کاربرد ریاضیات تغییرات در کنترل بهینه

معادله دینامیک

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\right)$$

بردار متغیرهای حالت $\vec{x}(t)$

بردار کنترل $\vec{u}(t)$

$$\vec{x}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

تابع هزینه

$$J(\vec{u}(t)) = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)\, dt$$

$h(\vec{x}(t_f), t_f)$ هزینه مربوط به شرایط انتهایی (زمان و موقعیت نهایی)

$\int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)\, dt$ هزینه مسیر

سوال: اگر $h(\vec{x}(t_0), t_0)$ داشتیم، چگونه اثر داشت؟

اثر $h(\vec{x}(t_f), t_f)$ داخل انتگرال می رود. چرا؟

$$h(\vec{x}(t_f), t_f) = h(\vec{x}(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{dh(\vec{x}(t), t)}{dt}\; dt$$

$$\frac{dh(\vec{x}(t), t)}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \vec{x}}^T \dot{\vec{x}} + \frac{\partial h}{\partial t} \Rightarrow h(\vec{x}(t_f), t_f) = h(\vec{x}(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial h}{\partial \vec{x}}^T \dot{\vec{x}} + \frac{\partial h}{\partial t})\, dt$$

تابع هزینه کلی:

$$J(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) = h(\vec{x}(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left[g(\vec{x}, \vec{u}, t) + {h_{\vec{x}}}^T \dot{\vec{x}} + h_t \right] dt$$

به علاوه قید دیفرانسیلی:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\right)$$

تابع هزینه augmented

$$g_a(\vec{x},\vec{u},t,\vec{p}) = g(\vec{x},\vec{u},t) + {h_{\vec{x}}}^T\dot{\vec{x}} + h_t + \vec{p}^T(t)(-\dot{\vec{x}} + \vec{a})$$

$\vec{p}(t)$ ضرایب لاگرانژ (متغیرهای شبه حالت co-state)

$$\vec{p}_{n\times1} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

δJ (ترم تغییرات خطی variation) نسبت به متغیرهای $\underbrace{\vec{x},\vec{u},\vec{p}}_{\vec{x}_{aug}}$

$$\begin{aligned}
\delta J = &\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial g_a}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)^T \delta\vec{x} + \left(\frac{\partial g_a}{\partial \vec{u}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{u}}}\right)^T \delta\vec{u} + \left(\frac{\partial g_a}{\partial \vec{p}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{p}}}\right)^T \delta\vec{p}\right]dt \\
&+\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{u}}}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{u}_f + \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{p}}}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{p}_f \\
&-\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)^T_{*,t_0} \delta\vec{x}_0 - \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{u}}}\right)^T_{*,t_0} \delta\vec{u}_0 - \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{p}}}\right)^T_{*,t_0} \delta\vec{p}_0 \\
&+\left(g_a - \dot{\vec{x}}^T\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}} - \dot{\vec{u}}^T\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{u}}} - \dot{\vec{p}}^T\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{p}}}\right)_{*,t_f} \delta t_f \\
&-\left(g_a - \dot{\vec{x}}^T\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}} - \dot{\vec{u}}^T\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{u}}} - \dot{\vec{p}}^T\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{p}}}\right)_{*,t_0} \delta t_0
\end{aligned}$$

از این به بعد فرض می کنیم شرایط ابتدایی مشخص است (نسبت به شرایط اولیه بهینه سازی است و کنترل بهینه نیست)

مشخص است که:

$$\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{p}}} = \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{u}}} = \vec{0}$$

نهایتا:

$$\begin{aligned}
\delta J = &\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial g_a}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)^T \delta\vec{x} + \frac{\partial g_a}{\partial \vec{u}}^T \delta\vec{u} + \frac{\partial g_a}{\partial \vec{p}}^T \delta\vec{p}\right]dt \\
&+\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(g_a - \dot{\vec{x}}^T\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)_{*,t_f} \delta t_f
\end{aligned}$$

شرط لازم بهینگی $\delta J = 0$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}} = 0 \xrightarrow{g_a = g + h_{\vec{x}}{}^T \dot{\vec{x}} + h_t + \vec{p}^T(-\dot{\vec{x}} + \vec{a})}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{x}}\right)^T \dot{\vec{x}}\right) + \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}}\right)^T \vec{p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} - \vec{p}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial g}{\partial \vec{x}} - \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}}\right)^T \vec{p}$$

توجه شود که

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \vec{x} \partial t} + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \vec{x}^2}\right)\dot{\vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \frac{\partial a_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \vec{u}} = \vec{0} \xrightarrow{g_a = g + h_{\vec{x}}{}^T \dot{\vec{x}} + h_t + \vec{p}^T(-\dot{\vec{x}} + \vec{a})} \frac{\partial g}{\partial \vec{u}} + \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{u}}\right)^T \vec{p} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \vec{p}} = \vec{0} \xrightarrow{g_a = g + h_{\vec{x}}{}^T \dot{\vec{x}} + h_t + \vec{p}^T(-\dot{\vec{x}} + \vec{a})} \dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

شروط مرزی:

$$\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)_{*,t_f}^T \delta \vec{x}_f \xrightarrow{g_a = g + h_{\vec{x}}{}^T \dot{\vec{x}} + h_t + \vec{p}^T(-\dot{\vec{x}} + \vec{a})} \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} - \vec{p}\right)_{*,t_f}^T \delta \vec{x}_f$$

$$\left(g_a - \dot{\vec{x}}^T \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)_{*,t_f} \delta t_f \xrightarrow{g_a = g + h_{\vec{x}}{}^T \dot{\vec{x}} + h_t + \vec{p}^T(-\dot{\vec{x}} + \vec{a})} \left(g + h_t + \vec{p}^T \vec{a}\right) \delta t_f$$

با تعریف تابع همیلتونین

$$\mathcal{H} = g(\vec{x},\vec{u},t) + \vec{p}^T\vec{a}(\vec{x},\vec{u},t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{x}}\right)^T \vec{p}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial g}{\partial \vec{u}} + \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{u}}\right)^T \vec{p}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \vec{a} = \dot{\vec{x}}$$

شروط مرزی:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f$$

$$\left(g + h_t + \vec{p}^T\vec{a}\right)_{*,t_f} \delta t_f \to \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}})^T \delta\vec{x} + (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}})^T \delta\vec{u} + (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} - \dot{\vec{x}})^T \delta\vec{p} \right] dt$$
$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f$$

معادلات اویلر

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \vec{a}(\vec{x},\vec{u},t)$$
$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}}$$
$$\vec{0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}}$$

مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای Two Point Boundary Value Problem TPBVP

مجهولات:

- متغیرهای حالت $\vec{x}$ (n معادله دیفرانسیل)
- متغیرهای شبه-حالت یا ضرایب لاگرانژ $\vec{p}$ (n معادله دیفرانسیل)
- ورودی‌های کنترلی $\vec{u}$ (m معادله جبری)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\vec{p},t)$$

شروط مرزی Boundary Conditions

فرض می شود شرط اولیه مشخص است $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f = 0$$

زمان نهایی ثابت fixed final time

$$\delta t_f = 0$$

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f = 0$$

شرایط نهایی مشخص fixed final condition

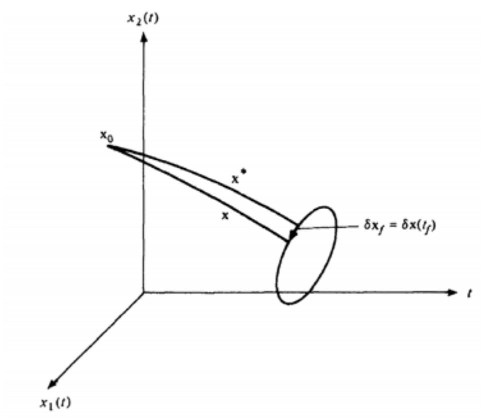
$$\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f \qquad \Rightarrow \qquad \delta\vec{x}_f = \vec{0}$$

شرایط نهایی آزاد free final condition

$$\delta\vec{x}_f \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \vec{x}}(t_f)$$

شرایط نهایی روی تقاطع رویه ها

$$\vec{m}_{k\times 1}(\vec{x}(t_f)) = \vec{0} \qquad \text{or} \qquad m_i(\vec{x}(t_f)) = 0, i = 1,2,.....,k < n$$



$\delta\vec{x}_f$ مجاز عمود بر $\dfrac{\partial m_i}{\partial \vec{x}}$ ها می شود:

$$dm_i = \frac{\partial m_i}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x}_f = 0 \qquad\qquad i = 1,2,\dots,k$$

شرط مرزی از قبل

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)_{*,t_f} \cdot \delta\vec{x}_f = 0$$

پس می توان $h_{\vec{x}} - \vec{p}$ رو ترکیب خطی از $\dfrac{\partial m_i}{\partial \vec{x}}$ها نوشت:

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} - \vec{p} = \sum_{i=1}^{k} d_i \frac{\partial m_i}{\partial \vec{x}}$$

k مجهول جدید d_i (با k معادله $\vec{m}(\vec{x}(t_f)) = \vec{0}$)

