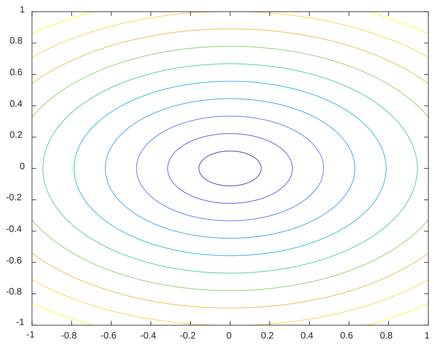
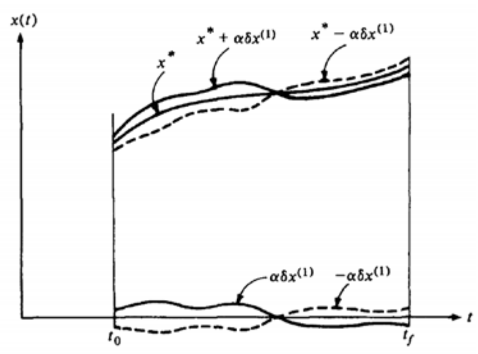
ریاضیات تغییرات (Calculus of Variation)

ریاضیات تغییرات (Calculus of Variation) و ریاضیات دیفرانسیل (Differential Calculus)





$$\Delta f = f(\vec{X}^* + \Delta\vec{X}) - f(\vec{X}^*) \simeq \Delta\vec{X}^T \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{X}}\right|_{\vec{X}^*} = df$$

$$\Delta J = J(\vec{x}(t)) - J(\vec{x}^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)dt - \int_{t_0^*}^{t_f^*} g\left(\vec{x}^*,\dot{\vec{x}}^*,t\right)dt$$

$$\delta J \triangleq \left(.\right)\delta\vec{x}_0 + \left(.\right)\delta\vec{x}_f + \left(.\right)\delta t_0 + \left(.\right)\delta t_f + \int_{t_0^*}^{t_f^*}\left(.\right)\delta\vec{x}(t)dt$$

بهینه‌سازی مسیر با تابع-تابع

ساده ترین نوع تابع-تابع

$$J(x(t),t) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),t)dt$$

$$\Delta J = J(x(t)) - J(x^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x,\dot{x},t)dt - \int_{t_0^*}^{t_f^*} g\left(x^*,\dot{x}^*,t\right)dt$$

برای سادگی اسکالر فرض می کنیم

فرض می کنیم زمان ابتدایی و انتهایی مشخص است (برای این مساله مجبوریم)

تغییرات حول نقطه بهینه با استفاده از بسط تیلور تابع g

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(g\left(x^*, t\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*,t^*} x(t) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{x^*,t^*} x^2(t) + \ldots \right) dt - \int_{t_0}^{t_f} g\left(x^*, t\right) dt$$

فقط ترم خطی نسبت به δx (variation)

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left. g_x \right|_{x^*,t^*} \delta x \right) dt$$

نسبت به δx خطی است پس شرط بهینگی $\delta J = 0$ است. درنتیجه برای کل مسیر

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^* = x^*(t)$$

برای همین شرط مرزی مهم نیست و همیشه باید این رابطه برقرار باشد.

تابع-تابع کاربردی برای کنترل بهینه

اسکالر (بعدا برداری)

$$J(x(t), t) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

ابتدا برای اینکه معادله مسیر زمان ابتدایی و انتهایی مشخص

$$\Delta J = J(x(t)) - J(x^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g\left(x^*, \dot{x}^*, t\right) dt$$

بسط تیلور تابع g

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(g\left(x^*, \dot{x}^*, t\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x^*,\dot{x}^*,t^*} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{x^*,\dot{x}^*,t^*} \delta \dot{x}(t) + \ldots \right) dt - \int_{t_0}^{t_f} g\left(x^*, \dot{x}^*, t\right) dt$$

فقط ترم خطی نسبت به δx و $\delta \dot{x}$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left. g_x \right|_{x^*,\dot{x}^*,t^*} \delta x + \left. g_{\dot{x}} \right|_{x^*,\dot{x}^*,t^*} \delta \dot{x} \right) dt$$

انتگرال‌گیری جزبه‌جز

$$\int_{t_0}^{t_f} g_{\dot{x}} \delta \dot{x} dt = \left. g_{\dot{x}} \right|_* \left. \delta x \right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_t} \left(\frac{d}{dt} g_{\dot{x}} \right) \delta x dt$$

نهایتا

$$\delta J = \left. g_{\dot{x}} \right|_* \left. \delta x \right|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left. \left(g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} \right) \right|_* \delta x dt$$

این ترم خطی نسبت به δx است پس شرط بهینگی $\delta J = 0$ است

معادله اویلر-لاگرانژ (برای مسیر)

$$\boxed{g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} = 0}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ ($\ddot{x}$)

مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای Two Point Boundary Value Problem - TPBVP

