



Sharif university of technology
Aerospace department
Flight dynamics

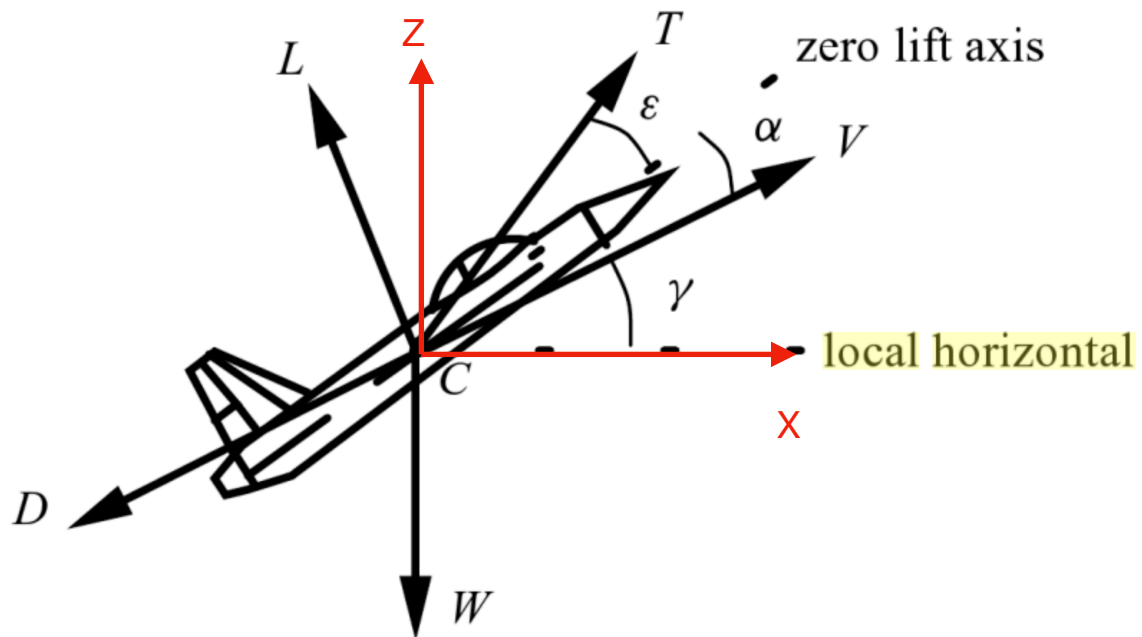
HW series 3

Ali BaniAsad 96108378

Spring 2020

1399/02/24

سوال اول



معادلات را بر اساس شکل بالا می نویسیم.

$$V = V \cos \gamma \vec{i} + V \sin \gamma \vec{j}$$

$$\Sigma F_X = L \cos \alpha + T \sin(\alpha + \gamma + \epsilon) - W - D \sin \gamma$$

$$\Sigma F_Z = L \sin \alpha + T \cos(\alpha + \gamma + \epsilon) + D \cos \gamma$$

از مشتق گرفتن و تساوی قرار دادن به نتایج زیر می رسیم.

$$\dot{V} \cos \gamma - \dot{\gamma} V \sin \gamma = L \cos \alpha + T \sin(\alpha + \gamma + \epsilon) - W - D \sin \gamma$$

$$\dot{V} \sin \gamma + \dot{\gamma} V \cos \gamma = L \sin \alpha + T \cos(\alpha + \gamma + \epsilon) + D \cos \gamma$$

که بر اساس معادلات بالا دو جهت آزادی برای حرکت داریم.

