

۱- نقطه یا نقاط بهینه برای توابع زیر را بدست آورید و مشخص کنید که هر کدام از نقاط بهینه چه خاصیتی دارند (ماکزیمم، مینیمم یا نقطه زینی). همچنین دو تابع اول $(z = f(x, y))$ را با استفاده از MATLAB رسم کنید (نمودار سه بعدی و خم‌های تراز یا کانتور) و نقاط موردنظر را بر روی آن مشخص کنید (انتخاب بازه رسم متناسب با مساله و جواب‌ها). (۱۵ نمره) (فقط سه تا (الف) و (ب) و (ج) انجام شود)

$$z = f(x, y) = y \sin(x + y) - x \sin(x - y), \quad x, y \in [-4, 4] \quad (\text{الف})$$

$$z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad (\text{ب})$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 3x_2x_3 \quad (\text{ج})$$

۲- با استفاده از هر سه روش ارائه شده در بخش بهینه‌سازی (جایگذاری مستقیم، ضرایب لاگرانژ و تغییرات مقید) نزدیکترین نقطه رویه $z = \sin x + \cos y$ را به مبدا مختصات بیابید (در فضای سه بعدی xyz). سپس خم تراز جواب نهایی را به صورت سه بعدی در کنار رویه z رسم کنید (یعنی اگر مینیمم تابع فاصله برابر با c بدست آمده باشد، خم تراز رویه $f=c$ را رسم کنید). (۱۳ نمره)

۳- مینیمم فاصله بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = x - 1$ را از ۳ راه حل بدست آورید:

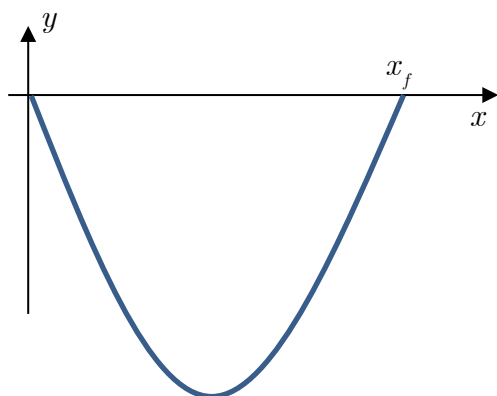
(الف) بهینه‌سازی مستقیم (پارامترهای مستقل x بر روی دو منحنی به عنوان متغیر طراحی استفاده شوند. در حقیقت برابر جایگذاری مستقیم است) (۵ نمره)

(ب) استفاده از ضرایب لاگرانژ (x و y بر روی دو منحنی را متغیر فرض کنید و دو تابع را به عنوان قید استفاده کنید) (۵ نمره)

(ج) استفاده از ریاضیات تغییرات (شرایط ابتدایی و انتهایی بر روی هر کدام از دو تابع) (۵ نمره)

در دو راه اول از فرض مستقیم بودن خط استفاده می‌کنید، ولی در روش سوم باید نشان دهید که جواب خط است. نهایتاً دو منحنی را رسم کنید و جواب بهینه را بر روی آن مشخص کنید.

(د) اگر قرار باشد در میان مسیر از منحنی $y = 4 + 2(x - 4)^2$ نیز عبور کند، مسیر و مینیمم فاصله را بدست آورید. امکان شکستگی مسیر در تقاطع با این منحنی وجود دارد. از دو راه بهینه‌سازی و ریاضیات تغییرات تکه‌ای هموار (Piecewise-smooth) بدست آورید. (۱۰ نمره)



۴- یک کابل به طول L به فرم روبرو بین دو نقطه $(0, 0)$ و $(x_f, 0)$ آویزان است، معادله y بر حسب x چیست؟ شرط تعادل مینیمم سازی تابع پتانسیل گرانشی است که با فرض ثابت بودن g_0 شتاب گرانش و ρ_s چگالی بر واحد طول کابل، برای هر المان جرمی dm به طول ds برابر $yg_0 dm = yg_0 \rho_s ds$ است. به قید طول توجه کنید. (۷ نمره)

۵- منحنی اکستریمال برای بهینه کردن تابع-تابع‌های زیر را با شروط مشخص شده بدست آورید: (۳۰ نمره)

$$J(x) = \int_0^2 \sin(\dot{x}^2) dt \quad x(0) = 1, \quad x(2) = \text{free} \quad (\text{الف})$$

(در مورد کمینه یا بیشینه بودن جواب بخش الف توضیح دهید)

$$J(x) = \int_0^2 [t\dot{x}^2(t) + \ln(\dot{x}^2(t))] dt \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 2 \quad (\text{ب})$$

$$J(x) = \int_0^\pi (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1x_2) dt \quad x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad x_1(\pi) = 4, x_2(\pi) = \text{free} \quad (\text{ج})$$

$$J(x) = \int_0^\infty [x^2 + \dot{x}^2 + (\ddot{x}^2 + \ddot{x})] dt \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2, \quad x(\infty) = \dot{x}(\infty) = 0 \quad (\text{د})$$

$$J(x) = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad \int_0^1 x(t) dt = 1 \quad (\text{ه})$$

$$J(x) = \int_0^{t_f} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}}{x(t)} dt \quad x(0) = 0, \quad (t_f - 9)^2 + x^2(t_f) = 9 \quad (\text{و})$$

موارد مربوط به تحویل تمرینات:

- با توجه به تعداد بالای دانشجویان کلاس و زمانی که برای تصحیح اوراق صرف می‌شود، انتظار می‌رود تمرینات (مخصوصاً آنهاییکه دست‌نویس هستند) خوانا و مناسب تحویل داده شوند.
- نیاز است در برخی موارد توضیحاتی مختصر در کنار روابط و محاسبات بیاید که نشان دهد درک از جواب وجود داشته است. مثلاً در جواب سوال ۱ نقاط جواب بر روی کانتورها و سطوح نشان داده شود و کمینه/بیشینه/زینی بودن نشان داده شود. یا در سوال ۴ باید با کمی توضیح نشان دهید چگونه مساله به یک مساله ریاضیات تغییرات تبدیل شده است.
- پاسخ تمرین چه به صورت تایپ شده (که من هم توصیه می‌کنم و برای بعضی تمرین‌ها راحت‌تر است) و چه به صورت دست‌نویس (اسکن)، بصورت یک فایل فشرده (شامل فایل WORD و PDF و کد MATLAB یا هر نرم‌افزاری که کد می‌زنید) با عنوانی به فرمت "شماره تمرین - شماره دانشجویی - نام و نام خانوادگی" برای من ارسال شود (تمام به انگلیسی). به عنوان مثال:

HW1 - 9920**** - Nima Assadian

- در صورت تاخیر در تحویل تمرین‌ها، هر روز ۱۰ درصد از نمره تمرین کسر خواهد شد. ولی در مجموع تمرین‌ها اجازه دارید ۷ روز تاخیر کنید و کسر نمره تمرین‌ها بعد از آن شروع می‌شود. البته چون تمرین‌های سری بعد احتمالاً نمرات بیشتری دارد، توصیه می‌کنم برای تمرین‌های سری‌های اول تاخیر نداشته باشید. روزهای پنجشنبه و جمعه در تاخیرها لحاظ نمی‌شود.