سوال ۱: تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_X(x) = \frac{ab}{b^2 + x^2} \ , b > 0$$

الف) مقدار a را به گونه‌ای پیدا کنید که تابع چگالی فوق معتبر باشد.

ب) میانگین و واریانس تابع فوق را به ازاء a صحیح پیدا کنید.

سوال ۲: فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشند. متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \ , Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}$$

الف) استقلال متغیرهای Y_1 و Y_2 را بررسی کنید.

ب) میانگین و اتوکوواریانس $C_{\boldsymbol{Y}}$ برای بردار تصادفی $\boldsymbol{Y} = [Y_1 \quad Y_2]^T$ را محاسبه نمایید.

ج) توابع چگالی احتمال $f_{Y_1}(y_1)$ و $f_{Y_2}(y_2)$ را بدست آورید.

سوال ۳: چنانچه احتمال ابتلا به بیماری آنفولانزا ۵ درصد باشد و در صورت ابتلا، چنانچه آزمایش با دقت ۹۹ درصد نتیجه صحیح را نشان دهد، احتمال آن که فردی با نتیجه آزمایش مثبت، واقعا مبتلا باشد چقدر است؟ از رابطه احتمال شرطی زیر برای دو رویداد A (مثبت بودن نتیجه آزمایش) و B (مبتلا بودن) استفاده کنید:

$$P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

درصورتی که فردی دوبار آزمایش دهد و هردوبار جواب مثبت باشد، احتمال ابتلا چقدر می‌شود؟

سوال ۴: فرض کنید $x(t)$ یک فرآیند تصادفی به صورت زیر است:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

که A یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 بوده و ϕ نیز یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین $[0,2\pi)$ است. A و ϕ مستقل از یکدیگر اند.

الف) مقدار میانگین $E[x(t)]$ را محاسبه کنید.

ب) تابع خودهمبستگی فرآیند $R_X(t_1,t_2)$ را محاسبه کنید.

ج) مقدار میانگین زمانی $A[x(t)]$ را محاسبه کنید.

د)تابع خودهمبستگی زمانی $R[x(t),\tau]$ را محاسبه کنید.

ه) آیا این فرآیند ایستای WSS است؟ ارگادیک چطور؟

سوال ۵: فرآیند گاوس مارکوف زیر را در نظر بگیرید ($\zeta = 0.3\ , \omega_n = 10$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -{\omega_n}^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_n x_2(t) + w(t) \end{cases}$$

که $w(t)$ نویز سفید گاوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2\delta(t)$ است. دقت کنید که واریانس نویز سفید بینهایت است (مقدار تابع دلتای دیراک در صفر بینهایت است). و σ^2 در واقع قدرت نویز است نه واریانس آن. برای شبیه‌سازی نویز سفید پیوسته می‌توانید آنرا رشته تصادفی گسسته از اعداد تصادفی نرمال با واریانس $\frac{\sigma^2}{\Delta t}$ در نظر بگیرید که Δt طول گام انتگرال‌گیری است.

الف) سیستم را ۵۰ بار و هربار به مدت ۱۰۰ ثانیه شبیه‌سازی کرده و ۵۰ تابع نمونه $x_1(t)$ را رسم کنید. Δt را برابر با $0.01s$ و σ^2 را نیز برابر با ۱ درنظر بگیرید. برای تولید عدد تصادفی نرمال در محیط متلب می‌توانید از دستور normrnd(mu,sigma) و برای تولید نویز سفید تقریبی (با واریانس محدود) در محیط سیمولینک از بلوک Band Limited White Noise استفاده کنید.

ب) یکی از توابع نمونه $x_1(t)$ را به دلخواه انتخاب کرده و میانگین زمانی آن، $A[x_1(t)]$ را حساب کنید.

ج) در لحظه $t_1 = 30s$ مقدار $x_1(t_1)$ را از تمام ۵۰ تابع نمونه ایجاد شده در یک آرایه ۵۰ تایی به نام S ذخیره کنید. میانگین و واریانس اعداد ذخیره شده در S را محاسبه کرده و هیستوگرام آنرا با استفاده از دستور histogram(S) رسم کنید. آیا میانگین S تقریبا با $A[x_1(t)]$ که در قسمت قبل محاسبه کردید برابر است؟

د) محاسبات قسمت ج را برای $t = 80s$ انجام دهید. آیا نتایج تقریبا یکسانی نسبت به قسمت ج بدست می‌آید؟ راجع به ایستایی و ارگادیک بودن فرآیند بحث کنید.

