



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی  
مهندسی کنترل

عنوان:

کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش  
کنترل کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهر ویر ۱۴۰۰

اللهُ أَكْبَرُ

## سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دriegشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

## چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی<sup>۱</sup> استفاده شده است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعال نش<sup>۲</sup> که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش خارجی و نویز سنسور مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی نیز از مقاومت مناسبی برخوردار است. از روش ارائه شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده است. عملکرد این روش با اجرای شبیه‌سازی‌های مختلف مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. همچنین، عملکرد آن در حضور نویز و اغتشاش و عدم قطعیت مدل از طریق شبیه‌سازی ارزیابی خواهد شد.

کلیدواژه‌ها: چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، شبیه‌سازی، تابع هزینه

---

<sup>1</sup>Game Theory

<sup>2</sup>Nash Equilibrium

# فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۲	۱-۱ تاریخچه	۱
۳	۲-۱ تعریف مسئله	۱
۴	۱-۲-۱ ساختار بالگرد	۱
۵	۲-۲-۱ ساختار چهارپره	۱
۶	۳-۱ نظریه بازی	۱
۶	۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی	۱
۶	۲-۳-۱ تعادل نش	۱
۸	۲ بازی دیفرانسیلی	۲
۹	۱-۲ بازی حلقه باز	۲
۱۱	۲-۲ بازی همراه با بازخورد	۲
۱۳	۳ مدل سازی چهارپره	۳
۱۴	۱-۳ فرضیات مدل سازی	۳
۱۵	۲-۳ معادله گشتاور	۳
۱۷	۱-۲-۳ گشتاورهای ناشی از آئرودینامیک پرهها	۳

۱۸	۲-۲-۳ گشتاور ناشی از نیروی تکیهگاه
۲۰	۳-۳ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگها
۲۱	۱-۳-۳ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی
۲۳	۴-۳ استخراج فرم فضای حالت
۲۵	۵-۳ خطی‌سازی
۲۶	۱-۵-۳ خطی‌سازی به فرم چند ورودی چند خروجی
۳۰	۲-۵-۳ خطی‌سازی به فرم یک ورودی یک خروجی
۳۵	<b>۴ شبیه‌سازی در محیط سیمولینک</b>
۳۶	۱-۴ طراحی مبتنی بر مدل
۳۸	۲-۴ شبیه‌سازی استند سه درجه آزادی در محیط سیمولینک
۴۰	۳-۴ شبیه‌سازی کanal‌های مختلف استند سه درجه آزادی در محیط سیمولینک
۴۰	۱-۳-۴ شبیه‌سازی کanal رول در محیط سیمولینک
۴۱	۲-۳-۴ شبیه‌سازی کanal پیچ در محیط سیمولینک
۴۳	۳-۳-۴ شبیه‌سازی کanal یاو در محیط سیمولینک
۴۴	۴-۳-۴ شبیه‌سازی کanal رول-پیچ در محیط سیمولینک
۴۶	۴-۴ اصلاح پارامترهای استند چهارپره در شبیه‌سازی حلقه باز
۴۷	۱-۴-۴ تخمین پارامتر کanal رول

# فهرست شکل‌ها

۱-۱	استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه [۴]	۳
۲-۱	بالگرد شینوک [۵]	۵
۳-۱	جهت چرخش پره‌های چهارپره [۶]	۵
۱-۳	شماییک استند چهارپره [۹]	۱۴
۱-۴	دیاگرام V [۱۴]	۳۷
۲-۴	مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل	۳۸
۳-۴	مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل	۳۸
۴-۴	نمایی از داخل بلوک Quad System	۳۹
۵-۴	مدل کanal رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها	۴۰
۶-۴	مدل کanal رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها	۴۰
۷-۴	نمایی از داخل بلوک Quad System	۴۱
۸-۴	مدل کanal رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها	۴۱
۹-۴	مدل کanal رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها	۴۲
۱۰-۴	نمایی از داخل بلوک Quad System	۴۲
۱۱-۴	مدل کanal رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها	۴۳
۱۲-۴	مدل کanal یاو استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها	۴۳

