازه سطرها و ستون‌های ماتریس انتقال باید برابر با یک باشد. در این جا روش مرجع [۲] برای کاهش این خطا ذکر می‌شود. فرض کنید که ماتریس دوران شامل ستون‌های $\mathbf{t}_{\mathrm{i}}$ باشد که $i=1,2,3$ است. خطای انحراف از واحد را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\Delta_i = 1 - \bar{\mathbf{t}}_i \mathbf{t}_i \tag{۳۲.۴}$$

لذا بردار نرمال ستون‌ها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{t}_{i,\mathrm{normal}} = \frac{\mathbf{t}_i}{\sqrt{\bar{\mathbf{t}}_i \mathbf{t}_i}} = (1-\Delta_i)^{-0.5}\mathbf{t}_i \approx (1+\frac{1}{2}\Delta_i)\mathbf{t}_i \tag{۳۳.۴}$$

در مورد سطرهای ماتریس دوران نیز به‌صورت مشابه عمل می‌شود. الگوریتم فوق را می‌توان در یک گام زمانی بر روی ستون‌ها و در گام دیگر بر روی سطرها انجام داد.

۵ ترازیابی اولیه[1]

حل عددی معادلات دیفرانسیلی ناوبری، که در فصل ۳ استخراج شدند، نیازمنـد مشـخص‌بـودن شـرایط اولیه این معادلات شامل موقعیت اولیه، سرعت اولیه و وضعیت اولیه است. در صورت نیـاز بـه اسـتفاده از سیستم ناوبری اینرسی، باید موقعیت اولیه وسیله مشخص باشد. سرعت اولیه وسیله نیز معمولاً مشـخص (صفر) است. در اینصورت تنها مسئله‌ای که باقی می‌ماند، تعیین وضعیت اولیه وسیله است که به این کار ترازیابی اولیه گفته می‌شود.

در ترازیابی اولیه از خواص فیزیکی زمین مانند جاذبه و نرخ چرخش آن برای تخمین وضعیت وسـیله استفاده می‌شود. روش‌هـای سـاده‌ای وجـود دارد کـه قادرنـد بـا اسـتفاده از خروجـی شـتاب‌سـنج‌هـا و ژیروسکوپ‌های سیستم ناوبری اینرسی، در مدت زمان کم (در حدود یک دقیقه)، وضعیت سیستم نسبت به دستگاه مرجع (مثلاً دستگاه جغرافیایی) را مشخص کننـد. بـه ایـن کـار ترازیـابی خـام[2] اولیـه گفتـه می‌شود. در این فصل معادلات ترازیابی خام، دقت ترازیابی خام و انواع روش‌های آن معرفی می‌شود.

۱.۵ استخراج ماتریس انتقال از روی خروجی حسگرها

قبل از حرکت وسیله، سیستم ناوبری اینرسـی متصـل‌بـه‌بدنـه، نسـبت بـه زمـین ثابـت اسـت. بنـابراین شتاب‌سنج‌ها مولفه‌های شتاب متناظر با نیروی عکس‌العمل سـطح و ژیروسـکوپ‌هـا مولفـه‌هـای سـرعت زاویه‌ای زمین را هر دو در دستگاه بدنی اندازه می‌گیرند.

$$[\tilde{\mathbf{f}}]^{B} = [-\mathbf{g}_{L}]^{B} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_y \\ \tilde{f}_z \end{bmatrix} \qquad (۱.۵)$$

$$[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^{B} = [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} \qquad (۲.۵)$$

[1] Initial Alignment

[2] Coarse Alignment

علامت ~ حاکی از اندازه‌گیری کمیت موردنظر است. همچنین می‌توان نوشت:

$$[-\mathbf{g}_L]^B = [T]^{BN}[-\mathbf{g}_L]^N \tag{۳.۵}$$

$$[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B = [T]^{BN}[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \tag{۴.۵}$$

با مفروض‌بودن اطلاعات فوق می‌توان ماتریس زیر را تشکیل داد:

$$\begin{bmatrix}[-\mathbf{g}_L]^B & [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B & [-\mathbf{g}_L]^B \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B\end{bmatrix} = [T]^{BN}\begin{bmatrix}[-\mathbf{g}_L]^N & [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N & [-\mathbf{g}_L]^N \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N\end{bmatrix} \tag{۵.۵}$$

