حل عددی مسایل کنترل بهینه غیرخطی

تئوری کنترل بهینه:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\right)$$

$$J(\vec{u}(t)) = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)\, dt$$

$$\mathcal{H} = g(\vec{x}, \vec{u}, t) + \vec{p}^T \vec{a}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}})^T\, \delta\vec{x} + (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}})^T \delta\vec{u} + (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} - \dot{\vec{x}})^T \delta\vec{p} \right] dt$$
$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f$$

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \vec{a}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$
$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}}$$
$$\vec{0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, \vec{p}, t)$$

مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای Two Point Boundary Value Problem TPBVP

شروط مرزی $\qquad \left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f = 0$

لزوما حل تحلیلی برای این معادلات پیدا نمی شود.

دو روش کلی حل عددی

- بهینه سازی مستقیم Direct Optimization
  - مستقیما مساله کنترل بهینه به بهینه سازی تبدیل شود
  - Nonlinear programming (unconstrained/constrained)
- حل عددی مساله مقدارمرزی دونقطه ای Indirect Optimization
  - (عملا مساله بهینه شده، فقط باید حل شود)

بهینه سازی غیرمستقیم

روش پرتابه ای ساده Simple Shooting Method

مساله به فرم زیر تبدیل شده

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \vec{a}(\vec{x},\vec{u},t) \\ \dot{\vec{p}} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = \vec{a}_p(\vec{x},\vec{u},\vec{p},t) \end{cases} \xrightarrow{\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},\vec{p},t)} \begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x},\vec{p},t) \\ \dot{\vec{p}} = \vec{a}_p(\vec{x},\vec{p},t) \end{cases}$$

که n شرط ابتدایی معلوم است (معمولا x) و n شرط انتهایی

می توان مساله مقدار مرزی را به مساله مقدار اولیه (initial value problem) تبدیل کرد.

زمان نهایی مشخص

به عنوان نمونه، فرض کنید شرایط ابتدایی $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ معلوم باشند و البته برای حل مساله مقدار اولیه، $\vec{y} = \vec{p}_0$ مجهول هستند.

با حدس اولیه برای این مجهولات می توان معادلات زیر را با مقدار اولیه حل کرد:

$$\vec{z} = \vec{z}_{2n\times 1} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{z}} = \vec{a}_z(\vec{z},t) = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_p \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}(t_0) = \begin{pmatrix} \vec{x}(t_0) \\ \vec{p}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix}$$

پس از حل با هر روش حل ode (مثل روش های Runge-Kutta) مقدار نهایی بدست می آید

$$\vec{z}(t_f) = \begin{pmatrix} \vec{x}(t_f) \\ \vec{p}(t_f) \end{pmatrix}$$

پس می توان شرط نهایی را به فرم زیر نوشت:

$$\vec{F}(\vec{y}) = \vec{F}(\vec{p}_0) = \vec{0}$$

مساله می شود n معادله (شرایط نهایی) و n مجهول (شرایط ابتدایی)

به عنوان نمونه، فرض کنید شرایط نهایی $\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f$ معلوم باشند. معادلات نهایی می شود:

$$\vec{F}(\vec{y}) = \vec{F}(\vec{p}_0) = \vec{x}(t_f) - \vec{x}_f = \vec{0}$$

توجه کنید که در حقیقت $\vec{x}(t_f)$ تابع $\vec{p}_0$ است و $\vec{x}_f$ اعداد مشخص.

به عنوان نمونه دوم، فرض کنید شرایط نهایی $\vec{x}(t_f)$ آزاد باشند. معادلات نهایی می شود:

$$\vec{F}(\vec{y})=\vec{F}(\vec{p}_0)=\frac{\partial h}{\partial \vec{x}}(t_f)-\vec{p}(t_f)=\vec{0}$$

توجه کنید که در این حالت $\vec{p}(t_f)$ تابع $\vec{p}_0$ است و $\frac{\partial h}{\partial \vec{x}}(t_f)$ احتمالا تابع $\vec{x}(t_f)$ است که خودش هم دوباره تابع $\vec{p}_0$ است.

به همین ترتیب هر شرط مرزی را می توان به فرم $\vec{F}(\vec{y})=\vec{0}$ نوشت.