۴۴	۱۳-۴ نمایی از داخل بلوک Quad System
۴۴	۱۴-۴ مدل کanal رول-پیچ استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها
۴۵	۱۵-۴ مدل کanal رول-پیچ استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها
۴۵	۱۶-۴ نمایی از داخل بلوک Quad System
۴۶	۱۷-۴ نماد جعبه‌ابزار Parameter Estimator در سیمولینک
۴۶	۱۸-۴ جعبه‌ابزار Parameter Estimator
۴۷	۱۹-۴ مقایسه خروجی‌های آزمایش اول و خروجی مدل‌سازی پس از تخمین پارامترها
۴۸	۲۰-۴ مقایسه خروجی‌های آزمایش دوم و خروجی مدل‌سازی پس از تخمین پارامترها
۴۸	۲۱-۴ مقایسه خروجی‌های آزمایش سوم و خروجی مدل‌سازی پس از تخمین پارامترها
۴۹	۲۲-۴ مقایسه خروجی‌های آزمایش چهارم و خروجی مدل‌سازی پس از تخمین پارامترها
۴۹	۲۳-۴ مقایسه خروجی‌های آزمایش پنجم و خروجی مدل‌سازی پس از تخمین پارامترها

## فهرست جداول

۱-۳ پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۱۳] ..... ۲۴

# فصل ۱

## مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر<sup>۱</sup> یکی از انواع وسایل پرنده است. چهارپره‌ها نوعی هوایگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپره‌ها جای دارند. چهارپره‌ها به دلیل داشتن توانایی مانور خوب و امکان پرواز ایستا با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده‌ای برخوردارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده است و لذا روزانه پیشرفت چشمگیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویربرداری، تفریحی و کشاورزی از کاربرد زیاد و روزافزونی برخوردارند و مدل‌های دارای سرنوشت آن نیز تولید شده.

## ۱-۱ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندپره در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Jacques و Louis Breguet انجام شد. پرنده آن‌ها موفق به پرواز به صورت عمودی شد؛ ولی پرنده تا ارتفاع دو فوت بیشتر پرواز نکرد. پرواز انجام شده یک پرواز آزاد<sup>۲</sup> نبود و پرنده به کمک چهار مرد ثابت نگه داشته شده بود [۱]. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمی‌گردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی به نام Étienne Oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع کرد و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد. در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد [۲].

<sup>1</sup>Quadcopter

<sup>2</sup>Free Flight

در سال ۱۹۲۲ در آمریکا George de Bothezata موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود.

در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده است و به تدریج رواج یافته است [۳].

از حدود سال ۲۰۰۶ کوادکوپترها شروع به رشد صنعتی به صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

## ۲-۱ تعریف مسئله

مسئله‌ای که در این پژوهه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مربعی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده است. در این صورت، تنها وضعیت (زواياي رول<sup>۳</sup>، پیچ<sup>۴</sup> و یاو<sup>۵</sup>) چهارپره تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین می‌توان با مقید کردن چرخش حول هر محور، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به صورت مجزا و یا با یکدیگر بررسی کرد. استند آزمایشگاهی سه درجه آزادی چهارپره در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱: استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه [۴]

<sup>3</sup>Roll

<sup>4</sup>Pitch

<sup>5</sup>Yaw

با توجه به شکل مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان آن را به صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین سیستم بدون حضور کنترل کننده ناپایدار است. این سیستم دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زاویه‌ای اویلر ( $\phi, \theta, \psi$ ) است. در مدل سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد، اما با توجه به کنترل کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به صورت اغتشاش در نظر گرفت و سیستم را به خوبی کنترل کرد. در پایان این کنترل کننده با کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی<sup>۶</sup> و کنترل کننده رگلاتور مربعی خطی<sup>۷</sup> مقایسه خواهد شد.

