دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه درس کنترل بهینه
مهندسی کنترل

عنوان:

# کنترل وضعیت استند سه درجه آزادی چهارپره به روش کنترل کننده خطی مبتنی بر روش بازی دیفرانسیلی

نگارش:

**علی بنی اسد**

استاد راهنما:

**دکتر اسدیان**

خرداد ۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحیم

## سپاس

از استاد بزرگوارم جناب دکتر اسدیان که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

**چکیده**

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی[1] استتفاده شده‌است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته می‌شود. هر یک سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا امتیاز، وضعیت استند در نظر گرفته شده‌است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از معادله نش[2] که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش خارجی و نویز سنسور مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی نیز از مقاومت مناسبی برخوردار است. از روش ارائه‌شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده‌است. عملکرد این روش با اجرای شبیه‌سازی‌های مختلف مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. همچنین، عملکرد آن در حضور نویز و اغتشاش و عدم قطعیت مدل از طریق شبیهسازی ارزیابی خواهدشد.

**کلیدواژه‌ها**: معادله نش، استند سه درجه آزادی، شبیه‌سازی، تابع هزینه

---
[1] Game Theory
[2] Nash Equilibrium

# فهرست مطالب

# فهرست شکل‌ها

# فهرست جدول‌ها

# فصل ۱

# نحوه‌ی نگارش

در این فصل نکات کلی در مورد نگارش پایان‌نامه به اختصار توضیح داده می‌شود.

## ۱ـ۱ پرونده‌ها

پرونده‌ی اصلی پایان‌نامه‌ی شما thesis.tex نام دارد. به ازای هر فصل از پایان‌نامه، یک پرونده در شاخه‌ی chapters ایجاد نموده و نام آن را در پرونده‌ی thesis.tex (در قسمت فصل‌ها) درج نمایید. پیش از شروع به نگارش پایان‌نامه، بهتر است پرونده‌ی front/info.tex را باز نموده و مشخصات پایان‌نامه را در آن تغییر دهید.

## ۱ـ۲ عبارات ریاضی

برای درج عبارات ریاضی در داخل متن از $...$ و برای درج عبارات ریاضی در یک خط مجزا از $$...$$ استفاده کنید. برای مثال $\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} = ۲^n$ در داخل متن و عبارت زیر

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} = ۲^n$$

در یک خط مجزا درج شده است. همان‌طور که در بالا می‌بینید، نمایش یک عبارت یکسان در دو حالت درون‌خط و بیرون‌خط می‌تواند متفاوت باشد. دقت کنید که تمامی عبارات ریاضی، از جمله متغیرهای

تک‌حرفی مانند $x$ و $y$ باید در محیط ریاضی یعنی محصور درون علامت $ باشند.

## ۱ـ۳ علائم ریاضی پرکاربرد

برخی علائم ریاضی پرکاربرد در زیر فهرست شده‌اند.

- مجموعه‌های اعداد: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- مجموعه: $\{۱, ۲, ۳\}$
- دنباله: $\langle ۱, ۲, ۳ \rangle$
- سقف و کف: $\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$
- اندازه و متمم: $|A|, \overline{A}$
- همنهشتی: $a \stackrel{n}{\equiv} ۱$ یا $a \equiv ۱ \pmod{n}$ (پیمانه‌ی $n$)
- ضرب و تقسیم: $\times, \cdot, \div$
- سه‌نقطه بین کاما: $۱, ۲, \ldots, n$
- سه‌نقطه بین عملگر: $۱ + ۲ + \cdots + n$
- کسر و ترکیب: $\frac{n}{k}, \binom{n}{k}$
- اجتماع و اشتراک: $A \cup (B \cap C)$
- عملگرهای منطقی: $\neg p \vee (q \wedge r)$
- پیکان‌ها: $\rightarrow, \Rightarrow, \leftarrow, \Leftarrow, \leftrightarrow, \Leftrightarrow$
- عملگرهای مقایسه‌ای: $\neq, \leqslant, \nleqslant, \geqslant, \ngeqslant$
- عملگرهای مجموعه‌ای: $\in, \notin, \setminus, \subset, \subseteq, \subsetneq, \supset, \supseteq, \supsetneq$
- جمع و ضرب چندتایی: $\sum_{i=۱}^{n} a_i, \prod_{i=۱}^{n} a_i$

- اجتماع و اشتراک چندتایی: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- برخی نمادها: $\infty, \emptyset, \forall, \exists, \triangle, \angle, \ell, \equiv, \therefore$

## ۱ـ۴ لیست‌ها

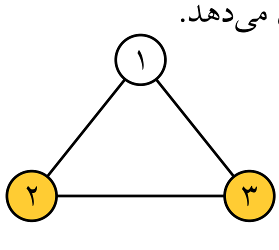
برای ایجاد یک لیست می‌توانید از محیط‌های «فقرات» و «شمارش» همانند زیر استفاده کنید.