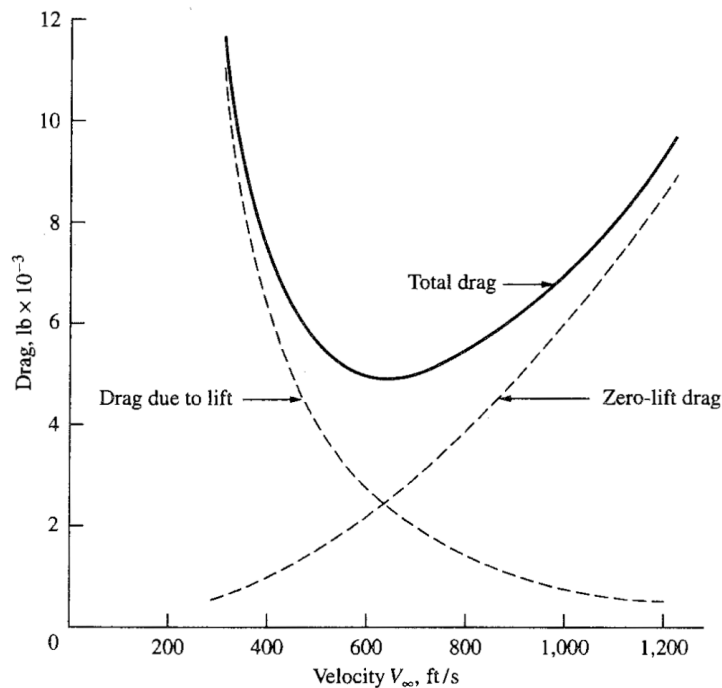
سوال دوم (الف)

در یک پرنده دو نوع درگ داریم

- I) Drag due to lift
- II) Zero-lift drag

بر اساس نمودار کتاب (figure 1) داریم:

Figure 1



Drag کل شامل جمع این دو درگ است از روی نمودار مشخص است که درگ ابتدا با افزایش سرعت کم می شود سپس زیاد می شود.
بر اساس فرمول ها نیز داریم:

$$C_D = C_{D,0} + KC_L^2$$

$$Drag = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_{D,0} + \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S K C_L^2$$

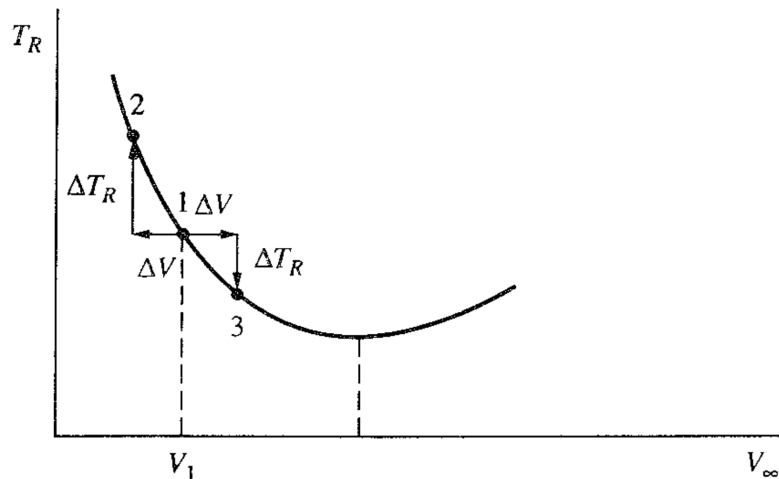
بر اساس معادلات بالا $C_{D,0}$ همواره ثابت است و با افزایش سرعت زیاد می شود که در نمودار (figure 1) نشان داده شده است. از طرفی با افزایش سرعت مقدار C_L کاهش می یابد از

طرفی چون سرعت کاهش C_L از سرعت بیشتر است پس این نوع درگ نیز کاهش میابد که در نمودار (figure 1) نشان داده شده است.

(ب)

برای قسمت چپ طبق نمودار (figure 2) داریم:

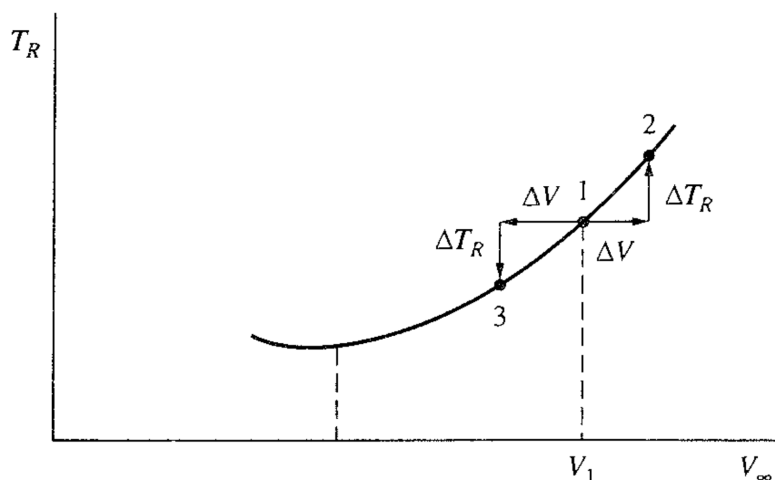
Figure 2



برای حالت یک اگر V_∞ از مقدارش بر روی نمودار بیشتر شود T_R کمتر می شود پس سرعت زیاد می شود، روند قبل ادامه می یابد و از حالت تعادل خارج می شود. برای حالت دوم اگر V_∞ از مقدارش بر روی نمودار کمتر شود T_R زیاد می شود پس سرعت کم می شود، روند قبل ادامه می یابد و از حالت تعادل خارج می شود.

برای قسمت راست طبق نمودار (figure 3) داریم:

Figure 2



برای حالت یک اگر V_{∞} از مقدارش بر روی نمودار بیشتر شود T_R زیاد می شود پس سرعت کم می شود، روند قبل ادامه می یابد و به حالت تعادل بر می گردد. برای حالت یک اگر V_{∞} از مقدارش بر روی نمودار کمتر شود T_R کاهش می شود پس سرعت زیاد می شود، روند قبل ادامه می یابد و به حالت تعادل بر می گردد.

(ج)

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

می دانیم که C_D و C_L تابعی از زاویه حمله و شکل پرنده هستند.

$$C_D, C_L = f(\alpha, \text{design})$$

$$\frac{L}{D_{\max}} = \frac{C_L}{C_{D_{\max}}}$$

پس با توجه به مطالب بالا $\frac{L}{D}$ همواره تابعی از زاویه حمله (α) است پس $\frac{L}{D_{\max}}$ همواره در یک زاویه

حمله (α) خاصی قرار دارد پس ربطی به فاز های پروازی ندارد.

بر اساس بالا $\frac{L}{D_{\max}}$ همواره در یک زاویه حمله (α) خاصی قرار دارد پس هر گاه در این زاویه حمله

$\alpha_{(\frac{L}{D})_{\max}}$ قرار گیر بر اساس فاز پروازی و وزن هواپیما متغیر است. بر اساسی مقدار lift تولیدی می توان $V_{(\frac{L}{D})_{\max}}$ را بدست آورد و تابعی از lift بدست آورد.

سوال سوم

(الف)

برای موتور توربوفن رابطه تراسه بر هست چگالی (ارتفاع) به صورت $T_{A_{\max}} = T_{A_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{0.6}$ است. از طرفی در ارتفاع های بالاتر T_R کاهش میابد از طرفی چون اردر کاهش تراسه کمتر از T_R است پس سرعت افزایش می یابد.

اما در موتور های توربوجت رابطه تراسه بر هست چگالی (ارتفاع) به صورت $T_{A_{\max}} = T_{A_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^m$ است. که برحسب مقدار m ماکسیمم سرعت کاهش یا افزایش می کند. اگر m بیشتر از یک باشد که در توربوجت اکثرا بیشتر است V_{\max} کاهش میابد اما اگر کمتر از یک باشد مانند توربوفن افزایش می یابد.

(ب)

خیر. به این علت که وقتی نزدیک به $M = 1$ می شویم جواب غلطی به ما می دهد. در پسای قطبی سهموی درگ ناشی از حرکت در نزدیکی سرعت صوت و shock wave ها در نظر نمی گیریم.

سوال چهارم

(الف)

افزایش ارتفاع معمولا به کاهش نرخ اوجگیری (R/C) می انجامد. بر اساس معادله زیر:

$$R/C = V_{\infty} \left[\frac{T}{W} - \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \left(\frac{W}{S} \right)^{-1} C_{D,0} - \frac{W}{S} \frac{2K}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \right]$$

همه ی قسمت های معادله بالا با ارتفاع رابطه دارند. رابطه Thrust با ارتفاع بستگی به نوع موتور دارد. برای موتور های Turbojet و Turbofan با افزایش ارتفاع در V_{∞} ثابت کاهش می یابد.

