



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه درس کنترل بهینه ۱  
مهندسی کنترل

عنوان:

# کنترل وضعیت استند سه درجه آزادی چهارپره به روش کنترل کننده خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر اسدیان

خرداد ۱۴۰۰

سلام

## سپاس

از استاد بزرگوarm جناب دکتر اسدیان که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

## چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی<sup>۱</sup> استفاده شده است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش<sup>۲</sup> که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش خارجی و نویز سنسور مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدل‌سازی نیز از مقاومت مناسبی برخوردار است. از روش ارائه شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده است. عملکرد این روش با اجرای شبیه‌سازی‌های مختلف مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. همچنین، عملکرد آن در حضور نویز و اغتشاش و عدم قطعیت مدل از طریق شبیه‌سازی ارزیابی خواهد شد.

**کلیدواژه‌ها:** چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، شبیه‌سازی، تابع هزینه

---

<sup>1</sup>Game Theory

<sup>2</sup>Nash Equilibrium

# فهرست مطالب

۲	۱ مقدمه
۲	۱-۱ ساختار
۵	۲-۱ تاریخچه
۵	۳-۱ تعریف مسئله
۶	۴-۱ تئوری بازی
۷	۱-۴-۱ تاریخچه تئوری بازی
۷	۲-۴-۱ تعادل نش
۸	۲ کارهای پیشین
۸	۱-۲ کنترل‌کننده مبتنی بر تئوری بازی
۹	۲-۲ کنترل چهارپره
۱۰	۳ بازی دیفرانسیلی
۱۱	۱-۳ بازی حلقه باز

## فهرست شکل‌ها

- ۱-۱ هلیکوپتر شینوک [۱] . . . . . ۳
- ۲-۱ چرخش پره‌های چهارپره [۲] . . . . . ۴
- ۳-۱ استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه [۳] . . . . . ۶

## فهرست جدول‌ها





# فصل ۱

## مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر<sup>۱</sup> یکی از انواع وسایل پهنپا<sup>۲</sup> است. چهارپره‌ها نوعی هواگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپروانه‌ها جای دارند و به دلیل کمک گرفتن از چهار پروانه برای نیروی پیشران، به عنوان کواد (چهار) کوپتر نامیده می‌شوند. چهارپره‌ها به دلیل داشتن قدرت مانور فوق‌العاده و پروازهایی با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده برخوردارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده‌است و لذا روزانه پیشرفت چشم‌گیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویر برداری، تفریحی و سمپاشی از کاربرد بالا و روزافزونی برخوردارند و مدل‌های دارای سرنشین آن نیز تولید شده‌است.

## ۱-۱ ساختار

چهارپره‌ها همانند انواع دیگر وسایل پرنده از ایجاد اختلاف فشار در اتمسفر پیرامون خود برای بلند شدن و حرکت در هوا استفاده می‌نمایند. همان‌طور که هلیکوپترها به کمک پره اصلی این اختلاف فشار را ایجاد می‌کنند و نیروی برآی خود را تأمین می‌کنند. در هلیکوپترها به دلیل وجود نیروی عمل و عکس‌العمل، پس از اینکه پره اصلی شروع به چرخش می‌کند با برخورد مولکول‌های هوا به این پره و وجود عکس‌العمل، یک نیرویی با جهت مخالف جهت چرخش پره به پره و در ادامه به شفت متصل به پره اعمال می‌شود (نیروی