## ۱-۲-۱ ساختار بالگرد

چهارپره‌ها همانند انواع دیگر وسایل پرنده از ایجاد اختلاف فشار در اتمسفر پیرامون خود برای بلند شدن و حرکت در هوا استفاده می‌کنند. همان‌طور که بالگردها به کمک پره اصلی این اختلاف فشار را ایجاد می‌کنند و نیروی برآی<sup>۸</sup> خود را تأمین می‌کنند. به‌دلیل وجود نیروی عمل و عکس‌العمل در بالگردها، پس از این‌که پره اصلی شروع به چرخش می‌کند با برخورد مولکول‌های هوا به این پره و وجود عکس‌العمل، یک نیرویی با جهت مخالف جهت چرخش پره به پره و در ادامه به شفت متصل به پره اعمال می‌شود (نیروی گشتاور) و این نیرو باعث چرخش بالگرد به دور خود می‌شود. حال برای حل این مشکل از پره دم بالگرد استفاده می‌شود تا نیرویی را تولید کند که مانع چرخش بالگرد به دور خود شود. حال اگر بالگرد به جای داشتن یک پره اصلی از دو پره اصلی که خلاف جهت یکدیگر بچرخند استفاده می‌نمود، به‌دلیل خنثی شدن دو نیروی گشتاور توسط یکدیگر، دیگر بالگرد به دور خود نمی‌چرخد. مانند بالگردهای شینوک<sup>۹</sup> که نمایی از آن در شکل ۲-۱ آورده شده است. حال با توجه به توضیحات داده شده راحت‌تر می‌توان به ساختار چهارپره‌ها اشاره نمود.

<sup>6</sup>PID (Proportional–Integral–Derivative)

<sup>7</sup>LQR (Linear Quadratic Regulator)

<sup>8</sup>Thrust

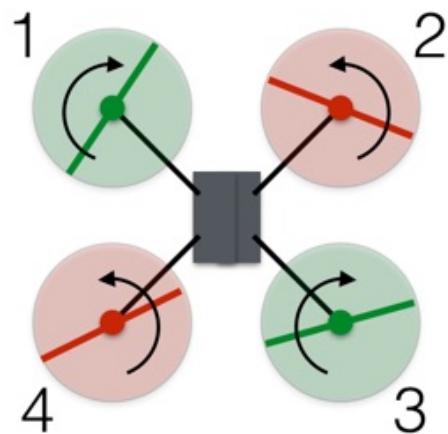
<sup>9</sup>Boeing CH-47 Chinook



شکل ۱-۲: بالگرد شینونک [۵]

## ۲-۲-۱ ساختار چهارپره

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها نیروی گشتاورهای ایجاد شده را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.



شکل ۱-۳: جهت چرخش پره‌های چهارپره [۶]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش همه موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیاد تر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و نیروی گشتاور به یک سمت ایجاد می‌شود و نیروی برآ همانند قبل است (زیرا دو پره با سرعت کمتر و دو پره دیگر به همان نسبت با سرعت بیشتر می‌چرخند) لذا چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. برای حرکت چهارپره‌ها در جهت‌های مختلف (عقب، جلو، چپ و راست) توسط کم و زیاد کردن سرعت موتورها چهارپره را از حالت افقی خارج کرده و باعث حرکت آن می‌شوند.

### ۳-۱ نظریه بازی

نظریه بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. نظریه بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه بازی در تلاش است تا به وسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایط راهبردی یا در یک بازی که در آن موفقیت فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

### ۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی

در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراه جان هارسانی و راینهارد سیلتون به خاطر مطالعات خلاقانه‌ی خود در زمینه‌ی نظریه بازی، برنده‌ی جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برنده‌گان جایزه‌ی نوبل اقتصاد از میان متخصصین نظریه بازی انتخاب شدند. آخرین آن‌ها، ژان تیروول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد [۴].

### ۲-۳-۱ تعادل نش

پژوهش‌ها در این زمینه اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به عنوان تعادل در بازی‌ها استوار است. این راهبردها به طور معمول از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش است. در نظریه بازی، تعادل نش (به نام جان فوربز نش، که آن را پیشنهاد کرد) راه حلی از نظریه بازی است

که شامل دو یا چند بازیکن است، که در آن فرض برآگاهی هر بازیکن به راهبرد تعادل دیگر بازیکنان است. بر اساس نظریه‌ی تعادل نش، اگر فرض کنیم در هر بازی با استراتژی مختلط، بازیکنان به طریق منطقی و معقول راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حد اکثر سود در بازی هستند، دست کم یک راهبرد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن قابل انتخاب است و چنانچه بازیکن راهکار دیگری به غیر از آن را انتخاب کند، نتیجه‌ی بهتری به دست نخواهد آورد.

