

# تمرین سری اول الگوریتم‌های مدرن در بهینه‌سازی

علی بنی‌اسد

۶ آبان ۱۴۰۱

## ۱ سوال اول

برای تبدیل این موضوع ابتدا باید تابع هزینه و قیود را بررسی کرد. یکی از توابع هزینه رایج را می‌توان زمان تأخیر مسافران را در نظر گرفت. این تابع هزینه بستگی به نوع هواپیما و تعداد مسافر داخل آن دارد. برای مثال هر دقیقه تأخیر یک بوئنگ ۷۴۷ بالاتر از بوئنگ ۷۷۷ است. از طرفی مسأله دارای قید نیز هست؛ به طور مثال، زمانی که یک اتفاق اضطراری رخ می‌دهد و یا سوخت یکی از هواپیماها تمام می‌شود حتماً باید فرود بیاید وگرنه هزینه به شدت بالا می‌رود. قید دیگر را می‌توان حداکثر تأخیر در نظر گرفت، به طور مثال، یک مسافر نباید بیشتر از یک ساعت تأخیر را تحمل کند. قید دیگر را می‌توان بسته به نوع هواپیما فرود آمده بررسی کرد که تا چه زمانی و چه هواپیماهایی قابلیت نشستن دارند. در شرایط مختلف آب‌وهوایی ممکن است تابع هزینه و قیود نیز عوض شوند.

### ۱.۱ قسمت اول

در این حالت چون صرفاً یک باند وجود دارد هزینه و قید مانند بالا تعریف می‌شود و در هر لحظه تمامی حالت‌ها بررسی می‌شود و هواپیما انتخاب می‌شود.

## ۲.۱ قسمت دوم

این مسأله هم مانند مسأله قبل است و چون چندین باند وجود دارد می‌توان هواپیماها را گروه بندی کرد و مانند سوال ۴ بررسی و حل کرد.

## ۳.۱ قسمت سوم

این مسأله هم مانند مسأله قبل است و تابع هزینه و قیود مانند مسأله قبل تعریف می‌شود. منتها این مسأله قیدهای دیگری داری. بسته به نوع هواپیما، در هنگام برخاستن یک سری جریان‌های هوایی ایجاد می‌شود که در یک زمان مشخصی هواپیمای دیگری نمی‌تواند فرود بیاید و یا برخاست کند. با توجه به اطلاعات سازنده می‌توان بررسی کرد که بعد از برخاست هواپیمای  $x$  هواپیماهای  $y$  و  $z$  بعد از چه مدت می‌توانند پرواز کنند.

## ۲ سوال دوم

مسأله QAP یکی از مسائل معروف در زمینه بهینه‌سازی ترکیبی است که به عنوان یکی از سخت‌ترین مسائل شناخته شده، در نظر گرفته می‌شود. این مسأله از آنجا که نقش بسیار مهمی در حل بسیاری از مسائل پیچیده روزمره ایفا میکند، در چندین دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است و بسیاری از محققین در زمینه‌های مختلف از جمله الکترونیک، آمار، اقتصاد و ... از آن بهره گرفته‌اند.

## ۱.۲ قسمت اول

یکی از مسأله‌های روزمره را می‌توان به صورت مسأله فروشنده دوره گرد مدل کرد. برای مثال، در یک روز  $n$  مکان مختلف در دانشگاه را بررسی کنم و کارهای مختلفی انجام دهم. هدف از این مسأله کم کردن زمان حرکت و با فرض حرکت در سرعت ثابت، می‌توان مسأله را به کمترین زمان نیز تبدیل کرد.

## ۲.۲ قسمت دوم

در این مسأله برای هر مسیر یک تابع هزینه محاسبه می‌شود و با توجه به شیب دانشگاه هزینه رفت بین دو مکان با برگشت آن مساوی نیست. از طرفی، برخی از مراکز را باید قبل از یک زمان مشخص بررسی کنم که یک قید به مسأله اضافه می‌کند. برای اضافه کردن قید به مدل، می‌توان زمانی که مرکز بسته است، تابع هزینه را به شدت بالا برد که مسأله هرگز از این قید عبور نکند. در نتیجه،  $n$  مرکز وجود دارد که تمامی باید بررسی شوند از طرفی این مراکز تا یک ساعت خاصی فعالیت دارند و با فرض قسمت قبل می‌توان زمان را به عنوان یک پارامتر بررسی کرد و متناسب با زمان برای هر مسیر هزینه را تابعی از زمان ارائه داد.