<sup>۱</sup>Quadcopter

<sup>۲</sup>پرنده‌ی هدایت‌پذیر از دور

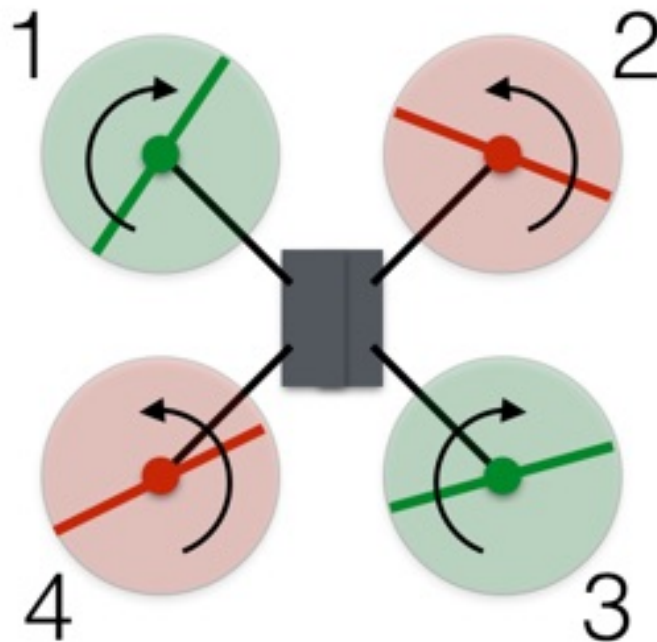
گشتاور) و باعث چرخش هلیکوپتر به دور خود می‌شود. حالا برای حل این مشکل از پره دم هلیکوپتر استفاده می‌شود تا نیرویی را تولید کند که مانع چرخش هلیکوپتر به دور خود شود. حال اگر هلیکوپتر به جای داشتن یک پره اصلی از دو پره اصلی که خلاف جهت یکدیگر بچرخند استفاده می‌نمود، به دلیل خنثی شدن دو نیروی گشتاور توسط یکدیگر، دیگر هلیکوپتر به دور خود نمی‌چرخید. مانند هلیکوپترهای شینوک<sup>۳</sup>. حال با توجه به توضیحات داده شده راحت‌تر می‌توان به ساختار چهارپره‌ها اشاره نمود.



شکل ۱-۱: هلیکوپتر شینوک [۱]

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها نیروی گشتاورهای ایجاد شده را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.

<sup>3</sup>Boeing CH-47 Chinook



شکل ۱-۲: چرخش پره‌های چهارپره [۲]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که، برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش همه موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیاد تر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و نیروی گشتاور به یک سمت ایجاد می‌شود و نیرویه برآ همانند قبل است (زیرا دو پره با سرعت کمتر و دو پره دیگر به همان نسبت با سرعت بیشتر می‌چرخند) لذا چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. برای حرکت چهارپره‌ها در جهت‌های مختلف (عقب، جلو، چپ و راست) توسط کم و زیاد کردن سرعت موتورهای چهارپره را از حالت افقی خارج کرده و باعث حرکت آن می‌شوند.

## ۲-۱ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندموتوره<sup>۴</sup> در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Jacques and Louis Breguet در پروژه‌ای بنام Quadcopter ساخته و تست شد، هرچند آن‌ها نتوانستند پرنده خود را در آسمان نگه دارند ولی موفق به پرواز ثابت شدند. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمیگردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی بنام etienne oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع نمود و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد.

در حدود سال ۱۹۲۲ در آمریکا Dr George de Btheza موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود. در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده‌است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده‌است و به تدریج رواج یافته‌است [۴]. از حدود سال ۲۰۰۶ کواد کوپترها شروع به رشد صنعتی به صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

## ۳-۱ تعریف مسئله

مسئله‌ای که در این پروژه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده‌است. در این صورت، تنها وضعیت (زوایای رول، پیچ و یاو) چهارپره تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین میتوان با مقیدکردن چرخش حول هر محور، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به صورت مجزا و با یکدیگر بررسی کرد. استند آزمایشگاهی سه درجه آزادی چهارپره در شکل ۳-۱ نشان داده شده‌است.

<sup>4</sup>Multiroter



شکل ۱-۳: استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه [۳]

با توجه به شکل مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان به صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین سیستم بدون حضور کنترل کننده ناپایدار است. این سیستم دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زاوای اوایلر  $(\psi, \theta, \phi)$  است. در مدل سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد، اما با توجه به کنترل کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به صورت اغتشاش در نظر گرفت و سیستم را به خوبی کنترل کرد. در پایان این کنترل کننده را با کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی<sup>۵</sup> مقایسه خواهد شد.

## ۴-۱ تئوری بازی

تئوری بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. تئوری بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. تئوری بازی در تلاش است تا بوسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایطِ راهبردی یا در یک بازی که در آن‌ها موفقیتِ فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

<sup>۵</sup>PID(Proportional-Integral-Derivative)

## ۱-۴-۱ تاریخچه تئوری بازی

در سال ۱۹۲۱ یک ریاضیدان فرانسوی به نام امیل بُرِل برای نخستین بار به مطالعه تعدادی از بازی‌های رایج در قمارخانه‌ها پرداخت و چند مقاله در مورد آن‌ها نوشت. او در این مقاله‌ها بر قابل پیش‌بینی بودن نتایج این نوع بازی‌ها از راه‌های منطقی، تأکید کرده بود. در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراه جان هارسانی و راینهارد سیلتن به خاطر مطالعات خلاقانه خود در زمینه نظریه بازی، برنده جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برندگان جایزه نوبل اقتصاد از میان متخصصین تئوری بازی انتخاب شدند. آخرین آنها، ژان تیرول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد.