برای هواپیما با افزایش ارتفاع $\frac{T}{W}$ کاهش می یابد. به طور کلی با در نظر گرفتن تمامی رابطه ها با افزایش ارتفاع نرخ اوجگیری (R/C) کاهش می یابد.

(ب)

خیر. در محاسبات ممکن است که $V_{\theta_{\max}} < V_{stall}$ در اینجور مواقع از نظر تئوری نمی توان به رسید $V_{\theta_{\max}}$.

سوال پنجم

(الف)

$$W = 50000_N, S = 32_{m^2}, b = 17, e = 0.9, C_{L_{\max}} = 1.8, C_{D_0} = 0.015, T = 23500$$

$$K = \frac{S}{\pi e AR}, AR = \frac{b^2}{S} = 9.0312$$

$$K = \frac{1}{\pi e AR} \rightarrow K = 0.0392$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4C_{D_0}K}} \rightarrow \left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = 20.6197$$

$$Thrust = q_{\infty} S C_D = q_{\infty} S (C_{D_0} + C_{D_i}) = q_{\infty} S (C_{D_0} + K C_L^2)$$

$$W = q_{\infty} S C_L \rightarrow C_L = \frac{W}{q_{\infty} S}$$

In altitude 10km:

$$\rho_{\infty} = 0.4135_{kg/m^3}$$

$$V_{(L/D)_{\max}} = \left(\frac{2}{\rho_{\infty}} \sqrt{\frac{K}{C_{D_0}}} \frac{W}{S}\right)^{1/2} \rightarrow V_{(L/D)_{\max}} = 110.5044_{m/s}$$

In sea level:

$$\rho_{\infty} = 1.225_{kg/m^3}$$

$$V_{(L/D)_{\max}} = \left(\frac{2}{\rho_{\infty}} \sqrt{\frac{K}{C_{D_0}}} \frac{W}{S}\right)^{1/2} \rightarrow V_{(L/D)_{\max}} = 64.2021_{m/s}$$

با فرض اینکه تغییرات وزن هواپیما در دو ارتفاع ناچیز است معادلات را می نویسیم.

چون $\left(\frac{L}{D}\right)_{\max}$ همواره با ارتفاع ثابت است پس تراست لازم تغییری نمی کند اما $V_{(L/D)_{\max}}$ به دلیل تغییر چگالی محیط تغییر می کند پس سرعت تغییر می کند.

$$V_{(L/D)_{\max}} \text{ in altitude 10km} > V_{(L/D)_{\max}} \text{ in sea level}$$

(ب)

$$\left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{\max} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3KC_{D,0}^3}\right)^{1/4} \rightarrow \left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{\max} = 29.8880$$

$$\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{\max} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3KC_{D,0}^3}\right)^{3/4} \rightarrow \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{\max} = 18.4975$$

In altitude 10km:

$$V_{\left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{\max}} = 145.4319_{m/s}$$

$$V_{\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{\max}} = 83.9651_{m/s}$$

In sea level:

$$V_{\left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{\max}} = 84.4947_{m/s}$$

$$V_{\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{\max}} = 48.7830_{m/s}$$

$$\left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{\max} > \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\max} > \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{\max}$$

$$V_{\left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{\max}} > V_{\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\max}} > V_{\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{\max}}$$

(ج)

$$V_{\min power} = \left[\frac{4}{3} \left(\frac{W}{S}\right)^2 \frac{1}{\rho_{\infty}^2} \frac{1}{C_{D_0}} \left(\frac{1}{\pi e A R}\right) \right]^{1/4}$$

In altitude 10km:

$$V_{\min power} = 42.2473_{m/s}$$

$$P_{\min} = \sqrt{\frac{W^3}{\rho_{\infty} S}} \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)^{-1} \rightarrow P_{\min} = 234990_W$$

In sea level:

$$V_{\min power} = 72.7160_{m/s}$$

$$P_{\min} = \sqrt{\frac{W^3}{\rho_{\infty} S}} \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)^{-1} \rightarrow P_{\min} = 136530_W$$