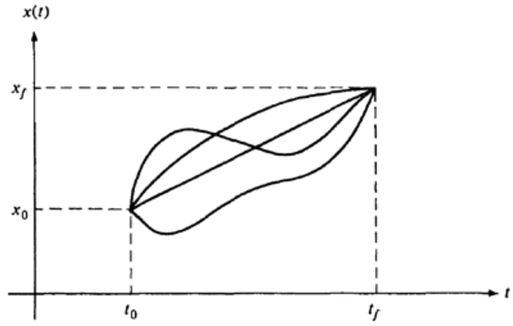
شروط مرزی با زمان ابتدا و انتها مشخص (fixed time)

$$g_{\dot{x}}\Big|_{*} \delta x\Big|_{t_0}^{t_f} = g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_f} \delta x(t_f) - g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_0} \delta x(t_0) = 0$$

شرایط ابتدا/انتها مشخص fixed boundary condition

$$x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta x(t_0) = 0$$

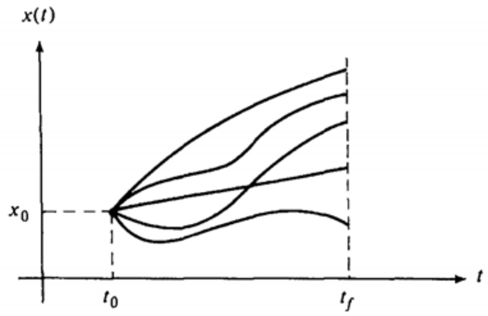
$$x(t_f) = x_f \qquad \Rightarrow \qquad \delta x(t_f) = 0$$



شرایط ابتدا/انتها آزاد free boundary condition

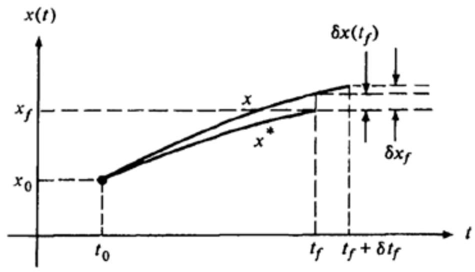
$$x(t_0) = free \quad \Rightarrow \quad \delta x(t_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_0} = 0$$

$$x(t_f) = free \quad \Rightarrow \quad \delta x(t_f) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_f} = 0$$



شروط مرزی با زمان ابتدا و انتها غیرمشخص

$$\Delta J = J(x(t)) - J(x^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt - \int_{t_0^*}^{t_f^*} g(x^*,\dot{x}^*,t)\,dt$$



بازه انتگرال گیری متفاوت

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_0^*} g(x,\dot{x},t)\,dt + \int_{t_0^*}^{t_f^*} g(x,\dot{x},t)\,dt + \int_{t_f^*}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt - \int_{t_0^*}^{t_f^*} g(x^*,\dot{x}^*,t)\,dt$$

ترم اول

$$\int_{t_0}^{t_0^*} g(x,\dot{x},t)\,dt = g\Big|_{*,t_0}(t_0^* - t_0) \overset{\delta t_0 = t_0 - t_0^*}{=} -g\Big|_{*,t_0}\delta t_0$$

ترم سوم

$$\int_{t_f^*}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt = g\Big|_{*,t_f}(t_f - t_f^*) \overset{\delta t_f = t_f - t_f^*}{=} g\Big|_{*,t_f}\delta t_f$$

ترم دوم و چهارم مثل قبل

$$g_{\dot{x}}\Big|_*\,\delta x\Big|_{t_0^*}^{t_f^*} + \int_{t_0^*}^{t_f^*}\left(g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}}\right)\Bigg|_*\delta x\ dt$$

نهایتا

$$\delta J = g_{\dot{x}}\delta x\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + g\delta t\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + \int_{t_0^*}^{t_f^*}\left(g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}}\right)\Bigg|_*\delta x\ dt$$

مشابه قبل:

برای کل مسیر معادله اویلر-لاگرانژ

$$g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}} = 0$$

بعلاوه شروط مرزی

در حالت کلی اگر زمان و متغیر حالت در ابتدا/انتها آزاد باشند، ارتباط $\delta x(t_0^*)$ و $\delta x(t_f^*)$ با $\delta x_0 = \delta x(t_0)$ و $\delta x_f = \delta x(t_f)$ به صورت زیر است:

$$\delta x_f = \dot{x}\,\delta t_f + \delta x(t_f^*) \Rightarrow \delta x(t_f^*) = \delta x_f - \dot{x}\;\delta t_f \Big|_{*,t_f}$$

$$\delta x(t_0^*) = \delta x_0 - \dot{x}\;\delta t_0 \Big|_{*,t_0}$$

و نهایتا فرم کلی تغییرات:

$$\boxed{\delta J = g_{\dot{x}}\delta x\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + \left(g - \dot{x}g_{\dot{x}}\right)\delta t\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + \int_{t_0^*}^{t_f^*}\left(g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}}\right)\Big|_*\,\delta x\;dt}$$

این رابطه کلا مشابه رابطه $df = f'dx$ در بهینه سازی تک پارامتری است.