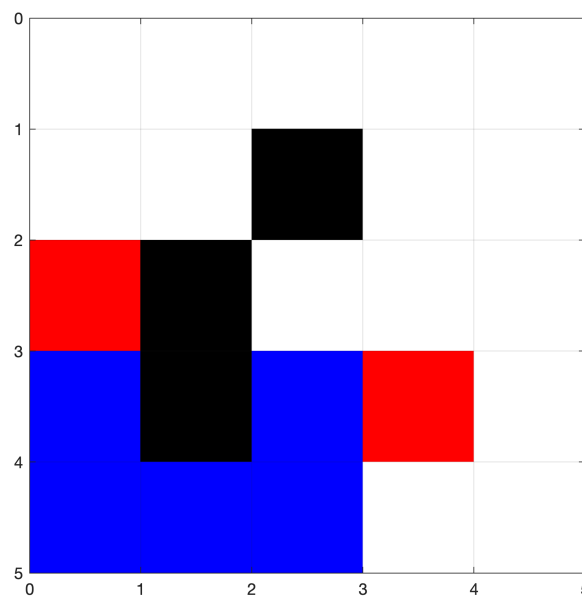
## ۳.۲ قسمت سوم

بله. با توجه به اینکه حل این مسأله از مرتبه  $O(n!)$  است، حجم محاسبات با افزایش مراکز به شدت بالا می‌رود و دچار Combinatorial Explosion می‌شود.

## ۳ سوال سوم

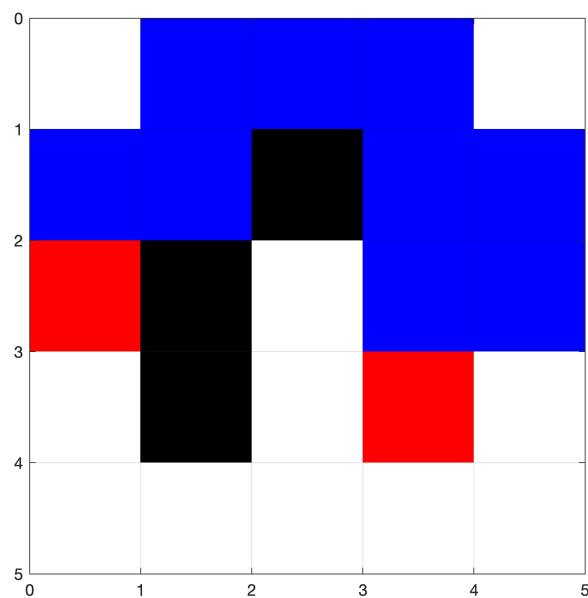
برای حل این مسأله ابتدا maze به یک گراف تبدیل می‌شود. در گراف هر خانه به خانه‌های اطراف متصل می‌شود به شرطی که مسیر مسدود نباشد. بعد از ساخت گراف برای پیدا کردن مسیر از الگوریتم Depth First Search (DFS) استفاده شده است. در این الگوریتم به صورت بازگشتی از یک خانه به خانه دیگر می‌رود و ذخیره می‌کند که آیا از این خانه گذشته است یا خیر، که در مراحل دیگر سراغ خانه‌های تکراری نرود. در انتها بعد از رسیدن به مقصد مسیر طی شده را بر می‌گرداند. این روش تمامی مسیرهای از مبدأ به مقصد را بر می‌گرداند. با توجه به اینکه هزینه رفتن از هر خانه به خانه دیگر برابر یک (مسیر وزن دار نیست) است هزینه را می‌توان به صورت مستقیم خانه‌های طی شده را در نظر گرفت. کد پیاده‌سازی در الگوریتم DFS در فایل Q3.py آورده شده است. در

مجموع ۷۶ مسیر برای رفتن از مبدا به مقصد وجود دارد که تمامی مسیرها در فایل paths.csv آورده شده است. با توجه به اینکه بازه تابع هزینه از ۷ تا ۱۷ است نمی‌توان رتبه ۱۰ و ۵۰ را صرفاً یک مسیر مشخص معرفی کرد و حتی برای کمترین هزینه نیز دو مسیر وجود دارد؛ صرفاً مسیری که DFS بدست آورده و تابع هزینه آن رتبه‌های خواسته شده را داراست، آورده شده است و جواب یکتا ندارد ولی هزینه مسیر یکتا است.