## ۲-۴-۱ تعادل نش

در تئوری بازی، تعادل نش (به نام جان فوربز نش، که آن را پیشنهاد کرد) راه حلی از تئوری بازی است که شامل دو یا چند بازیکن، که در آن فرض بر آگاهی هر بازیکن به استراتژی تعادل بازیکنان دیگر است و بدون هیچ بازیکنی که فقط برای کسب سود خودش با تغییر استراتژی یک جانبه عمل کند. اگر هر بازیکنی استراتژی را انتخاب کند هیچ بازیکنی نمی‌تواند با تغییر استراتژی خود در حالی که امتیاز بازیکن دیگر را بدون تغییر نگه داشته باشد عمل کند، سپس مجموعه انتخاب‌های استراتژی فعلی و بهره‌مندی مربوطه، تعادل نش را تشکیل می‌دهد.

## فصل ۲

# کارهای پیشین

این بخش را می‌توان به دو قسمت پیشینه کارهای انجام شده در استفاده از تئوری بازی در کنترل سیستم و حوزه کنترل چهارپره تقسیم‌بندی کرد. که در دو بخش ۱-۲ و بخش ۲-۲ ارائه شده‌است.

### ۱-۲ کنترل‌کننده مبتنی بر تئوری بازی

در منبع [۵] به صورت خلاصه نظریه بازی و تعادل نش توضیح داده شده‌است. در حالتی از تئوری بازی می‌توان با دیگر بازیکنان همکاری یا رقابت کرد که در منبع [۶] برای یک پهباد<sup>۱</sup> بررسی شده است. به علت اینکه هدف هر بازیکن افزایش امتیاز خود و کاهش امتیاز رقیب هست، این مسئله از نوع غیرمشارکتی<sup>۲</sup> در نظر گرفته شده‌است. در این مسئله دو معادله دیفرانسیل شروع به بازی با یکدیگر می‌کنند که هدف هر کدام افزایش امتیاز خود است. در روش کنترل کننده خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی یک تابع هزینه برای هر بازیکن ایجاد می‌شود. این مسائل فرض شده که اطلاعات در اختیار تمامی بازیکنان قرار دارد و هیچ یک از آینده خبر ندارند.

از کاربردهای بازی دیفرانسیلی می‌توان به فرود بر روی اجسام متحرک مانند فرود چهارپره، هلیکوپتر و پهباد بر روی ناو[۷] اشاره کرد. در منبع [۸] از تئوری بازی و بازی دیفرانسیلی برای نبرد بین دو پهباد استفاده شده‌است. قدرت تئوری بازی بر تحلیل رفتارهای دو یا چندین بازیکن است بر همین اساس در منبع

<sup>۱</sup>UAC(unmanned aerial vehicle)

<sup>۲</sup>non-cooperative

[۹] برای دفاع و بررسی تحدید بازیکنان دیگر و در منبع [۱۰] از کنترل کننده خطی برای شکل پرواز گروه سه نفره از پهبادها استفاده شده است. بازی دیفرانسیلی در ناوبری کاربرد ویژه ای دارد، در منبع [۱۱] از این روش برای هدایت و ناوبری یک میکروپهباد<sup>۳</sup> استفاده شده است. در منبع [۱۲] از بازی دیفرانسیلی برای گشت و گریز پهبادها استفاده شده است.

تابع هزینه در این مسائل بسیار شبیه به کنترل کننده بهینه خطی<sup>۴</sup> است. در منبع [۱۳] از روش کنترل کننده بهینه خطی برای کنترل وضعیت یک چهارپره استفاده شده است. در منبع [۱۴] شرایط وجود جواب و حل معادلات ریکاتی<sup>۵</sup> LQDG ارائه شده است. در این کنترل کننده احتیاج به مدل سیستم است.