چون نسبت به δx خطی است پس شرط بهینگی $\delta J = 0$ است

معادله اویلر-لاگرانژ (برای مسیر)

$$g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}} = 0$$

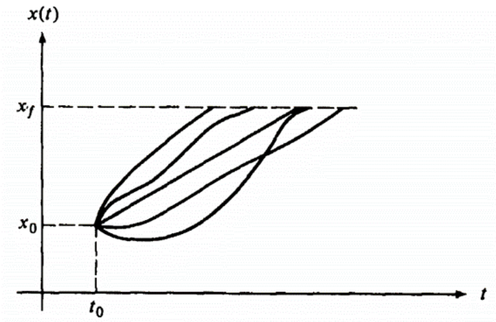
شروط مرزی زمان ابتدا و انتها آزاد (free initial/final time)

$$\begin{cases} \delta t_0 \neq 0 \to \left(g - \dot{x}\,g_{\dot{x}}\right)\Big|_{*,t_0} = 0 \\ \delta t_f \neq 0 \to \left(g - \dot{x}\,g_{\dot{x}}\right)\Big|_{*,t_f} = 0 \end{cases}$$

شرایط ابتدا/انتها مشخص fixed boundary condition

$$x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \delta x(t_0) = 0$$

$$x(t_f) = x_f \quad \Rightarrow \quad \delta x(t_f) = 0$$



شرایط ابتدا/انتها آزاد free boundary condition

$$x(t_0) = free \quad \Rightarrow \quad \delta x(t_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_0} = 0$$

$$x(t_f) = free \quad \Rightarrow \quad \delta x(t_f) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_f} = 0$$

شرایط ابتدا/انتها به زمان ابتدا/انتها وابسته باشد

مثلا برای شرایط انتها

$$x_f = \theta(t_f)$$

$$\delta x_f = \dot{\theta}\,\delta t_f$$

در معادله کلی تغییرات:

$$\delta j = \int_{t_0}^{t_f} \left[g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} \right] \delta x \, dt + \left(g_{\dot{x}} \dot{\theta} + g - g_{\dot{x}} \dot{x} \right)\Big|_{*,t_f} \delta t_f$$

شرط مرزی می شود:

$$\left(g + \left(\dot{\theta} - \dot{x} \right) g_x \right)\Big|_{*,t_f} = 0$$

$$x_f = \theta(t_f)$$

به صورت مشابه برای شرایط ابتدا

حالات خاص معادله اویلر

معادله اویلر یا اویلر-لاگرانژ

$$g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} = 0$$

g فقط تابع $\dot{x}$

$$g_x = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} g_{\dot{x}}(\dot{x}) = \frac{\partial g_{\dot{x}}}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = g_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{x} = 0 \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \rightarrow x(t) = c_1 t + c_1 \\ g_{\dot{x}\dot{x}} = 0 \rightarrow x(t) = c_1 t + c_1 \end{cases}$$

جواب در هرصورت خط است

g تابع $\dot{x}$ و t

$$g_x = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} = 0$$
$$g_{\dot{x}} = \mathrm{C} \quad \text{مقدار ثابت}$$

g تابع $\dot{x}$ و x

$$g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} = 0 \rightarrow g_x - \left(\frac{\partial g_{\dot{x}}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g_{\dot{x}}}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}\right) = 0$$
$$g_x - g_{\dot{x}x}\dot{x} - g_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = 0$$

معادل رابطه زیر

$$g_x - g_{\dot{x}x}\dot{x} - g_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}(g - \dot{x}g_{\dot{x}}) = 0$$
$$\frac{d}{dt}(g - \dot{x}g_{\dot{x}}) = 0 \rightarrow g - \dot{x}g_{\dot{x}} = \mathrm{C}$$

تاکید: در این حالت تابع $g(x,\dot{x})$ مستقل از t است.

g فقط تابع x

این حالت قبلا برای شروع بحث بررسی شد

$$g_{\dot{x}} = 0 \rightarrow g_x = 0$$

معادله جبری

ممکن است شروط مرزی ارضا نشود.

g تابع خطی از $\dot{x}$

$$g(x(t),\dot{x}(t),t) = M(x(t),t) + N(x(t),t)\,\dot{x}$$

معادله اویلر:

$$g_x - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}\dot{x}\right) - \frac{d}{dt}N = 0$$
$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}\dot{x}\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial N}{\partial t}\right) = 0 \rightarrow M_x(x(t),t) - N_t(x(t),t) = 0$$

بازهم معادله جبری و ممکن است شروط مرزی ارضا نشود.

معادله اویلر برای یک یا چندین تابع

تابع $g(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),t)$ اسکالر، ولی متغیرهای $\vec{x}$ و $\dot{\vec{x}}$ برداری

$$J(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)) = J(\vec{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),t)\,dt$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

مشابه قبل:

$$\Delta J = J(\vec{x}(t)) - J(\vec{x}^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)\,dt - \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}^*,\dot{\vec{x}}^*,t)\,dt$$

بسط تیلور:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\left(g + \frac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\delta x_n \right) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_1}\delta \dot{x}_1(t) + .. + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_n}\delta \dot{x}_n(t) \right)_* dt$$
$$-\int_{t_0}^{t_f} g\Big|_* dt$$

متغیرها مستقل هستند

تمام مراحل (انتگرال جزء به جزء و متغیر بودن شرایط مرزی) برای تک تک x ها مشابه قبل انجام می شود. نهایتا

$$\delta J = g_{\dot{\vec{x}}}^T \delta x \Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}^T \dot{\vec{x}} \right) \delta t \Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + \int_{t_0^*}^{t_f^*} \left(g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}} \right)\Big|_*^T \delta \vec{x}\, dt$$

$$\delta J = g_{\dot{\vec{x}}} \cdot \delta x \Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + \left(g - \dot{\vec{x}} \cdot g_{\dot{\vec{x}}} \right) \delta t \Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*} + \int_{t_0^*}^{t_f^*} \left(g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}} \right)\Big|_* \cdot \delta \vec{x}\, dt$$