زمان نهایی آزاد free final time

شرایط نهایی مشخص fixed final condition

$$\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f \qquad \Rightarrow \qquad \delta\vec{x}_f = \vec{0}$$

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f = 0 \qquad \xrightarrow{\delta t_f \neq 0} \mathcal{H}(t_f) + h_t(t_f) = 0$$

شرایط نهایی آزاد free final condition

$$\delta\vec{x}_f \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \vec{x}}(t_f)$$

$$\delta t_f \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}(t_f) = -\frac{\partial h}{\partial t}(t_f)$$

شرایط نهایی تابع زمان

$$\vec{x}(t_f) = \vec{\theta}(t_f) \quad \Rightarrow \qquad \delta\vec{x}_f = \dot{\vec{\theta}}\,\delta t_f$$

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^T_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f = 0 \Rightarrow \qquad \left(\dot{\vec{\theta}}^T \left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right) + \mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} = 0$$

شرایط نهایی روی تقاطع رویه ها

$$\vec{m}_{k\times 1}(\vec{x}(t_f)) = \vec{0} \qquad \text{or} \qquad m_i(\vec{x}(t_f)) = 0, i = 1,2,.....,k < n$$

مشابه قبل:

n معادله
$$\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} - \vec{p} = \sum_{i=1}^{k} d_i \frac{\partial m_i}{\partial \vec{x}}$$

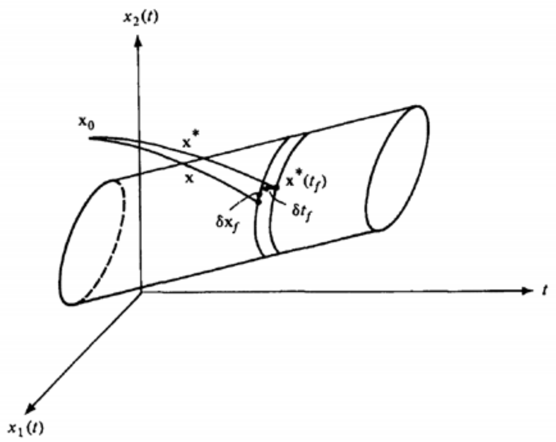
k مجهول جدید d_i

زمان هایی هم آزاد است

$$\mathcal{H}(t_f) + h_t(t_f) = 0$$

شرایط نهایی روی تقاطع رویه های متحرک در زمان نهایی

$$\vec{m}_{k\times 1}(\vec{x}(t_f), t_f) = \vec{0} \qquad \text{or} \qquad m_i(\vec{x}(t_f), t_f) = 0, i = 1,2,.....,k < n+1$$



$$dm_i = \frac{\partial m_i}{\partial \vec{x}_f} \cdot \delta \vec{x}_f + \frac{\partial m_i}{\partial t_f} \cdot \delta t_f = 0 \qquad\qquad i = 1,2,...,k$$

عملا بردار $\begin{pmatrix} \delta \vec{x}_f \\ \delta t_f \end{pmatrix}$ مجاز عمود بر $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial m_i}{\partial \vec{x}_f} \\ \dfrac{\partial m_i}{\partial t_f} \end{pmatrix}$ ها می شود.

شرط مرزی از قبل:

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)^{T}_{*,t_f} \delta\vec{x}_f + \left(\mathscr{H}\mathcal{H} + h_t\right)_{*,t_f} \delta t_f = 0$$

مثل اینکه بردار $\begin{pmatrix} \delta\vec{x}_f \\ \delta t_f \end{pmatrix}$ شرط مرزی بهینه عمود بر $\begin{pmatrix} h_{\vec{x}} - \vec{p} \\ \mathcal{H} + h_t \end{pmatrix}_{*,t_f}$ شود.

پس می توان $\begin{pmatrix} h_{\vec{x}} - \vec{p} \\ \mathcal{H} + h_t \end{pmatrix}_{*,t_f}$ رو ترکیب خطی از $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial m_i}{\partial \vec{x}_f} \\ \dfrac{\partial m_i}{\partial t_f} \end{pmatrix}$ها نوشت:

$$\begin{pmatrix} h_{\vec{x}} - \vec{p} \\ \mathcal{H} + h_t \end{pmatrix}_{*,t_f} = \sum_{i=1}^{k} d_i \begin{pmatrix} \dfrac{\partial m_i}{\partial \vec{x}_f} \\ \dfrac{\partial m_i}{\partial t_f} \end{pmatrix}$$

k مجهول جدید d_i (با k معادله $\vec{m}(\vec{x}(t_f), t_f) = \vec{0}$)

جمعا $n+k+1$ معادله و $n+k+1$ مجهول یا شرط مرزی ($\vec{x}(t_f), t_f, \vec{d}$)

Problem	*Description*	*Substitution in Eq. (5.1-18)*	*Boundary-condition equations*	*Remarks*
t_f fixed	1. $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ specified final state	$\delta\mathbf{x}_f = \delta\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ $\delta t_f = 0$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{x}_f$	$2n$ equations to determine $2n$ constants of integration
	2. $\mathbf{x}(t_f)$ free	$\delta\mathbf{x}_f = \delta\mathbf{x}(t_f)$ $\delta t_f = 0$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) - \mathbf{p}^*(t_f) = \mathbf{0}$	$2n$ equations to determine $2n$ constants of integration
	3. $\mathbf{x}(t_f)$ on the surface $\mathbf{m}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$	$\delta\mathbf{x}_f = \delta\mathbf{x}(t_f)$ $\delta t_f = 0$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) - \mathbf{p}^*(t_f) = \sum_{i=1}^{k} d_i\left[\frac{\partial m_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))\right]$ $\mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f)) = \mathbf{0}$	$(2n + k)$ equations to determine the $2n$ constants of integration and the variables $d_1, \ldots, d_k$
t_f free	4. $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ specified final state	$\delta\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{x}_f$ $\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) = 0$	$(2n + 1)$ equations to determine the $2n$ constants of integration and t_f
	5. $\mathbf{x}(t_f)$ free		$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) = \mathbf{0}$ $\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) = 0$	$(2n + 1)$ equations to determine the $2n$ constants of integration and t_f
	6. $\mathbf{x}(t_f)$ on the moving point $\boldsymbol{\theta}(t)$	$\delta\mathbf{x}_f = \left[\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}(t_f)\right]\delta t_f$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \boldsymbol{\theta}(t_f)$ $\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f)$ $+ \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f)\right]^T \left[\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}(t_f)\right] = 0$	$(2n + 1)$ equations to determine the $2n$ constants of integration and t_f
	7. $\mathbf{x}(t_f)$ on the surface $\mathbf{m}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$		$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) = \sum_{i=1}^{k} d_i\left[\frac{\partial m_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))\right]$ $\mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f)) = \mathbf{0}$ $\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) = 0$	$(2n + k + 1)$ equations to determine the $2n$ constants of integration, the variables $d_1, \ldots, d_k$, and t_f
	8. $\mathbf{x}(t_f)$ on the moving surface $\mathbf{m}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0}$		$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) = \sum_{i=1}^{k} d_i\left[\frac{\partial m_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f)\right]$ $\mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) = \mathbf{0}$ $\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f)$ $= \sum_{i=1}^{k} d_i\left[\frac{\partial m_i}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f)\right]$	$(2n + k + 1)$ equations to determine the $2n$ constants of integration, the variables $d_1, \ldots, d_k$, and t_f.

مثال:

سیستم $\ddot{x} + \dot{x} = u$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

تابع هزینه

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt$$

تشکیل تابع همیلتونین:

$$\mathcal{H}\Big(x(t), u(t), p(t)\Big) = \frac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)x_2(t) - p_2(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

معادلات شبه حالت:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1^*(t) + p_2^*(t) \end{aligned}$$

معادله اصلی کنترل بهینه

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = u^*(t) + p_2^*(t) = 0$$

با جایگذاری u در معادله سیستم

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^*(t) &= x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) &= -x_2^*(t) - p_2^*(t) \end{aligned}$$

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول برای x_1, x_2, p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= c_1 + c_2\left(1 - e^{-t}\right) + \frac{1}{2}c_3\left(-2t - e^{-t} + e^t\right) + \frac{1}{2}c_4\left(2 - e^{-t} - e^t\right) \\ x_2^*(t) &= c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}c_3\left(-2 + e^{-t} + e^t\right) + \frac{1}{2}c_4\left(e^{-t} - e^t\right) \\ p_1^*(t) &= c_3 \\ p_2^*(t) &= c_3\left(1 - e^t\right) + c_4 e^t \end{aligned}$$

نیاز به ۴ شرط مرزی برای پیدا کردن ثوابت

حالت اول: شرط ابتدایی و انتهایی ثابت:

$$\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{x}_f=\vec{x}(2)=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

