

# تمرین سری دوم الگوریتم‌های مدرن در بهینه‌سازی

علی بنی‌اسد

۲۰ آذر ۱۴۰۱

## ۱ سوال اول

در این مسئله تعداد ارسال از تهران به ساری را  $x_1$  و به کاشان را  $x_2$  در نظر می‌گیریم. همچنین، تعداد ارسال از اصفهان به ساری را  $y_1$  و به کاشان را  $y_2$  در نظر می‌گیریم. تابع هزینه و قیود به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$5x_1 + 10x_2 + 15y_1 + 4y_2 = \text{cost}$$

$$x_1 + x_2 \leq 500$$

$$y_1 + y_2 \leq 800$$

$$x_1 + y_1 = 600$$

$$x_2 + y_2 = 400$$

$$x_1 + y_1 = 600 \rightarrow y_1 = 600 - x_1$$

$$x_2 + y_2 = 400 \rightarrow y_2 = 400 - x_2$$

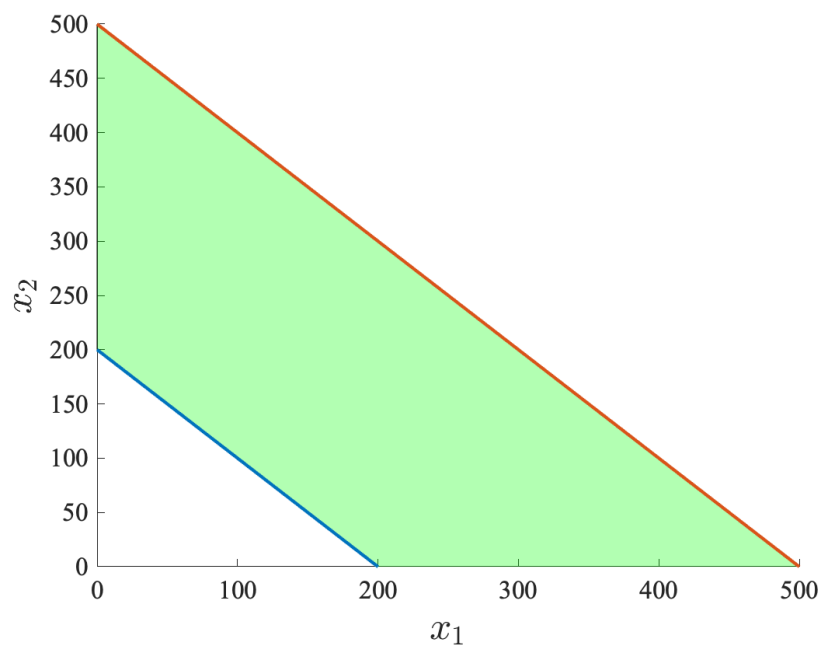
$$\rightarrow y_1 + y_2 \leq 800 \rightarrow 1000 - x_1 - x_2 \leq 800 \rightarrow 200 \leq x_1 + x_2 \leq 500$$

بر اساس قضیه‌ای در linear programming جواب مسئله در مرزهاست و با توجه به تابع هزینه،  $x_1 = 500$  و  $x_2 = 0$  است.