حال تعریف زیر را درنظر بگیرید:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}[-\mathbf{g}_L]^N & [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N & [-\mathbf{g}_L]^N \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N\end{bmatrix} \tag{۶.۵}$$

بنابراین:

$$[T]^{BN} = \begin{bmatrix}[-\mathbf{g}_L]^B & [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B & [-\mathbf{g}_L]^B \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B\end{bmatrix}\mathbf{M}^{-1} \tag{۷.۵}$$

با حل رابطه (۷.۵)، تخمین خام اولیه‌ای از وضعیت سیستم ($[T]^{BN}$) حاصل می‌شود. بـرای ایـن منظـور مطابق پیوست الف داریم:

$$[-\mathbf{g}_L]^N = \begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix} \tag{۸.۵}$$

همچنین مطابق پیوست الف و با فرض کروی‌بودن زمین داریم:

$$[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N = \begin{bmatrix}\omega^{EI}\cos\lambda\\0\\-\omega^{EI}\sin\lambda\end{bmatrix} \tag{۹.۵}$$

با استفاده از روابط (۸.۵) و (۹.۵)همچنین مطابق پیوست الف و با فرض کروی‌بودن زمین داریم:

(۹.۵ معکوس ماتریس $\mathbf{M}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

هادی نوبهاری و حامد محمدکریمی، "سیستم‌های ناوبری اینرسی متصل به بدنه"، دانشگاه صنعتی شریف، هسته پژوهشی هدایت و کنترل، آذر ۱۳۹۱.

$$\mathbf{M}^{-1}=\Big[[-\mathbf{g}_L]^N \quad [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \quad [-\mathbf{g}_L]^N\times[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N\Big]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-\tan\lambda}{g} & 0 & \frac{-1}{g}\\ \frac{1}{\omega^{EI}\cos\lambda} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{g\omega^{EI}\cos\lambda} & 0\end{bmatrix} \quad (۱۰.۵)$$

با جایگذاری روابط (۱.۵)، (۲.۵) و (۱۰.۵) در رابطه (۷.۵) خواهیم داشت:

$$[T]^{BN}\approx\begin{bmatrix}\frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\tilde{\omega}_x-\frac{\tan\lambda}{g}\tilde{f}_x & \frac{\sec\lambda}{g\omega^{EI}}(\tilde{f}_z\tilde{\omega}_y-\tilde{f}_y\tilde{\omega}_z) & \frac{-1}{g}\tilde{f}_x\\ \frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\tilde{\omega}_y-\frac{\tan\lambda}{g}\tilde{f}_y & \frac{\sec\lambda}{g\omega^{EI}}(\tilde{f}_x\tilde{\omega}_z-\tilde{f}_z\tilde{\omega}_x) & \frac{-1}{g}\tilde{f}_y\\ \frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\tilde{\omega}_z-\frac{\tan\lambda}{g}\tilde{f}_z & \frac{\sec\lambda}{g\omega^{EI}}(\tilde{f}_y\tilde{\omega}_x-\tilde{f}_x\tilde{\omega}_y) & \frac{-1}{g}\tilde{f}_z\end{bmatrix} \quad (۱۱.۵)$$

توجه: در رابطه (۱۱.۵) در صورتیکه دو سطر و یا دو ستون موجود باشد، سطر یا ستون سوم از شرط تعامد قابل محاسبه است.

۲.۵ اثر خطای حسگرها

اگر خروجی حسگرها خطا نداشت، رابطه (۱۱.۵) نیز فاقد خطا بود و از روی $[T]^{BN}$، زوایای رول، پیچ و یاو بدون خطا محاسبه می‌شد. در ادامه، اثر خطای حسگرها در محاسبه ماتریس وضعیت و نیز زوایای اویلر بررسی می‌شود.