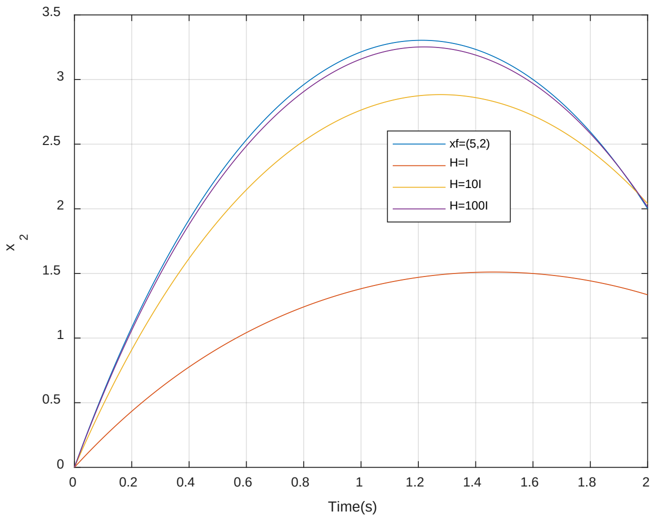
ثوابت حرکت و معادله جواب:

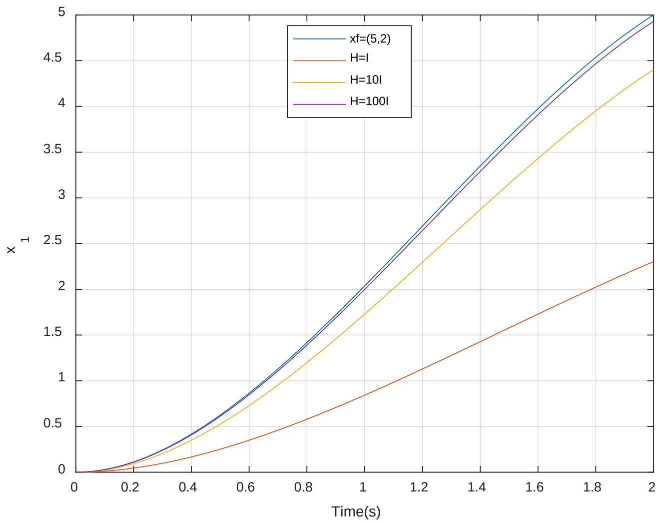
$$\begin{aligned}
&c_1=c_2=0 \quad c_3=-7.289 \quad c_4=-6.103\\
&x_1^*(t)=7.289t-6.103+6.696e^{-t}-0.593e^{t}\\
&x_2^*(t)=7.289-6.696e^{-t}-0.593e^{t}.
\end{aligned}$$

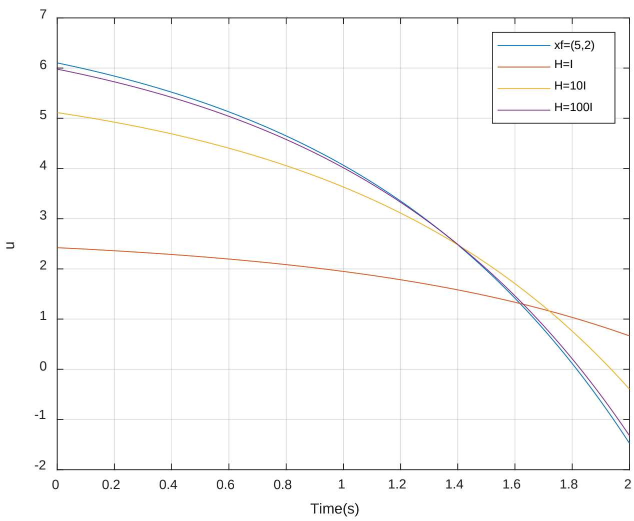
حالت دوم: شرط ابتدا مثل قبل. شرط انتهایی آزاد، ولی پنالتی برای همان شرایط قبلی

$$J(\vec{u}(t))=\frac{1}{2}\left(\vec{x}(2)-\vec{x}_f\right)^T H\left(\vec{x}(2)-\vec{x}_f\right)+\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt \qquad \vec{x}_f=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(h_{\vec{x}}-\vec{p}\right)\Big|_{*,t_f}=\vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad H\left(\vec{x}(t_f)-\vec{x}_f\right)-\vec{p}(t_f)=\vec{0}$$







برخی شرایط تابع همیلتونین

$$\mathcal{H}(\vec{x}(t),\vec{u}(t),\vec{p}(t),t)= g(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t)+\vec{p}^{T}(t)\ \vec{a}(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t)$$

برای کمینه کردن $J(\vec{x}(t),\vec{u}(t)) = h(\vec{x}(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t)\,dt$

وقتی قید دیفرانسیلی $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t)$ هست

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}}^{T}\dot{\vec{x}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}}^{T}\dot{\vec{u}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}^{T}\dot{\vec{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ &\xrightarrow[\dot{\vec{x}}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}},\,\dot{\vec{p}}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}}]{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}}=0} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}}^{T}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}^{T}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

اگر تابع صریح از زمان نباشد:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \rightarrow \mathcal{H} = \text{constant}$$

اگر زمان نهایی آزاد باشد و $h(\vec{x}(t_f),t_f)$ هم تابع صریح از زمان نباشد:

$$\delta t_f \neq 0 \rightarrow (\mathcal{H}+h_t)\Big|_{*,t_f} = 0 \Rightarrow \mathcal{H}(t_f) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}(t) = 0$$

اگر شکل درجه ۲ (Quadratic) داشته باشد:

$$\mathcal{H}(\vec{x},\vec{u},\vec{p},t) = f(\vec{x},\vec{p},t) + \vec{c}^{T}(\vec{x},\vec{p},t)\ \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}^{T}R(\vec{x},\vec{p},t)\vec{u}$$

معمولا فقط $R(\vec{x},\vec{p},t) = R(t) = R$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = \vec{c}(\vec{x},\vec{p},t) + R(\vec{x},\vec{p},t)\vec{u} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = R^{-1}\vec{c}$$

و البته

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \vec{u}^2} = R(\vec{x},\vec{p},t)$$

اگر $R(\vec{x},\vec{p},t)$ در تمام شرایط مثبت معین باشد، نقطه جواب مینیمم است (شرط کافی) و همچنین مینیمم عمومی است.

نمونه مسائل کاربردی کنترل بهینه

تنظیم‌کننده بهینه خطی Linear Quadratic Regulator (LQR)

سیستم خطی

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a} = A(t)\,\vec{x}(t) + B(t)\,\vec{u}(t)$$

تابع هزینه درجه ۲ (Quadratic)

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= \frac{1}{2}\left\|\vec{x}(t_f)\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\left\|\vec{x}(t)\right\|_Q^2 + \left\|\vec{u}(t)\right\|_R^2\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\vec{x}^T(t_f)H\,\vec{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\vec{x}^T(t)Q(t)\vec{x}(t) + \vec{u}^T(t)R(t)\vec{u}(t)\right)dt \end{aligned}$$

هدف: ۱- نزدیک کردن موقعیت متغیرهای سیستم در کلیه زمان‌ها به مقدار صفر است (با ماتریس Q)

۲- مصرف کم انرژی (با ماتریس R)

۳- رساندن شرایط نهایی به صفر (با ماتریس H)

H, Q: real symmetric positive semi-definite matrix

R: real symmetric positive definite matrix

تابع همیلتونین:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= g + \vec{p}^T\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{x}^T(t)Q(t)\vec{x}(t) + \frac{1}{2}\vec{u}^T(t)R(t)\vec{u}(t) + \vec{p}^T\left(A(t)\,\vec{x}(t) + B(t)\,\vec{u}(t)\right) \end{aligned}$$

معادلات حالت و شبه حالت:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = \vec{a} = A\,\vec{x}(t) + B\,u(t)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{x}} = -Q\,\vec{x} - A^T\vec{p}$$

معادله کنترل:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{u}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R\vec{u} + B^T\vec{p} = 0 \rightarrow \vec{u} = -R^{-1}B^T\vec{p}$$

هدف: پیدا کردن ارتباط $\vec{p}(t)$ با $\vec{x}(t)$ (feedback control)

جایگذاری در معادلات سیستم

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} - B\,R^{-1}\,B^{T}\,\vec{p}$$

و با تعریف $\vec{z} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \dot{\vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^{T} \\ -Q & -A^{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^{T} \\ -Q & -A^{T} \end{pmatrix}\vec{z} = A'\vec{z} = A'_{2n\times 2n}\vec{z}_{2n\times 1}$$

$$\dot{\vec{z}} = A'\vec{z} = A'_{2n\times 2n}\vec{z}_{2n\times 1}$$

جواب سیستم خطی بر حسب ماتریس انتقال حالت State Trasition Matrix

$$\vec{z}(t) = \Phi(t)\,\vec{z}_{0} = \Phi(t,t_{0})\,\vec{z}(t_{0})$$

$$\Phi(t,t_{0}) = e^{A'(t-t_{0})}$$

یادآوری

$$\begin{aligned}
&\Phi(t) = e^{A't} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(sI - A'\right)^{-1}\right\} = I + A'\,t + \frac{1}{2!}A'^{2}t^{2} + \cdots \\
&\dot{\Phi}(t) = A'\Phi(t), \qquad\qquad \Phi(0) = I \\
&\Phi(t,t_{0}) = e^{A'(t-t_{0})} \qquad\quad \Phi(t,t) = I \\
&\Phi(t_{0},t) = e^{A'(t_{0}-t)} = e^{-A'(t-t_{0})} = \Phi^{-1}(t,t_{0})
\end{aligned}$$