## فصل ۲

### بازی دیفرانسیلی

در این قسمت به خلاصه‌ای از بازی دیفرانسیلی پرداخته شده است. تمامی توضیحات و روابط از منبع [۸] آورده شده است. در این فصل حالت حلقه‌باز<sup>۱</sup> و حالت همراه با بازخورد<sup>۲</sup> بررسی می‌شود. این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله فرض شده کهتابع هزینه برای هر بازیکن به فرم مربعی است. هدف اصلی کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه به فرم رابطه (۱-۲) نوشته می‌شود.

$$(1-2) \quad J_i(u_1, u_2) = \int_0^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t) \mathbf{R}_{ii} \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t) \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{u}_j(t)) dt + \mathbf{x}^T(T) \mathbf{H}_i \mathbf{x}(T)$$

در اینجا ماتریس‌های  $\mathbf{Q}_i$ ،  $\mathbf{R}_{ii}$  و  $\mathbf{H}_i$  متقارن فرض شده‌اند و ماتریس  $\mathbf{R}_{ii}$  به صورت مثبت معین ( $0 > \mathbf{R}_{ii} > 0$ ) فرض شده است. دینامیک سیستم تحت تاثیر هر دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا دینامیک سیستم به فرم رابطه (۲-۲) در نظر گرفته شده است.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2-2)$$

در رابطه (۲-۲)،  $\mathbf{u}_1$  برابر با تلاش کنترلی بهینه بازیکن اول است. در اینجا ممکن است تلاش کنترلی بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. این پروژه حالت همکاری دو بازیکن را بررسی نمی‌کند و دو بازیکن در تلاش برای کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

---

<sup>1</sup>Opne Loop

<sup>2</sup>Feedback

## ۱-۲ بازی حلقه‌باز

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان  $t \in [0, T]$  فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سیستم را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان هماهنگی بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش در ادامه تعریف شده است.

قضیه‌ی ۱-۲ به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات قابل قبول  $(u_1, u_2)$  از نامساوی (۳-۲) پیروی کنند.

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ and } J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2) \quad (3-2)$$

در اینجا قابل قبول بودن به معنی آن است که  $(.)_i u$  به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه‌ی حرکات که بستگی به اطلاعات بازیکنان از بازی دارد، مجموعه‌ای از راهبردهایی است که بازیکنان ترجیح می‌دهند برای کنترل سیستم انجام دهند و سیستم (۲-۲) باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد. به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه  $J_i$ ,  $(i = 1, 2)$  است.

برای سادگی از نمادسازی  $S_i := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$  استفاده شده است. در اینجا فرض شده است که زمان  $T$  محدود است.

قضیه‌ی ۲-۲ ماتریس  $M$  را در نظر بگیرید:

$$M := \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ -Q_1 & -A^T & 0 \\ -Q_2 & 0 & -A^T \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

فرض شده است که دو معادله دیفرانسیلی ریکاتی (۵-۲)، در بازه  $[0, T]$  جواب متقاضن دارند.

$$\dot{K}_i(t) = -A^T K_i(t) - K_i(t) A + K_i(t) S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(T) = H, \quad i = 1, 2 \quad (5-2)$$

پس بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم دو نفره<sup>۳</sup> تعادل نش حلقه باز در هر شرایط اولیه  $X_0$  دارد اگر ماتریس

$$\mathbf{H}(T) := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} e^{-MT} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

قابلیت معکوس شدن را داشته باشد.

در معادلات بالا تلاش کنترلی برای هر بازیکن به فرم رابطه ۷-۲<sup>۴</sup> تعریف شده است.

$$u_1(t) = -\mathbf{R}_{ii} \mathbf{B}_i^T x(t) \quad (7-2)$$

در آخر با استفاده از قضیه ۲-۲ با حل دو معادله کوپل ریکاتی دیفرانسیلی می‌توان به جواب رسید.

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = -A^T \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1 A - Q_1 + \mathbf{K}_1 S_1 \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1 S_2 \mathbf{K}_2; \quad \mathbf{K}_1(T) = \mathbf{H}_1 \quad (8-2)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_2 = -A^T \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2 A - Q_2 + \mathbf{K}_2 S_2 \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2 S_1 \mathbf{K}_1; \quad \mathbf{K}_2(T) = \mathbf{H}_2 \quad (9-2)$$

---

<sup>3</sup>the two player linear quadratic differential game

## ۲-۲ بازی همراه با بازخورد

تفاوت بازی همراه با بازخورد<sup>۴</sup> با بازی حلقه‌باز در این است که بازیکنان در هر لحظه از بازی بازخورد می‌گیرند و متناسب با بازخورد رفتار می‌کنند. این بازخورد ممکن است باعث شود یک بازیکن انگیزه پیدا کند که از بازی انحراف پیدا کند در حالی که این اتفاق در بازی حلقه‌باز رخ نمی‌دهد. این اتفاق منجر به یک راه حل تعادلی دیگر می‌شود. از طرف دیگر راه حل تعادلی نباید در طول بازی خودش را با بازکنان سازگار کند.