با توجه به روابط (۱.۵)، (۲.۵) و (۷.۵) خواهیم داشت:

$$[T]^{B\hat{N}}=\Big[[\tilde{\mathbf{f}}]^B \quad [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B \quad [\tilde{\mathbf{f}}]^B\times[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B\Big]\mathbf{M}^{-1} \quad (۱۲.۵)$$

یادآوری می‌شود که در رابطه (۱۲.۵) $[\mathbf{T}]^{B\hat{N}}$، $[\tilde{\mathbf{f}}]^B$ و $[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B$ به‌ترتیب تخمین ماتریس تبدیل، نیروی ویژه حس‌شده و سرعت دورانی حس‌شده توسط حسگرهای اینرسی هستند و به‌صورت زیر مدل می‌شوند:

$$\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}+\delta\mathbf{f}=-\mathbf{g}_L+\delta\mathbf{f}\rightarrow[\tilde{\mathbf{f}}]^B=[\delta\mathbf{f}]^B-[\mathbf{g}_L]^B \quad (۱۳.۵)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}=\boldsymbol{\omega}^{BI}+\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}=\boldsymbol{\omega}^{EI}+\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}\rightarrow[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B=[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B+[\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \quad (۱۴.۵)$$

$$[T]^{B\hat{N}}=[T]^{BN}[T]^{N\hat{N}}=[T]^{BN}[\bar{T}]^{\hat{N}N}=[T]^{BN}[\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^N=[T]^{BN}\Big([\mathbf{E}]^N+[\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^N\Big) \quad (۱۵.۵)$$

در رابطه (۱۵.۵)، $\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}$ تنسور شبه‌متقارن تنسور انحراف[1] ($\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{N}N}$) است که انحراف مقدار محاسبه‌شده ماتریس تبدیل ($[\mathrm{T}]^{\hat{N}B}$) از مقدار واقعی آن ($[\mathrm{T}]^{NB}$) را نشان می‌دهد. با مساوی‌قراردادن سمت راست روابط (۱۲.۵) و (۱۵.۵) و سپس استفاده از روابط (۱۳.۵) و (۱۴.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{T}]^{BN}\left([\mathbf{E}]^{N}+[\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^{N}\right)=\\
&\left[[\delta\mathbf{f}]^{B}-[\mathbf{g}_{L}]^{B}\quad [\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}+[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{B}\quad \left([\delta\mathbf{f}]^{B}-[\mathbf{g}_{L}]^{B}\right)\times\left([\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}+[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{B}\right)\right]\mathbf{M}^{-1}\\
&\approx\left[[\delta\mathbf{f}]^{B}\quad [\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}\quad [\delta\mathbf{f}]^{B}\times[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{B}-[\mathbf{g}_{L}]^{B}\times[\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}\right]\mathbf{M}^{-1}\\
&\quad+\left[-[\mathbf{g}_{L}]^{B}\quad [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{B}\quad -[\mathbf{g}_{L}]^{B}\times[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{B}\right]\mathbf{M}^{-1}
\end{aligned} \tag{۱۶.۵}$$

با تفریق رابطه (۷.۵) از رابطه (۱۶.۵) خواهیم داشت:

$$[\mathrm{T}]^{BN}[\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^{N}=\left[[\delta\mathbf{f}]^{B}\quad [\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}\quad [\delta\mathbf{f}]^{B}\times[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{B}-[\mathbf{g}_{L}]^{B}\times[\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{B}\right]\mathbf{M}^{-1} \tag{۱۷.۵}$$

رابطه (۱۷.۵) خطای تخمین وضعیت را به خطای حسگرها ارتباط می‌دهد. برای برآورد دقت فرآیند ترازیابی خام اولیه، در ابتدا رابطه فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^{N}=\left[[\delta\mathbf{f}]^{N}\quad [\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{N}\quad [\delta\mathbf{f}]^{N}\times[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{N}-[\mathbf{g}_{L}]^{N}\times[\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{N}\right]\mathbf{M}^{-1} \tag{۱۸.۵}$$

حال تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$$[\delta\mathbf{f}]^{N}=\begin{bmatrix}\delta f_{n}\\ \delta f_{e}\\ \delta f_{d}\end{bmatrix}\qquad [\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^{N}=\begin{bmatrix}\delta\omega_{n}\\ \delta\omega_{e}\\ \delta\omega_{d}\end{bmatrix} \tag{۱۹.۵}$$