روش حل: نیوتن

یادآوری: بسط تیلور:

$$\vec{F}(\vec{y}_{k+1})=\vec{F}(\vec{y}_k)+\left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right|_{\vec{y}_k}(\vec{y}_{k+1}-\vec{y}_k)+\mathrm{O}(.)$$

با فرمول نیوتن (به هدف $\vec{F}(\vec{y}_{k+1})=\vec{0}$)

$$\vec{y}_{k+1}=\vec{y}_k-\left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right|_{\vec{y}_k}^{-1}\vec{F}(\vec{y}_k)$$

با حدس اولیه مناسب! می توان معادله را حل کرد

شرط توقف:

$$\left\|\vec{F}(\vec{y}_k)\right\|<\varepsilon \qquad or \qquad \left\|\vec{y}_{k+1}-\vec{y}_k\right\|<\varepsilon$$

$\left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right|_{\vec{y}_k}$ حساسیت معادلات است به همان حدس اولیه

نمونه ۱، شرایط نهایی $\vec{x}(t_f)=\vec{x}_f$ معلوم، معادلات بود: $\vec{F}(\vec{y})=\vec{F}(\vec{p}_0)=\vec{x}(t_f)-\vec{x}_f=\vec{0}$

پس:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}=\frac{\partial\left[\vec{x}(t_f)-\vec{x}_f\right]}{\partial \vec{y}}=\frac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}$$

فقط برای اینکه مشخص باشد:

$$\frac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(t_f)}{\partial p_1(t_0)} & \frac{\partial x_1(t_f)}{\partial p_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial x_1(t_f)}{\partial p_n(t_0)} \\ \frac{\partial x_2(t_f)}{\partial p_1(t_0)} & \frac{\partial x_2(t_f)}{\partial p_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial x_2(t_f)}{\partial p_n(t_0)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t_f)}{\partial p_1(t_0)} & & & \frac{\partial x_n(t_f)}{\partial p_n(t_0)} \end{pmatrix}$$

نمونه ۲، شرایط نهایی $\vec{x}(t_f)$ آزاد، معادلات بود: $\vec{F}(\vec{y})=\vec{F}(\vec{p}_0)=\frac{\partial h}{\partial \vec{x}}(t_f)-\vec{p}(t_f)=\vec{0}$

پس:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}=\frac{\partial\left[\frac{\partial h}{\partial \vec{x}}(t_f)-\vec{p}(t_f)\right]}{\partial \vec{y}}=\left.\frac{\partial^2 h}{\partial \vec{x}^2}\right|_{\vec{x}_f}\frac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}-\frac{\partial \vec{p}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}$$

به همین ترتیب هر شرط نهایی دیگر نیاز به $\frac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}$ و $\frac{\partial \vec{p}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}$ دارد.

نکته: روش پرتابه ای ساده برای سیستم خطی با تابع هزینه درجه ۲ با یک قدم همگرا می شود.

ماتریس حساسیت

راه حل عددی finite difference

تغییر فقط در یکی از $\vec{y}$ ها و بررسی اثر آن در $\vec{F}$

با تغییر فقط iامین المان y_i به اندازه Δy_i ستون iام ماتریس $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}$ می شود

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial y_i}=\frac{\vec{F}(\vec{y}_i+\Delta\vec{y}_i)-\vec{F}(\vec{y}_i)}{\Delta y_i}$$

راه حل شبه تحلیلی

برای سیستم معادلات غیرخطی با شرط اولیه زیر:

$$\dot{\vec{z}}=\vec{a}_z(\vec{z},t),\qquad \vec{z}_{2n\times 1}(t_0)$$

ماتریس $\Phi(t)$ (Funadamental Matrix) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{\Phi}(t)=\frac{\partial \vec{a}_z}{\partial \vec{z}}\Phi(t), \qquad \Phi(t_0)=I \qquad \Phi_{2n\times 2n}$$

$$\left[\frac{\partial \vec{a}_z}{\partial \vec{z}}\right]_{2n\times 2n}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial a_1}{\partial z_{2n}} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial z_1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial z_1} & & & \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}$$

که:

$$\Phi(t)=\Phi(t,t_0)=\frac{\partial \vec{z}(t)}{\partial \vec{z}(t_0)}$$

برای سیستم خطی همان State Transition Matrix هست.

برای سیستم پریودیک بعد از یک پریود همان Monodromy Matrix هست.

پس برای سیستم مدنظر ما:

$$\Phi_{2n\times 2n}(t_f)=\frac{\partial \vec{z}(t_f)}{\partial \vec{z}(t_0)} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{x}(t_0)} & \dfrac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)} \\ \dfrac{\partial \vec{p}(t_f)}{\partial \vec{x}(t_0)} & \dfrac{\partial \vec{p}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)} \end{pmatrix}$$

زمان آزاد

اگر زمان آزاد باشد، یک مجهول و یک معادله اضافه می شود

به عنوان نمونه، فرض کنید شرایط ابتدایی $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ و شرایط نهایی $\vec{x}(t_f)=\vec{x}_f$ معلوم باشند.