$$x_1 + y_1 = 600 \xrightarrow{x_1=500} y_1 = 100$$

$$x_2 + y_2 = 400 \xrightarrow{x_2=0} y_2 = 400$$

شکل ۱: محدوده  $x_1$  و  $x_2$



• ساری

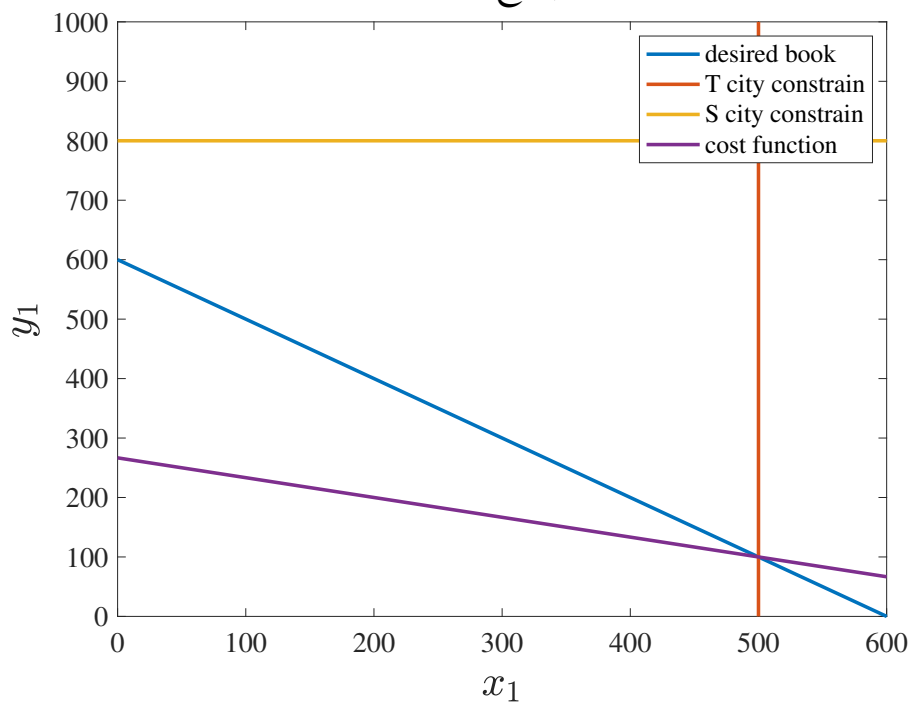
$$5x_1 + 15y_1 = \text{cost}$$

$$x_1 + y_1 = 600$$

$$x_1 + x_2 \leq 500$$

$$y_1 + y_2 \leq 800$$

شکل ۲: پاسخ گرافیکی شهر ساری



• کاشان

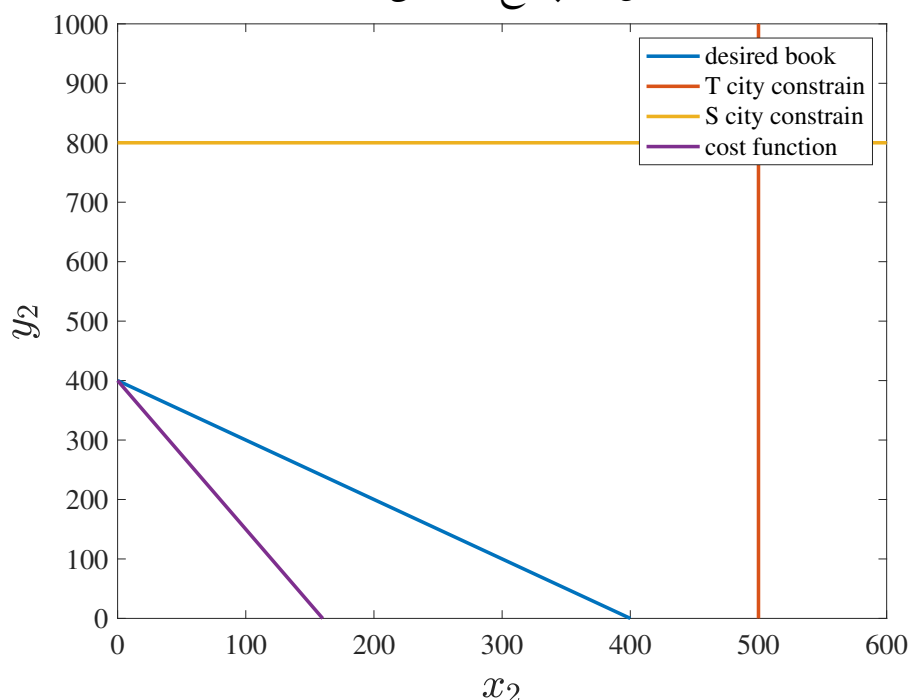
$$10x_2 + 4y_2 = \text{cost}$$

$$x_1 + y_1 = 400$$

$$x_1 + x_2 \leq 500$$

$$y_1 + y_2 \leq 800$$

شکل ۳: پاسخ گرافیکی شهر کاشان



در متلب تابعی به نام linprog هست که این مسئله را حل می‌کند، در پوشه Q1 و در فایل Q1.m این مسئله نیز دوباره حل شده است.