## ۲-۲ کنترل چهارپره

کنترل به روش LQR یکی از متداول ترین روش های کنترل چهارپره است. در منبع [۱۵] از روش LQR برای ردیابی مسیر یک نقطه<sup>۶</sup> با چهارپره استفاده شده و در آخر نتایج شبیه سازی با کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی مقایسه شده است. در سال ۲۰۱۴ توسط Mueller و D'Andrea یک روش برای کنترل چهارپره با از دست دادن کامل یک، دو و سه پره توسعه داده شد که اساس اجرای آن روش LQR بود [۱۶]. در منابع [۱۷] [۱۸] یک روش مسریابی بهینه برای چندپره ها از جمله چهارپره طراحی شده است. چهارپره ها انرژی محدودی دارند برای همین مشکل در منبع [۱۹] یک بهینه سازی بر روی انرژی چهارپره که در مسیر جنگلی حرکت می کند، انجام شده است. در مواری [۲۰] از کنترل بهینه و یادگیری عمیق<sup>۷</sup> برای پایداری چهارپره استفاده شده است.

<sup>3</sup>Micro-UAV (MAV)

<sup>4</sup>LQR

<sup>5</sup>Riccati

<sup>6</sup>Tracking

<sup>7</sup>Deep Learning



## فصل ۳

### بازی دیفرانسیلی

در این قسمت به خلاصه‌ای از بازی دیفرانسیلی پرداخته شده‌است. تمامی توضیحات و روابط از منبع [۵] آمده‌است. در این فصل حالت حلقه‌باز و حالت همراه با بازخورد<sup>۱</sup> بررسی می‌شود. این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن به فرم مربعی است. هدف اصلی پروژه کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه به فرم رابطه ۳-۱ نوشته می‌شود.

(۱-۳)

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T (x^T(t)Q_i x(t) + u_i^T(t)Q_{ii}u_i(t) + u_j^T(t)Q_{ij}u_j(t)) dt + x^T(T)H_i x(T)$$

در اینجا ماتریس‌های  $Q_i$ ،  $R_{ii}$  و  $H$  متقارن فرض شده‌اند و ماتریس  $R_{ii}$  به صورت مثبت معین ( $R_{ii} > 0$ ) فرض شده‌است. دینامیک سیستم تحت تاثیر هر دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا دینامیک سیستم به فرم رابطه ۳-۲ در نظر گرفته شده‌است.

(۲-۳)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad x(0) = x_0$$

در رابطه ۳-۲  $u_1$  برابر با تلاش کنترلی بهینه بازیکن اول است. در اینجا ممکن است تلاش کنترلی بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. در این پروژه حالت همکاری دو بازیکن در نظر گرفته نمی‌شود و دو بازیکن در سبب کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

---

<sup>1</sup>Feedback

### ۱-۳ بازی حلقه‌باز

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان  $t \in [0, T]$  فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سیستم را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان بستن قرارداد بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش در ادامه تعریف شده‌است.

**قضیه ۱-۳** به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات حرکات قابل قبول  $(u_1, u_2)$  از نامساوی ۳-۳ پیروی کنند.

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ and } J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1^*, u_2) \quad (۳-۳)$$

در اینجا قابل قبول بودن به معنی است که  $u_i(\cdot)$  به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه حرکات که بستگی به بازیکنان اطلاعات از بازی دارد، مجموعه‌ای از استراتژی‌هایی که بازیکنان دوست دارند برای کنترل سیستم انجام دهند و سیستم ۲-۳ باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ای یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد. به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه  $J_i$ ,  $i = 1, 2$  است. اگر تعادل نش برای تابع هزینه قسمت قبل برقرار باشد برای تابع هزینه  $\alpha_i J_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha_i > 0$  نیز برقرار است.

برای سادگی از نمادسازی  $S_i := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$  استفاده شده‌است. در اینجا فرض شده که زمان  $T$  محدود است.

**قضیه ۲-۳** ماتریس  $M$  را در نظر بگیرید:

$$M := \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ -Q_1 & -A^T & 0 \\ -Q_2 & 0 & -A^T \end{bmatrix} \quad (۴-۳)$$

فرض شده‌است که دو معادله دیفرانسیلی ریکاتی (۵-۳)،  $K_i(i)$  در بازه  $[0, T]$  جواب متقارن دارند.

$$\dot{K}_i(t) = -A^T K_i(t) - K_i(t) A + K_i(t) S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(T) = H, \quad i = 1, 2 \quad (۵-۳)$$

پس بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم<sup>۲</sup> دو نفره دارای تعادل نش حلقه‌باز در هر شرایط اولیه  $X_0$  دارد اگر ماتریس

$$H(T) := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-MT} \begin{bmatrix} I \\ Q_{1T} \\ Q_{2T} \end{bmatrix} \quad (۶-۳)$$

قابلیت معکوس شدن را داشته باشد.