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{x}} = g_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial g}{\partial \dot{\vec{x}}} = g_{\dot{\vec{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_n} \end{pmatrix} \qquad \delta \vec{x} = \begin{pmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{pmatrix}$$

معادله اویلر:

$$g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}} = \vec{0}$$

n معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

نیاز به $2n$ شرط مرزی

Problem description	*Substitution*	*Boundary conditions*	*Remarks*
1. $\mathbf{x}(t_f)$, t_f both specified (*Problem 1*)	$\delta\mathbf{x}_f = \delta\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ $\delta t_f = 0$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{x}_f$	$2n$ equations to determine $2n$ constants of integration
2. $\mathbf{x}(t_f)$ free; t_f specified (*Problem 2*)	$\delta\mathbf{x}_f = \delta\mathbf{x}(t_f)$ $\delta t_f = 0$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) = \mathbf{0}$	$2n$ equations to determine $2n$ constants of integration
3. t_f free; $\mathbf{x}(t_f)$ specified (*Problem 3*)	$\delta\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{x}_f$ $g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) = 0$	$(2n+1)$ equations to determine $2n$ constants of integration and t_f
4. t_f, $\mathbf{x}(t_f)$ free and independent (*Problem 4*)	—	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) = \mathbf{0}$ $g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) = 0$	$(2n+1)$ equations to determine $2n$ constants of integration and t_f
5. t_f, $\mathbf{x}(t_f)$ free but related by $\mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\theta}(t_f)$ (*Problem 4*)	$\delta\mathbf{x}_f = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}(t_f)\,\delta t_f$†	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \boldsymbol{\theta}(t_f)$ $g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \left[\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}(t_f) - \dot{\mathbf{x}}^*(t_f)\right] = 0$†	$(2n+1)$ equations to determine $2n$ constants of integration and t_f

† $\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$ denotes the $n \times 1$ column vector $\left[\frac{d\theta_1}{dt} \quad \frac{d\theta_2}{dt} \quad \cdots \quad \frac{d\theta_n}{dt}\right]^T$.

مثال:

$$J(\vec{x}(t)) = \int_0^{\pi/4} \left(x_1^2(t) + \dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) + \dot{x}_2^2(t)\right) dt$$

$$\begin{aligned} &x_1(0) = 1, \qquad x_1(\pi / 4) = 2 \\ &x_2(0) = 3 / 2, \quad x_2(\pi / 4)\ \mathit{free} \end{aligned}$$

معادله اویلر

$$\left.\begin{aligned} g_{x_1} - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}_1} &= 2x_1 - \ddot{x}_2 = 0 \\ g_{x_2} - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}_2} &= -\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x}_1 + 4x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2(t) = 2x_1(t) = 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t$$

$$\Rightarrow x_2(t) = -\frac{1}{2} c_1 \cos 2t - \frac{1}{2} 2c_2 \sin 2t + c_3 t + c_4$$

با شروط مرزی زیر ضرایب پیدا می شوند:

$$x_1(0) = 1, \qquad x_1(\pi / 4) = 2, \qquad x_2(0) = 3 / 2,$$

$$x_2(\pi / 4)\ \mathit{free} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_2}\right|_{\frac{\pi}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(\frac{\pi}{4}) + 2\dot{x}_2(\frac{\pi}{4}) = 0$$

تابع-تابع با مشتقات مرتبه دوم و بالاتر

$$J\left(x(t)\right)=\int_{t_0}^{t_f} g\left(x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),\ldots,x^{(n)}(t),t\right)dt$$

سوال: آیا می شود x جدید تعریف کرد $x_1=x,\ x_2=\dot{x},\ x_3=\ddot{x},\ldots$ و از همون معادلات قبل استفاده کرد؟

$$\Delta J=J\left(x(t)\right)-J\left(x^*(t)\right)=\int_{t_0}^{t_f} g\left(x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),\ldots,x^{(n)}(t),t\right)dt \\ -\int_{t_0^*}^{t_f^*} g\left(x^*(t),\dot{x}^*(t),\ddot{x}^*(t),\ldots,x^{(n)*}(t),t\right)dt$$

مشابه قبل، بسط تیلور:

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(g\Big|_* + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_*\delta x+\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_*\delta \dot{x}+\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}\Big|_*\delta \ddot{x}+\cdots+\frac{\partial g}{\partial x^{(n)}}\Big|_*\delta x^{(n)}+O(.)\right)dt \\ -\int_{t_0^*}^{t_f^*} g\left(x^*(t),\dot{x}^*(t),\ddot{x}^*(t),\ldots,x^{(n)*}(t),t\right)dt$$

ترم خطی (فعلا با فرض زمان مشخص)

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_*\delta x+\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_*\delta \dot{x}+\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}\Big|_*\delta \ddot{x}+\cdots+\frac{\partial g}{\partial x^{(n)}}\Big|_*\delta x^{(n)}\right)dt$$