پس شرایط نهایی می شود:

$$\vec{z}(t_{f}) = \Phi(t_{f},t)\,\vec{z}(t) = e^{A'(t_{f}-t)}\,\vec{z}(t)$$

ارتباط

$$\vec{z}(t_{f}) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t_{f}-t) & \phi_{12}(t_{f}-t) \\ \phi_{21}(t_{f}-t) & \phi_{22}(t_{f}-t) \end{pmatrix}\vec{z}(t) \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}(t_{f}) \\ \vec{p}(t_{f}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t_{f}-t) & \phi_{12}(t_{f}-t) \\ \phi_{21}(t_{f}-t) & \phi_{22}(t_{f}-t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}$$

ماتریس های $\phi_{11},\phi_{12},\phi_{21},\phi_{22}$ همگی $n\times n$ هستند

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t_{f}) &= \phi_{11}(t_{f}-t)\vec{x}(t) + \phi_{12}(t_{f}-t)\vec{p}(t) \\
\vec{p}(t_{f}) &= \phi_{21}(t_{f}-t)\vec{x}(t) + \phi_{22}(t_{f}-t)\vec{p}(t)
\end{aligned}$$

شرط مرزی:

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)\Big|_{*,t_{f}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p}(t_{f}) = \frac{\partial h}{\partial \vec{x}_{f}} = H\vec{x}(t_{f})$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{p}(t_f) = H\vec{x}(t_f) \\
\Rightarrow\quad & \phi_{21}(t_f - t)\vec{x}(t) + \phi_{22}(t_f - t)\vec{p}(t) = H\left[\phi_{11}(t_f - t)\vec{x}(t) + \phi_{12}(t_f - t)\vec{p}(t)\right] \\
\Rightarrow\quad & \left[\phi_{22}(t_f - t) - H\phi_{12}(t_f - t)\right]\vec{p}(t) = \left[H\phi_{11}(t_f - t) - \phi_{21}(t_f - t)\right]\vec{x}(t) \\
\Rightarrow\quad & \vec{p}(t) = \left[\phi_{22}(t_f - t) - H\phi_{12}(t_f - t)\right]^{-1}\left[H\phi_{11}(t_f - t) - \phi_{21}(t_f - t)\right]\vec{x}(t)
\end{aligned}
$$

پس ارتباط $\vec{p}(t)$ با $\vec{x}(t)$ پیدا شد

$$\vec{p}(t) = K(t)\,\vec{x}(t)$$

پیدا کردن $K(t)$

راه اول (تعریف):

$$K_{n\times n}(t) = \left[\phi_{22}(t_f - t) - H\phi_{12}(t_f - t)\right]^{-1}\left[H\phi_{11}(t_f - t) - \phi_{21}(t_f - t)\right]$$

راه دوم:

فرض شود فرم کلی $\vec{p}(t) = K(t)\vec{x}(t)$ وجود دارد.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{u} = -R^{-1}B^T\vec{p} = -R^{-1}B^TK\,\vec{x}$$

از یک طرف:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = -Q\,\vec{x} - A^T\vec{p} = \left(-Q - A^TK\right)\vec{x}$$

ازطرف دیگر:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\vec{p}(t) = K(t)\,\vec{x}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{p}} = \dot{K}\,\vec{x} + K\,\dot{\vec{x}} \\
&\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\,\vec{u} = A\vec{x} - B\,R^{-1}B^TK\,\vec{x}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = \dot{K}\,\vec{x} + K\left(A\,\vec{x} - B\,R^{-1}B^TK\,\vec{x}\right)$$

تریب دو رابطه:

$$
\begin{aligned}
&\left(-Q - A^TK\right)\vec{x} = \left(\dot{K} + KA - KB\,R^{-1}B^TK\right)\vec{x} \\
&\Rightarrow \qquad -Q - A^TK = \dot{K} + KA - KB\,R^{-1}B^TK
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\dot{K} + KA + A^TK - KB\,R^{-1}B^TK + Q = 0}$$

معادله ریکاتی دیفرانسیلی Riccati equation

شرط مرزی:

$$\vec{p}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \vec{x}} = H\vec{x}(t_f) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{K(t_f) = H}$$

K یک ماتریس متقارن است. یعنی به دلیل متقارن بودن $n(n+1)/2$ معادله دیفراسیل حل می شود

$$\dot{K}^T + A^T K^T + K^T A + Q^T - K^T B (R^{-1})^T B^T K^T = 0$$

ماتریس های Q, R, H همه متقارن هستند.

$$\dot{K}^T + A^T K^T + K^T A + Q - K^T B (R^{-1}) B^T K^T = 0$$

عینا مشابه معادله اصلی ریکاتی، با شرط نهایی یکسان. پس هر دو یک جواب خواهد داشت.

نحوه حل:

۱- معادله ریکاتی برای K از انتها حل می شود.

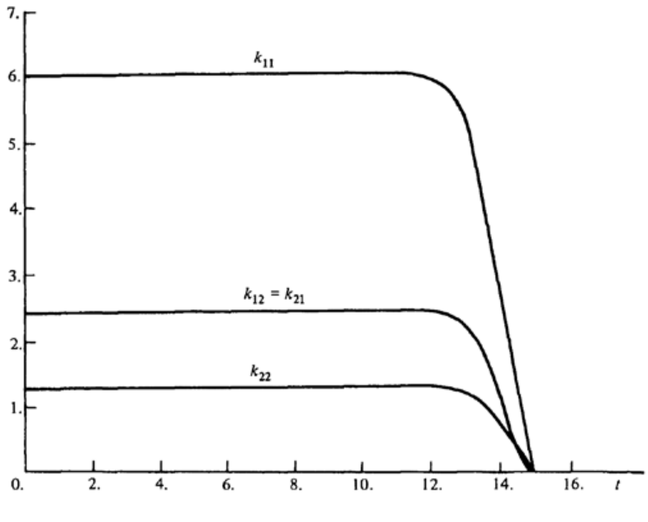
$$\dot{K} = -KA - A^T K + KB R^{-1} B^T K - Q; \qquad K(t_f) = H$$

۲- ماتریس فیدبک خطی حاصل می شود.

$$\vec{u} = -R^{-1} B^T K \vec{x}$$

۳- سیستم اصلی با فیدبک شبیه سازی می شود (به ازای هر شرط اولیه ای)

رفتار زمانی المان های K وقتی سیستم تابع زمان نیست



برای بیشتر مسیر می توان به فرم زیر نوشت:

$$\dot{K} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0$$

معادله جبری ریکاتی

مثل اینکه برای سیستم زیر بوده است

سیستم خطی autonomous

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t) + B\,\vec{u}(t)$$

تابع هزینه درجه ۲ (Quadratic)

$$J(u(t)) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\vec{x}^T(t)Q\vec{x}(t) + \vec{u}^T(t)R\vec{u}(t)\right)dt$$

جواب برای زمان محدود نسبت به زمان نامحدود کمی تفاوت دارد و در بسیاری موارد قابل صرف نظر است.

تعقیب‌کننده بهینه خطی Linear Quadratic Tracker

سیستم خطی

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a} = A(t)\,\vec{x}(t) + B(t)\,\vec{u}(t)$$

تابع هزینه درجه ۲ (Quadratic)

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= \frac{1}{2}\left\|\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\left\|\vec{x}(t) - \vec{r}(t)\right\|_Q^2 + \left\|\vec{u}(t)\right\|_R^2\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)\right)^T H\left(\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\vec{x}(t) - \vec{r}(t)\right)^T Q(t)\left(\vec{x}(t) - \vec{r}(t)\right) + \vec{u}^T(t)R(t)\vec{u}(t)\right]dt \end{aligned}$$

هدف: ۱- نزدیک کردن موقعیت متغیرهای سیستم در کلیه زمان‌ها به مقدار مسیر هدف یا فرمان $\vec{r}(t)$ است (با ماتریس Q)

۲- مصرف کم انرژی (با ماتریس R)

۳- رساندن شرایط نهایی به صفر (با ماتریس H)

H, Q: real symmetric positive semi-definite matrix

R: real symmetric positive definite matrix

تابع همیلتونین:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= g + \vec{p}^{T}\vec{a}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\vec{x}(t) - \vec{r}(t)\Big)^{T} Q(t)\Big(\vec{x}(t) - \vec{r}(t)\Big) + \frac{1}{2}\vec{u}^{T}(t)R(t)\vec{u}(t)\\ &\quad + \vec{p}^{T}\Big(A(t)\,\vec{x}(t) + B(t)\,\vec{u}(t)\Big)\end{aligned}$$