در آخر با استفاده از قضیه ۲-۳ با حل دو معادله کوپل ریکاتی دیفرانسیلی می‌توان به جواب رسید.

$$\dot{P}_1 = -A^T P_1 - P_1 A - Q_1 + P_1 S_1 P_1 + P_1 S_2 P_2; \quad P_1(T) = H_1 \quad (۷-۳)$$

$$\dot{P}_2 = -A^T P_2 - P_2 A - Q_2 + P_2 S_2 P_2 + P_2 S_1 P_1; \quad P_2(T) = H_2 \quad (۸-۳)$$

---

<sup>2</sup>the two player linear quadratic differential game

## ۲-۳ بازی همراه با یازخورد

## مراجع

- [1] dreamstime. boeing ch chinook, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://cutt.ly/onRvD7x>.
- [2] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/>.
- [3] iranlabexpo. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://iranlabexpo.ir/product/28033>.
- [4] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on  $se(3)$ . In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.
- [5] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.
- [6] A. Redulla and S. P. N. Singh. Simulating differential games with improved fidelity to better inform cooperative adversarial two vehicle uav flight. In *2018 IEEE International Conference on Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots (SIMPAN)*, pages 130–136, 2018.
- [7] J. Wang, W. Lou, Y. Zhao, and W. Liu. Fixed-wing uav recovery reliably by moving platforms based on differential games. In *2019 IEEE International Conference on Unmanned Systems (ICUS)*, pages 694–698, 2019.
- [8] B. Başpınar and E. Koyuncu. Assessment of aerial combat game via optimization-based receding horizon control. *IEEE Access*, 8:35853–35863, 2020.

- [9] M. Pachter, E. Garcia, and D. W. Casbeer. Toward a solution of the active target defense differential game. *Dynamic Games and Applications*, 9(1):165–216, Mar 2019.
- [10] R. Chapa-Garcia, M. Jimenez-Lizarraga, O. Garcia, and T. Espinoza-Fraire. Formation flight of fixed-wing uavs based on linear quadratic affine game. In *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 736–741, 2016.
- [11] Y. Choi, M. Pachter, and D. Jacques. Optimal relay uav guidance-a new differential game. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 1024–1029, 2011.
- [12] J. Salmon, L. Willey, D. Casbeer, E. García, and A. Von Moll. Single pursuer and two cooperative evaders in the border defense differential game. *Journal of Aerospace Information Systems*, 17:1–11, 03 2020.
- [13] S. Bouabdallah and R. Siegwart. Full control of a quadrotor. In *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 153–158, 2007.
- [14] M. Delfour. Linear quadratic differential games: Saddle point and riccati differential equation. *SIAM J. Control and Optimization*, 46:750–774, 01 2007.
- [15] E. Kuantama, I. Tarca, and R. Tarca. Feedback linearization lqr control for quadcopter position tracking. In *2018 5th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, pages 204–209, 2018.
- [16] M. W. Mueller and R. D’Andrea. Stability and control of a quadrocopter despite the complete loss of one, two, or three propellers. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 45–52, 2014.
- [17] H. Lee and H. J. Kim. Trajectory tracking control of multirotors from modelling to experiments: A survey. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15(1):281–292, Feb 2017.
- [18] P. Pradeep, S. G. Park, and P. Wei. Trajectory optimization of multirotor agricultural uavs. In *2018 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–7, 2018.

- 
- [19] C. Aoun, N. Daher, and E. Shamma. An energy optimal path-planning scheme for quadcopters in forests. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 8323–8328, 2019.
- [20] S. Li, E. Öztürk, C. D. Wagter, G. C. H. E. de Croon, and D. Izzo. Aggressive online control of a quadrotor via deep network representations of optimality principles. *CoRR*, abs/1912.07067, 2019.



Sharif University of Technology  
Department of Aerospace Engineering

Optimal Control I Project

# **LQDG Controller for 3DOF Quadcopter Stand**

By:

**Ali BaniAsad**

Supervisor:

**Dr. Assadian**

June 2021