انتگرال‌گیری جزبه‌جز از جمله دوم

$$\int_{t_0}^{t_f} g_{\dot{x}}\Big|_*\delta\dot{x}\,dt=g_{\dot{x}}\delta x\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*}-\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}g_{\dot{x}}\Big|_*\delta x\,dt$$

انتگرال‌گیری جزبه‌جز (دو مرتبه) از جمله سوم

$$\int_{t_0}^{t_f} g_{\ddot{x}}\Big|_*\delta\ddot{x}\,dt=g_{\ddot{x}}\delta \dot{x}\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*}-\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}g_{\ddot{x}}\Big|_*\delta \dot{x}\,dt \\ =g_{\ddot{x}}\delta \dot{x}\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*}-\frac{d}{dt}g_{\ddot{x}}\delta x\Big|_{*,t_0^*}^{*,t_f^*}+\int_{t_0}^{t_f}\frac{d^2}{dt^2}g_{\ddot{x}}\Big|_*\delta x\,dt$$

به همین ترتیب برای مشتقات بالاتر

بدون معادلات شروط مرزی، درحالت عمومی:

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial g}{\partial x^{(n)}}\right)\delta x\,dt$$

شروط مرزی باید دقیق بررسی شود.

معادله اویلر به فرم زیر:

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial g}{\partial x^{(n)}}=0$$

به عنوان نمونه:

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial g}{\partial \ddot{x}}=0$$

به چه شروط مرزی نیاز دارد؟

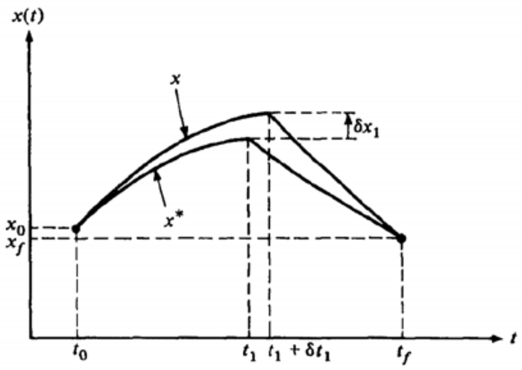
اکستریمال پیوسته تکه‌ای Piecewise-smooth exteremal

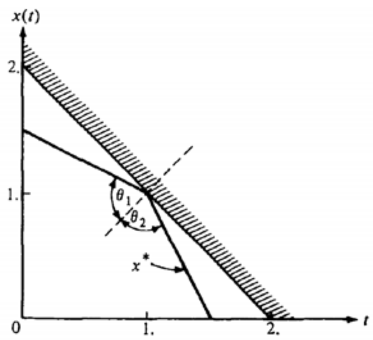
برای بهینه سازی

$$J(x(t),t)=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\dot{x}(t),t)\,dt$$

تا حالا فرض بر این بود که $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ پیوسته هستند (پس مسیر $x(t)$ پیوسته و هموار است). به همین دلیل از بسط تیلور استفاده می شد.

اگر این امکان به مسیر داده شود که در میان مسیر در برخی نقاط $\dot{x}(t)$ گسستگی داشته باشد، پس در آن نقطه مسیر شکستگی دارد (هنوز مسیر پیوسته است)





در نقطه $t_1 \in (t_0, t_f)$

شرط پیوستگی

$$\vec{x}(t_1^-) = \vec{x}(t_1^+); t_1^- = t_1^+$$

$$\delta\vec{x}(t_1^-) = \delta\vec{x}(t_1^+); \delta t_1^- = \delta t_1^+$$

$$J(x) \triangleq J_1(x) + J_2(x) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt + \int_{t_1}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$

مشابه روابط اصلی معادله تغییرات (variation) :

$$\begin{aligned}
&\delta J(x) \triangleq \delta J_1(x) + \delta J_2(x) = \\
&\int_{t_0}^{t_1}\left(g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}}\right)^T \delta\vec{x}\, dt + g_{\dot{\vec{x}}}\Big|_* \delta x \Big|_{t_0}^{t_1^-} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}{}^T \dot{\vec{x}}\right)\Big|_* \delta t\Big|_{t_0}^{t_1^-} \\
&+\int_{t_1}^{t_f}\left(g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}}\right)^T \delta\vec{x}\, dt + g_{\dot{\vec{x}}}\Big|_* \delta x \Big|_{t_1^+}^{t_f} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}{}^T \dot{\vec{x}}\right)\Big|_* \delta t\Big|_{t_1^+}^{t_f}
\end{aligned}$$

تابع پیوسته و مشتق‌پذیر در محدوده $t_0 \le t_1$ و $t_1 \le t_F$ است.