معادلات حالت و شبه حالت:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \vec{a} = A\,\vec{x}(t) + B\,u(t)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = -Q\Big(\vec{x} - \vec{r}\Big) - A^{T}\vec{p}$$

معادله کنترل:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R\vec{u} + B^{T}\vec{p} = 0 \to \vec{u} = -R^{-1}\,B^{T}\vec{p}$$

هدف: پیدا کردن ارتباط $\vec{p}(t)$ با $\vec{x}(t)$ (feedback control)

جایگذاری در معادلات سیستم

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} - B\,R^{-1}\,B^{T}\vec{p}$$

و با تعریف $\vec{z} = \begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{p}\end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^{T}\\ -Q & -A^{T}\end{pmatrix}\vec{z} + \begin{pmatrix}\vec{0}\\ Q\vec{r}\end{pmatrix} = A'\,\vec{z} + \vec{b}'(t) = A'_{2n\times 2n}\vec{z}_{2n\times 1} + \vec{b}'_{2n\times 1}$$

$$\dot{\vec{z}} = A'(t)\ \vec{z} + \vec{b}'(t)$$

جواب سیستم خطی بر حسب ماتریس انتقال حالت State Trasition Matrix

$$\vec{z}(t) = \Phi(t, t_0)\,\vec{z}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t, \tau)\ \vec{b}'(\tau)\,d\tau$$

برای شرایط نهایی می شود:

$$\vec{z}(t_f) = \Phi(t_f, t)\,\vec{z}(t) + \int_{t}^{t_f}\Phi(t_f, \tau)\ \vec{b}'(\tau)\,d\tau$$

$$\begin{aligned}\vec{z}(t_f) &= \begin{pmatrix}\phi_{11}(t_f - t) & \phi_{12}(t_f - t)\\ \phi_{21}(t_f - t) & \phi_{22}(t_f - t)\end{pmatrix}\vec{z}(t) + \begin{pmatrix} f_1(t_f, t)\\ f_2(t_f, t)\end{pmatrix}\\ \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix}\vec{x}(t_f)\\ \vec{p}(t_f)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\phi_{11}(t_f - t) & \phi_{12}(t_f - t)\\ \phi_{21}(t_f - t) & \phi_{22}(t_f - t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}(t)\\ \vec{p}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t_f, t)\\ f_2(t_f, t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{x}(t_f) = \phi_{11}(t_f - t)\vec{x}(t) + \phi_{12}(t_f - t)\vec{p}(t) + f_1(t_f, t)$$
$$\vec{p}(t_f) = \phi_{21}(t_f - t)\vec{x}(t) + \phi_{22}(t_f - t)\vec{p}(t) + f_2(t_f, t)$$

شرط مرزی:

$$\left(h_{\vec{x}} - \vec{p}\right)\Big|_{*,t_f} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \vec{x}_f} = H\left(\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)\right)$$

با معادله

$$\begin{aligned}
&\vec{p}(t_f) = H\vec{x}(t_f) - H\vec{r}(t_f)\\
\Rightarrow \quad & \phi_{21}(t_f - t)\vec{x}(t) + \phi_{22}(t_f - t)\vec{p}(t) + f_2(t_f, t) = \\
& \qquad H\left[\phi_{11}(t_f - t)\vec{x}(t) + \phi_{12}(t_f - t)\vec{p}(t) + f_1(t_f, t)\right] - H\vec{r}(t_f)\\
\Rightarrow \quad & \left[\phi_{22}(t_f - t) - H\phi_{12}(t_f - t)\right]\vec{p}(t) = \left[H\phi_{11}(t_f - t) - \phi_{21}(t_f - t)\right]\vec{x}(t) + \\
& \qquad\qquad Hf_1(t_f, t) - H\vec{r}(t_f) - f_2(t_f, t)\\
\Rightarrow \quad & \vec{p}(t) = \left[\phi_{22}(t_f - t) - H\phi_{12}(t_f - t)\right]^{-1}\left\{\left[H\phi_{11}(t_f - t) - \phi_{21}(t_f - t)\right]\vec{x}(t)\right.\\
& \qquad\qquad \left. + Hf_1(t_f, t) - H\vec{r}(t_f) - f_2(t_f, t)\right\}
\end{aligned}$$

پس ارتباط $\vec{p}(t)$ با $\vec{x}(t)$ به فرم زیر می شود

$$\vec{p}(t) = K(t)\,\vec{x}(t) + \vec{s}(t)$$

پیدا کردن $K(t)$ و $\vec{s}(t)$

راه اول (تعریف):

$$K_{n\times n}(t) = \left[\phi_{22}(t_f - t) - H\phi_{12}(t_f - t)\right]^{-1}\left[H\phi_{11}(t_f - t) - \phi_{21}(t_f - t)\right]$$

$$\vec{s}_{n\times 1}(t) = \left[\phi_{22}(t_f - t) - H\phi_{12}(t_f - t)\right]^{-1}\left[Hf_1(t_f, t) - H\vec{r}(t_f) - f_2(t_f, t)\right]$$

راه دوم:

فرض شود فرم کلی $\vec{p}(t) = K(t)\,\vec{x}(t) + \vec{s}(t)$ وجود دارد.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{u} = -R^{-1}\,B^T\vec{p} = -R^{-1}B^T\left(K\,\vec{x} + \vec{s}\right)$$

از یک طرف:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = -Q\,\vec{x} + Q\vec{r} - A^T\vec{p} = \left(-Q - A^T K\right)\vec{x} - A^T\vec{s} + Q\vec{r}$$

ازطرف دیگر:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}(t) = K(t)\vec{x}(t) + \vec{s}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{p}} = \dot{K}\,\vec{x} + K\,\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{s}} \\ \dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} + B\,\vec{u} = A\,\vec{x} - B\,R^{-1}\,B^T\left(K\,\vec{x} + \vec{s}\right) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}} = \dot{K}\,\vec{x} + K\left(A\,\vec{x} - B\,R^{-1}\,B^T K\,\vec{x} - B\,R^{-1}\,B^T\vec{s}\right) + \dot{\vec{s}}$$

$$\left(-Q - A^T K\right)\vec{x} - A^T\vec{s} + Q\vec{r} = \left(\dot{K} + KA - KB\,R^{-1}\,B^T K\right)\vec{x} - KB\,R^{-1}\,B^T\vec{s} + \dot{\vec{s}}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} -Q - A^T K = \dot{K} + KA - KB\,R^{-1}\,B^T K \\ -A^T\vec{s} + Q\vec{r} = -KB\,R^{-1}\,B^T\vec{s} + \dot{\vec{s}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{K} + KA + A^T K - KB\,R^{-1}\,B^T K + Q = 0 \\ \dot{\vec{s}} + A^T\vec{s} - KB\,R^{-1}\,B^T\vec{s} - Q\vec{r} = \vec{0} \end{cases}$$

شرط مرزی:

$$\vec{p}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \vec{x}} = H\vec{x}(t_f) - H\vec{r}(t_f) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} K(t_f) = H \\ \vec{s}(t_f) = -H\vec{r}(t_f) \end{cases}$$

بحث های مربوط به K مثل قبل برقرار است.

نحوه حل:

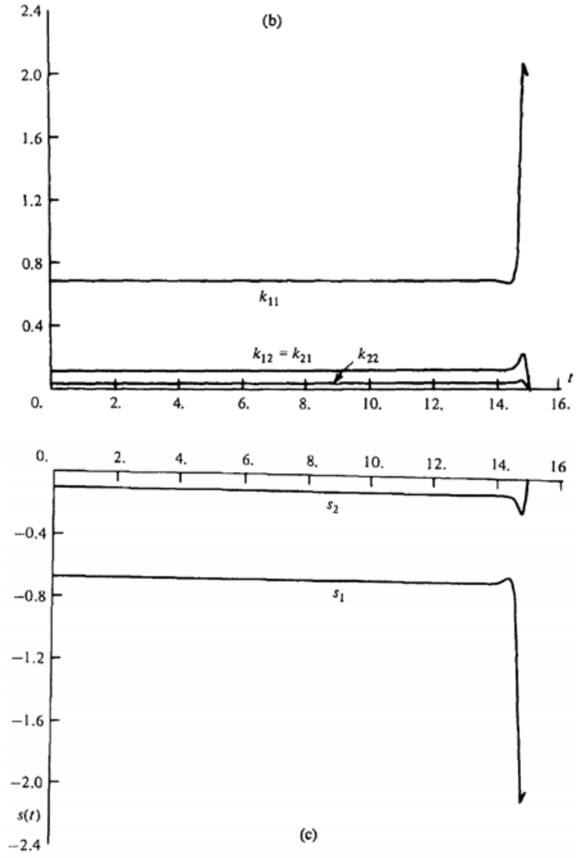
۱- معادله K و s از انتها حل می شود.

$$\begin{cases} \dot{K} = -KA - A^T K + KB\,R^{-1}\,B^T K - Q \\ \dot{\vec{s}} = -A^T\vec{s} + KB\,R^{-1}\,B^T\vec{s} + Q\vec{r} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} K(t_f) = H \\ \vec{s}(t_f) = -H\vec{r}(t_f) \end{array}$$

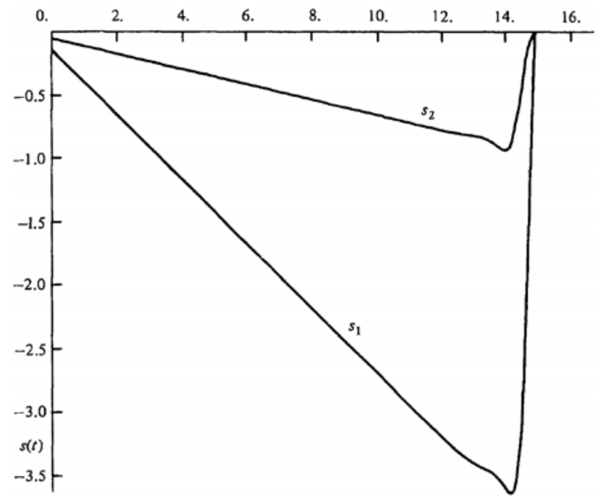
۲- ماتریس فیدبک خطی از متغیرهای حالت و فیدفوروارد حاصل می شود.