با توجه به اینکه سیستم خطی است، می‌توان استدلال کرد که حرکات تعادل به صورت تابعی خطی از وضعیت سیستم است. این بدين مفهوم است که تعادل نش باید در فضای ذکر شده باشد. فضای راهبردی به فرم رابطه ۱۰-۲

$$\Gamma_i^{lfb} : = \{ \mathbf{u}_i(0, T) | \mathbf{u}_i(t) = \mathbf{F}_i(t) \mathbf{x}(t), i = 1, 2 \} \quad (10-2)$$

تعریف می‌شود. در رابطه ۱۰-۲ ( $\mathbf{F}_i$ ) قسمتی از یک تابع است. حرکات تعادل نش ( ${}^* \mathbf{u}_1, {}^* \mathbf{u}_2$ ) در فضای استراتژی  $\Gamma_1^{lfb} \times \Gamma_2^{lfb}$  است.

قضیه‌ی ۳-۲ مجموعه‌ی حرکات کنترلی ( ${}^* \mathbf{u}_i(t) = {}^* \mathbf{F}_i(t) \mathbf{x}(t)$ ) تشکیل شده‌است از بازخورد خطی تعادل نش اگر

$$J_1({}^* \mathbf{u}_1, {}^* \mathbf{u}_2) \leq J_1(\mathbf{u}_1, {}^* \mathbf{u}_2) \text{ and } J_2({}^* \mathbf{u}_1, {}^* \mathbf{u}_2) \leq J_2({}^* \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

برای هر  $\mathbf{u}_i \in \Gamma_i^{lfb}$  برقرار باشد.

قضیه‌ی ۴-۲ بازی دیفرانسیلی خطی درجه دوم دو نفره برای هر شرایط اولیه، تعادل نش خطی بازخورد دارد اگر و فقط اگر مجموعه معادلات کوپل ریکاتی

---

<sup>4</sup>The Feeback Game

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}_1(t) &= -(A - S_2 K_2(t))^T \mathbf{K}_1(t) - \mathbf{K}_1(t)(A - S_2 K_2(t)) + \mathbf{K}_1(t)S_1\mathbf{K}_1(t) - \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{K}_1(T) &= \mathbf{H}_1\end{aligned}\tag{۱۱-۲}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}_2(t) &= -(A - S_1 K_1(t))^T \mathbf{K}_2(t) - \mathbf{K}_2(t)(A - S_1 K_1(t)) + \mathbf{K}_2(t)S_2\mathbf{K}_2(t) - \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{K}_2(T) &= \mathbf{H}_2\end{aligned}\tag{۱۲-۲}$$

در بازه زمانی  $[0, T]$  جواب متقارن داشته باشند (برای سادگی  $S_{12} = S_{21} = 0$  فرض شده است). در این حالت دارای تعادل منحصر به فرد است. حرکت‌های تعادل به فرم رابطه ۱۳-۲ است.

$$\mathbf{u}_i^*(t) = -\mathbf{R}_{ii} \mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_i(T) \mathbf{x}(T), \quad i = 1, 2 \tag{۱۳-۲}$$