(د)

In altitude 10km:

$$T_{A_{\max}} = T_{A_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0.6} \rightarrow T_{A_{\max}} = 12248_N$$

$$V_{\max} = \left(\frac{T_{A_{\max}}/S + (W/S) \sqrt{(T_{A_{\max}}/W)^2 - 4C_{D_0}K}}{\rho_{\infty} C_{D_0}} \right) \rightarrow V_{\max} = 349.5705_{m/s}$$

$$V_{\min} = V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_{\infty} S C_{L_{\max}}}} \rightarrow V_{\min} = 64.7964_{m/s}$$

(ه)

برای حرکت در بیشترین ارتفاع نیاز به کمترین تراست داریم که در $(\frac{L}{D})_{\max}$ رخ می دهد.

$$\left(\frac{L}{D} \right)_{\max} = \frac{W}{Thrust_{\min}} = 20.6197 \rightarrow Thrust_{\min} = 2424.9_N$$

$$\frac{T_{A_{\min}}}{T_{A_0}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0.6} \rightarrow \rho = 0.0278_{kg/m^3} \rightarrow h = 28414_m$$

In sea level:

$$\theta_{\max} = \sin\left(\frac{T}{W} - \frac{1}{(L/D)_{\max}}\right)^{-1} \rightarrow \theta_{\max} = 0.4351_{rad}$$

$$V_{\theta_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_{\infty}} \left(\frac{K}{C_{D_0}}\right)^2 \frac{W}{S} \cos \theta_{\max}} \rightarrow V_{\theta_{\max}} = 125.5698_{m/s}$$

$$(R/C)_{\theta_{\max}} = V_{\theta_{\max}} \sin \theta_{\max} \rightarrow (R/C)_{\theta_{\max}} = 52.9310_{m/s}$$

$$Z \equiv 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{(L/D)_{\max}^2 (T/W)^2}}$$

$$(R/C)_{\max} = \left[\frac{(T/W)(W/S)Z}{3\rho_{\infty}C_{D,0}} \right] \left[\frac{T}{W} - \frac{Z}{6} \frac{T}{W} - \frac{6KC_{D,0}}{(T/W)Z} \right] = \left[\frac{(T/S)Z}{3\rho_{\infty}C_{D,0}} \right] \left[\frac{T}{W} - \frac{Z}{6} \frac{T}{W} - \frac{6KC_{D,0}}{(T/W)Z} \right]$$

$$(R/C)_{\max} = 50.5345_{m/s}$$

$$V_{(R/C)_{\max}} = 163.8747_{m/s}$$

$$\theta_{(R/C)_{\max}} = 0.3135_{rad}$$

سوال ششم
(الف)

$$W = 2450_{lb}, S = 174_{ft^2}, b = 36_{ft}, \eta = 0.8, \max \text{ power @ } S.L = 200_{hp}$$

Density in sea level:

$$\rho_{\infty} = 23.77_{lb/ft^3}$$

Density in 5000 ft altitude:

$$\rho_{\infty} = 20.48_{lb/ft^3}$$

$$C_{D_0} = 0.02, AR = \frac{b^2}{S} = 7.4483,$$

For $C_L = 1.25$, $C_D = 0.09$:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi e_0 AR} \rightarrow e_0 = 0.9539$$

(ب)

با فرض اینکه $C_{L_{\max}} = 1.6$

In sea level:

$$V_{\min} = V_{\text{stall}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_{\infty} S C_{L_{\max}}}} \rightarrow V_{\min} = 64.7964_{m/s}$$

In altitude 5000ft:

$$V_{\min} = V_{\text{stall}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_{\infty} S C_{L_{\max}}}} \rightarrow V_{\min} = 92.7040_{m/s}$$

$$P_A = P_{es} \eta$$

$$P_{\max} = T_{A_{\max}} V_{\infty}$$

$$\text{Total drag} = \text{Zero-lift drag} + \text{Drag due to lift} = D = q_{\infty} S C_{D_0} + q_{\infty} S K C_L^2$$

(ج)

$$K = \frac{S}{\pi e A R}, AR = \frac{b^2}{S} = 7.4483$$

$$K = \frac{1}{\pi e A R} \rightarrow K = 0.0448$$

$$P_A = \text{constant}$$

$$C_L = \frac{2W}{q_{\infty} S}$$

$$\frac{P_A}{V_{\infty}} = \frac{1}{2} q_{\infty} S (C_{D_0} + k C_L^2)$$

از روی حل معادله بالا و حذف جواب های نامربوط به جواب های زیر می رسیم.