$$\begin{aligned}
\delta J = &\int_{t_0}^{t_f}\left(g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}}\right)^T \delta\vec{x}\, dt + g_{\dot{\vec{x}}}\Big|_* \delta x \Big|_{t_0}^{t_1^-} + g_{\dot{\vec{x}}}\Big|_* \delta x \Big|_{t_1^+}^{t_f} \\
&+\left(g - g_{\dot{\vec{x}}}{}^T \dot{\vec{x}}\right)\Big|_* \delta t\Big|_{t_0}^{t_1^-} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}{}^T \dot{\vec{x}}\right)\Big|_* \delta t\Big|_{t_1^+}^{t_f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J = &\int_{t_0}^{t_f}\left(g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}}\right)^T \delta\vec{x}\, dt + g_{\dot{\vec{x}}}\Big|_* \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}{}^T \dot{\vec{x}}\right)\Big|_* \delta t\Big|_{t_0}^{t_f} \\
&+g_{\dot{\vec{x}}}\delta x\Big|_{*,t_1^-} - g_{\dot{\vec{x}}}\delta x\Big|_{*,t_1^+} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}{}^T \dot{\vec{x}}\right)\delta t\Big|_{*,t_1^-} - \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}{}^T \dot{\vec{x}}\right)\delta t\Big|_{*,t_1^+}
\end{aligned}$$

مشابه قبل، شرط بهینگی شامل:

معادله اویلر

$$g_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} g_{\dot{\vec{x}}} = 0$$

شروط مرزی

$$g_{\dot{\vec{x}}}^T \delta\vec{x}\Big|_{*,t_0}^{*,t_f} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}^T \dot{\vec{x}}\right)\delta t\Big|_{*,t_0}^{*,t_f} = 0$$

شرط نقطه میانی

$$g_{\dot{\vec{x}}}^T \delta\vec{x}\Big|_{*,t_1^-} - g_{\dot{\vec{x}}}^T \delta\vec{x}\Big|_{*,t_1^+} + \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}^T \dot{\vec{x}}\right)\delta t\Big|_{*,t_1^-} - \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}^T \dot{\vec{x}}\right)\delta t\Big|_{*,t_1^+} = 0$$

Weierstrass-Erdmann corner conditions

زمان و موقعیت نقطه میانی مشخص

مشخص است در زمان t_1 قرار است از نقطه $\vec{x}_1$ بگذرد.

$$\delta\vec{x}_1 = \delta t_1 = 0$$

زمان نقطه میانی مشخص، موقعیت متغیر

$$\delta t_1 = 0$$

از شرط پیوستگی $\delta\vec{x}(t_1^-) = \delta\vec{x}(t_1^+)$

پس
$$g_{\dot{\vec{x}}}(x(t_1),\dot{x}(t_1^-),t_1)\Big|_{*,t_1^-} = g_{\dot{\vec{x}}}(x(t_1),\dot{x}(t_1^+),t_1)\Big|_{*,t_1^+}$$

این معادله برای پیدا کردن مجهولات $\vec{x}(t_1)$ است.

برای پیوستگی $\vec{x}(t_1^+) = \vec{x}(t_1^-)$

طبیعتا به ازای $\dot{\vec{x}}(t_1^+) = \dot{\vec{x}}(t_1^-)$ رابطه بالا بر قرار است. اگر بتوان با $\dot{\vec{x}}(t_1^+) \neq \dot{\vec{x}}(t_1^-)$ مسیر با تابع هزینه کمتر پیدا کرد، مسیر با شکستگی معنی دارد

زمان و موقعیت نقطه میانی آزاد

اگر t_1 و $x(t_1)$ آزد و متغیر و مستقل از یکدیگر باشند

$$\delta\vec{x}_1 \neq 0; \delta t_1 \neq 0$$

شرط پیوستگی $\delta\vec{x}(t_1^-) = \delta\vec{x}(t_1^+); \delta t_1^- = \delta t_1^+$

$$g_{\dot{\vec{x}}}\Big|_{*,t_1^-} = g_{\dot{\vec{x}}}\Big|_{*,t_1^+}$$

$$\left(g - g_{\dot{\vec{x}}}^T\dot{\vec{x}}\right)\Big|_{*,t_1^-} = \left(g - g_{\dot{\vec{x}}}^T\dot{\vec{x}}\right)\Big|_{*,t_1^+}$$

Weierstrass-Erdmann corner conditions

زمان و موقعیت نقطه میانی وابسته به هم

اگر t_1 و $x(t_1)$ با رابطه $\vec{x}_1 = \vec{\theta}_1(t)$ به هم وابسته باشند

$$\delta\vec{x}_1 = \dot{\vec{\theta}}_1 \delta t_1$$

$$\left(g + g_{\dot{x}}^T\left(\dot{\vec{\theta}}_1 - \dot{\vec{x}}\right)\right)\Big|_{*,t_1^-} = \left(g + g_{\dot{x}}^T\left(\dot{\vec{\theta}}_1 - \dot{\vec{x}}\right)\right)\Big|_{*,t_1^+}$$

مثال:

مینیمم کردن تابع-تابع $J(x(t)) = \int_0^2 \dot{x}^2\left(1-\dot{x}\right)^2 dt$

شرط مرزی $x(0)=0$ و $x(2)=1$

چون g فقط تابع $\dot{x}$ است، جواب خط است

$$x^*(t) = c_1 t + c_2$$

و با شروط مرزی

$$x^*(t) = t/2$$

ولی اگر بگردیم ببینیم با شکستگی در وسط مسیر جواب بهتر پیدا می شود:

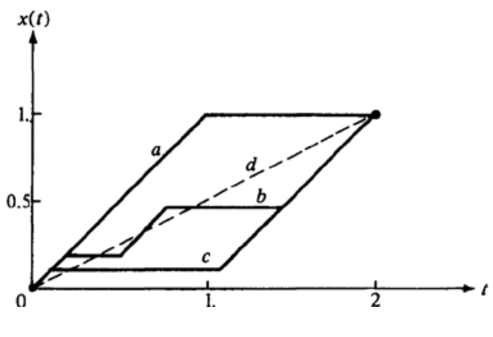
$$g_{\dot{x}} = 2\dot{x}\left(1-\dot{x}\right)^2 - 2\dot{x}^2\left(1-\dot{x}\right) = 2\dot{x}\left(1-\dot{x}\right)\left(1-2\dot{x}\right)$$
$$g - g_{\dot{x}}^T\dot{x} = \dot{x}^2\left(1-\dot{x}\right)^2 - 2\dot{x}^2\left(1-\dot{x}\right)\left(1-2\dot{x}\right) = \dot{x}^2\left(1-\dot{x}\right)\left(3\dot{x}-1\right)$$

$$g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_1^-} = g_{\dot{x}}\Big|_{*,t_1^+}$$

$$\left(g - g_{\dot{x}}\dot{x}\right)\Big|_{*,t_1^-} = \left(g - g_{\dot{x}}\dot{x}\right)\Big|_{*,t_1^+}$$

باید ترکیبی از $\dot{x}(t_1^+) \neq \dot{x}(t_1^-)$ پیدا کرد که در هر دو رابطه صدق کند:

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1^+) = 1, & \dot{x}(t_1^-) = 0 \\ \dot{x}(t_1^+) = 0, & \dot{x}(t_1^-) = 1 \end{cases}$$



ریاضیات تغییرات مقید Constrained Exterma

بدست آوردن اکسترمال‌های تابع-تابع زیر

$$J(\vec{x})=\int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)\,dt$$

در حضور محدودیت‌های مساوی مسیر

اگر قید نقطه ای باشد، با همان مسیر تکه ای هموار قابل حل است.

قیود جبری Point Constraints

$$\min\; J(\vec{x})=\int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)\,dt$$

$$\text{subject to}\quad f_i(\vec{x},t)=0,\quad i=1,2,\ldots,m\;\;(m<n)\qquad \text{or}\qquad \vec{f}_{m\times 1}(\vec{x},t)=\vec{0}$$

بیان مفهومی ضرایب لاگرانژ در این حالت (این روش حل نیست)

گسسته سازی انتگرال

$$J(x(t))=\int_{t_0}^{t_f} g\left(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),t\right)dt=\sum_{j=0}^{N} g\left(\vec{x}_j(t),\dot{\vec{x}}_j(t),t_j\right)\Delta t$$

در تمام مسیر قید باید برقرار باشد

$$\begin{aligned}J_a(x(t))&=\sum_{j=0}^{N} g\left(\vec{x}_j(t),\dot{\vec{x}}_j(t),t_j\right)\Delta t+\sum_{j=0}^{N}\vec{\lambda}_j^{\,T}\vec{f}_j\\&=\sum_{j=0}^{N}\left(g\left(\vec{x}_j(t),\dot{\vec{x}}_j(t),t_j\right)+\frac{1}{\Delta t}\vec{\lambda}_j^{\,T}\vec{f}_j\right)\Delta t\end{aligned}$$

پس ضریب لاگرانژ تابع زمان است

یعنی با تعریف $g_a(\vec{x},\dot{\vec{x}},\lambda,t)=g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)+\vec{\lambda}^T(t)\,\vec{f}(\vec{x},t)$

مساله مقید به مساله نامقید بهینه سازی زیر تبدیل شده است

$$J_a(\vec{x}(t),\vec{\lambda}(t))=\int_{t_0}^{t_f} g_a(\vec{x}(t),\vec{\lambda}(t),\dot{\vec{x}}(t),t)\qquad \text{augmented cost function}$$

تمام فرمولاسیون قبلی برای شرایط لازم بهینگی به این صادق است

n معادله دیفرانسیل مرتبه 2 $\qquad \dfrac{\partial g_a}{\partial \vec{x}}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}=0\rightarrow (g_x+\vec{f}_{\vec{x}}^{\,T}\lambda)-\dfrac{d}{dt}g_{\dot{\vec{x}}}=0$

m معادله جبری (برای m متغیر $\vec{\lambda}$) $\qquad \dfrac{\partial g_a}{\partial \lambda}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{\lambda}}=0\rightarrow \dfrac{\partial g_a}{\partial \lambda}=0\rightarrow \vec{f}_{m\times 1}(\vec{x},t)=0$

شروط مرزی:

$$\left.\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}^T \delta\vec{x}\right|_{*,t_0}^{*,t_f} + \left.\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{\lambda}}}^T \delta\vec{\lambda}\right|_{*,t_0}^{*,t_f} + \left.\left(g_a - \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}^T \dot{\vec{x}} - \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{\lambda}}}^T \dot{\vec{\lambda}}\right)\delta t\right|_{*,t_0}^{*,t_f} = 0$$

g_a تابع $\dot{\vec{\lambda}}$ نیست

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{\vec{x}}}^T \delta\vec{x}\right|_{*,t_0}^{*,t_f} + \left.\left(g_a - \frac{\partial g}{\partial \dot{\vec{x}}}^T \dot{\vec{x}}\right)\delta t\right|_{*,t_0}^{*,t_f} = 0$$

2 معادله برای زمان (ابتدا/انتها)

2n معادله برای متغیر مسیر (ابتدا/انتها) برای n معادله دینفرانسیل مرتبه 2

نکته، شرط مرزی حتما باید در معادله جبری صدق کند.