- مورد اول
- مورد دوم
- مورد سوم

۱. مورد اول
۲. مورد دوم
۳. مورد سوم

## ۱ـ۵ درج شکل

یکی از روش‌های مناسب برای ایجاد شکل استفاده از نرم‌افزار LaTeX Draw و سپس درج خروجی آن به صورت یک فایل `tex` درون متن با استفاده از دستور `fig` یا `centerfig` است. شکل ۱ـ۱ نمونه‌ای از اشکال ایجادشده با این ابزار را نشان می‌دهد.




شکل ۱ـ۱: یک گراف و پوشش رأسی آن

همچنین می‌توانید با استفاده از نرم‌افزار Ipe شکل‌های خود را مستقیما به صورت pdf ایجاد نموده و آن‌ها را با دستورات `img` یا `centerimg` درون متن درج کنید. برای نمونه، شکل ۱ـ۲ را ببینید.

| عملگر | عملیات |
|---|---|
| < | کوچک‌تر |
| > | بزرگ‌تر |
| == | مساوی |
| <> | نامساوی |

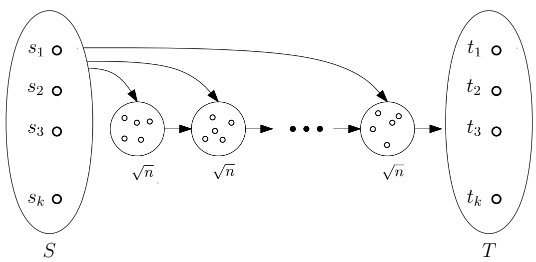
جدول ۱ـ۱: عملگرهای مقایسه‌ای

## ۱ـ۶ درج جدول

برای درج جدول می‌توانید با استفاده از دستور «جدول» جدول را ایجاد کرده و سپس با دستور «لوح» آن را درون متن درج کنید. برای نمونه جدول ۱ـ۱ را ببینید.

## ۱ـ۷ درج الگوریتم

برای درج الگوریتم می‌توانید از محیط «الگوریتم» همانند زیر استفاده کنید.




شکل ۱ـ۲: یک گراف جهت‌دار بدون دور

**الگوریتم ۱** پوشش رأسی حریصانه

**ورودی:** گراف $G = (V, E)$

**خروجی:** یک پوشش رأسی از $G$

۱: قرار بده $C = \emptyset$

۲: تا وقتی $E$ تهی نیست:

۳: یال دل‌خواه $uv \in E$ را انتخاب کن

۴: رأس‌های $u$ و $v$ را به $C$ اضافه کن

۵: تمام یال‌های واقع بر $u$ یا $v$ را از $E$ حذف کن

۶: $C$ را برگردان

## ۱ـ۸ محیط‌های ویژه

برای درج مثال‌ها، قضیه‌ها، لم‌ها و نتیجه‌ها به ترتیب از محیط‌های «مثال»، «قضیه»، «لم» و «نتیجه» استفاده کنید. برای درج اثبات قضیه‌ها و لم‌ها از محیط «اثبات» استفاده کنید.

تعریف‌های داخل متن را با استفاده از دستور «مهم» به صورت **تیره** نشان دهید. تعریف‌های پایه‌ای‌تر را درون محیط «تعریف» قرار دهید.

**تعریف ۱ـ۱ (اصل لانه‌کبوتری)** *اگر $n+1$ یا بیش‌تر کبوتر درون $n$ لانه قرار گیرند، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که شامل حداقل دو کبوتر است.*

# فصل ۲

# برخی نکات نگارشی

این فصل حاوی برخی نکات ابتدایی ولی بسیار مهم در نگارش متون فارسی است. نکات گردآوری‌شده در این فصل به هیچ وجه کامل نیست، ولی دربردارنده‌ی حداقل مواردی است که رعایت آن‌ها در نگارش پایان‌نامه ضروری به نظر می‌رسد.

## ۲ـ۱ فاصله‌گذاری

۱. علائم سجاوندی مانند نقطه، ویرگول، دونقطه، نقطه‌ویرگول، علامت سؤال، و علامت تعجب (. ، : ؛ ؟ !) بدون فاصله از کلمه‌ی پیشین خود نوشته می‌شوند، ولی بعد از آن‌ها باید یک فاصله قرار گیرد. مانند: من، تو، او.

۲. علامت‌های پرانتز، آکولاد، کروشه، نقل قول و نظایر آن‌ها بدون فاصله با عبارات داخل خود نوشته می‌شوند، ولی با عبارات اطراف خود یک فاصله دارند. مانند: (این عبارت) یا آن عبارت.

۳. دو کلمه‌ی متوالی در یک جمله همواره با یک فاصله از هم جدا می‌شوند، ولی اجزای یک کلمه‌ی مرکب باید با نیم‌فاصله[۱] از هم جدا شوند. مانند: کلاسِ درس، محبت‌آمیز، دوبخشی.

[۱] «نیم‌فاصله» فاصله‌ای مجازی است که در عین جدا کردن اجزای یک کلمه‌ی مرکب از یک‌دیگر، آن‌ها را نزدیک به هم نگه می‌دارد. معمولاً برای تولید این نوع فاصله در صفحه‌کلیدهای استاندارد از ترکیب Shift+Space استفاده می‌شود.

