معرفی درس کنترل بهینه

بهینه‌سازی در مقابل کنترل بهینه

Static Optimization	Dynamic Optimization
Parametric Optimization	Optimal Control
	Trajectory Optimization
Function $f = f\left(\vec{X}\right)$	Functional $J = J\left(\vec{u}\right) = J\left(\vec{u}(t)\right)$
	Function of function

در بسیاری مسایل مهندسی (کنترلی)، هدف این است که یک حل قابل قبول بدست آورند که معیارهای کمی یا کیفی خاصی را برآورده کند. ولی لزوماً بهینه نمی‌باشند.

مثلاً در مورد کنترلر، در حوزه زمان معیارهایی مانند rise time، settling time، over-shoot مقدار خاصی را داشته باشد (یا کمتر باشند).

حل مساله بهینه (کنترل) دارای ۵ بخش زیر است:

- پارامترهای مساله که باید بر حسب آنها بهینه شوند (در کنترل بهینه بدست آوردن فرامین کنترلی است، ولی می‌تواند پارامترهایی از مساله نیز باشد)
- مدلی سیستم یا مدل ارتباطی پارامترهای مساله با یکدیگر (در کنترل بهینه معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم)
- قیود و محدودیت‌ها (کنترل یا متغیرهای حالت)
- تابع یا توابع هدف
- روش حل مساله

نکته مهم: در این درس برخی مسایل و فرمول‌بندی ارائه می‌شود، ولی مسایل کنترل بهینه محدود به آن نمی‌شود.

سیگنال کنترل

پارامتری که مساله را تحت تاثیر قرار می دهد و قرار است بهینه آن پیدا شود.

Optimal Policy/Optimal Control Law

حلقه باز/حلقه بسته

معادله حلقه باز (Open-loop) کنترل بهینه تابع زمان

$$\vec{u} = \vec{u}\left(t\right)$$

Control history برای کنترل تابع زمان

معادله حلقه بسته (Closed-loop) کنترل بهینه تابع متغیرهای حالت (و زمان)

$$\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{x}, t\right)$$

مدل‌های مختلف سیستم

معادله دیفرانسیل (Ordinary Differential Equation)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}\left(\vec{x}, \vec{u}, t\right)$$

یا معادله Finite Difference

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{a}_d\left(\vec{x}_k, \vec{u}_k, t\right)$$

سیستم خطی

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + B(t)\vec{u}$$

مثال ساده: ماشین با ترمز و گاز

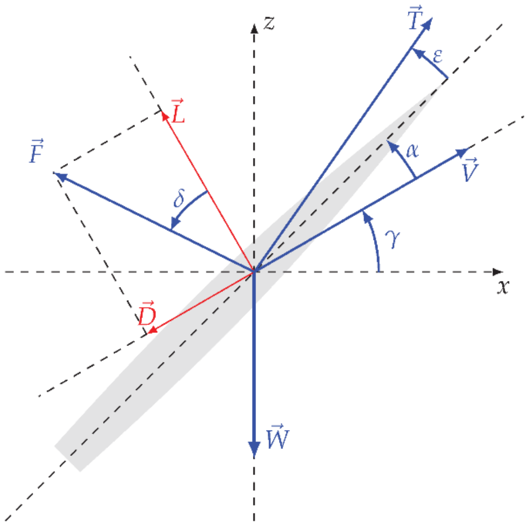
$$\ddot{x} = u = \frac{F}{m} \qquad\qquad u_{brake} \le u \le u_{accel}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

پارامترهای مساله

شامل متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت

یک مساله را می‌توان به روش‌های مختلف پارامتربندی کرد.



$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\gamma \\ \dot{z} = v\sin\gamma \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m}\Big(-D + T\cos(\varepsilon+\alpha) - mg\sin\gamma\Big) \\ v\dot{\gamma} = \dfrac{1}{m}\Big(L + T\sin(\varepsilon+\alpha) - mg\cos\gamma\Big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}\rho v^2 S\Big(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha\Big) \\ D = \dfrac{1}{2} p v^2 S\Big(C_{D_0} + KC_L^2\Big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = \dfrac{1}{m}\Big(-D\cos\gamma - L\sin\gamma + T\cos(\varepsilon+\theta)\Big) \\ \dot{v}_z = \dfrac{1}{m}\Big(-D\sin\gamma + L\cos\gamma + T\sin(\varepsilon+\theta) - mg\Big) \end{cases}$$

قیود

قیود (Constraint) حاکم بر مساله

- قیود بر روی کنترل Admissible Control
- قیود بر روی متغیرهای حالت
  - متغیرهای حالت در طی مسیر (Path Constraint)
  - متغیرهای حالت در ابتدا یا انتهای مسیر (Boundary Condition)
- قید بر روی زمان (نهایی)

معمولاً در مسایل کاربردی کنترل بهینه شرایط اولیه مشخص است. به همین دلیل قیود بر روی شرایط نهایی است.