## ۲ سوال دوم

در این سوال برای بهینه‌سازی از دو روش Simplex و Random Search استفاده شده است. برای بدست آوردن مقدار ضریب انبساط از روش Quadratic Interpolation استفاده شده است. این روش برای بهینه‌سازی سه عدد احتیاج دارد. در این راه حل با بررسی حالت‌های مختلف ضریب انبساط ۰/۵ انتخاب شد و برای پیدا کردن دو نقطه دیگر ضرایب مختلفی در آن ضرب شد که نتیجه آن در ادامه آورده شده است. از طرفی، ضریب انبساط ثابت نیست و به مرور مقدار آن کمتر شده تا بهینه‌سازی عملکرد بهتری داشته باشد. در روش Random Search از تولید رشته‌ای از اعداد رندوم استفاده شده است، به این دلیل که، سرعت اجرای برنامه بیشتر می‌شود. نتایج اجرای برنامه‌ها در فایل‌های csv آورده شده است.

همانطور که در بخش قبل گفته شد ضریب انبساط به صورت greedy، ۰/۵ در نظر گرفته شد. در برنامه وقتی که در یک مرحله تابع هزینه کم نشد ضریب انبساط در ۰/۹ ضرب می‌شود که برنامه بتواند عملکرد بهتری داشته باشد. در Quadratic Interpolation برای دو عدد دیگر، ضریب انبساط

درصدی افزایش و کاهش می‌یابد که نتیجه آن در جدول ۹ آورده شده است.

### ۳ سوال سوم

برای بهینه‌سازی از روش SA استفاده شده است. تابع دما به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$T_{k+1} = \alpha T_k$$

در اجرای کد دو حالت  $10^\circ$  و  $100^\circ$  زنجیره مارکو در اجرا شده است و نتایج در جدول ۲ آورده شده است. برای یافتن همسایگی از عوض کردن خانه‌های رشته جواب استفاده شده است. تعداد خانه‌های عوض شده تابعی از دما است. به این صورت، از حداکثر ۴ خانه تا حداقل ۲ خانه انجام شده است. پارامترهای انتخاب شده برای بهینه‌سازی با random sampling شامل دمای اولیه، دمای نهایی و ضریب  $\alpha$  است. بازه جواب‌ها در جدول ۱ آمده است.

Table 1: Parameter of SA algorithm

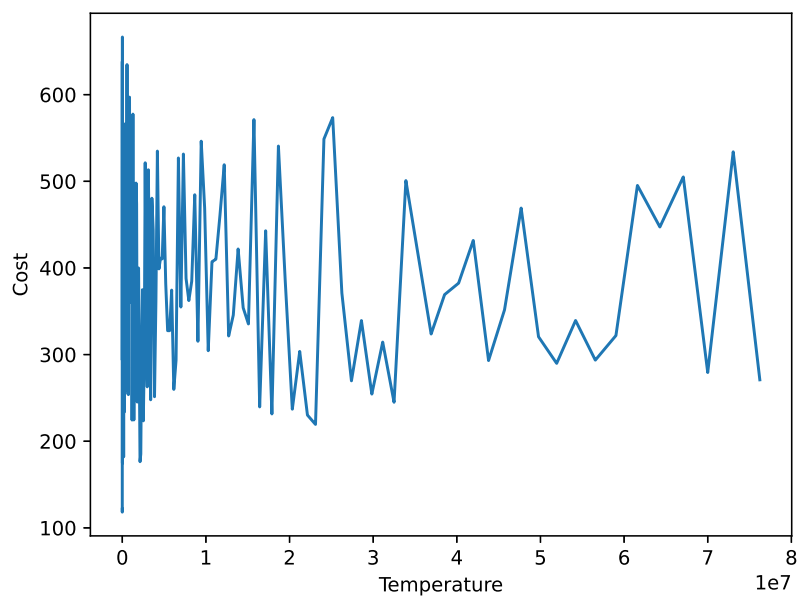
Parameter	$T_0$	$T_f$	$\alpha$
max	$10^5$	$10^0$	0.99
min	$10^2$	$10^{-4}$	0.90