## ۲ـ۲ شکل حروف

۱. در متون فارسی به جای حروف «ك» و «ي» عربی باید از حروف «ک» و «ی» فارسی استفاده شود. همچنین به جای اعداد عربی مانند ٥ و ٦ باید از اعداد فارسی مانند ۵ و ۶ استفاده نمود. برای این کار، توصیه می‌شود صفحه‌کلید فارسی استاندارد[۲] را بر روی سیستم خود نصب کنید.

۲. عبارات نقل‌قول‌شده یا مؤکد باید درون علامت نقل قولِ «» قرار گیرند، نه “”. مانند: «کشور ایران».

۳. کسره‌ی اضافه‌ی بعد از «ه» غیرملفوظ به صورت «ه‌ی» نوشته می‌شود، نه «هٔ». مانند: خانه‌ی علی، دنباله‌ی فیبوناچی.

تبصره: اگر «ه» ملفوظ باشد، نیاز به «ی» ندارد. مانند: فرمانده دلیر، پادشه خوبان.

۴. پایه‌های همزه در کلمات، همیشه «ئـ» است، مانند: مسئله و مسئول، مگر در مواردی که همزه ساکن است که در این صورت باید متناسب با اعراب حرف پیش از خود نوشته شود. مانند: رأس، مؤمن.

## ۲ـ۳ جدانویسی

۱. اجزای فعل‌های مرکب با فاصله از یک‌دیگر نوشته می‌شوند، مانند: تحریر کردن، به سر آمدن.

۲. علامت استمرار، «می»، توسط نیم‌فاصله از جزء بعدی فعل جدا می‌شود. مانند: می‌رود، می‌توانیم.

۳. شناسه‌های «ام»، «ای»، «ایم»، «اید» و «اند» توسط نیم‌فاصله، و شناسه‌ی «است» توسط فاصله از کلمه‌ی پیش از خود جدا می‌شوند. مانند: گفته‌ام، گفته‌ای، گفته است.

۴. علامت جمع «ها» توسط نیم‌فاصله از کلمه‌ی پیش از خود جدا می‌شود. مانند: این‌ها، کتاب‌ها.

۵. «به» همیشه جدا از کلمه‌ی بعد از خود نوشته می‌شود، مانند: به نام و به آن‌ها، مگر در مواردی که «بـ» صفت یا فعل ساخته است. مانند: بسزا، ببینم.

[۲] صفحه‌کلید فارسی استاندارد برای ویندوز، تهیه‌شده توسط بهنام اسفهبد

۶. «به» همواره با فاصله از کلمه‌ی بعد از خود نوشته می‌شود، مگر در مواردی که «به» جزئی از یک اسم یا صفت مرکب است. مانند: تناظر یک‌به‌یک، سفر به تاریخ.

## ۲ـ۴ جدانویسی مرجح

۱. اجزای اسم‌ها، صفت‌ها، و قیدهای مرکب توسط نیم‌فاصله از یک‌دیگر جدا می‌شوند. مانند: دانش‌جو، کتاب‌خانه، گفت‌وگو، آن‌گاه، دل‌پذیر.

تبصره: اجزای منتهی به «هاء ملفوظ» را می‌توان از این قانون مستثنی کرد. مانند: راهنما، رهبر.

۲. علامت صفت برتری، «تر»، و علامت صفت برترین، «ترین»، توسط نیم‌فاصله از کلمه‌ی پیش از خود جدا می‌شوند. مانند: بیش‌تر، کم‌ترین.

تبصره: کلمات «بهتر» و «بهترین» را می‌توان از این قاعده مستثنی نمود.

۳. پیشوندها و پسوندهای جامد، چسبیده به کلمه‌ی پیش یا پس از خود نوشته می‌شوند. مانند: همسر، دانشکده، دانشگاه.

تبصره: در مواردی که خواندن کلمه دچار اشکال می‌شود، می‌توان پسوند یا پیشوند را جدا کرد. مانند: هم‌میهن، هم‌ارزی.

۴. ضمیرهای متصل چسبیده به کلمه‌ی پیش از خود نوشته می‌شوند. مانند: کتابم، نامت، کلامشان.

# فصل ۳

# مقدمه

نخستین فصل یک پایان‌نامه به معرفی مسئله، بیان اهمیت موضوع، ادبیات موضوع، اهداف تحقیق و معرفی ساختار پایان‌نامه می‌پردازد. در این فصل نمونه‌ای از این مقدمه آورده شده است.[۱]

## ۳ـ۱ تعریف مسئله

مسئله‌ی **مسیریابی وسایل نقلیه** حالت کلی‌تر مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد[۲] و یکی از مسائل جالب در حوزه‌ی بهینه‌سازی ترکیبیاتی است. در این مسئله، تعدادی وسیله‌ی نقلیه که هر کدام در انبار[۳] مشخصی قرار دارند به همراه تعدادی مشتری در قالب یک گراف داده شده است که گره‌های این گراف نشان‌دهنده‌ی مشتریان و انبارها است و وزن یال‌های گراف نشان‌دهنده‌ی هزینه‌ی حرکت بین گره‌های مختلف می‌باشد. هدف، یافتن دورهای مجزایی برای هر وسیله می‌باشد به نحوی که این دورها در برگیرنده‌ی تمام مشتریان بوده و مجموع هزینه‌ی دورها کمینه گردد.