انواع قیود:

۱- مساوی Equality Constraint $\quad x_1(t)x_2(t)=1,\ \ x_1(t_f)-x_3(t_f)=2$

۲- نامساوی Inequality Constraint $\quad -1\le u_1\le 1,\ \ x_2\le 60$

انواع قیود در مسایل کنترل بهینه یا بهینه سازی مسیر

۱- جبری (point constraint)

مثلا برای متغیرهای حالت یا کنترل که در یک بازه محدود باشند (Side Constraint)

$$-1\le u_1\le 1$$

مثلا برای متغیرهای حالت که روی یک مسیر خاص باشد

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

۲- دیفرانسیلی (Differential constraint)

$$\dot{\vec{x}}=\vec{a}\left(\vec{x},\vec{u},t\right)$$

۳- انتگرالی (Isoparametric constraint)

$$\int_{t_0}^{t_f} x_1(t)dt\le 10$$

توابع هزینه

تابع هزینه (Cost Function)

تابع هدف (Objective Function)

تابع عملکرد (Performance Function/Measure)

تابع ضرر یا سود (Loss/Gain Function)

تابع جریمه (Penalty Function)

$$J\left(\vec{x}(t),\vec{u}(t),\mathrm{t}_f\right)=J\left(\vec{u},t_f\right)=h\left(\vec{x}(t_f),t_f\right)+\int_{t_0}^{t_f} g\left(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t\right)dt$$

مساله مینیمم زمان (Time optimal)

$$J=J\left(\vec{u},t_f\right)=t_f-t_0=\int_{t_0}^{t_f} dt$$

مساله قرار گرفتن در یک شرایط نهایی (Terminal Control)

$$J=\left[\vec{x}(t_f)-\vec{r}(t_f)\right]^{\mathrm{T}}\left[\vec{x}(t_f)-\vec{r}(t_f)\right]$$

$$J=\left[\vec{x}(t_f)-\vec{r}(t_f)\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\left[\vec{x}(t_f)-\vec{r}(t_f)\right]=\left\|\vec{x}(t_f)-\vec{r}(t_f)\right\|_{\mathrm{H}}^2$$

مساله تنظیم کننده (Regulator)

$$J=\left\|x(t_f)\right\|_{\mathrm{H}}^2+\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_f}\left\{\left\|x(t)\right\|_{Q(t)}^2+\left\|u(t)\right\|_{R(t)}^2\right\}dt$$

مساله تعقیب (Tracking)

$$J=\left\|x(t_f)-r(t_f)\right\|_{\mathrm{H}}^2+\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_f}\left\{\left\|x(t)-r(t)\right\|_{Q(t)}^2+\left\|u(t)\right\|_{R(t)}^2\right\}dt$$

مساله حداقل تلاش کنترلی (Minimum control effort)

یا مینیمم انرژی

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left|\vec{u}(t)\right| dt$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\|u(t)\right\|_{R(t)}^{2} dt = \int_{t_0}^{t_f} u^{T} R(t)\, u\, dt$$

بهینه عمومی و محلی

اگر برای تمام کنترل‌های مجاز (Admissible Control و Admissible States) بهترین جواب باشد، عمومی (Global optimum) است، ولی اگر در یک همسایگی در اطراف خود باشد، محلی (Local) است. معمولاً نمی‌توان ثابت کرد چون باید تمام مجموعه جواب بررسی شود.

برای بهینه‌سازی پارامتری یا باید گفت:

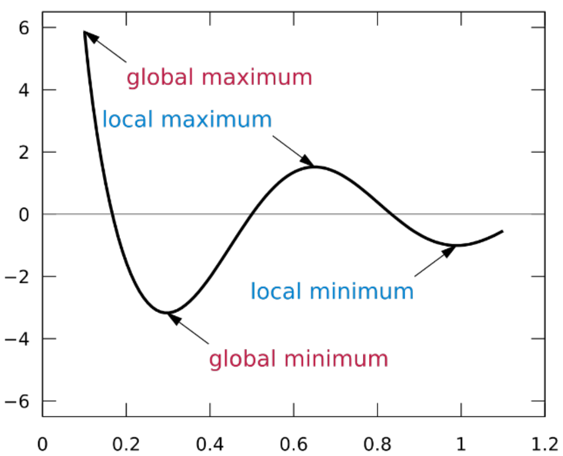
$$f\left(\overline{x}^{*}\right) \leq f\left(\overline{x}\right) \qquad \forall \overline{x}$$

یا باید گفت:

$$f\left(\overline{x}^{*}\right) \leq f\left(\overline{x}^{*} + \overline{h}\right) \qquad \forall \overline{h}$$

بهینه محلی

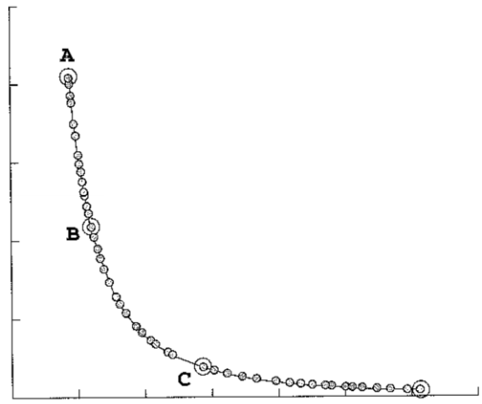
$$f\left(\overline{x}^{*}\right) \leq f\left(\overline{x}^{*} + \overline{h}\right) \qquad \forall \overline{h} \;\; in\, which \; \left\|\overline{h}\right\| < \rho$$

