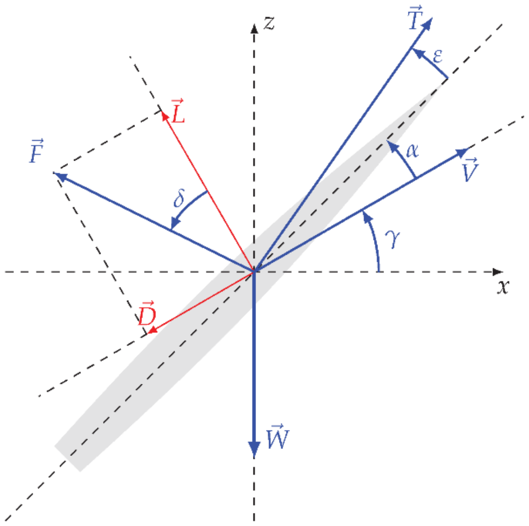
# مثال معادلات کنترل بهینه

سیستم زیر با متغیرهای حالت $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ v \\ \gamma \end{pmatrix}$ و متغیرهای کنترل $\vec{u} = \begin{pmatrix} T \\ \alpha \end{pmatrix}$




$\varepsilon = 0$

معادلات سیستم:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\gamma \\ \dot{z} = v\sin\gamma \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m}\left(-D + T\cos\alpha - mg\sin\gamma\right) \\ v\dot{\gamma} = \dfrac{1}{m}\left(L + T\sin\alpha - mg\cos\gamma\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha\right) \\ D = \dfrac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D_0} + KC_L^2\right) = \dfrac{1}{2}\rho v^2 S\left[C_{D_0} + K\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha\right)^2\right] \end{cases}$$

با تابع هزینه:

$$J(\vec{u}(t)) = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(R_T T^2 + R_\alpha \alpha^2\right)dt = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \vec{u}^T R \vec{u}\, dt$$

$$R = \begin{pmatrix} R_T & 0 \\ 0 & R_\alpha \end{pmatrix}$$

تابع همیلتونین:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = g(\vec{x},\vec{u},t) + \vec{p}^{T}\vec{a}(\vec{x},\vec{u},t) &= \frac{1}{2}R_{T}T^{2} + \frac{1}{2}R_{\alpha}\alpha^{2} + p_{x}v\cos\gamma + p_{z}v\sin\gamma \\ &+ \frac{1}{m}p_{v}\left(-\frac{1}{2}\rho v^{2}S\left[C_{D_0} + K\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha\right)^{2}\right] + T\cos\alpha - mg\sin\gamma\right) \\ &+ \frac{1}{m}p_{\gamma}\left(\frac{1}{2}\rho v^{2}S\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha\right) + T\sin\alpha - mg\cos\gamma\right)\end{aligned}$$

معادلات سیستم که همان قبلی است.

معادلات کنترل (معادلات جبری):

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{u}} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial T} = R_{T}T + \dfrac{1}{m}p_{v}\cos\alpha + \dfrac{1}{m}p_{\gamma}\sin\alpha = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\alpha} = R_{\alpha}\alpha - \dfrac{1}{m}p_{v}T\sin\alpha + \dfrac{1}{m}p_{\gamma}T\cos\alpha = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}T = -\dfrac{1}{mR_{T}}\left(p_{v}\cos\alpha + p_{\gamma}\sin\alpha\right) \\ \alpha = -\dfrac{1}{mR_{\alpha}}\left(-p_{v}T\sin\alpha + p_{\gamma}T\cos\alpha\right)\end{cases}$$

فرض می شود چگالی، تراست موتور و گرانش تابع ارتفاع باشد.

همچنین فرض می شود که تراست تابع سرعت باشد.

یعنی:

$$\begin{aligned}T &= T(z,v) \\ g &= g(z) \\ \rho &= \rho(z)\end{aligned}$$

معادلات دیفرانسیل شبه-حالت ها (co-states):

$$\begin{aligned}&\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{x}} \Rightarrow \\ &\dot{p}_{x} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = 0 \\ &\dot{p}_{z} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = -\frac{1}{m}p_{v}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial z}v^{2}SC_{D} + \frac{\partial T}{\partial z}\cos\alpha - m\frac{\partial g}{\partial z}\sin\gamma\right) \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{m}p_{\gamma}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial z}v^{2}SC_{L} + \frac{\partial T}{\partial z}\sin\alpha - m\frac{\partial g}{\partial z}\cos\gamma\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_v = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} &= -p_x \cos\gamma - p_z \sin\gamma \\
&\quad -\frac{1}{m} p_v \left(-\rho v S C_D + \frac{\partial T}{\partial v}\cos\alpha\right) \\
&\quad -\frac{1}{m} p_\gamma \left(\frac{1}{2}\rho v^2 S C_L + \frac{\partial T}{\partial v}\sin\alpha\right) \\
\dot{p}_\gamma = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma} &= +p_x v \sin\gamma - p_z v\cos\gamma + p_v g\cos\gamma - p_\gamma g \sin\gamma
\end{aligned}
$$

حالا باید معادلات شرط مرزی برای این ۸ معادله دیفرانسیل به همراه ۲ معادله جبری بدست آورد.