با جایگذاری روابط (۸.۵) تا (۱۰.۵) و (۱۹.۵) در رابطه (۱۸.۵) خواهیم داشت:

$$[\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^{N}=\begin{bmatrix}
\frac{-\tan\lambda}{g}\delta f_{n}+\frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\delta\omega_{n} & \frac{-\sec\lambda}{\omega^{EI}}\delta\omega_{e}+\frac{\tan\lambda}{g}\delta f_{e} & \frac{-1}{g}\delta f_{n}\\
\frac{-\tan\lambda}{g}\delta f_{e}+\frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\delta\omega_{e} & \frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\delta\omega_{n}-\frac{1}{g}\delta f_{d}-\frac{\tan\lambda}{g}\delta f_{n} & \frac{-1}{g}\delta f_{e}\\
\frac{-\tan\lambda}{g}\delta f_{d}+\frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\delta\omega_{d} & \frac{1}{g}\delta f_{e} & \frac{-1}{g}\delta f_{d}
\end{bmatrix} \tag{۲۰.۵}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که در حضور خطای حسگرها ماتریس فوق لزوماً شبه‌متقارن نیست. اما در حالت ایده‌ال داریم:

[1] Tilt

$$[\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon\psi & \varepsilon\theta \\ \varepsilon\psi & 0 & -\varepsilon\phi \\ -\varepsilon\theta & \varepsilon\phi & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۱.۵}$$

حال فرض کنید که شرایط زیر که به معنای صفربودن قطر اصلی ماتریس رابطه (۲۰.۵) است، برقرار باشد.

$$\begin{cases} \delta f_{d} = 0 \\ \delta f_{n} = \dfrac{g}{\omega^{EI}\sin\lambda}\delta\omega_{n} \\ \delta f_{n} = \dfrac{g}{\omega^{EI}\cos\lambda}\delta\omega_{d} \end{cases} \tag{۲۲.۵}$$

درصورتیکه شرایط رابطه (۲۲.۵) محقق شود، دقت الگوریتم تراز خام از رابطه (۲۳.۵) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \varepsilon\phi = \dfrac{1}{g}\delta f_{e} \\ \varepsilon\theta = -\dfrac{1}{g}\delta f_{n} \\ \varepsilon\psi = \dfrac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\delta\omega_{e} - \dfrac{\tan\lambda}{g}\delta f_{e} \end{cases} \tag{۲۳.۵}$$

طبق رابطه (۲۳.۵)، مولفه‌های خطای وضعیت به عرض جغرافیایی و خطای حسگرهای اینرسی وابسته است. مطابق این رابطه با افزایش دقت حسگرهای اینرسی، دقت الگوریتم شمال‌یاب نیز افزایش می‌یابد. در مورد خطای کانال سمت مطابق این رابطه می‌توان گفت:

$$\varepsilon\psi \le \frac{\sec\lambda}{\omega^{EI}}\left|\delta\omega_{e}\right| + \frac{\left|\tan\lambda\right|}{g}\left|\delta f_{e}\right| \tag{۲۴.۵}$$

منابع و مراجع

[۱] Peter H. Zipfel; *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*, 1st Edition, AIAA Educational Series, 2000.

[۲] D. H. Titterton and J. L. Weston; *Strapdown Inertial Navigation Technology*, 2nd Edition, IEE, 2004.

[۳] Robert M. Rogers; *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems*, 2nd Edition, AIAA Inc., 2003.

پیوست الف: مدل زمین

در این پیوست دو مسئله مهم در ناوبری اینرسی بررسی می‌شود:

- هندسه زمین بیضی‌گون
- جاذبه زمین بیضی‌گون

دقت در مدل‌سازی زمین باعث افزایش دقت فرآیند ناوبری می‌شود. مدل معروف مورد استفاده در اکثر مراجع، مدل WGS-84 است که در ادامه معرفی می‌شود.

