



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی  
مهندسی کنترل

عنوان:

# کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهریور ۱۴۰۰

سلام الله عليه

## سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

## چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی<sup>۱</sup> استفاده شده است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش<sup>۲</sup> که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش خارجی و نویز سنسور مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدل‌سازی نیز از مقاومت مناسبی برخوردار است. از روش ارائه شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده است. عملکرد این روش با اجرای شبیه‌سازی‌های مختلف مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. همچنین، عملکرد آن در حضور نویز و اغتشاش و عدم قطعیت مدل از طریق شبیه‌سازی ارزیابی خواهد شد.

**کلیدواژه‌ها:** چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، شبیه‌سازی، تابع هزینه

---

<sup>1</sup>Game Theory

<sup>2</sup>Nash Equilibrium

## فهرست مطالب

۲	۱ بازی دیفرانسیلی
۳	۱-۱ بازی حلقه باز
۵	۲-۱ بازی همراه با بازخورد
۶	۳-۱ شبیه سازی استند سه درجه آزادی در حضور کنترل کننده
۷	۱-۳-۱ شبیه سازی کانال رول استند در حضور کنترل کننده LQR
۸	۲-۳-۱ شبیه سازی کانال رول استند در حضور کنترل کننده LQDG

## فهرست شکل‌ها

- ۱-۱ عملکرد LQR در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) ..... ۷
- ۲-۱ عملکرد LQR در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) ..... ۸

## فهرست جدول‌ها

# فصل ۱

## بازی دیفرانسیلی

در این قسمت به خلاصه‌ای از بازی دیفرانسیلی پرداخته شده است. تمامی توضیحات و روابط از منبع [۸] آورده شده است. در این فصل حالت حلقه باز<sup>۱</sup> و حالت همراه با بازخورد<sup>۲</sup> بررسی می‌شود. این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن به فرم مربعی است. هدف اصلی کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه به فرم رابطه (۱-۱) نوشته می‌شود.

(۱-۱)

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T (x^T(t)Q_i x(t) + u_i^T(t)R_{ii}u_i(t) + u_j^T(t)R_{ij}u_j(t)) dt + x^T(T)H_i x(T)$$

در اینجا ماتریس‌های  $Q_i$ ،  $R_{ii}$  و  $H$  متقارن فرض شده‌اند و ماتریس  $R_{ii}$  به صورت مثبت معین ( $R_{ii} > 0$ ) فرض شده است. دینامیک سیستم تحت تاثیر هر دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا دینامیک سیستم به فرم رابطه (۲-۱) در نظر گرفته شده است.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \quad x(0) = x_0 \quad (۲-۱)$$

در رابطه (۲-۱)،  $u_1$  برابر با تلاش کنترلی بازیکن اول است. در اینجا ممکن است تلاش بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. این پروژه حالت همکاری دو بازیکن را بررسی نمی‌کند و دو بازیکن در تلاش برای کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

---

<sup>1</sup>Opne Loop

<sup>2</sup>Feedback



## ۱-۱ بازی حلقه‌بازی

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان  $t \in [0, T]$  فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سیستم را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان هماهنگی بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش در ادامه تعریف شده است.

**قضیه ۱-۱** به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات قابل قبول  $(u_1, u_2)$  از نامساوی (۳-۱) پیروی کنند.

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ and } J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2) \quad (3-1)$$

در اینجا قابل قبول بودن به معنی آن است که  $u_i(\cdot)$  به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه‌ی حرکات که بستگی به اطلاعات بازیکنان از بازی دارد، مجموعه‌ای از راهبردهایی است که بازیکنان ترجیح می‌دهند برای کنترل سیستم انجام دهند و سیستم (۲-۱) باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد. به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه  $J_i, (i = 1, 2)$  است.

برای سادگی از نمادسازی  $S_i := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$  استفاده شده است. در اینجا فرض شده است که زمان  $T$  محدود است.

**قضیه ۲-۱** ماتریس  $M$  را در نظر بگیرید:

$$M := \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ -Q_1 & -A^T & 0 \\ -Q_2 & 0 & -A^T \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

فرض شده است که دو معادله دیفرانسیلی ریکاتی (۵-۱)، در بازه  $[0, T]$  جواب متقارن دارند.

$$\dot{K}_i(t) = -A^T K_i(t) - K_i(t) A + K_i(t) S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(T) = H_i, \quad i = 1, 2 \quad (5-1)$$

بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم دو نفره<sup>۳</sup> تعادل نش حلقه‌باز در هر شرایط اولیه  $X_0$  دارد اگر ماتریس

$$H(T) := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-MT} \begin{bmatrix} I \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (۶-۱)$$

معکوس‌پذیر باشد [۸].