سوال ۶: معادلات حرکت مداری صفحه‌ای در دستگاه قطبی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \dfrac{\mu}{r^2} + w_r \\ \ddot{\theta} = -2\dfrac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \dfrac{w_\theta}{r} \end{cases}$$

که $\mu = GM_e$ پارامترگرانشی زمین و w_r و w_θ نیز شتاب‌های اغتشاشی وارد بر ماهواره اند. با تعریف متغیرهای حالت به صورت $x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \dot{r}, x_4 = \dot{\theta}$ و تعریف شرایط نامی به صورت یک مدار دایروی با اغتشاش صفر، $x_{1n} = r_n, x_{2n} = nt, x_{3n} = 0, x_{4n} = n$ معادلات حالت خطی شده حول مدار دایروی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \\ \Delta\dot{x}_3 \\ \Delta\dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2nr_n \\ 0 & 0 & -\dfrac{2n}{r_n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r \\ w_\theta \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید چنانچه اندازه‌گیری فقط روی r باشد سیستم رویت‌پذیر کامل نخواهد بود.

ب) نشان دهید چنانچه اندازه‌گیری فقط روی θ باشد سیستم رویت‌پذیر کامل خواهد بود.

ج) نشان دهید اگر هردوی r و θ اندازه‌گیری شوند، سیستم رویت‌پذیر کامل خواهد بود.

د) یک راه برای ارزیابی کیفی رویت‌پذیری و محاسبه شدت آن، استفاده از مقادیر تکین[۱] ماتریس رویت‌پذیری است. مقادیر تکین هر ماتریس دلخواه A از جذر مقادیر ویژه ماتریس AA^T یا A^TA بدست می‌آید (هردو مقادیر ویژه یکسانی دارند). چنانچه مقادیر تکین یک ماتریس رویت‌پذیری اعداد بزرگ‌تری باشند، رویت‌پذیری آن سیستم سهل‌تر و نسبت به خطا مقاوم‌تر است.

اکنون با فرض مقادیر عددی زیر مقادیر تکین ماتریس‌های رویت‌پذیری را در حالت‌های ب و ج بدست آورید.

$$\mu = 3.986004415e5\ km^3/s^2\ , r_n = 6800\ km\ , n = \sqrt{\frac{\mu}{{r_n}^3}}$$

برای محاسبه مقادیر تکین یک ماتریس A در متلب می‌توانید از دستور svd(A) استفاده نمایید. حال با توجه به جواب بدست آمده، توضیح دهید که تخمین مدار در کدام حالت ساده‌تر است؟

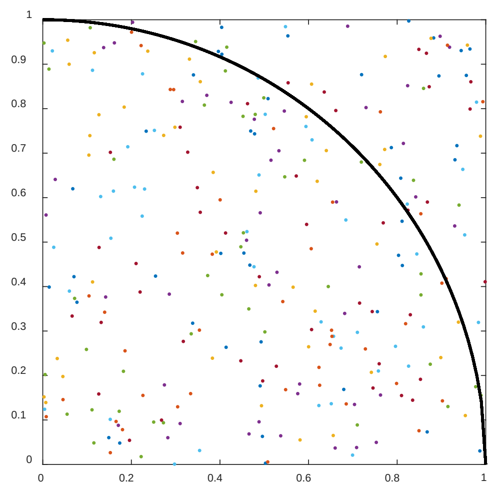
Bonus) آشنایی با شبیه‌سازی مونت‌کارلو

برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو عدد π را با دقت دو رقم اعشار محاسبه نماید. **راهنمایی:** یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد درنظر بگیرید که داخل یک مربع به ضلع ۱ واحد محصور شده است. چنانچه مطابق شکل ۱ تعداد زیادی نقاط تصادفی با توزیع احتمال یکنواخت در داخل مربع ایجاد کنیم، نسبت تعداد نقاط داخل ربع دایره n_c به کل نقاط n، تقریبا برابر با نسبت مساحت ربع دایره به مساحت مربع می‌شود. یعنی

[۱] Singular Value

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_c}{n} = \frac{\frac{1}{4}\pi(1)^2}{1^2} \Rightarrow \frac{n_c}{n} \cong \frac{\pi}{4}\ (for\ large\ n)$$

معیارتان برای انتخاب تعداد کل نقاط چیست؟ چه زمانی می‌توان گفت که همگرایی حاصل شده است؟ نمودار عدد π تخمین زده‌شده را بر حسب تعداد کل نقاط رسم کنید.



شکل ۱: تخمین عدد π با استفاده از تولید اعداد تصادفی