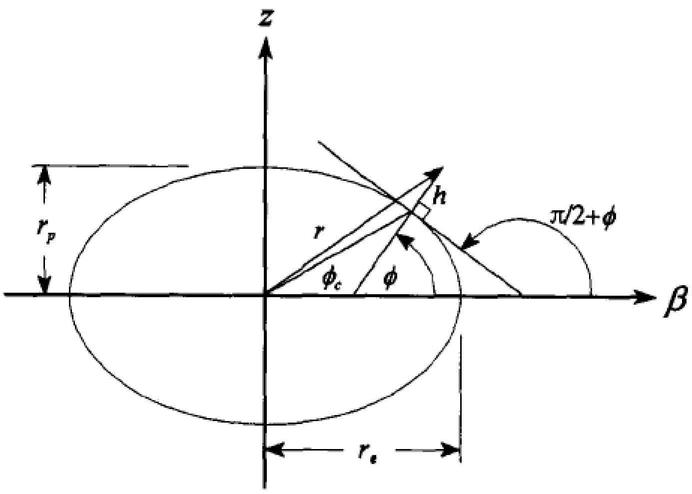
هندسه زمین بیضی‌گون

پارامترهای مدل زمین بیضوی به‌صورت یک برش نصف‌النهاری در شکل الف-۱ نشان داده شده‌است. در این شکل محور z در راستای محور دوران زمین است و β در صفحه استوا قرار دارد. مطابق هندسه مقاطع مخروطی، روابط زیر در مورد پارامترهای خروج از مرکز (ε)، انحنای بیضی (e) و ضریب پخیدگی (f) برقرار است:

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{r_{\mathrm{p}}^{2}}{r_{\mathrm{e}}^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{الف-۱}$$

$$e = 1 - \frac{r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{e}}} \tag{الف-۲}$$

$$f = \frac{1}{e} \tag{الف-۳}$$



شکل الف-۱ هندسه زمین بیضوی

در ادامه قصد داریم تا موقعیت زمینی (x، y و z در دستگاه ECEF) را برحسب طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع نسبت به مدل بیضی‌گون مبنا بیان کنیم. مطابق شکل الف-۱ داریم:

$$\frac{\beta^2}{r_e^{\;2}}+\frac{z^2}{r_p^{\;2}}=1 \tag{الف-۴}$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$\frac{2\beta\,\mathrm{d}\beta}{r_e^{\;2}}+\frac{2z\mathrm{d}z}{r_p^{\;2}}=0 \tag{الف-۵}$$

یا:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\beta}=-\frac{\beta\, r_p^{\;2}}{z r_e^{\;2}} \tag{الف-۶}$$

مطابق شکل الف-۱ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\beta}=\tan(\frac{\pi}{2}+\phi)=-\frac{1}{\tan\phi} \tag{الف-۷}$$

با توجه به روابط (الف-۶) و (الف-۷) داریم:

$$\frac{1}{\tan\;\phi}=\frac{\beta\, r_p^{\;2}}{z r_e^{\;2}} \tag{الف-۸}$$

حال رابطه (الف-۱) را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{{r_{\mathrm{p}}}^2}{{r_{\mathrm{e}}}^2}=(1-\varepsilon^2) \qquad \text{(الف-۹)}$$

با جایگذاری (الف-۹) در (الف-۸) داریم:

$$\frac{z}{\beta}=(1-\varepsilon^2)\tan\phi \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

اما مطابق شکل الف-۱ داریم:

$$\frac{z}{\beta}=\tan\phi_{\mathrm{c}} \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

با استفاده از روابط (الف-۱۰) و (الف-۱۱) می‌توان نوشت:

$$\tan\phi_{\mathrm{c}}=(1-\varepsilon^2)\tan\phi \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

با توجه به رابطه (الف-۴) داریم:

$$\beta^2={r_{\mathrm{e}}}^2\left(1-\frac{z^2}{{r_{\mathrm{p}}}^2}\right) \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

با ترکیب رابطه (الف-۱۳) با رابطه (الف-۱۰) خواهیم داشت:

$$\beta=\frac{r_{\mathrm{e}}\cos\phi}{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