در معادلات بالا تلاش کنترلی برای هر بازیکن به فرم رابطه ۷-۱ تعریف شده است.

$$u_i(t) = -R_{ii}B_i^T x(t), \quad i = 1, 2 \quad (۷-۱)$$

در آخر با استفاده از قضیه ۲-۱ با حل دو معادله کوپل ریکاتی دیفرانسیلی می‌توان به جواب رسید.

$$\dot{K}_1 = -A^T K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2; \quad K_1(T) = H_1 \quad (۸-۱)$$

$$\dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A - Q_2 + K_2 S_2 K_2 + K_2 S_1 K_1; \quad K_2(T) = H_2 \quad (۹-۱)$$

---

<sup>3</sup>the two player linear quadratic differential game

## ۲-۱ بازی همراه با بازخورد

تفاوت بازی همراه با بازخورد<sup>۴</sup> با بازی حلقه‌باز در این است که بازیکنان در هر لحظه از بازی بازخورد می‌گیرند و متناسب با بازخورد رفتار می‌کنند. این بازخورد ممکن است باعث شود یک بازیکن انگیزه پیدا کند که از بازی انحراف پیدا کند در حالی که این اتفاق در بازی حلقه‌باز رخ نمی‌دهد. این اتفاق منجر به یک راه حل تعادلی دیگر می‌شود. با توجه به اینکه سیستم خطی است، می‌توان استدلال کرد که جواب بهینه به صورت تابعی خطی از وضعیت سیستم است [۸].

**قضیه ۳-۱** مجموعه‌ی حرکات کنترلی  $u_i^*(t) = F_i^*(t)x(t)$  تشکیل شده‌است از بازخورد خطی تعادل نش اگر

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ and } J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2)$$

برای هر  $u_i \in \Gamma_i^{lfb}$  برقرار باشد.

**قضیه ۴-۱** بازی دیفرانسیلی خطی درجه دوم دو نفره برای هر شرایط اولیه، تعادل نش خطی بازخورد دارد اگر و فقط اگر مجموعه معادلات کوپل ریکاتی

$$\begin{aligned} \dot{K}_1(t) &= -(A - S_2 K_2(t))^T K_1(t) - K_1(t)(A - S_2 K_2(t)) + K_1(t) S_1 K_1(t) - Q_1 \\ K_1(T) &= H_1 \end{aligned} \quad (10-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_2(t) &= -(A - S_1 K_1(t))^T K_2(t) - K_2(t)(A - S_1 K_1(t)) + K_2(t) S_2 K_2(t) - Q_2 \\ K_2(T) &= H_2 \end{aligned} \quad (11-1)$$

در بازه زمانی  $[0, T]$  جواب متقارن داشته باشند (برای سادگی  $S_{12} = S_{21} = 0$  فرض شده است). در این حالت دارای تعادل منحصر به فرد است. حرکت‌های تعادل به فرم رابطه ۱۲-۱ است.

$$u_i^*(t) = -R_{ii} B_i^T K_i(T) x(T), \quad i = 1, 2 \quad (12-1)$$

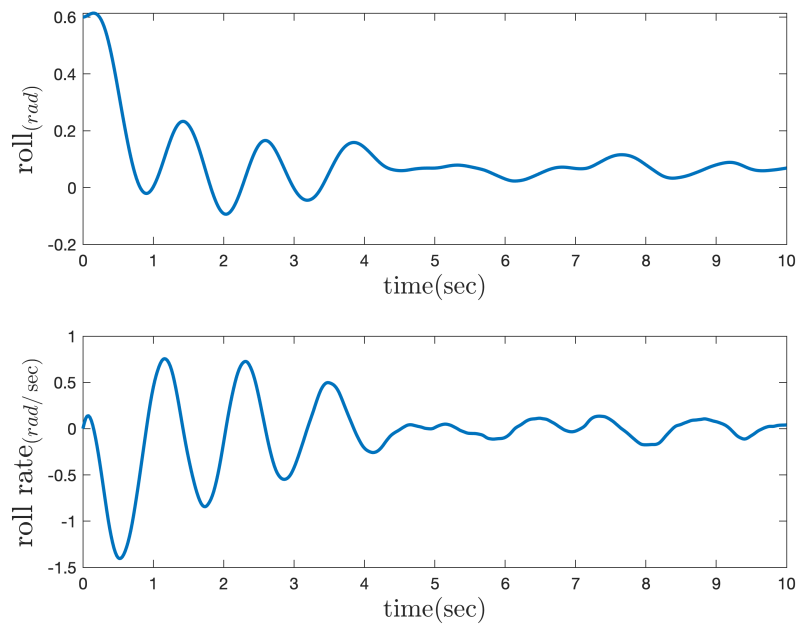
<sup>4</sup>The Feedback Game

## ۳-۱ شبیه‌سازی استند سه درجه آزادی در حضور کنترل‌کننده

در بخش ۱-۱ و ۲-۱ کنترل‌کننده خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی در حالت حلقه باز و حلقه بسته معرفی شد. در این بخش ابتدا کنترل‌کننده LQR و سپس کنترل‌کننده‌های LQDG و LQIDG شبیه‌سازی می‌شوند.