گونه‌های مختلفی از مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه با محدودیت‌های متفاوت توسط پژوهشگران مورد مطالعه قرار گرفته است. از جمله در نظر گرفتن محدودیت‌هایی نظیر پنجره‌ی زمانی، به این مفهوم که هر مشتری در بازه‌ی زمانی خاصی باید ملاقات شود و یا در نظر گرفتن محدودیت برای ظرفیت وسایل که سبب می‌شود هر وسیله تنها تا زمانی بتواند به مشتریانی سرویس‌دهی کند که سطح تقاضای

[۱] مطالب این فصل نمونه از پایان‌نامه‌ی آقای حسام‌الدین منفرد گرفته شده است.
[۲] Travelling Salesman Problem
[۳] Depot

آن‌ها از ظرفیت وسیله تجاوز نکند.

از جمله گونه‌هایی که اخیراً مورد توجه قرار گرفته، و تا حد زیادی به مسائل دنیای واقعی شبیه‌تر است، مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه‌ی ناهمگن[۴] می‌باشد. در این گونه از مسئله، وسایل نقلیه ناهمگن در نظر گرفته می‌شوند، به این معنی که هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای هر وسیله‌ی نقلیه می‌تواند متفاوت باشد. تعریف دقیق‌تر این مسئله در زیر آمده است.

**مسئله‌ی ۳ـ۱** *گراف غیر جهت‌دار* $G = (V, E)$ *به همراه* $m$ *رأس مشخص* $d_1, d_2, \dots, d_m$ *از* $V$ *به عنوان انبار و* $m$ *تابع وزن* $w_1, w_2, \dots, w_m : V \times V \to \mathbb{R}^+$ *داده شده است. در هر یک از انبارها یک عامل (وسیله‌ی نقلیه) قرار دارد. هدف یافتن* $m$ *دور است که از* $d_1, d_2, \dots, d_m$ *شروع شده و اجتماع آن‌ها تمام رأس‌های گراف را بپوشاند طوری که مجموع هزینه‌ی این دورها کمینه شود. هزینه‌ی دور* $i$*اُم با تابع* $w_i$ *اندازه‌گیری می‌شود.*

در صورت همگن مسئله، هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای همه‌ی عوامل یکسان است و در گونه‌ی ناهمگن، این هزینه برای عوامل مختلف می‌تواند متفاوت باشد. از آن جایی که صورت ناهمگن مسئله کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است، در این تحقیق سعی شده است که تمرکز بر روی این گونه از مسئله باشد. همچنین علاوه بر دورهای ناهمگن، درخت‌ها و مسیرهای ناهمگن نیز در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

## ۳ـ۲ اهمیت موضوع

مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه کاربردهای بسیار گسترده‌ای در حوزه‌ی حمل و نقل دارد. برای نخستین بار این مسئله برای مسیریابی تانکرهای سوخت‌رسان مطرح شد [۱]. اما امروزه با پیشرفت‌های گسترده‌ای که در زمینه‌ی تکنولوژی روی داده است از راه‌حل‌های این مسئله در امور روزمره از جمله سیستم توزیع محصولات، تحویل نامه، جمع‌آوری زباله‌های خانگی و غیره استفاده می‌شود. در نظر گرفتن فرض ناهمگن بودن هم با توجه به اینکه معمولاً عوامل توزیع در یک سیستم، یکسان نیستند و تفاوت‌هایی در میزان مصرف سوخت و غیره دارند، راه‌حل‌های مناسب‌تری برای مسائل این حوزه می‌تواند ارائه دهد. گونه‌های مختلفی از مسائل مسیریابی وسایل نقلیه در [۲، ۳، ۴] بیان شده است.

[۴] Heterogeneous Vehicle Routing Problem

## ۳ـ۳ ادبیات موضوع

همان‌طور که ذکر شد مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه‌ی ناهمگن صورت عمومی مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد می‌باشد. مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد در حوزه‌ی مسائل ان‌پی‌ـ‌سخت[۵] قرار می‌گیرد و با فرض $P \neq NP$ الگوریتم دقیق با زمان چندجمله‌ای برای آن وجود ندارد. بنابراین برای حل کارای این مسائل از الگوریتم‌های تقریبی[۶] استفاده می‌شود.

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد در حالتی که تنها یک فروشنده در گراف حضور داشته باشد، دو الگوریتم تقریبی معروف دارد. در الگوریتم اول با دو برابر کردن درخت پوشای کمینه[۷] و میانبر کردن[۸] دورهای بدست آمده، الگوریتمی با ضریب تقریب ۲ ارائه می‌شود. در الگوریتم دوم که متعلق به کریستوفایدز[۹] [۵] است، به کمک ساخت دور اویلری[۱۰] بر روی اجتماع یال‌های درخت پوشای کمینه و یال‌های تطابق کامل کمینه[۱۱] از گره‌های درجه‌ی فرد همان درخت، و میانبر کردن این دور، ضریب تقریب ۱/۵ ارائه می‌شود. با گذشت حدود ۴۰ سال از ارائه‌ی این الگوریتم، تا کنون ضریب تقریب بهتری برای این مسئله پیدا نشده است.