In sea level:

$$V_{\max} = 277.054_{ft/s}$$

In altitude 5000ft:

$$V_{\max} = 291.15_{ft/s}$$

سوال هفتم

$$W = 97000_{lb}, S = 1800_{ft^2}, \eta = 0.88, C_{D_0} = 0.015, K = 0.05$$

$$P_{es} = 7650\sigma^{0.65}$$

$$\sigma = \frac{s - h}{h + s}, s = 65617_{ft}$$

$$P = \sqrt{\frac{2W^3 C_D^2}{\rho S C_L^3}}$$

We solve this in:

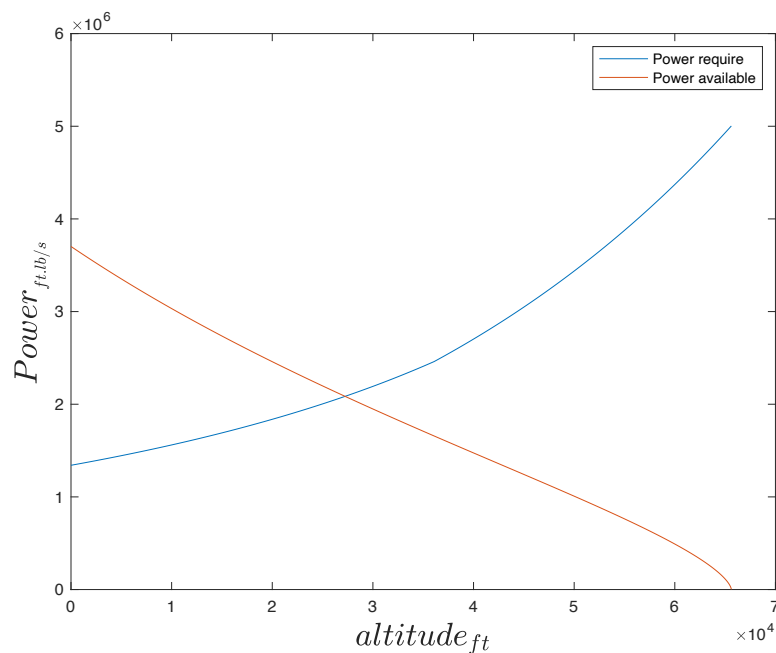
$$\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{\max} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3KC_{D,0}^3}\right)^{3/4}$$

$$P_{alt} = \sqrt{\frac{2W^3}{\rho S}} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3KC_{D,0}^3}\right)^{3/4}$$

با مساوی قرار دادن دو معادله و حل عددی جواب با تقریب 1_{ft} و $30_{ft.lb/s}$ بدست می آید

$$altitude_{\max} = 27235_{ft}$$

نمودار به صورت زیر است.



سوال هشتم
(الف)

$$Z \equiv 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{(L/D)_{\max}^2 (T/W)^2}}$$

$$(R/C)_{\max} = \left[\frac{(T/W)(W/S)Z}{3\rho_{\infty}C_{D,0}} \right]^{1/2} \times \left[\frac{T}{W} - \frac{1}{2}\rho_{\infty} \frac{(T/W)(W/S)ZC_{D,0}}{3\rho_{\infty}C_{D,0}(W/S)} - \frac{2(W/S)K(3\rho_{\infty}C_{D,0})}{\rho_{\infty}(T/W)(W/S)Z} \right]$$