### ۱-۳-۱ شبیه‌سازی کانال رول استند در حضور کنترل‌کننده LQR

در بخش ؟؟ شبیه‌سازی کانال رول استند چهارپره انجام شد. در این بخش به بررسی عملکرد چهارپره در حضور کنترل‌کننده LQR پرداخته می‌شود. در شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی ضرایب وزنی از روش TCACS [۱۴] استفاده شده است.

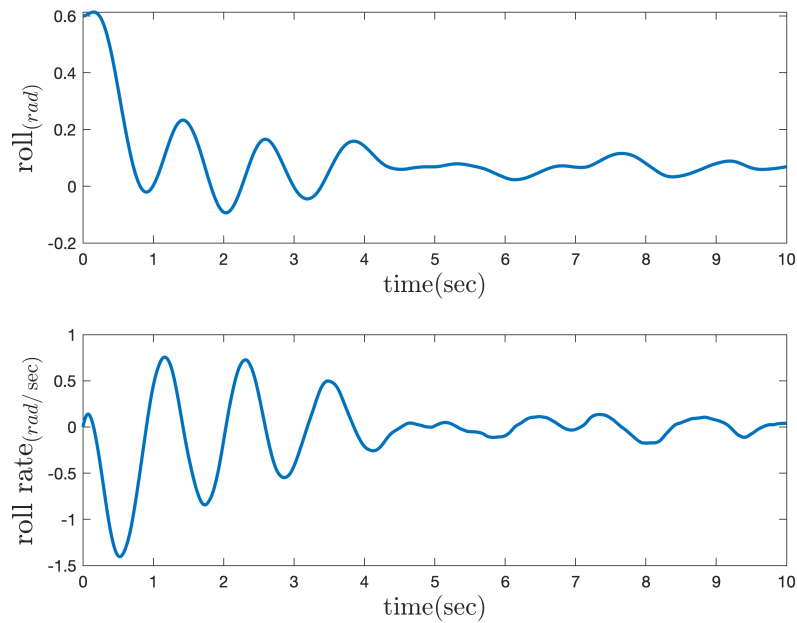


شکل ۱-۱: عملکرد LQR در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)

بر اساس خروجی شبیه‌سازی (شکل ۱-۳-۲)، کانال رول در حضور کنترل‌کننده LQR در حدود پنج ثانیه به تعادل می‌رسد اما دارای خطای ماندگار است.

### ۲-۳-۱ شبیه‌سازی کانال رول استند در حضور کنترل‌کننده LQDG

در بخش ؟؟ شبیه‌سازی کانال رول استند چهارپره انجام شد. در این بخش به بررسی عملکرد چهارپره در حضور کنترل‌کننده LQDG پرداخته می‌شود. کنترل‌کننده LQDG در بخش‌های ۱-۱ و ۲-۱ بررسی شده است. در شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی ضرایب وزنی از روش TCACS [۱۴] استفاده شده است.



شکل ۲-۱: عملکرد LQDG در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)

بر اساس خروجی شبیه‌سازی (شکل ؟؟)، کانال رول در حضور کنترل‌کننده LQR در حدود پنج ثانیه به تعادل می‌رسد اما دارای خطای ماندگار است.

## مراجع

- [1] L. Sprekelmeyer. *These We Honor: The International Aerospace Hall of Fame*. 2006.
- [2] M. J. Hirschberg. A perspective on the first century of vertical flight. *SAE Transactions*, 108:1113–1136, 1999.
- [3] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on  $se(3)$ . In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.
- [4] <http://gcrc.sharif.edu>. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed November 2, 2021], Available at <https://cutt.ly/yYMvhYv>.
- [5] dreamstime. boeing ch chinook, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://cutt.ly/onRvD7x>.
- [6] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/>.
- [7] nobelprize.org. Jean tirole, 2021. [Online; accessed October 17, 2021], Available at <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2014/tirole/facts/>.
- [8] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.
- [9] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent back-stepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.

- 
- [10] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
  - [11] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.
  - [12] M. A. A. Bishe. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using a heuristic nonlinear controller. January 2018.
  - [13] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.
  - [14] A. Karimi, H. Nobahari, and P. Siarry. Continuous ant colony system and tabu search algorithms hybridized for global minimization of continuous multi-minima functions. *Computational Optimization and Applications*, 45(3):639–661, Apr 2010.





Sharif University of Technology  
Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

# **LQDG Controller for 3DOF Quadcopter Stand**

By:

**Ali BaniAsad**

Supervisor:

**Dr. Nobahari**

August 2021