اخیراً با بهره‌گیری از روش کریستوفایدز و بسط آن برای مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد چندگانه‌ی همگن (در این حالت از مسئله تعداد فروشنده‌ها در گراف بیش از یکی است و هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای همه‌ی عوامل یکسان است) ضریب تقریب ۱/۵ ارائه شده است [۶]. در روش مطرح شده بعد از به دست آوردن درخت‌های پوشای کمینه برای هر انبار، به جای استفاده از روش دو برابر کردن یال‌ها، روش کریستوفایدز اعمال می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که صرف اعمال الگوریتم کریستوفایدز به هر یک از درخت‌های بدست آمده، ضریب تقریب ۱/۵ را بدست نمی‌دهد. بنابراین در روش مذکور، الگوریتم کریستوفایدز روی کل جنگل بدست آمده اعمال می‌شود. نشان داده شده است که با استفاده از یک سیاست جایگزینی مناسب بین یال‌هایی که در جنگل کمینه، موجود هستند و آن‌هایی که در این مجموعه حضور ندارند و اعمال کریستوفایدز روی این جنگل‌ها، می‌توان جوابی تولید کرد که بدتر از ۱/۵ برابر جواب بهینه نباشد.

---

[۵] NP-hard
[۶] Approximation Algorithm
[۷] Minimum Spanning Tree
[۸] Shortcut
[۹] Christofides
[۱۰] Eulerian Cycle
[۱۱] Minimum Perfect Matching

همان‌طور که گفته شد نسخه‌ی ناهمگن این مسئله کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در گونه‌ی ناهمگن، بیش از یک عامل (فروشنده) در اختیار داریم که در شروع، هر یک از آن‌ها در گره‌های مجزایی که با عنوان انبار معرفی می‌شوند قرار دارند و هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای هریک از عوامل می‌تواند متفاوت از سایر عامل‌ها باشد. در صورتی که تعداد انبارها $m$ فرض شود از جمله کارهای انجام شده در این مورد ارائه ضریب تقریب $۴m$ به کمک حل برنامه‌ریزی خطی تعدیل شده[۱۲] و ساخت درخت پوشای کمینه [۷]، ضریب تقریب $۱/۵m$ به کمک حل تعدیل برنامه‌ریزی خطی با روش بیضی[۱۳] و اعمال الگوریتم کریستوفایدز [۸] و ضریب تقریب ۲ به کمک راه حل اولیه_دوگان[۱۴] می‌باشد، روش اولیه_دوگان تنها برای حالتی که دو عامل وجود دارد و هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای یک عامل بیشتر از عامل دیگر باشد مطرح شده است [۹].

## ۳_۴ اهداف تحقیق

در این پایان‌نامه سعی می‌شود که مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه برای زیرگراف‌های ناهمگن مختلف مورد مطالعه قرار گیرد. از جمله زیرگراف‌های مورد نظر ما دور، درخت و مسیر می‌باشد. بعد از مطالعه‌ی کارهای انجام شده در این زمینه سعی می‌شود که مسئله به صورت دقیق‌تر مورد بررسی قرار گیرد.

## ۳_۵ ساختار پایان‌نامه

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است. فصل دوم دربرگیرنده‌ی تعاریف اولیه‌ی مرتبط با پایان‌نامه است. در فصل سوم مسئله‌ی دورهای ناهمگن و کارهای مرتبطی که در این زمینه انجام شده به تفصیل بیان می‌گردد. در فصل چهارم نتایج جدیدی که در این پایان‌نامه به دست آمده ارائه می‌گردد. در این فصل، مسئله‌ی درخت‌های ناهمگن در چهار شکل مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس نگاهی کوتاه به مسئله‌ی مسیرهای ناهمگن خواهیم داشت. در انتها با تغییر تابع هدف، به حل مسئله‌ی کمینه کردن حداکثر اندازه‌ی درخت‌ها می‌پردازیم. فصل پنجم به نتیجه‌گیری و پیش‌نهادهایی برای کارهای آتی خواهد پرداخت.

[۱۲] Linear Programming Relaxation
[۱۳] Ellipsoid Method
[۱۴] Primal-Dual

# فصل ۴

# مفاهیم اولیه

دومین فصل پایان‌نامه به طور معمول به معرفی مفاهیمی می‌پردازد که در پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این فصل نمونه‌ای از مفاهیم اولیه آورده شده است.