در تمام موارد فرض می شود شرایط ابتدایی مشخص است:

$$
\vec{x}(t_0) = \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5000\ \mathrm{m} \\ 300\ \mathrm{m/s} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

**حالت اول:** زمان نهایی و شرط نهایی معلوم

$$
\begin{aligned}
t_f &= 200\,\mathrm{sec} \\
\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f &= \begin{pmatrix} 60,000\ \mathrm{m} \\ 7000\ \mathrm{m} \\ 310\ \mathrm{m/s} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

مثلا سرعت $310\ \mathrm{m/s}$ سرعتی باشد که در معادلات زیر صدق کند:

$$
\begin{cases}
-D + T\cos\alpha = 0 & \Rightarrow \quad \dot{v} = 0 \\
L + T\sin\alpha - mg = 0 & \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = 0
\end{cases}
$$

**حالت دوم:** زمان نهایی نامعلوم، ولی شرط نهایی معلوم

$$
\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f = \begin{pmatrix} 60,000\ \mathrm{m} \\ 7000\ \mathrm{m} \\ 310\ \mathrm{m/s} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

نیاز است که تابع پنالتی نهایی هم داده شود. مثلا برای اینکه در زمان مینیمم این کار انجام شود:

$$
J(\vec{u}(t)) = \frac{1}{2} t_f^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(R_T T^2 + R_\alpha \alpha^2\right) \qquad\qquad h(\vec{x}(t_f), t_f) = \frac{1}{2} t_f^2
$$

برای زمان که نامعلوم است:

$$t_f \text{ is free} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}(t_f) + h_t(t_f) = \mathcal{H}(t_f) + t_f = 0$$

به صورت نمونه جایگذاری می کنم (بعدا می بینید که این معادله ساده تر هم می شود):

$$\begin{aligned}
&t_f \text{ free} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}(t_f) + h_t(t_f) = \mathcal{H}(t_f) + t_f = 0 \\
&\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}R_T T^2(t_f) + \frac{1}{2}R_\alpha \alpha^2(t_f) + p_x(t_f)v(t_f)\cos\gamma(t_f) + p_z(t_f)v(t_f)\sin\gamma(t_f) \\
&\qquad + \frac{1}{m}p_v(t_f)\left(-\frac{1}{2}\rho(t_f)v^2(t_f)S\left[C_{D_0} + K\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha(t_f)\right)^2\right] + T(t_f)\cos\alpha(t_f) - mg(t_f)\sin\gamma(t_f)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{m}p_\gamma(t_f)\left(\frac{1}{2}\rho(t_f)v^2(t_f)S\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha(t_f)\right) + T(t_f)\sin\alpha(t_f) - mg(t_f)\cos\gamma(t_f)\right) + t_f = 0
\end{aligned}$$

**حالت سوم (کاربردی):** زمان نهایی نامعلوم، شرط نهایی به صورت زیر:

$$\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f = \begin{pmatrix} \text{free} \\ 7000 \text{ m} \\ 310 \text{ m/s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

نیاز است مشابه قبلی تابع پنالتی نهایی هم داده شود:

$$J(\vec{u}(t)) = \frac{1}{2}t_f^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(R_T T^2 + R_\alpha \alpha^2\right) \qquad\qquad h(\vec{x}(t_f), t_f) = \frac{1}{2}t_f^2$$

برای زمان نهایی که نامعلوم است:

$$t_f \text{ free} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}(t_f) + h_t(t_f) = \mathcal{H}(t_f) + t_f = 0$$

برای متغیر حالت اول ($x$) که نامعلوم است:

$$x_f \text{ is free} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial x} - p_x\right)_{t_f} = -p_x(t_f) = 0$$

یعنی از متغیرهای نهایی سه متغیر از بردار حالت $\vec{x}(t_f)$ و یک متغیر از بردار شبه حالت $\vec{p}(t_f)$ معلوم است.

**حالت سوم (کاربردی):** زمان نهایی نامعلوم، شرط نهایی قرار است به یک هواپیمای دیگر با شرایط زیر برسد و مهم نیست با چه بردار سرعتی می‌رسد:

$$\begin{cases} x_f = 1000 + 200t_f \\ z_f = 6000 + 10t_f \end{cases} \qquad\qquad \vec{x}(t_f) = \vec{x}_f = \begin{pmatrix} x_f \\ z_f \\ \text{free} \\ \text{free} \end{pmatrix}$$

و تابع هزینه به صورت زیر است:

$$J(\vec{u}(t)) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(R_T T^2 + R_\alpha \alpha^2\right) \qquad\qquad h(\vec{x}(t_f), t_f) = 0$$

یعنی فقط هدف کنترل کمینه است.

معادلات مثب قبل است. برای شروط مرزی، معادله کامل شروط مروزی نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f = 0 \qquad\qquad (h=0)\\ &\Rightarrow \qquad -p_x(t_f)\delta x_f - p_z(t_f)\delta z_f - p_v(t_f)\delta v_f - p_\gamma(t_f)\delta\gamma_f + \mathcal{H}(t_f)\delta t_f = 0\end{aligned}$$

باتوجه به آزاد بودن دو متغیر آخر $\delta v_f \neq 0, \delta\gamma_f \neq 0$ و درنتیجه $p_v(t_f) = p_\gamma(t_f) = 0$.

برای دو متغیر اول داریم:

$$\begin{cases} x_f = 1000 + 200 t_f \\ z_f = 6000 + 10 t_f \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \delta x_f = 200\delta t_f \\ \delta z_f = 10\delta t_f \end{cases}$$

جایگذاری در معادله شروط مرزی:

$$\begin{aligned}&-p_x(t_f)200\delta t_f - p_z(t_f)10\delta t_f + \mathcal{H}(t_f)\delta t_f = 0 \xrightarrow{\delta t_f \neq 0}\\ &\qquad -200 p_x(t_f) - 10 p_z(t_f) + \mathcal{H}(t_f) = 0\end{aligned}$$