جدول ۲: نتایج اجرا با مجموعه‌های مختلف

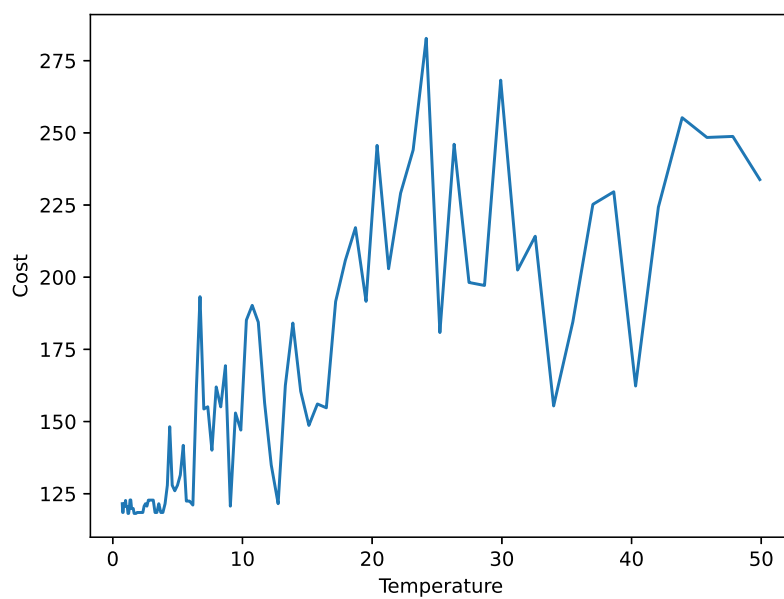
نتایج	Set 1	Set 2	Set 3
تعداد اجراهای موفق	20	20	20
میانگین کمترین زمان امداد رسانی	122.1	124.7	125.5
میانگین تعداد ارزیابی تا نخستین دستیابی به بهترین جواب	7805	8497	6791

نمودار دما بر حسب تابع هزینه برای بهترین پارامترهای بدست آمده رسم شده است.

شکل ۴: نتایج الگوریتم SA در کل دماها



~~شکل ۵: نتایج الگوریتم SA در دماهای نزدیک به صفر~~



پیوست ۴

Table 3: Values Achieved with random search algorithm for Problems 1 and 2 (D=10)

FES/Problem		Problem 1	Problem 2
1e3	1 <sup>th</sup> (Best)	-407.3813481276091	-228.97424107860095
	7 <sup>th</sup>	-395.06519326573994	-33.46554958130053
	13 <sup>th</sup> (Median)	-380.15912024012425	58.6134331346575
	19 <sup>th</sup>	-368.84897448457144	160.76563887431814
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-349.7986986757954	548.8476599656999
	Mean	-379.8036199516114	92.76811929861113
	Std	16.44577492265468	187.0717244524101
1e4	1 <sup>th</sup> (Best)	-427.0338981098648	-278.45151748383927
	7 <sup>th</sup>	-413.9335075623636	-185.1274465946485
	13 <sup>th</sup> (Median)	-406.14627560679367	-149.79044522754447
	19 <sup>th</sup>	-396.1796231863556	-102.71762363360163
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-389.658295142318	229.63578618283668
	Mean	-405.9547797465339	-121.29703742752397
	Std	10.95512734067712	119.3460965459626
1e5	1 <sup>th</sup> (Best)	-434.1914176187556	-344.7222065950226
	7 <sup>th</sup>	-423.91908427795187	-292.24522797058523
	13 <sup>th</sup> (Median)	-421.8102146255711	-256.48872025986554
	19 <sup>th</sup>	-416.2505640589403	-215.97226717963656
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-408.53029148675125	-11.95003562726606
	Mean	-420.5047587381684	-243.03453119953315
	Std	6.02821567737871	73.20991531932562

Table 4: Values Achieved with simplex algorithm for Problems 1 and 2 (D=10)