۳- سیستم اصلی با فیدبک و فیدفوروارد شبیه سازی می شود (به ازای هر شرط اولیه ای)

اگر ماتریس‌های A و B و بردار $\vec{r}$ تابعی از زمان نباشند، $\vec{s}$ هم به‌سمت عدد ثابت میل می‌کند.



ولی اگر بردار $\vec{r}$ تابعی از زمان باشند (مثلا خطی)، $\vec{s}$ هم به‌سمت عدد ثابت میل نمی‌کند.



قیود نامساوی کنترل و حالت

Pontryagin Minimum Principle

تا حالا فرض بر این بود که سیگنال کنترل و متغیرهای حالت محدود نباشند

اگر قید مساوی برای کنترل یا حالت داشتیم:

۱- جایگذاری مستقیم (حذف همان تعداد کنترل یا حالت)

۲- استفاده از ضرایب لاگرانژ (ضرایب لاگرانژ جدید و معادلات جدید)

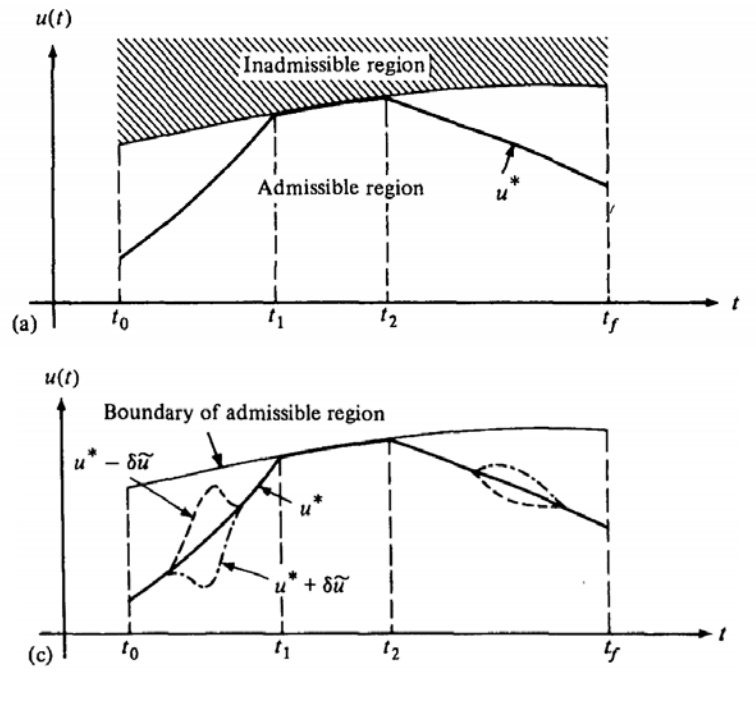
۳- استفاده از توابع جریمه (Penalty Function) در روش های عددی پرداخته می شود.

قیود نامساوی سیگنال کنترل

$$\min \ J(\vec{u}(t)) = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)\, dt$$

$$\text{subject to } \dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\,(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

$$u_{i\min} \le u_i \le u_{i\max}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$



هدف اصلی این بود که سیگنال کنترلی پیدا شود که:

$$\begin{aligned}\delta J(\vec{u}^*,\delta\vec{u}) &= J(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u},t) - J(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u}^*,t)\\ &= J(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u}^*+\delta\vec{u},t) - J(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u}^*,t) \geq 0\end{aligned}$$

از قبل برای تغییرات داریم:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left[(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{x}}+\dot{\vec{p}})^T\,\delta\vec{x} + (\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{u}})^T\,\delta\vec{u} + (\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}}-\dot{\vec{x}})^T\,\delta\vec{p}\right]dt$$
$$\left(h_{\vec{x}}-\vec{p}\right)^T_{*,t_f}\,\delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H}+h_t\right)_{*,t_f}\,\delta t_f$$

اگر معادلات زیر:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}^* &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = \vec{a}(\vec{x}^*,\vec{u}^*,t)\\ \dot{\vec{p}}^* &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{x}} = \vec{a}_p(\vec{x}^*,\vec{u}^*,\vec{p}^*,t)\end{aligned}$$

به همراه شروط مرزی

$$\left(h_{\vec{x}}-\vec{p}\right)^T_{*,t_f}\,\delta\vec{x}_f + \left(\mathcal{H}+h_t\right)_{*,t_f}\,\delta t_f = 0$$

ارضا شوند، ترم زیر می ماند:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{u}})^T\,\delta\vec{u}\;\,dt \geq 0$$

پس در کل مسیر باید (چون کنترل در زمان های متفاوت مستقل از هم هستند):

$$\begin{aligned}(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{u}})^T\,\delta\vec{u}\geq 0 \quad &\Rightarrow\quad \mathcal{H}(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u},t)-\mathcal{H}(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u}^*,t)\geq 0\\ &\Rightarrow\quad \mathcal{H}(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u},t)\geq\mathcal{H}(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u}^*,t)\end{aligned}$$

Pontryagin's minimum principle

و چون سیگنال های کنترل هم مستقل هستند:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_i}\delta u_i \geq 0;\qquad\qquad i=1,2,\ldots,\mathrm{m}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_i}\left(u_i-u_i^*\right)\geq 0;\qquad\qquad i=1,2,\ldots,\mathrm{m}$$

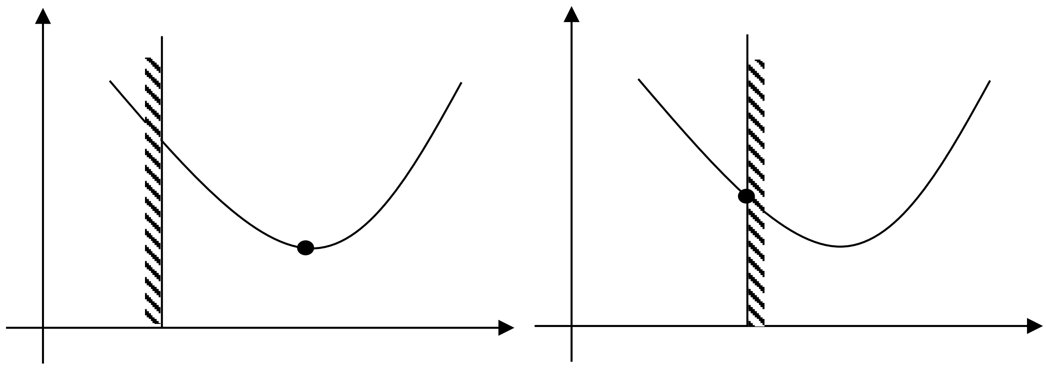
اگر روی کنترل قید (نامساوی) نداشتیم $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_i}=0$

اگر قید داشتیم $\mathcal{H}(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u},t)\geq\mathcal{H}(\vec{x}^*,\vec{p}^*,\vec{u}^*,t)$

باتوجه به نوع قید (side constraint) که محدوده سیگنال مشخص شده است:

$$u_{i\min} \le u_i \le u_{i\max} \xrightarrow{\text{in the current condition}} \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} < 0 & u_i = u_{i\max} \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0 & \mathcal{H} \text{ is not a function of } u_i \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} > 0 & u_i = u_{i\min} \end{cases}$$

مثل بهینه سازی:



$x^* = x_{f'=0}$ $\qquad$ $f' < 0 \Rightarrow x^* = x_{\max}$

مثال:

سیستم (همان سیستم قبلی $\ddot{x} + \dot{x} = u$):

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

تابع هزینه:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x_1^2(t) + u^2(t)\right] dt$$

به علاوه شروط مرزی

همیلتونین:

$$\mathcal{H}\left(\vec{x}(t), u(t), \vec{p}(t)\right) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)x_2(t) - p_2(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

معادلات شبه حالت

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = -x_1(t)$$
$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1(t) + p_2(t)$$