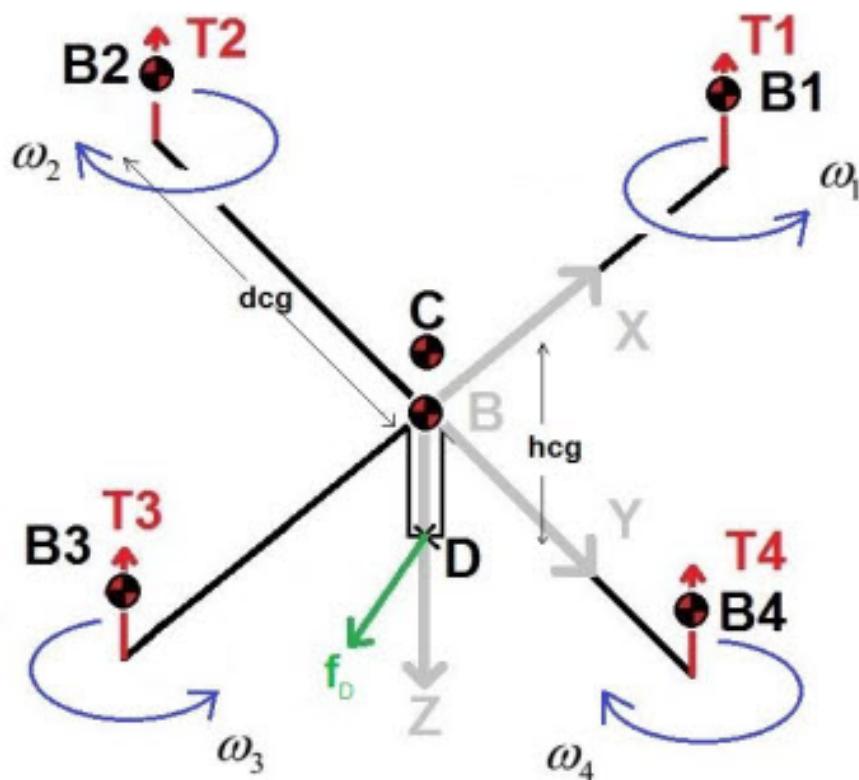
## فصل ۳

### مدل‌سازی چهارپره

در این فصل به مدل‌سازی استند چهارپره آزمایشگاهی پرداخته شده است. به این منظور، ابتدا فرضیات مربوط به مدل‌سازی چهارپره بیان می‌شود. سپس معادلات حاکم بر حرکات دورانی چهارپره بیان می‌شود. در ادامه به استخراج گشتاورهای خارجی اعمالی به استند شامل گشتاورهای آبیودینامیکی ناشی از پره، گشتاور نیروی تکیه گاه و گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها پرداخته می‌شود. در گام بعد، معادله نهایی دینامیک دورانی استند استخراج می‌شود. سپس، فرم فضایی حالت استند آزمایشگاهی استخراج می‌شود. لازم به توضیح است که فرم نهایی فضایی حالت استند بدون درنظرگرفتن اصطکاک بیرینگ‌ها از منبع [۹] آورده شده است که در آن منبع، مدل استخراج شده با اعمال ورودی‌های و شرایط اولیه مختلف اعتبارسنجی شده است.

### ۱-۳ فرضیات مدل‌سازی

شماتیک استند چهارپره در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم، فرض می‌شود که چهارپره صلب و متقارن است. همچنین ماتریس گشتاور اینرسی چهارپره به صورت قطعی درنظر گرفته می‌شود. مرکز ثقل سازه چهارپره روی نقطه  $B$  و مرکز ثقل هر یک از پره‌ها به همراه قسمت دور موتور روی نقاط  $B_1$  تا  $B_4$  است. مبدأ دستگاه مختصات بدنی روی محل تقاطع بازوی چهارپره یعنی نقطه  $B$  در نظر گرفته شده است. از آنجایی که مرکز ثقل پره‌ها بالاتر از مرکز ثقل سازه چهارپره است، مرکز ثقل کلی چهارپره جایی بین مرکز ثقل موتورها و سازه، یعنی نقطه  $C$  می‌گیرد. همچنین قابل ذکر است که نقطه  $D$  محل اتصال کلی استند چهارپره است. جهت مثبت محور  $X^B$  و  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی به ترتیب در راستای بازوی مربوط به موتور ۱ و ۴ فرض می‌شود. همچنین جهت مثبت محور  $Z^B$  با توجه به قانون دست راست حاصل می‌شود.



شکل ۱-۳: شماتیک استند چهارپره [۹]

## ۲-۳ معادله گشتاور

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت دورانی چهارپره، از قوانین نیوتون اویلر استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیلی اویلر برای یک پرنده حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\dot{\omega}^{BI}]^B = \left( [J]^B \right)^{-1} \left( - [\Omega^{BI}]^B \times \left( [J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B \right) + [m_b]^B \right) \quad (1-3)$$

در رابطه ۱-۳، عبارت  $[\dot{\omega}^{BI}]^B$  بیانگر بردار مشتق نرخ‌های زاویه‌ای چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین ماتریس  $[J]^B$  نشان‌دهنده گشتاورهای اینرسی چهارپره حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی است که به دلیل تقارن چهارپره به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$[J]^B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