FES/Problem		Problem 1	Problem 2
1e3	1 <sup>th</sup> (Best)	-443.2762589930754	-339.57763025855724
	7 <sup>th</sup>	-430.6859068579973	-267.86368665227525
	13 <sup>th</sup> (Median)	-427.3469537796325	-232.21237078369415
	19 <sup>th</sup>	-419.69551944151914	-172.57050978910098
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-397.76429282019967	-122.4419088534412
	Mean	-425.3018798219098	-224.84725099173235
	Std	10.837179689424635	62.52684495591536
1e4	1 <sup>th</sup> (Best)	-443.22896469617774	-354.8873321655129
	7 <sup>th</sup>	-432.3935403386528	-260.57874803322875
	13 <sup>th</sup> (Median)	-427.32397282787	-186.19553730457
	19 <sup>th</sup>	-420.78613635223667	-165.63131373269573
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-408.0733651974245	41.82092047119431
	Mean	-425.95146944527437	-203.65839457395907
	Std	9.831771347288383	79.17806110856863
1e5	1 <sup>th</sup> (Best)	-441.74964508479593	-360.0650768319056
	7 <sup>th</sup>	-433.8582803923676	-276.76449344793616
	13 <sup>th</sup> (Median)	-422.0162045624506	-242.05052545591207
	19 <sup>th</sup>	-412.0048093293631	-169.61412105109196
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-388.665693811064	29.91852125194714
	Mean	-421.91407466134365	-220.28817514511172
	Std	13.752200716959646	88.66159148766259



Table 5: Values Achieved with random search algorithm for Problems 1 and 2 (D=30)

FES/Problem		Problem 1	Problem 2
1e3	1 <sup>th</sup> (Best)	-26.234089960280585	6995.960955223049
	7 <sup>th</sup>	40.43375178222294	7861.160337237015
	13 <sup>th</sup> (Median)	67.15321525766262	9159.353768063593
	19 <sup>th</sup>	84.97999648568803	9919.552858734964
	25 <sup>th</sup> (Worst)	127.5177319242084	14948.815902640265
	Mean	60.1195692354759	9490.391615202283
	Std	37.1173450402111	2268.9323712741757
1e4	1 <sup>th</sup> (Best)	-118.99690498510142	5720.25329424022
	7 <sup>th</sup>	-43.04767982651737	6692.788836671257
	13 <sup>th</sup> (Median)	-14.354603126181471	7562.485850094489
	19 <sup>th</sup>	3.792236375101026	8051.364495456848
	25 <sup>th</sup> (Worst)	55.08947850817867	15445.890795498668
	Mean	-19.667579180135935	8036.879097280794
	Std	38.31601140082953	2016.9785095248753
1e5	1 <sup>th</sup> (Best)	-184.07003289921124	3866.239844885671
	7 <sup>th</sup>	-106.42976701335537	5391.522596229046
	13 <sup>th</sup> (Median)	-84.43837513888643	6078.021120766507
	19 <sup>th</sup>	-60.209252821935365	7043.324095051296
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-28.776351955344975	9031.318295673256
	Mean	-88.47289645980084	6421.313900040375
	Std	34.34485632972201	1433.461009235253

Table 6: Values Achieved with simplex algorithm for Problems 1 and 2 (D=30)

FES/Problem		Problem 1	Problem 2
1e3	1 <sup>th</sup> (Best)	-435.2620933600804	-210.150647687119
	7 <sup>th</sup>	-424.7873710184281	43.932298396071474
	13 <sup>th</sup> (Median)	-421.9583530640558	317.1311490711844
	19 <sup>th</sup>	-419.472603235945	591.6168313364524
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-406.4240652958536	750.0783495374842
	Mean	-421.62934122105565	305.904280067957
	Std	6.766817186451544	293.71694221378084
1e4	1 <sup>th</sup> (Best)	-430.9301402730982	-121.7199158382922
	7 <sup>th</sup>	-426.7453102776228	56.79229904923426
	13 <sup>th</sup> (Median)	-422.2023824258696	206.57759150402265
	19 <sup>th</sup>	-417.601163260454	396.8703833729832
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-404.6104291789043	847.1068343822928
	Mean	-421.3611786706372	242.29361540582158
	Std	7.009132738250164	229.2274312133056
1e5	1 <sup>th</sup> (Best)	-435.4231797145232	-65.89793859573047
	7 <sup>th</sup>	-426.7042582387353	252.61540657363727
	13 <sup>th</sup> (Median)	-423.86952047141574	292.88745979529403
	19 <sup>th</sup>	-418.09400428382	548.0560008990087
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-404.02880810107314	817.6001180924611
	Mean	-421.9262631503641	375.63324096806775
	Std	7.290078600715062	249.98365044392594