شرط بهینگی

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = u(t) + p_2(t)$$

اگر قید روی کنترل نداشته باشیم:

$$u(t) = -p_2(t)$$

اگر قید کنترلی زیر وجود داشته باشد:

$$-1 \le u(t) \le +1 \quad \text{for all } t \in \left[t_0, t_f\right]$$

معادله بالا می شود:

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{for } 1 < p_2(t) \\ -p_2(t), & \text{for } -1 \le p_2(t) \le 1 \\ +1, & \text{for } p_2(t) < -1 \end{cases}$$

قیود نامساوی متغیرهای حالت

$$\min\ J(\vec{u}(t)) = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)\, dt$$

$$\text{subject to}\ \ \dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\,(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

$$\vec{f}_{l\times 1}(\vec{x}(t), t) \le \vec{0} \qquad \text{or} \qquad f_i(\vec{x}(t), t) \le 0, i = 1,2,\ldots\ldots,l$$

تعریف متغیر جدید x_{n+1}:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{l} f_i^2(\vec{x}(t), t)\ \mathbb{1}(f_i) = a_{n+1}(\vec{x}(t), t)$$

تابع پله:

$$\mathbb{1}(f_i) = \begin{cases} 1 & f_i > 0 \\ 0 & f_i \le 0 \end{cases}$$

باتوجه به رابطه

$$x_{n+1}(t) = x_{n+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_{n+1}(t)\, dt$$

اگر دو شرط زیر برقرار باشد، یعنی تمام قیود ارضا شده اند:

$$x_{n+1}(t_0) = 0$$

$$x_{n+1}(t_f) = 0$$

همیلتونین:

$$\mathcal{H} = g + \vec{p}^{\,T}\vec{a} + p_{n+1}a_{n+1}$$

تمام معادلات مشابه قبل است.

$$\dot{p}_{n+1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \qquad p_{n+1} = \text{constant}$$

مساله کمینه زمان Minimum Time

$$\min \; J(\vec{u}(t)) = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

$$\text{subject to } \dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\right)$$

$$u_{i\min} \le u_i \le u_{i\max}; \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

آیا دو مساله زیر فرق دارند؟

$$h(\vec{x}(t_f), t_f) = t_f - t_0$$
$$g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) = 1$$

سیستم های خطی نسبت به کنترل

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\left(\vec{x}(t), t\right) + \mathrm{B}(\vec{x}(t), t)\, \vec{u}(t)$$

$$\mathrm{B}_{n\times m}(\vec{x}(t), t)$$

همیلتونین:

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}, t) = 1 + \vec{p}^T \left(\vec{a}\left(\vec{x}(t), t\right) + \mathrm{B}(\vec{x}(t), t)\, \vec{u}(t)\right)$$

با استفاده از Pontryagin's minimum principle در کل مسیر باید:

$$\mathcal{H}(\vec{x}^*, \vec{p}^*, \vec{u}, t) \ge \mathcal{H}(\vec{x}^*, \vec{p}^*, \vec{u}^*, t)$$

یا

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i}\left(u_i - u_i^*\right) \ge 0; \qquad i = 1,2,\ldots,\mathrm{m}$$

چون نسبت به u خطی است، پس فقط شیب خط مهم است.

شیب خط نسبت به u

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = \mathrm{B}^T(\vec{x}(t), t)\, \vec{p}(t)$$

$\mathrm{B}(\vec{x}(t), t)$ را می توان به فرم زیر نوشت:

$$\mathrm{B}_{n\times m}(\vec{x}(t), t) = \left[\vec{b}_1(\vec{x}(t), t) \quad \vec{b}_2(\vec{x}(t), t) \quad \cdots \quad \vec{b}_m(\vec{x}(t), t)\right]$$

$\vec{b}_i$ ها بردارهای $n \times 1$ هستند

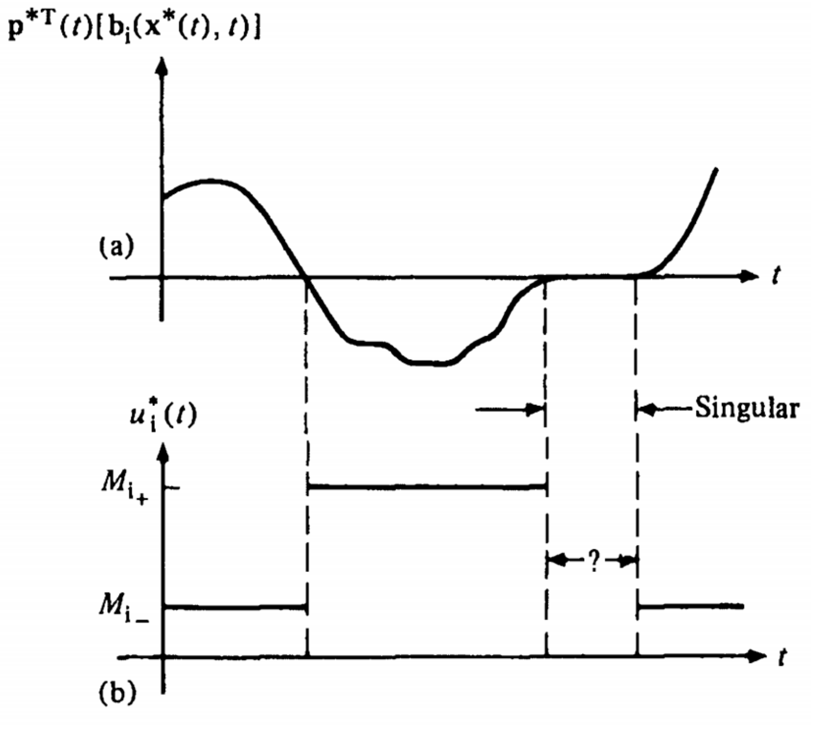
نتیجتا

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t)$$

و معادله کنترل:

$$u_i^* = \begin{cases} u_{i\max} & \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) < 0 \\ \text{undetrmined} & \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) = 0 \\ u_{i\min} & \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) > 0 \end{cases}$$

به این جواب Bang-Bang گفته می شود



متغیرهای حالت قابل دستیابی Reachable States

حداکثر کنترل (ماکزیمم یا مینیمم) که اعمال شود، باز هم در زمان های خاصی امکان دستیابی به متغیرهای حالت خاصی هست.

مثال:

$$\dot{x} = u$$

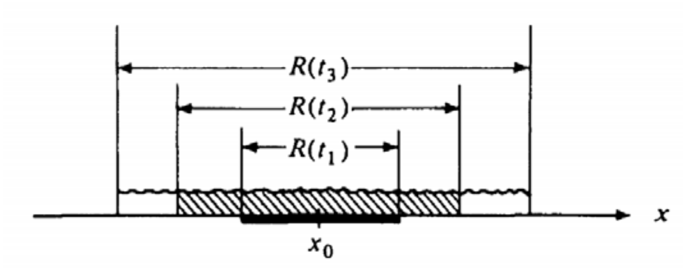
$$-1 \le u \le +1$$

جواب تابع u

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau$$

باتوجه به محدوده u می توان نوشت

$$x_0 - t \le x(t) \le x_0 + t$$



امکان دارد هیچ زمانی را نتوان پیدا کرد که برخی متغیرهای حالت قابل دستیابی باشند. اگر x نهایی چنین جایی باشد، مساله زمان بهینه جواب ندارد.

مثال:

$$\dot{x} = -x + u$$

$$-1 \le u \le +1$$

جواب تابع u

$$x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

باتوجه به محدوده u می توان نوشت

$$e^{-t}x_0 + e^{-t} - 1 \le x(t) \le e^{-t}x_0 - e^{-t} + 1$$

$$u = +1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t}x_0 - e^{-t} + 1 \le \max(x_0, 1)$$

$$u = +1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t}x_0 + e^{-t} - 1 \le \max(x_0, -1)$$

مساله زمان کمینه سیستم خطی ثابت با زمان

$$\min \ J(\vec{u}(t)) = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

$$\text{subject to } \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$$

$$u_{i\min} \le u_i \le u_{i\max}; \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

مشابه مساله قبل است. فقط نکات زیر را دارد:

۱- اگر سیستم ناپایدار نباشد (مقدار حقیقی مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد)، جواب بهینه برای رساندن سیستم به مبدا (Requlator)

- وجود دارد
- یکتا است

۲-اگر مقادیر ویژه حقیقی باشند (بخش موهومی نداشته باشند و یعنی پاسخ نوسانی نباشد) تعداد سوئیچ بین ماکزیمم-مینیمم حداکثر n-1 است.