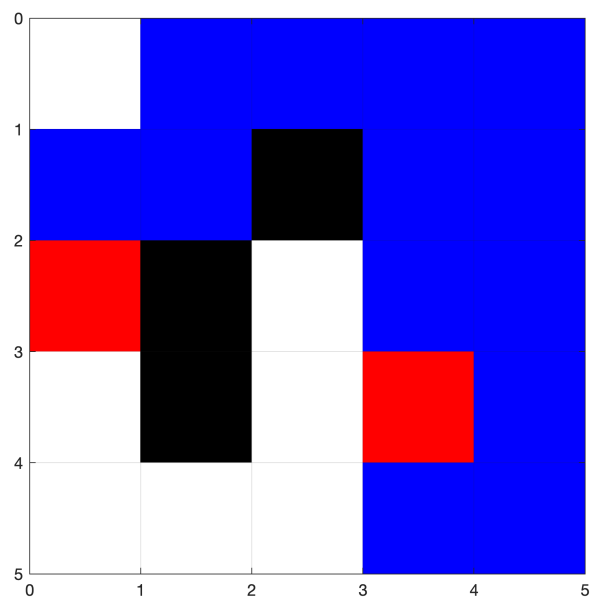


شکل ۱: مسیر با هزینه ۷ و رتبه ۱

انیمیشن مسیر حرکت نیز در فایل map\_visualisation.m آورده شده است.



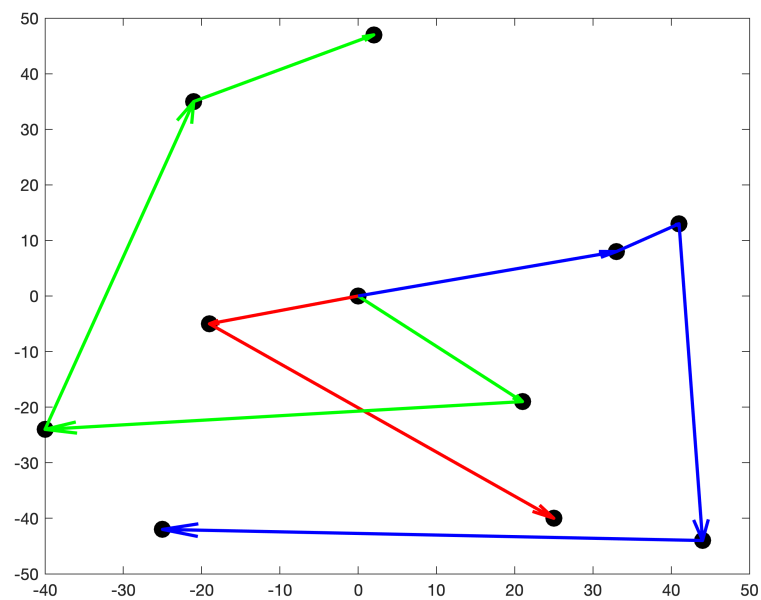
شکل ۲: مسیر با هزینه ۱۱ و رتبه ۱۰



شکل ۳: مسیر با هزینه ۱۵ و رتبه ۵۰

## ۴ سوال چهارم

برای حل این مسأله ابتدا به گروه بندی مراکز پرداخته شده‌است. در مرحله اول به این پرداخته شده است که هر ماشین باید به چند مرکز برود. برای بدست آوردن این گروه بندی‌ها حالت‌های تکراری پیش می‌آید به این صورت که گروه بندی (۲، ۲، ۶) و (۲، ۶، ۲) کاملاً یکسان است و تفاوتی نمی‌کند کامیونت اول به مرکز ۶ برود، دومی به مرکز ۲ و سومی به مرکز ۲ برود یا کامیونت اول به مرکز ۲ برود، دومی به مرکز ۶ و سومی به مرکز ۲ برود، صرفاً حجم محاسبات را بالا می‌برد. در نهایت ۱۴ حالت برای گروه بندی بدست آمد. در ادامه جایگشت‌های مختلف برای هر گروه بررسی شد. به این صورت، در یک آرایه بر اساس گروه بنده اعداد ۰، ۱ و ۲ گذاشته شد. جایگاه هر عدد نشان دهنده مرکز و مقدار هر جایگاه نشاندهنده این بود با کدام کامیونت به آن مرکز رفت. بعد ساخت این آرایه تمامی جایگشت‌ها ساخته شد و هر جایگشت به صورت یک مسأله TSP بررسی شد. در انتها تابع هزینه به صورت بیشترین مسافت طی شده کامیونت‌ها در هر حالت قرار داده شد. مسیر کمترین زمان طی شده در شکل ۴ آورده شده‌است. تعداد کل حالات بررسی شده ۴،۰۸۵،۲۱۵ است. با فرض اینکه سرعت یک متر بر ثانیه است، کمترین زمان برابر با ۹،۲۶۵ ثانیه است.



شکل ۴: مسیر بهینه کامیونت‌ها به مراکز (هر رنگ نشان دهنده مسیر یک کامیونت است).