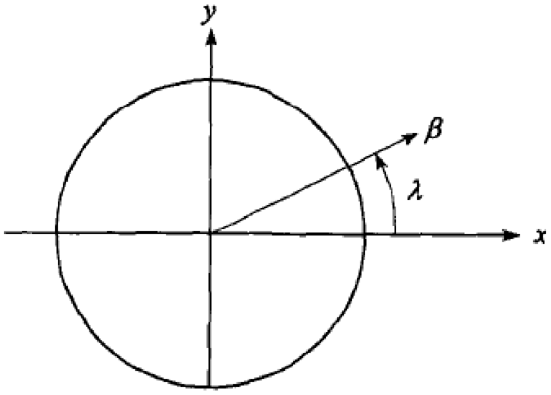
همچنین با ترکیب رابطه (الف-۱۴) با رابطه (الف-۱۰) خواهیم داشت:

$$z=\frac{r_{\mathrm{e}}(1-\varepsilon^2)\sin\phi}{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(الف-۱۵)}$$

مطابق شکل الف-۲ موقعیت زمینی برحسب فاصله شعاعی (β) و طول جغرافیایی (λ) مشخص می‌شود:

$$x=\beta\cos\lambda \qquad \text{(الف-۱۶)}$$

$$y=\beta\sin\lambda \qquad \text{(الف-۱۷)}$$



شکل الف-۲ صفحه استوا (x-y)

با توجه به رابطه (الف-۱۴)، روابط (الف-۱۶) و (الف-۱۷) را بازنویسی می‌کنیم:

$$x = \frac{r_e \cos\phi \cos\lambda}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(الف-۱۸)}$$

$$y = \frac{r_e \cos\phi \sin\lambda}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(الف-۱۹)}$$

با تعمیم روابط (الف-۱۵)، (الف-۱۸) و (الف-۱۹) برای پوشش ارتفاع خواهیم داشت:

$$x = \left(\frac{r_e}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} + h\right)\cos\phi \cos\lambda \qquad \text{(الف-۲۰)}$$

$$y = \left(\frac{r_e}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} + h\right)\cos\phi \sin\lambda \qquad \text{(الف-۲۱)}$$

$$z = \left(\frac{r_e(1-\varepsilon^2)}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} + h\right)\sin\phi \qquad \text{(الف-۲۲)}$$

شعاع انحناء زمین

شعاع انحنای زمین در راستای خطوط با طول جغرافیایی و عرض جغرافیایی به‌ترتیب با R_{meridian} و R_{normal} تعریف می‌شوند. در مباحث ناوبری از این دو پارامتر استفاده می‌شود. بر طبق مباحث ریاضی، شعاع انحنای یک منحنی با طول جغرافیایی ثابت، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_{\text{meridian}} = \pm\frac{\left(1+(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\beta})^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\beta}} \quad \text{(الف-۲۳)}$$

با مشتق‌گیری از رابطه (الف-۶) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\beta^2} = -\frac{{r_{\mathrm{p}}}^4}{{r_{\mathrm{e}}}^2 z^3} \quad \text{(الف-۲۴)}$$

با جایگذرای روابط (الف-۶) و (الف-۹) در رابطه (الف-۲۳) خواهیم داشت:

$$R_{\text{meridian}} = \frac{\left(z^2 + (1-\varepsilon^2)^2\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{{r_{\mathrm{p}}}^2(1-\varepsilon^2)} \quad \text{(الف-۲۵)}$$

با جایگذاری روابط (الف-۱۴) و (الف-۱۵) در رابطه (الف-۲۵) خواهیم داشت:

$$R_{\text{meridian}} = \frac{r_{\mathrm{e}}(1-\varepsilon^2)}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(الف-۲۶)}$$

شعاع سطح بیضی‌گون در یک منحنی با عرض جغرافیایی ثابت با β نشان داده شد؛ شعاع انحنای عمود بر سطح بیضی‌گون به‌صورت زیر است:

$$R_{\text{normal}} = \frac{\beta}{\cos\phi} \quad \text{(الف-۲۷)}$$

با استفاده از رابطه (الف-۱۴)، رابطه (الف-۲۷) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R_{\text{normal}} = \frac{r_{\mathrm{e}}}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(الف-۲۸)}$$

در جدول الف-۱ ثوابت چندین مدل زمین بیضوی آورده شده‌است. تفاوت این مدل‌ها مربوط به پیشرفت‌های تکنولوژی با گذشت زمان و همچنین تفاوت کاربردها است. در جدول الف-۲، برخی ثوابت مدل معروف WGS-84 آورده شده‌است.