## ۴ـ۱ برنامه‌ریزی خطی

در برنامه‌ریزی ریاضی سعی بر بهینه‌سازی (کمینه یا بیشینه کردن) یک تابع هدف با توجه به تعدادی محدودیت است. شکل خاصی از این برنامه‌ریزی که توجه ویژه‌ای به آن در علوم کامپیوتر شده است برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. در برنامه‌ریزی خطی به دنبال بهینه کردن یک تابع هدف خطی با توجه به تعدادی محدودیت خطی می‌باشیم. شکل استاندارد یک برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{۴ـ۱}$$

در روابط فوق، $x$ بردار متغیرها، $b, c$ بردارهای ثابت و $A$ ماتریس ضرایب می‌باشد. به سادگی قابل مشاهده است که رابطه‌ی (۴ـ۱) می‌تواند شکل‌های مختلفی از برنامه‌ریزی خطی را در بر بگیرد. به طور خاص اگر روابط قیدها به حالت $(A'x = b')$ یا در جهت برعکس $(A''x \leqslant b'')$ باشد یا تابع هدف به صورت بیشینه‌سازی باشد. همه‌ی این موارد با تغییر کمی در رابطه‌ی (۴ـ۱) یا اضافه کردن پارامتر و

متغیر جدید قابل مدل کردن می‌باشد. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد برنامه‌ریزی خطی می‌توانید به [۱۰] مراجعه کنید.

هر برنامه‌ریزی خطی مطرح شده به شکل بالا قابل حل در زمان چندجمله‌ای است [۱۱، ۱۲]. روش بیضوی [۱۱] از این مزیت بهره می‌برد که نیازی به بررسی همه‌ی محدودیت‌ها ندارد. در حقیقت این روش با در اختیار داشتن یک دانای کل جداکننده[۱] می‌تواند جواب بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی را در زمان چندجمله‌ای بدست آورد. دانای کل جداکننده رویه‌ای است که با گرفتن بردار $x$ به عنوان ورودی مشخص می‌کند که آیا $x$ همه‌ی محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی را برآورده می‌سازد یا خیر، در حالت دوم دانای کل جداکننده حداقل یک محدودیت نقض شده را گزارش می‌دهد. این مسئله زمانی کمک کننده خواهد بود که برنامه‌ریزی خطی دارای تعداد نمایی محدودیت باشد اما ساختار ترکیبیاتی محدودیت‌ها امکان ارزیابی امکان‌پذیر بودن جواب مورد نظر را فراهم آورد.

برای هر برنامه‌ریزی خطی می‌توان شکل دوگان آن را نوشت. به برنامه‌ی اصلی، برنامه‌ی اولیه گفته می شود. دوگان رابطه‌ی (۴ـ۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \leqslant c \\ & y \geqslant ۰ \end{aligned} \qquad (۴ـ۲)$$

برنامه‌های اولیه و دوگان به کمک قضایای دوگانی زیر با هم ارتباط دارند.

**قضیه‌ی ۴ـ۱ (قضیه‌ی دوگانی ضعیف)** *یک برنامه‌ریزی خطی کمینه‌سازی با تابع هدف $c^Tx$ و صورت دوگان آن با تابع هدف $b^Ty$ را در نظر بگیرید. برای هر جواب ممکن $x$ برای برنامه‌ی اولیه و جواب ممکن $y$ برای برنامه‌ی دوگان، رابطه‌ی $b^Ty \leqslant c^Tx$ برقرار است.*

درستی قضیه‌ی بالا به راحتی قابل تصدیق است زیرا $b^Ty \leqslant (Ax)^Ty = x^TA^Ty \leqslant x^Tc = c^Tx$، برقراری نامساوی‌ها از نامساوی‌های برنامه‌ی اولیه و دوگان حاصل می‌شود. قضیه‌ی قوی دوگانی در [۱۳] به صورت زیر بیان شده است.

**قضیه‌ی ۴ـ۲ (قضیه‌ی دوگانی قوی)** *یک برنامه‌ریزی خطی کمینه‌سازی با تابع هدف $c^Tx$ و صورت دوگان آن با تابع هدف $b^Ty$ را در نظر بگیرید. اگر برنامه‌ی اولیه یا دوگان دارای جواب بهینه‌ی نامحدود*

[۱] Separation Oracle

*باشد، برنامه‌ی متقابل فاقد جواب ممکن است. در غیر این صورت مقدار بهینه‌ی توابع هدف دو برنامه مساوی خواهد بود، به عبارت دیگر جواب $x^*$ برای برنامه ی اولیه و جواب $y^*$ برای برنامه‌ی دوگان وجود خواهد داشت که $c^T x^* = b^T y^*$.*

درصورتی مقادیر متغیرها محدود به اعداد صحیح شود به عنوان مثال $x \in \{۰, ۱\}^n$ به این شکل از برنامه‌ریزی، برنامه‌ریزی صحیح می‌گوییم. این شکل از برنامه‌ریزی به سادگی قابل بهینه‌سازی نیستند. برداشتن محدودیت صحیح بودن متغیرها، برنامه‌ریزی خطی تعدیل‌شده را نتیجه می‌دهد. بهترین الگوریتم‌ها برای بسیاری از مسائل با گرد کردن جواب برنامه‌ریزی خطی تعدیل شده به مقادیر صحیح یا با بهره‌گیری از ویژگی‌های برنامه‌ریزی خطی (نظیر روش اولیه‌ــ دوگان [۱۴]) حاصل شده است. دقت کنید که جواب برنامه‌ریزی خطی تعدیل‌شده برای یک مسئله، به عنوان حد پایینی برای جواب بهینه‌ی آن مسئله محسوب می‌گردد.