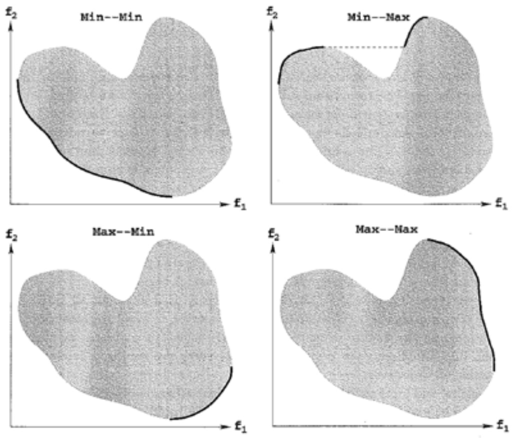


بهینه سازی چند پارامتری

Multi-objective optimization

Single-objective optimization



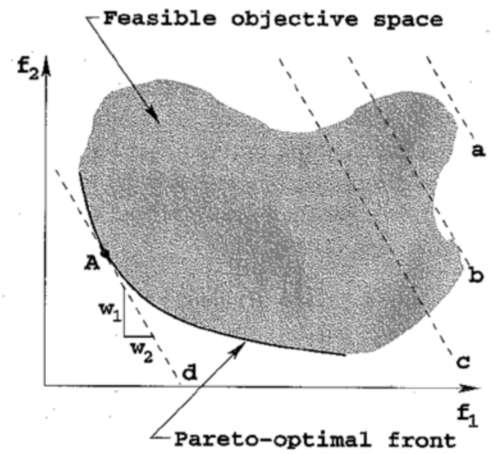


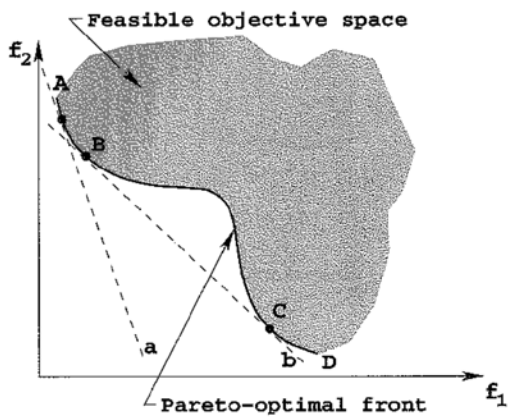
Pareto-front/Pareto-set/Non-dominated-set

روش های تبدیل چند تابع هزینه (برداری) به تک تابع هزینه (اسکالر)

روش Weighted-sum

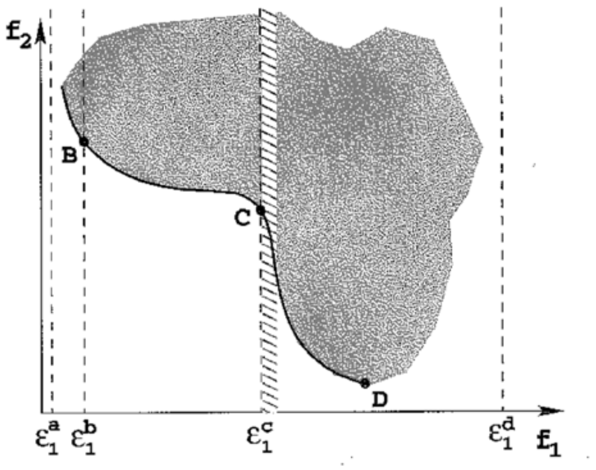
$$f = \sum_{i=1}^{N} w_i f_i$$





روش ε-constraint

$$\begin{aligned} \min \quad & f = f_2 \\ \text{subject to} \quad & f_1 \le \varepsilon_1 \end{aligned}$$



روش حل مساله

روش های تحلیلی (Analytical Methods)

بر مبنای تئوری کنترل بهینه (Optimal Control Theory)

- بر مبنای ریاضیات تغییرات (Calculus of Variation)

معمولا منجر به مسایل مقدار مرزی دو نقطه ای می شود

Two-Point Boundary Value Problem - TPBVP

- بر مبنای برنامه ریزی دینامیکی (Dynamic Programming)

هزینه محاسباتی بالا یا منجر به معادلات PDE می شود

Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB)

روش های عددی (Numerical Methods)

- بر مبنای حل معادلات تحلیلی (حل TPBVP)
- بر مبنای بهینه سازی غیرخطی (Nonlinear Programming)

روش های تقریبی (Approximate Methods)

- شکل جواب فرض می شود (شکل تابع کنترل یا شکل مسیر)