جدول الف-۱ ثوابت چند مدل زمین بیضوی

Reference ellipsoid	r_e, m	f
Clarke 1866	6378206.4	294.9786982
Clarke 1880	6378249.145	294.465
International	6378388	297
Bessel	6377397.155	299.1528128
Everest	6377276.345	300.8017
Modified Everest	6377304.063	300.8017
Australian National	6378160	298.25
South American 1969	6378160	298.25
Airy	6377564.396	299.3249646
Modified Airy	6377340.189	299.3249646
Hough	6378270	297
Fischer 1960 (South Asia)	6378155	298.3
Fischer 1960 (Mercury)	6378166	298.3
Fischer 1968	6378150	298.3
WGS-60	6378165	298.3
WGS-66	6378145	298.25
WGS-72	6378135	298.26
WGS-84	6378137	298.257223563

جدول الف-۲ ثوابت مدل WGS-84

Defining parameters		
Equatorial radius r_e	6378137	m
Angular velocity, $\omega_{i/e}$	7.292115×10^{-5}	rad/s
Earth's gravitational constant, μ	$3.986005 \times 10^{+14}$	m^3/s^2
Second gravitational constant, J_2	1.08263×10^{-3}	
Derived constants		
Flattening, f	298.257223563	
Polar radius, r_p	6356752.3142	m
First eccentricity, ϵ	0.0818191908426	
Gravity at equator, g_{WGS_0}	9.7803267714	m/s^2
Gravity formula constant, g_{WGS_1}	0.00193185138639	
Mean value (normal) gravity, g	9.7976446561	m/s^2

برخی روابط پر استفاده

با استفاده از روابط سینماتیکی می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرار هستند:

$$[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{GE}}]^{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}\cos\phi \\ -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda}\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_{\mathrm{east}}}{(R_{\mathrm{normal}}+\mathrm{h})} \\ \dfrac{-v_{\mathrm{north}}}{(R_{\mathrm{meridian}}+\mathrm{h})} \\ \dfrac{-v_{\mathrm{east}}}{(R_{\mathrm{normal}}+\mathrm{h})}\tan\phi \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۲۹)}$$

$$[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{EI}}]^{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} \omega^{\mathrm{EI}}\cos\phi \\ 0 \\ -\omega^{\mathrm{EI}}\sin\phi \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۳۰)}$$

جاذبه زمین بیضی‌گون

جاذبه گرانشی (نیروی جاذبه دوطرفه ناشی از دو جرم) در دستگاه ECI به‌صورت زیر مدل می‌شود:

$$\begin{cases} G_{\mathrm{x}} = -\dfrac{\mu}{R^2}\left(1+\dfrac{3}{2}\mathrm{J}_2(\dfrac{\mathrm{r_e}}{R})^2\left(1-5(\dfrac{z}{R})^2\right)\right)\dfrac{x}{R} \\ G_{\mathrm{y}} = -\dfrac{\mu}{R^2}\left(1+\dfrac{3}{2}\mathrm{J}_2(\dfrac{\mathrm{r_e}}{R})^2\left(1-5(\dfrac{z}{R})^2\right)\right)\dfrac{y}{R} \\ G_{\mathrm{z}} = -\dfrac{\mu}{R^2}\left(1+\dfrac{3}{2}\mathrm{J}_2(\dfrac{\mathrm{r_e}}{R})^2\left(3-5(\dfrac{z}{R})^2\right)\right)\dfrac{z}{R} \end{cases} \qquad \text{(الف-۳۱)}$$

در رابطه (الف-۳۱)، تنها اولین ترم زمین غیرکروی (J_2) لحاظ شده‌است؛ همچنین در این رابطه R به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(الف-۳۲)}$$

برای محاسبه میزان جاذبه در سطح زمین، باید میزان شتاب جانب مرکز ناشی از چرخش زمین را نیز مدل کنیم. با توجه به قوانین پایه علم دینامیک خواهیم داشت:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} - \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{EI}}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{EI}}\mathbf{r} \qquad \text{(الف-۳۳)}$$