$$(R/C)_{\max} = \left[\frac{(T/W)(W/S)Z}{3\rho_{\infty}C_{D,0}} \right] \left[\frac{T}{W} - \frac{Z}{6} \frac{T}{W} - \frac{6KC_{D,0}}{(T/W)Z} \right] = \left[\frac{(T/S)Z}{3\rho_{\infty}C_{D,0}} \right] \left[\frac{T}{W} - \frac{Z}{6} \frac{T}{W} - \frac{6KC_{D,0}}{(T/W)Z} \right]$$

$$(L/D)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{4C_{D,0}K}}$$

$$C_{D,0} = 0.016, \quad K = 0.045, \quad W = 157000_N, \quad S = 45_{m^2}$$

$$(R/C)_{\max} = 152.6 \frac{m}{s}$$

$$(L/D)_{\max} = 18.6339$$

$$\text{In sea level: } \rho_{\infty} = 1.225_{kg/m^3}$$

بر اساس حل معادله MATLAB داریم:

$$Thrust = 10699_N = 2402.76_{lb}$$

(ب)

بر اساس روش سوال قبل استفاده می کنیم.

ما فرض می کنیم که در $(L/D)_{\max} = 18.6339$ پرواز می کنیم داریم.

$$\frac{L}{D} = \frac{W}{T} \rightarrow T = 8425.5_N$$

$$P_{es} = 2402.76\sigma^{0.6}$$

$$\sigma = \frac{s-h}{h+s}, \quad s = 65617_{ft}$$

$$altitude_{\max} = 12893_{ft}$$

(ج)

$$3600 - 2 \times 250 = 3100$$

با فرض اینکه به ازای 700 متر در راستای افقی 100 متر در راستای عمودی پرواز می کند پس

$$640/100 = S/700 \rightarrow S = 4480 > 3100$$

پس به مانع برخورد می کند.

$$\theta_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{640}{3100}\right) = 0.2036_{rad}$$

$$V_{\infty} \theta_{\min} = R/C = V_{\infty} \left[\frac{T}{W} - \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \left(\frac{W}{S} \right)^{-1} C_{D,0} - \frac{W}{S} \frac{2K}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \right] \rightarrow V_{\infty} = 97.64_{m/s}$$

سوالات کامپیوتری

سوال اول

$$W = 73000_{lb}, S = 950_{ft^2}, C_{D_0} = 0.015, K = 0.08$$

$$Total\ drag = Zero - lift\ drag + Drag\ due\ to\ lift = D = q_{\infty} S C_{D_0} + q_{\infty} S K C_L^2$$

$$R/C = V_{\infty} \left[\frac{T}{W} - \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \left(\frac{W}{S} \right)^{-1} C_{D_0} - \frac{W}{S} \frac{2K}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \right]$$