در رابطه ۲-۳، پارامترهای  $J_{11}$ ،  $J_{22}$  و  $J_{33}$  به ترتیب بیانگر گشتاورهای اینرسی چهارپره حول محورهای  $X^B$ ،  $Y^B$  و  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین بردار  $[I_R]^B$  در رابطه ۱-۳ بیانگر مجموع تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است. ازانجا که، تکانه زاویه‌ای پره‌ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است؛ در نتیجه  $[I_R]^B$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[I_R]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_R \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

در رابطه ۳-۳،  $l_R$  بیانگر تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است که به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$l_R = J_R \omega_d \quad (4-3)$$

در رابطه ۴-۳، پارامتر  $J_R$  بیانگر ممان اینرسی هر یک از پره‌ها است. همچنین  $\omega_d$  نشان‌دهنده تفاضل نسبی سرعت‌های زاویه‌ای پره‌ها است که با توجه به شکل ۱-۳ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_d = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \quad (5-3)$$

همچنین  $m_b^B$  در رابطه ۱-۳ برآیند گشتاورهای خارجی اعمالی به چهارپره، شامل گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها و گشتاورهای ناشی از نیروی تکیه‌گاه است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

### ۱-۲-۳ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها

آیرودینامیک پره‌ها باعث ایجاد نیروی برآ و درنتیجه گشتاورهای رول و پیچ ناشی از اختلاف نیروی برآ می‌شود. با استفاده از تفاضل نیروی برآی پره‌ها دو گشتاور رول و پیچ ایجاد می‌شود. با توجه به تئوری مونتوم، نیروی برآی هر پره ( $T_i$ ) از رابطه زیر حاصل می‌شود [۱۱] :

$$T_i = b\omega_i^2 \quad (6-3)$$

در رابطه ۶-۳  $b$  و  $\omega_i$  به ترتیب بیانگر فاکتور نیروی برآ و سرعت زاویه‌ای هر پره است؛ بنابراین مطابق شکل ۱-۳ گشتاور رول حول محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$m_X^B = d_{cg}(T_2 - T_4) = d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (7-3)$$

در رابطه ۷-۳ عبارت  $d_{cg}$  بیانگر فاصله مرکز هر پره از مرکز جرم چهارپره در راستای محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی است. همچنین گشتاور پیچ حول محور  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۱-۳ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Y^B = d_{cg}(T_1 - T_3) = d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \quad (8-3)$$

گشتاور یا و آیرودینامیکی از اختلاف گشتاور ناشی از پسای پره‌ها ایجاد می‌شود؛ لذا جهت این گشتاور همواره در جهت مخالف چرخش پره‌ها است؛ بنابراین گشتاور یا و حول محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۱-۳ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Z^B = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (9-3)$$

رابطه ۹-۳ عبارت  $d$  بیانگر فاکتور گشتاور پسای پره‌ها است. در نتیجه با توجه به معادلات ۸-۳، ۷-۳ و ۹-۳ بردار گشتاورهای خارجی ناشی از آیرودینامیک پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[m_A]^B = \begin{bmatrix} m_X^B \\ m_Y^B \\ m_Z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (10-3)$$

### ۲-۲-۳ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه

همانطور که در شکل ۱-۳ مشاهده می‌شود، نیروی  $f_d$  که در نقطه‌ی  $D$  از طرق اتصال کلی به چهارپره وارد می‌شود، باعث ایجاد گشتاوری حول مرکز ثقل چهارپره می‌شود. به منظور مدل‌سازی گشتاور ناشی از این نیرو حول نقطه  $C$ ، لازم است ابتدا نیروی  $f_d$  استخراج شود. از انجایی که نقطه‌ی  $D$  منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نیست؛ لذا معادله حرکت انتقالی برای نقطه اتصال  $D$  با استفاده از معادله انتقال یافته نیوتون (معادله گروبین) به صورت معادله زیر حاصل می‌شود [۱۰] :

$$m_{tot} [D^I \mathbf{v}_D^I]^B = [\Sigma \mathbf{f}]^B - m_{tot} \left( [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \quad (11-3)$$