زمانی که از برنامه‌ریزی خطی تعدیل شده برای حل یا تقریب زدن یک مسئله استفاده می‌شود، گپ صحیح[۲] برنامه‌ریزی خطی معمولاً بیانگر این است که جواب ما تا چه حد می‌تواند مناسب باشد. برای یک مسئله‌ی کمینه‌سازی، گپ صحیح به صورت کوچک‌ترین کران بالای مقدار برنامه‌ریزی خطی تعدیل شده برای نمونه‌ی $I$ تقسیم بر مقدار بهینه برای نمونه‌ی $I$ تعریف می‌شود. گپ صحیح برای مسئله‌ی بیشینه‌سازی به صورت معکوس تقسیم مطرح شده بیان می‌گردد.

## ۴ــ۲ الگوریتم‌های تقریبی

بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مهم و پایه‌ای ان‌پی‌ــ سخت هستند. بنابراین، با فرض $P \neq NP$ نمی‌توان الگوریتم‌هایی با زمان چندجمله‌ای برای این مسائل ارائه کرد. روش‌های متداول برای برخورد با این مسائل عبارت‌اند از:

- مسئله را فقط برای حالات خاص حل نمود.
- با استفاده از روش‌های جست‌وجوی تمام حالات، مسئله را در زمان غیرچندجمله‌ای حل نمود.
- در زمان چندجمله‌ای، تقریبی از جواب بهینه را به دست آورد.

[۲] Integrality Gap

| مسئله | ضریب تقریب |
|---|---|
| Euclidian TSP | $1+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ |
| Vertex Cover | const $c$ |
| Set Cover | $\log n$ |
| Coloring | $n^{\delta}$ $(\delta < 1)$ |
| TSP | $\infty$ |

جدول ۴ـ۱: نمونه‌هایی از ضرایب تقریب برای مسائل بهینه‌سازی

در این پایان‌نامه تمرکز بر روی روش سوم یعنی استفاده از الگوریتم‌های تقریبی است. الگوریتم‌های تقریبی قادرند جوابی نزدیک به جواب بهینه را در زمان چندجمله‌ای پیدا کنند.

مسئله‌ی بهینه‌سازی (کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی) $P$ را در نظر بگیرید. فرض کنید هر نمونه از مسئله‌ی $P$ دارای یک مجموعه‌ی ناتهی از جواب‌های ممکن[۳] است. به هر جواب ممکن، یک عدد مثبت به عنوان هزینه (یا وزن) آن نسبت داده شده است. مسئله‌ی $P$ با شرایط فوق یک مسئله‌ی *ان‌پی‌ـ بهینه‌سازی* (NP-Optimization) است،

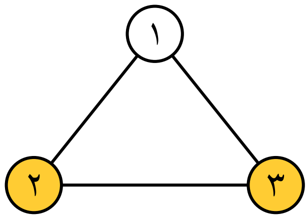
به ازای هر نمونه‌ی $I$ از یک مسئله‌ی ان‌پی‌ـ بهینه‌سازی $P$، هزینه‌ی جواب بهینه برای $I$ را با $\mathrm{OPT}(I)$ نشان می‌دهیم. همچنین، هزینه‌ی جواب تولیدشده توسط الگوریتم تقریبی بر روی $I$ را با $\mathrm{ALG}(I)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۴ـ۱** *یک الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی $P$ دارای ضریب تقریب $\alpha$ است اگر برای هر نمونه‌ی $I$ از $P$:*

$$\max\left\{\frac{ALG(I)}{OPT(I)}, \frac{OPT(I)}{ALG(I)}\right\} \leqslant \alpha.$$

یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب $\alpha$، یک *الگوریتم $\alpha$ـ تقریبی* نامیده می‌شود. نمونه‌هایی از ضرایب تقریب متداول برای مسائل بهینه‌سازی در جدول ۴ـ۱ آمده است.

[۳] feasible




شکل ۴ـ۱: گراف $G$ و یک پوشش رأسی برای آن

## ۴ـ۳ پوشش رأسی

به عنوان اولین مسئله از مجموعه مسائل بهینه‌سازی، در این بخش به بررسی مسئله‌ی پوشش رأسی می‌پرازیم. این مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود.

**مسئله‌ی ۴ـ۱ (پوشش رأسی)** *گراف $G = (V, E)$ و تابع هزینه‌ی $w : V \to \mathbb{R}^+$ داده شده است. زیرمجموعه‌ی $C \subseteq V$ با حداقل هزینه را بیابید طوری که به ازای هر یال $uv \in E$، حداقل یکی ازدو رأس $u$ و $v$ در مجموعه‌ی $C$ باشد.*

شکل ۴ـ۱ نمونه‌ای از یک پوشش رأسی را نشان می‌دهد. در زیر یک الگوریتم حریصانه برای مسئله‌ی پوشش رأسی غیروزن‌دار ارائه شده است.