مجهولات:

$$\vec{y}_{(n+1)\times 1}=\begin{pmatrix} \vec{p}_0 \\ t_f \end{pmatrix}$$

معادلات:

$$\vec{F}_{(n+1)\times 1} = \begin{pmatrix} \vec{x}(t_f) - \vec{x}_f \\ \left(\mathcal{H} + h_t\right)\Big|_{t_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F}_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

n+1 معادله n+1 مجهول

با روش نیوتن

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k - \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right|_{\vec{y}_k}^{-1} \vec{F}(\vec{y}_k)$$

نیاز به ماتریس حساسیت است:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{F}_n}{\partial \vec{p}_0} & \frac{\partial \vec{F}_n}{\partial t_f} \\ \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \vec{p}_0} & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial t_f} \end{pmatrix}$$

برای حالت نمونه:

$$\frac{\partial \vec{F}_n}{\partial \vec{p}_0} = \frac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}$$

$$\frac{\partial \vec{F}_n}{\partial t_f} = \frac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial t_f} = \frac{d\vec{x}(t_f)}{dt_f} = \dot{\vec{x}}(t_f)$$

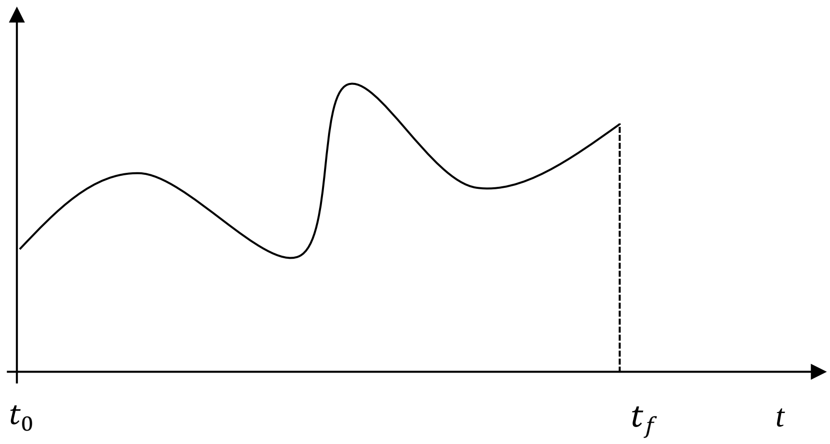
$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \vec{p}_0} = \frac{\partial \left(\mathcal{H} + h_t\right)\Big|_{t_f}}{\partial \vec{p}_0} = \frac{\partial F_{n+1}(\vec{x}(t_f), \vec{p}(t_f), t_f)}{\partial \vec{p}_0} = \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \vec{x}(t_f)} \frac{\partial \vec{x}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)} + \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \vec{p}(t_f)} \frac{\partial \vec{p}(t_f)}{\partial \vec{p}(t_0)}$$

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial t_f} = \frac{\partial \left(\mathcal{H} + h_t\right)\Big|_{t_f}}{\partial t_f} = \frac{dF_{n+1}(\vec{x}(t_f), \vec{p}(t_f), t_f)}{dt_f} = \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \vec{x}(t_f)} \frac{d\vec{x}(t_f)}{dt_f} + \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \vec{p}(t_f)} \frac{d\vec{p}(t_f)}{dt_f} + \frac{\partial F_{n+1}}{\partial t_f}$$

برای بقیه حالت ها باید به صورت مشابه پیدا کنید

روش پرتابه ای چندمرحله ای Multiple Shooting

مشکل روش پرتابه ای ساده: برای سیستم های خیلی غیرخطی شاید نشه فقط با شرط اولیه شرط نهایی را کنترل کرد



زمان نهایی مشخص

به عنوان نمونه، فرض کنید شرایط ابتدایی $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ و شرایط نهایی $\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f$ معلوم باشند.

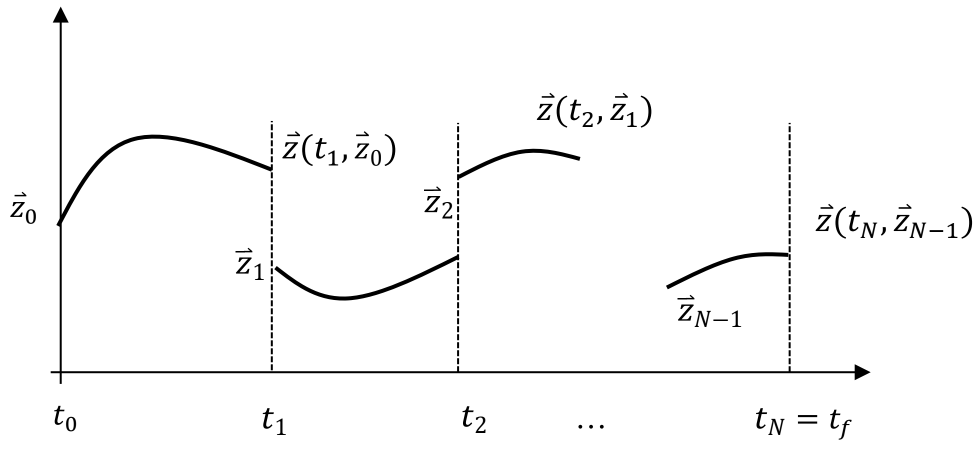
مجهولات:

$$\vec{y}_{(n+2n(N-1))\times 1} = \begin{pmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{x}_1 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{p}_2 \\ \vdots \\ \vec{x}_{N-1} \\ \vec{p}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vdots \\ \vec{z}_{N-1} \end{pmatrix}_{(n+2n(N-1))\times 1}$$

