۱- نقاط مینیمم تابع زیر را در بازه داده شده بدست آورید (قبلا در تمرین سری ۱ تحلیلی حل کرده اید):

$$z = f\left(x,y\right) = y\sin(x+y) - x\sin(x-y), \quad x,y \in [-4,4]$$

با ترکیب روش‌های زیر مساله بهینه‌سازی را به صورت عددی حل کنید:

- Steepest Descent/BFGS
- Quadratic Interpolation/Golden Section

یعنی جمعا ۴ حالت مختلف برر سی شود. برای شرط توقف بهینه سازی (تلرانس گرادیان) از 10^{-8} و برای شرط توقف جستجوی خطی از تلرانس 10^{-3} استفاده شود. برای هر روش تعداد لازم برای محاسبه تابع هزینه و همچنین گرادیان و همچنین زمان کل حل را در سه جدول مقایسه کنید. اگر در همگرایی مشکل داشتید، خودتان تلرانس‌ها را بزرگ‌تر کنید. نتایج را برای دو شرط اولیه $[-1,-1]$ و $[-1,1]$ بررسی کنید. (۲۰ نمره)

۲- سیستم زیر را با شرایط اولیه آن در نظر بگیرید:

$$\ddot{x}(t) = -x(t) - 0.1\dot{x}(t) + u(t), \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 1$$

کنترل بهینه و متغیرهای حالت را به نحوی محاسبه کنید که تابع هزینه زیر را به ازای H=10I و $t_f = 3$ sec کمینه کند: (توجه کنید که در تمرین سری قبل این را با معادله ریکاتی حل کرده اید)

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)\mathrm{H}\,x(t_f) + \int_0^{t_f}\left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right)dt$$

الف) در شرایطی که هیچ قیدی روی کنترل و موقعیت نیست. با ترکیب روش‌های زیر مساله بهینه سازی را به صورت عددی حل کنید: (۱۰ نمره)

- Steepest Descent/BFGS
- Quadratic Interpolation/Golden Section

یعنی جمعا ۴ حالت مختلف برر سی شود. برای شرط توقف بهینه سازی (تلرانس گرادیان) از 10^{-5} و برای شرط توقف جستجوی خطی از تلرانس 10^{-2} استفاده شود. برای هر روش تعداد لازم برای محاسبه تابع هزینه و همچنین گرادیان و همچنین زمان کل حل را در سه جدول مقایسه کنید. اگر در همگرایی مشکل داشتید، خودتان تلرانس‌ها را بزرگ‌تر کنید. نیاز به مقایسه نتایج هر شبیه‌سازی شامل متغیرهای حالت و متغیر کنترل نیست. فقط یکبار رسم شود کافی است. تحلیل مختصری از نتایج هر بخش ارائه دهید.

سپس در یکی از این حالتها (ترکیب BFGS با Quadratic Interpolation) برای جستجوی خطی غیر از تلرانس، روی تعداد حلقه آن محدودیت ۴ بگذارید و تعداد لازم برای محاسبه تابع هزینه و همچنین گرادیان و همچنین زمان کل حل را با حالتی که محدودیت ۴ تکرار نبود مقایسه کنید.

ب) در شرایطی که قید زیر روی آن اعمال شده باشد با یکی از روش های بهینه سازی (ترجیحا ترکیب BFGS با Quadratic Interpolation) مساله را حل کنید (و نتایج را با بخش قبل مقایسه کنید): (۱۵ نمره)

$$-0.4 \le u \le 0.4$$

نتایج را با حالتی که با معادله ریکاتی حل می کردید و فقط قید را به کنترل اعمال کنید مقایسه کنید.

۳- کنترل زمان بهینه سیستم زیر

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2u \end{cases}$$

را با وجود قید روی کنترل $\left|u(t)\right| \le 1$ و برای رســـیدن به مبدا $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ با دو روش زیر حل کنید: (۲۵ نمره)

(الف) با بهینه سازی مستقیم (ترجیحا ترکیب BFGS با Quadratic Interpolation)

(ب) به روش پرتابه ای ساده

۴- سیستم زیر را با شرایط اولیه آن در نظر بگیرید:

$$\ddot{x}(t) = -0.4x(t) - 0.2\dot{x}^2(t) + u(t), \qquad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.2$$

کنترل بهینه و متغیرهای حالت را به نحوی محاسبه کنید که تابع هزینه زیر را کمینه کند:

$$J = \int_0^5 \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right) dt$$

و در مدت زمان 5 ثانیه به مبدا برسد $x(5) = \dot{x}(5) = 0$ و قید زیر را ارضا کند:

$$-0.8 \le u \le 0.8$$

توجه کنید سیستم غیرخطی است. انتخاب تلرانس‌ها به عهده خود شما (منطقی باشند).

مساله را با روش های زیر حل کنید:

الف) بهینه سازی غیرخطی (۷ نمره)

ب) روش پرتابه ای ساده (۸ نمره)

ج) برنامه ریزی دینامیکی با شرایط زیر: (۲۰ نمره)

- گسسته سازی با $\Delta t = 0.05\sec$
- مقداردهی کنترل به صورت $u = -0.8 : 0.1 : 0.8$ (در بازه مجاز با قدم 0.1)
- مقداردهی حالتها به صورت $x, \dot{x} = -1.4 : 0.2 : 1.4$ (بازه درنظر بگیرید با قدم 0.1)

نتایج را با هم مقایسه کنید (مسیر و کنترل و زمان حل). در برنامه ریزی دینامیکی، نیاز نیست جداول را گزارش کنید. البته جداول تصمیم گیری را یک مرتبه در ست کنید (در همان فایل های کد)، و بعد با شرایط اولیه برنامه را اجرا کنید و کنترل ها رو از روی جداول میانیابی کنید و رسم کنید و سپس با دو روش اول مقایسه کنید.