**الگوریتم ۲** پوشش رأسی حریصانه

۱: قرار بده $C = \emptyset$
۲: تا وقتی $E$ تهی نیست:
۳: یال دل‌خواه $uv \in E$ را انتخاب کن
۴: $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
۵: تمام یال‌های واقع بر $u$ یا $v$ را از $E$ حذف کن
۶: $C$ را برگردان

به سادگی می‌توان مشاهده نمود که خروجی الگوریتم ۲ یک پوشش رأسی است. در ادامه نشان خواهیم داد که اندازه‌ی پوشش رأسی تولیدشده توسط الگوریتم حداکثر دو برابر اندازه‌ی پوشش رأسی کمینه است.

**قضیه‌ی ۴ــ۳** $\mathrm{OPT} \leqslant |C| \leqslant ۲\,\mathrm{OPT}$.

*اثبات.* از آن جایی که $C$ یک پوشش رأسی است، نامساوی سمت چپ بدیهی است. فرض کنید $M$ مجموعه‌ی تمام یال‌هایی باشد که توسط الگوریتم انتخاب شده‌اند. از آن جایی که هیچ دو یالی در $M$ دارای رأس مشترک نیستند، هر پوشش رأسی (از جمله پوشش رأسی بهینه) باید حداقل یک رأس از هر یال موجود در $M$ را بپوشاند. بنابراین

$$|M| \leqslant \mathrm{OPT}\,.$$

از طرفی می‌دانیم $|C| = ۲|M|$. در نتیجه

$$|C| = ۲|M| \leqslant ۲\,\mathrm{OPT}\,.$$

□

بنا بر قضیه‌ی ۴ــ۳، الگوریتم ۲ یک الگوریتم ۲ــتقریبی است. مثال زیر نشان می‌دهد که ضریب تقریب ۲ برای این الگوریتم محکم است. گراف دو بخشی کامل $K_{n,n}$ را در نظر بگیرید. پوشش رأسی تولیدشده توسط الگوریتم حریصانه بر روی این گراف شامل تمامی $۲n$ رأس گراف خواهد بود، در صورتی که پوشش رأسی بهینه شامل نصف این تعداد، یعنی $n$ رأس است.

# فصل ۵

# کارهای پیشین

در این فصل کارهای پیشین انجام‌شده روی مسئله به تفصیل توضیح داده می‌شود.

# فصل ۶

# نتایج جدید

در این فصل نتایج جدید به‌دست‌آمده در پایان‌نامه توضیح داده می‌شود. در صورت نیاز می‌توان نتایج جدید را در قالب چند فصل ارائه نمود. همچنین در صورت وجود پیاده‌سازی، بهتر است نتایج پیاده‌سازی را در فصل مستقلی پس از این فصل قرار داد.

# فصل ۷

# نتیجه‌گیری

در این فصل، ضمن جمع‌بندی نتایج جدید ارائه‌شده در پایان‌نامه، مسائل باز باقی‌مانده و همچنین پیش‌نهادهایی برای ادامه‌ی کار ارائه می‌شوند.

# پیوست آ

# مطالب تکمیلی

پیوست‌های خود را در صورت وجود می‌توانید در این قسمت قرار دهید.

# مراجع


[1] G. B. Dantzig and J. H. Ramser. The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1):80–91, 1959.

[2] C. Miller, A. Tucker, and R. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, 7:326–329, 1960.

[3] B. Gavish. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Management Science*, 22(6):704–5, 1976.

[4] I. Kara and T. Bektas. Integer programming formulations of multiple salesman problems and its variations. *European Journal of Operational Research*, 174(3):1449–1458, 2006.

[5] N. Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.

[6] Z. Xu and B. Rodrigues. A 3/2-approximation algorithm for multiple depot multiple traveling salesman problem. In *Proceedings of the 12th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, SWAT '10, pages 127–138, 2010.

[7] S. Yadlapalli, S. Rathinam, and S. Darbha. An approximation algorithm for a 2-depot, heterogeneous vehicle routing problem. In *Proceedings of the 2009 Conference on American Control Conference*, ACC '09, pages 1730–1735, 2009.

[8] S. Yadlapalli, S. Rathinam, and S. Darbha. 3-approximation algorithm for a two depot, heterogeneous traveling salesman problem. *Optimization Letters*, 6(1):141–152, 2012.

[9] J. Bae and S. Rathinam. A primal-dual algorithm for a heterogeneous travelling salesman problem. *arXiv:1111.0567v2 [cs.DM]*, 2013.

[10] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming.* John Wiley and Sons, Inc. New York, NY, USA, 1986.

[11] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 244:1093–1096, 1979.

[12] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.

[13] J. von Neumann. On a maximization problem. Manuscript, Institute for Advanced Studies, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA, 1947.

[14] S. Assadi, E. Emamjomeh-Zadeh, A. Norouzi-Fard, S. Yazdanbod, and H. Zarrabi-Zadeh. The minimum vulnerability problem. In *Proceedings of the 23rd International Symposium on Algorithms and Computation*, volume 7676 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 382–391, 2012.

Sharif University of Technology
Department of Aerospace Engineering

Optimal Control I Project

# LQDG Controler for 3DOF Quad

By:

**Ali BaniAsad**

Supervisor:

**Dr. Assadian**

May 2021