Table 7: Values Achieved with random search algorithm for Problems 1 and 2 (D=50)

FES/Problem		Problem 1	Problem 2
1e3	1 <sup>th</sup> (Best)	457.7508360102429	24348.15745166108
	7 <sup>th</sup>	531.8269436329678	27969.587515877065
	13 <sup>th</sup> (Median)	563.1262179053193	30117.034240711168
	19 <sup>th</sup>	638.1103047558208	34875.43787773033
	25 <sup>th</sup> (Worst)	674.5525163772456	53450.49984440445
	Mean	574.174932490734	32782.29816071802
	Std	61.874883661191674	7238.982794616617
1e4	1 <sup>th</sup> (Best)	212.5207930024376	22239.07954403593
	7 <sup>th</sup>	414.9244723554512	25214.406130268588
	13 <sup>th</sup> (Median)	476.9728774059429	28392.033725963214
	19 <sup>th</sup>	514.5120604618136	31513.688798894724
	25 <sup>th</sup> (Worst)	541.2596963218496	48310.348228612085
	Mean	465.3223328547506	29280.982269910524
	Std	69.1167203471214	5662.42789831367
1e5	1 <sup>th</sup> (Best)	284.9339245018691	18390.56948190265
	7 <sup>th</sup>	359.3534805550744	21478.880598771957
	13 <sup>th</sup> (Median)	378.62145067072817	23152.72509104628
	19 <sup>th</sup>	415.26927993549856	29146.103600167728
	25 <sup>th</sup> (Worst)	452.199550517709	76696.85664675006
	Mean	381.0281272867862	27241.76419266954
	Std	41.29877996425599	11657.529701649413

Table 8: Values Achieved with simplex algorithm for Problems 1 and 2 (D=50)

FES/Problem		Problem 1	Problem 2
1e3	1 <sup>th</sup> (Best)	-428.21881056196526	419.9597648894231
	7 <sup>th</sup>	-421.5914901319716	919.8990048261657
	13 <sup>th</sup> (Median)	-418.58388516407047	1119.9026511318486
	19 <sup>th</sup>	-413.9363862762604	1548.688171969459
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-404.3189419805895	2315.780435558809
	Mean	-418.3918049054536	1225.3782632262582
	Std	5.776233742183067	478.10520832519575
1e4	1 <sup>th</sup> (Best)	-433.5178348189812	237.05186966465624
	7 <sup>th</sup>	-424.2459524845557	741.8478778981864
	13 <sup>th</sup> (Median)	-421.60134380517064	1008.223615173109
	19 <sup>th</sup>	-416.678855465166	1186.2804517102304
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-405.24712880065647	2377.991228548953
	Mean	-420.1795355138568	1009.2565896419695
	Std	6.9940780716254425	439.73823269581254
1e5	1 <sup>th</sup> (Best)	-430.659391557888	383.1599197839979
	7 <sup>th</sup>	-422.829422330584	683.2435527085306
	13 <sup>th</sup> (Median)	-419.2985011488393	940.456083964832
	19 <sup>th</sup>	-414.8485996462962	1120.1220848456192
	25 <sup>th</sup> (Worst)	-406.8440721742186	1908.1901878164913
	Mean	-418.83666923516967	947.2693508597657
	Std	5.899138658766758	345.2734981584504

Table 9: sensitivity of alpha with 1e4 FES

Result/percent	0.05	0.1	0.2	0.3
1 <sup>th</sup> (Best)	-381.169	-439.865	-266.164	-290.687
7 <sup>th</sup>	-364.737	-427.215	-245.323	-217.805
13 <sup>th</sup> (Median)	-354.826	-421.490	-229.341	-194.326
19 <sup>th</sup>	-350.271	-417.560	-214.612	-177.219
25 <sup>th</sup> (Worst)	-327.938	-408.326	-185.780	106.956
Mean	-356.274	-422.238	-230.110	-182.947
Std	12.782	6.984	19.995	71.165