مثال: رساندن سیستم زیر از هر شرط ابتدایی به مبدا در مینیمم زمان

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|u(t)| \le 1$$

همیلتنین

$$\mathcal{H}\big(\vec{x}(t), u(t), \vec{p}(t)\big) = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

معادله کنترل:

$$u(t) = \begin{Bmatrix} -1, & \text{for } p_2(t) > 0 \\ +1, & \text{for } p_2(t) < 0 \end{Bmatrix} \triangleq -\operatorname{sgn}\big(p_2(t)\big)$$

معادله شبه حالت:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= 0 & \Rightarrow \quad & p_1(t) = c_1 \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t) \Rightarrow & & p_2(t) = -c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

باتوجه به این جواب، حداکثر یکدفعه امکان دارد p_2 تغییر علامت دهد

نتیجتا کنترل حداکثر یکی از حالتهای زیر است:

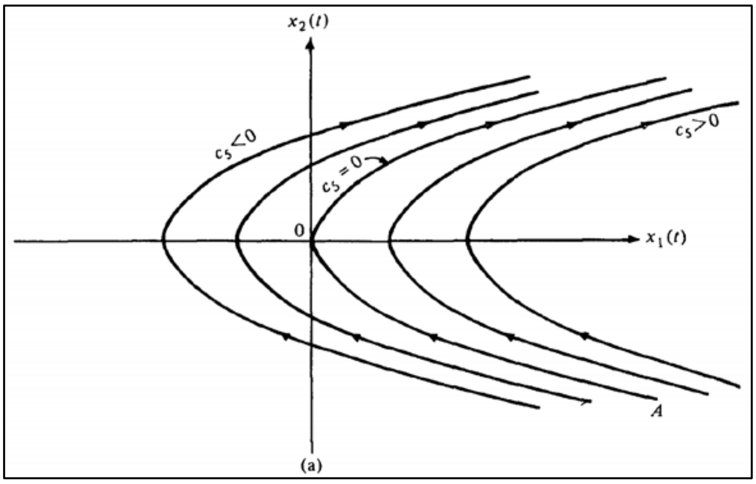
$$u^* = \begin{cases} +1, & \text{for all } t \in [t_0, t^*], \text{ or} \\ -1, & \text{for all } t \in [t_0, t^*], \text{ or} \\ +1, & \text{for } t \in [t_0, t_1), \text{ and } -1, \text{ for } t \in [t_1, t^*], \text{ or} \\ -1, & \text{for } t \in [t_0, t_1), \text{ and } +1, \text{ for } t \in [t_1, t^*] \end{cases}$$

جواب سیستم در اثر کنترل $u = \pm 1$

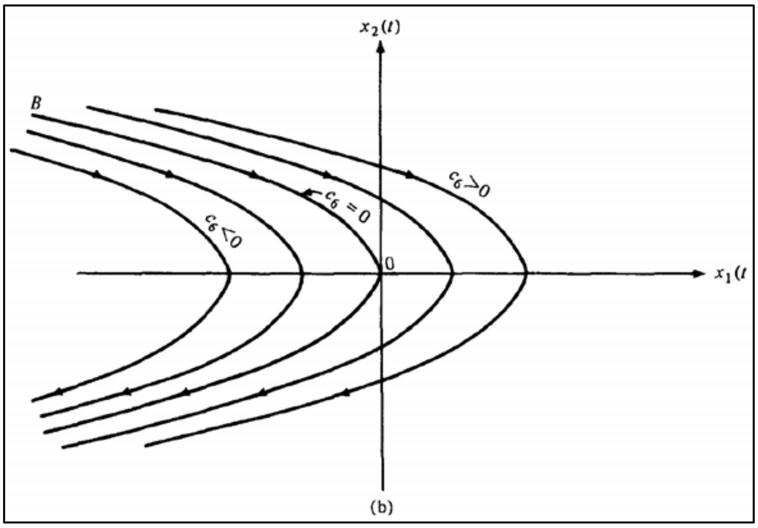
$$\begin{cases} x_2(t) = \pm t + c_3 \\ x_1(t) = \pm \frac{1}{2} t^2 + c_3 t + c_4 \end{cases}$$

رسم در فضای فاز:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + c_5, \quad \text{for } u = +1$$

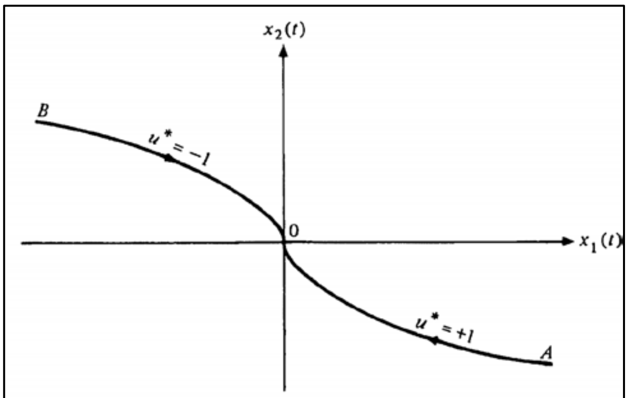


$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + c_6, \quad \text{for } u = -1$$



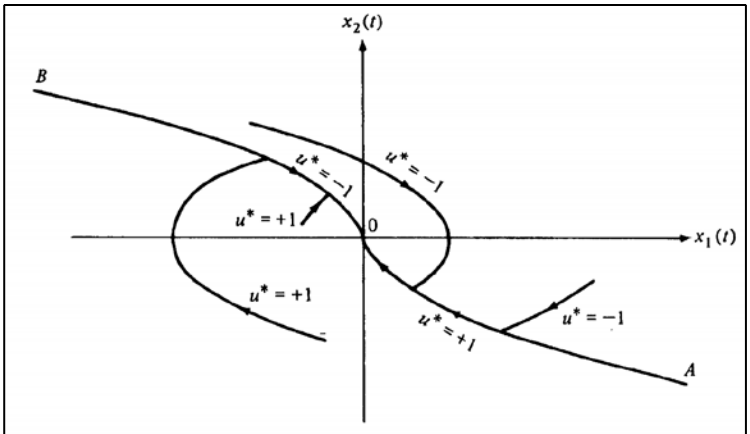
مسیری که سیستم را به مبدا میرساند

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2(t)\left|x_2(t)\right|$$



(a)

نمونه مسیرها:



(b)

منحنی سوئیچ (Switching curve)

$$s(\vec{x}(t)) \triangleq x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)\left|x_2(t)\right|$$

$$u^* = \begin{cases} -1, & \text{for } \vec{x}(t) \text{ such that } s(\vec{x}(t)) > 0 \\ +1, & \text{for } \vec{x}(t) \text{ such that } s(\vec{x}(t)) < 0 \\ -1, & \text{for } \vec{x}(t) \text{ such that } s(\vec{x}(t)) = 0 \text{ and } x_2(t) > 0 \\ +1, & \text{for } \vec{x}(t) \text{ such that } s(\vec{x}(t)) = 0 \text{ and } x_2(t) < 0 \\ 0, & \text{for } \vec{x}(t) = \vec{0} \end{cases}$$

مساله کمینه تلاش کنترلی Minimum Control Effort

$$\min \ J(\vec{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} w_i \left| u_i \right| dt$$

$$\text{subject to } \dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\right)$$

$$u_{i\min} \le u_i \le u_{i\max}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

w_i وزن بین کنترل ها

در خیلی از سیستمها $\left|u_i\right|$ واقعی تر از u_i^2 است.

ولی همیلتونین نسبت به u خطی می شود

سیستم های خطی نسبت به کنترل

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}\left(\vec{x}(t), t\right) + \mathrm{B}(\vec{x}(t), t)\, \vec{u}(t)$$

$\mathrm{B}_{n\times m}(\vec{x}(t), t)$

همیلتونین:

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}, t) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left|u_i\right| + \vec{p}^{\,T} \left(\vec{a}\left(\vec{x}(t), t\right) + \mathrm{B}(\vec{x}(t), t)\, \vec{u}(t) \right)$$

چون نسبت به u خطی است، پس فقط شیب خط مهم است.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{u}} = \pm \vec{w} + \mathrm{B}^T(\vec{x}(t), t)\, \vec{p}(t)$$

$\mathrm{B}(\vec{x}(t), t)$ را می توان به فرم زیر نوشت:

$$\mathrm{B}_{n\times m}(\vec{x}(t), t) = \left[\vec{b}_1(\vec{x}(t), t) \quad \vec{b}_2(\vec{x}(t), t) \quad \cdots \quad \vec{b}_m(\vec{x}(t), t) \right]$$

$\vec{b}_i$ ها بردارهای $n \times 1$ هستند

نتیجتا

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = \pm w_i + \vec{b}_i^{\,T}(\vec{x}(t), t)\, \vec{p}(t) = \begin{cases} + w_i + \vec{b}_i^{\,T}(\vec{x}(t), t)\, \vec{p}(t) & u_i > 0 \\ - w_i + \vec{b}_i^{\,T}(\vec{x}(t), t)\, \vec{p}(t) & u_i < 0 \end{cases}$$

فرض می شود که $u_{i\min} < 0$ و $u_{i\max} > 0$

نتیجتا معادله کنترل می شود:

$$u_i^* = \begin{cases} u_{i\max} & \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) < -w_i \\ u_{i\min} & \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) > w_i \\ 0 & -w_i < \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) < w_i \\ \text{undetrmined nonnegative} & \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) = -w_i \\ \text{undetrmined nonpositive} & \vec{b}_i^T(\vec{x}(t),t)\,\vec{p}(t) = w_i \end{cases}$$

به این جواب Bang-off-Bang گفته می شود