در هر تکه یک مساله مقدار اولیه حل می شود:

$$\vec{z}_i = \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \vec{p}(t_i) \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = \vec{z}_{2n\times 1} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{z}} = \vec{a}_z(\vec{z},t) = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{a}_p \end{pmatrix} \qquad t_i \le t \le t_{i+1}, i = 1,\dots,N-1$$



پس از حل با هر روش حل ode (مثل روش های Runge-Kutta) مقدار نهایی بدست می آید که می شود $\vec{z}(t_{i+1},\vec{z}_i)$

معادله شرط مرزی (Boundary Condition)

$$\vec{z}(t_{i+1},\vec{z}_i)=\begin{pmatrix}\vec{x}(t_{i+1},\vec{z}_i)\\ \vec{p}(t_{i+1},\vec{z}_i)\end{pmatrix} \qquad \vec{x}(t_N,\vec{z}_{N-1})-\vec{x}_f=\vec{0}$$

معادله شروط پیوستگی (Continuity Condition)

$$\vec{z}(t_{i+1},\vec{z}_i)-\vec{z}_{i+1}=\vec{0}_{2n\times 1}$$

جمع معادلات:

$$\vec{F}(\vec{y})=\begin{pmatrix}\vec{z}(t_1,\vec{z}_0)-\vec{z}_1\\ \vec{z}(t_2,\vec{z}_1)-\vec{z}_2\\ \vdots\\ \vec{z}(t_{N-1},\vec{z}_{N-2})-\vec{z}_{N-1}\\ \vec{x}(t_N,\vec{z}_{N-1})-\vec{x}_f\end{pmatrix}=\vec{0}_{\left(n+2n(N-1)\right)\times 1}$$

مساله می شود n+2n(N-1) معادله (شرایط مرزی و پیوستگی) و مجهول (شرایط ابتدایی و میانی)

هر شرط مرزی دیگری رو باید به صورت مشابه قرار دهید (این نمونه بود)

با روش نیوتن

$$\vec{y}_{k+1}=\vec{y}_k-\left.\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{y}}\right|_{\vec{y}_k}^{-1}\vec{F}(\vec{y}_k)$$

نیاز به ماتریس حساسیت است:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{z}(t_1,\vec{z}_0)}{\partial \vec{p}_0} & -\frac{\partial \vec{z}_1}{\partial \vec{z}_1} & 0_{2n\times 2n} & \cdots & 0_{2n\times 2n} \\ 0_{2n\times n} & \frac{\partial \vec{z}(t_2,\vec{z}_1)}{\partial \vec{z}_1} & -\frac{\partial \vec{z}_2}{\partial \vec{z}_2} & 0_{2n\times 2n} & 0_{2n\times 2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0_{2n\times n} & & & \frac{\partial \vec{z}(t_{N-1},\vec{z}_{N-2})}{\partial \vec{z}_{N-2}} & -\frac{\partial \vec{z}_{N-1}}{\partial \vec{z}_{N-1}} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times 2n} & \cdots & 0_{n\times 2n} & \frac{\partial \vec{x}(t_N,\vec{z}_{N-1})}{\partial \vec{z}_{N-1}} \end{pmatrix}$$

که در آن

$$\frac{\partial \vec{z}(t_1,\vec{z}_0)}{\partial \vec{p}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}(t_1,\vec{z}_0)}{\partial \vec{p}_0} \\ \frac{\partial \vec{p}(t_1,\vec{z}_0)}{\partial \vec{p}_0} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{z}_i}{\partial \vec{z}_i} = I_{2n\times 2n}$$

ماتریس $\Phi(t)$ (Funadamental Matrix) مشابه قبل:

$$\Phi(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1},t_i) = \frac{\partial \vec{z}(t_{i+1},\vec{z}_i)}{\partial \vec{z}_i}$$

برای حل:

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\partial \vec{a}_z}{\partial \vec{z}}\Phi(t), \qquad \Phi(t_i) = I, \vec{z}(t_i) = \vec{z}_i$$

هر شرط مرزی دیگری رو باید به صورت مشابه قرار داد.

هر متغیر دیگری به $\vec{y}$ اضافه شود، به صورت مشابه باید یک معادله به $\vec{F}$ اضافه شود و حساسیت آن پیدا شود (مشابه پرتابه ای ساده)