$$C_L = \sqrt{\frac{2W}{\rho_{\infty} S V_{\infty}^2}}$$

$$T_R = Drag = q_{\infty} S C_D = q_{\infty} S (C_{D_0} + k C_L^2)$$

Figure 5.8

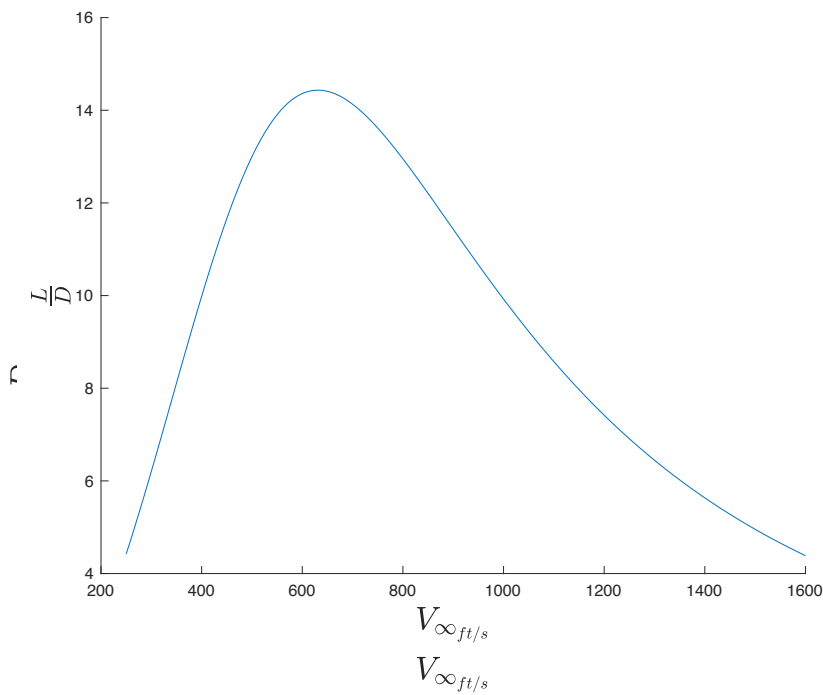


Figure 5.11

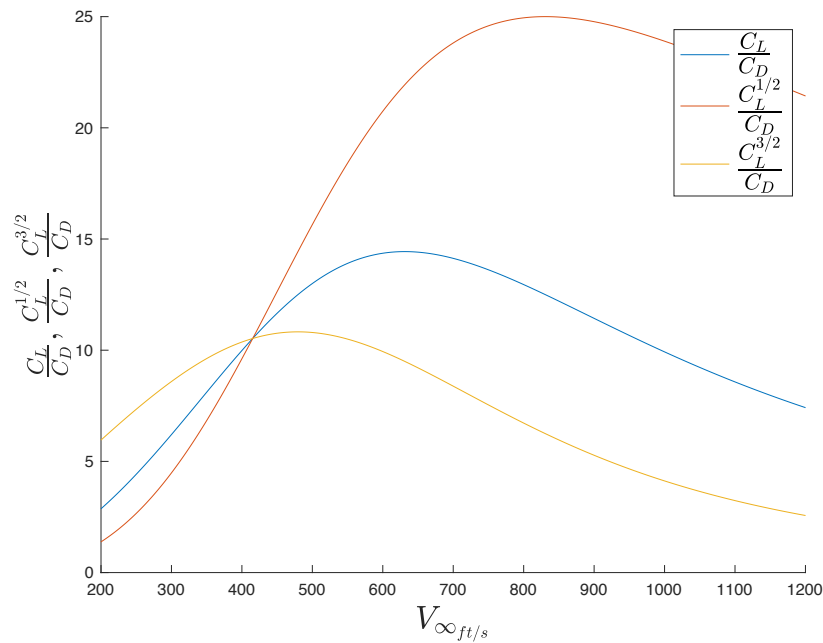


Figure 5.20

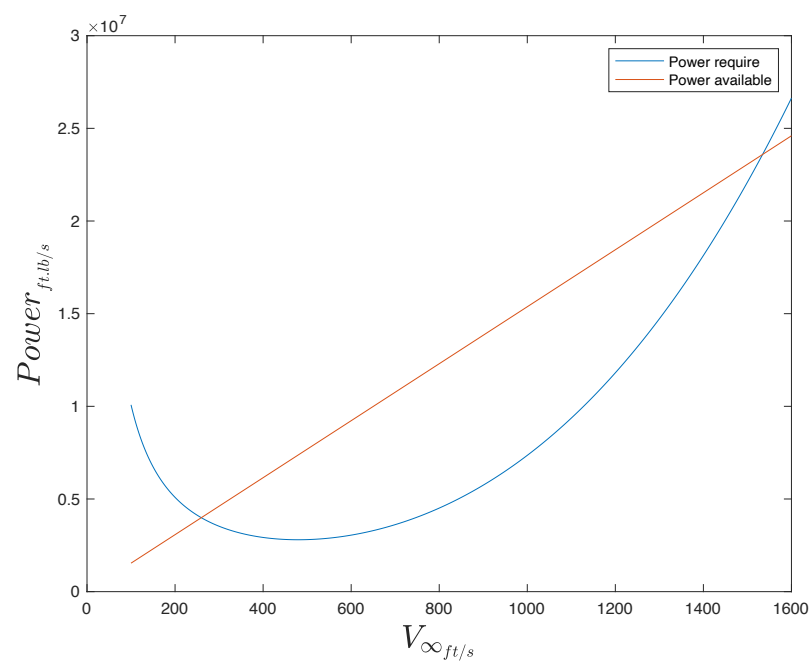


Figure 5.37