مثال:

تابع $J(x_1,x_2) = \int_0^1 \left(1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) dt$ بهینه شود که روی مسیر $x_1(t) + x_2(t) = 2$ باشد.

شروط مرزی $\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$ و $\vec{x}(1) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \end{Bmatrix}$

$$g_a(\vec{x}(t), \vec{\lambda}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = 1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \lambda\left(x_1 + x_2 - 2\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_a}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_1} = 0 \rightarrow \lambda - \dfrac{d}{dt}\left(2\dot{x}_1\right) = 0 \rightarrow \ddot{x}_1 = \dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\partial g_a}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_2} = 0 \rightarrow \lambda - \dfrac{d}{dt}\left(2\dot{x}_2\right) = 0 \rightarrow \ddot{x}_2 = \dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\partial g_a}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \rightarrow x_1(t) + x_2(t) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \dfrac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = x_2(t) + c_1 t + c_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1(t) + x_2(t) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = 1 + \dfrac{c_1}{2} t + \dfrac{c_2}{2} \\ x_2(t) = 1 - \dfrac{c_1}{2} t - \dfrac{c_2}{2} \end{cases}$$

جایگذاری شروط مرزی:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 = 1 + \dfrac{c_2}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -2 \\ x_1(1) = 2 = 1 + \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2} \Rightarrow \quad c_1 = 0 \end{cases}$$

قیود دیفرانسیلی Diffrential Constraints

$$\min\ J(\vec{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)\,dt$$

$$\text{subject to}\quad f_i(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = 0,\quad i = 1,2,\ldots,m\ \ (m < n) \qquad \text{or} \qquad \vec{f}_{m\times 1}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \vec{0}$$

مشابه قبل:

$$g_a(\vec{x},\dot{\vec{x}},t,\lambda) = g(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) + \vec{\lambda}(t)^T f(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$$

مساله مقید به مساله نامقید بهینه سازی زیر تبدیل شده است

$$J_a(\vec{x}(t),\vec{\lambda}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g_a(\vec{x}(t),\vec{\lambda}(t),\dot{\vec{x}}(t),t)$$

معادلات اویلر

n معادله دیفرانسیل مرتبه 2

$$\frac{\partial g_a}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\vec{x}} + \vec{f}_{\vec{x}}^{\,T}\vec{\lambda} - \frac{d}{dt}\left(g_{\dot{\vec{x}}} + \vec{f}_{\dot{\vec{x}}}^{\,T}\vec{\lambda}\right) = 0$$

m معادله دیفرانسیل (برای m متغیر $\vec{\lambda}$)

$$\frac{\partial g_a}{\partial \vec{\lambda}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{\lambda}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f} = 0$$

دیگر شرط خاصی بر روی شروط مرزی نیست. (چون قید معادله دیفرانسیل است)

مثال:

هدف مینیمم ردن تابع-تابع $J(x_1,x_2) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x_1^2 + x_2^2\right)dt$

تحت معادله دیفرانسیل $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

با شروط مرزی $\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$ و $\vec{x}(\frac{\pi}{4}) = \begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$

تشکل تابع augmented

$$g_a(\vec{x}(t),\vec{\lambda}(t),\dot{\vec{x}}(t),t) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\left(x_2 - \dot{x}_1\right)$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_1} = 0 \rightarrow 2x_1 - \frac{d}{dt}\left(-\lambda\right) = 0 \rightarrow 2x_1 + \dot{\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_2} = 0 \rightarrow 2x_2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \rightarrow x_2 - \dot{x}_1 = 0$$

با ترکیب معادلات

$$\dot{x}_2 = -x_1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \xrightarrow{\dot{x}_2 = -x_1} \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \rightarrow x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \xrightarrow{x_2 = \dot{x}_1} \ddot{x}_2 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

با شروط مرزی ضرایب ثابت بدست می آیند

قید انتگرالی Isoperimetric Constraint

$$\min \ J(\vec{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)\, dt$$

$$\text{subject to} \quad z_i(t) = \int_{t_0}^{t_f} e_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt = c_i; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

اگر به فرم $z_i(t) = \int_{t_0}^{t} e_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$ نوشته شود

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{e}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

$$\vec{z}(t_0) = 0; \vec{z}(t_f) = \vec{c}$$

قید دیفرانسیلی $\frac{d\vec{z}}{dt} - \vec{e} = 0$

معادله تابع افزوده:

$$g_a(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \lambda) = g(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \vec{\lambda}^T(t)(\dot{\vec{z}} - \vec{e})$$

معادلات اویلر:

$$\frac{\partial g_a}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}} = 0$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_a}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \dot{\vec{z}} - \vec{e} = 0$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \vec{z}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{z}}} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{\lambda}) = 0 \rightarrow \vec{\lambda} = \mathrm{C}$$

شروط مرزی اضافه:

$$\vec{z}(t_0) = 0; \vec{z}(t_f) = \vec{c}$$