در رابطه ۱۱-۳،  $m_{tot}$  مجموع جرم چهارپره و  $[D^I \mathbf{v}_D^I]^B$  مشتق دورانی سرعت نقطه  $D$  نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[\Sigma \mathbf{f}]^B$  بیان‌کننده برآیند نیروهای وارد می‌شوند و  $[\Omega^{BI}]^B$  ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاویه‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[D^I \Omega^{BI}]^B$  نشان‌دهنده مشتق دورانی سرعت زاویه‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی و  $[s_{cd}]^B$  بردار واصل از نقطه‌ی  $D$  به نقطه  $C$  است. با انتقال قاب بدنی به قاب اینرسی معادله ۱۱-۳ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} m_{tot} [D^B \mathbf{v}_D^I]^B + m_{tot} [\Omega^{BI}]^B [\mathbf{v}_D^I]^B = \\ [\Sigma \mathbf{f}]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \end{aligned} \quad (12-3)$$

همچنین به دلیل اینکه سرعت محل اتصال چهارپره (نقطه  $D$ ) صفر است؛ دو عبارت سمت چپ معادله ۱۲-۳ هر دو صفر هستند. در نتیجه معادله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$[\Sigma \mathbf{f}]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right) = 0 \quad (13-3)$$

عبارت  $[\Sigma \mathbf{f}]^B$  بیان‌گر مجموع نیروهای وارد بر چهارپره است که به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$[\Sigma \mathbf{f}]^B = [\mathbf{f}_D]^B + [\mathbf{f}_T]^B + [\mathbf{f}_G]^B \quad (14-3)$$

در رابطه ۱۴-۳، بردار  $[\mathbf{f}_D]^B$  مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی  $D$  است. همچنین بردار  $[\mathbf{f}_T]^B$  بیان‌گر مجموع نیروی برآی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\mathbf{f}_T]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{bmatrix} \quad (15-3)$$

مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی  $D$  است. همچنین بردار  $[f_G]^B$  بیانگر نیروی وزن چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[f_G]^B = [C]^{BL} [f_G]^L \quad (16-3)$$

در رابطه ۱۶-۳، ماتریس  $C$  انتقال از دستگاه مختصات تراز محلی ( $L$ ) به دستگاه مختصات بدنی است. با جایگذاری روابط ۱۴-۳، ۱۵-۳ و ۱۶-۳ در ۱۳-۳ عبارت زیر برای نیروی تکیه‌گاهی حاصل می‌شود.

$$[f_D]^B = -[f_G]^B - [f_T]^B + m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \quad (17-3)$$

سپس از حاصل ضرب نیروی تکیه‌گاه مدل شده در معادله ۱۷-۳ در بردار محل اثر آن، گشتاور ایجاد شده توسط نیروی اتصال کلی به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_D]^B = [s_{DC}]^B \left( -[f_G]^B - [f_T]^B m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \quad (18-3)$$

در رابطه ۱۸-۳ بردار  $s_{DC}$  بیانگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $D$  از مرکز ثقل چهارپره ( $h_{cg}$ ) است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[s_{DC}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cg} \end{bmatrix} \quad (19-3)$$

در نتیجه با جمع گشتاورهای ناشی از نیروهای آیرودینامیک پره‌ها از معادله ۱۰-۳ و گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه از معادله ۱۸-۳، گشتاور خارجی کلی اعمالی به چهارپره به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_B]^B = [m_A]^B + [m_D]^B \quad (20-3)$$

### ۳-۳ گشتوارهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها

هر یک از محورهای استند آزمایشگاهی به وسیله بیرینگ به یکدیگر متصل شده‌اند. گشتوار ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها در استند را می‌توان به صورت زیر مدل کرد [۱۲] :

$$[\mathbf{m}_f]^B = \begin{bmatrix} P_1\mu_s r_x \\ P_2\mu_s r_y \\ P_3\mu_s r_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1\mu_k r_x \\ P_2\mu_k r_y \\ P_3\mu_k r_z \end{bmatrix} \quad (21-3)$$

در رابطه ۲۱-۳،  $P$  نیروی عمودی وارد بر تکیه‌گاه هر یک از محورها،  $\mu_s$  و  $\mu_k$  به ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی بیرینگ‌ها و  $r$  شعاع هر یک از بیرینگ‌ها است.

### ۱-۳-۳ استخراج معادله نهايی ديناميک دوراني

در اين بخش، گشتاورهای خارجی چهارپره و تکانه زاویهای کلی پرها در معادله دیفرانسیل اویلر جایگذاری شده و شکل نهايی معادله دیفرانسیل استند چهارپره حاصل می‌شود. با جایگذاری مقدار گشتاورهای اعمالی به چهارپره از معادله ۱-۳ در معادله ۲۰-۳ رابطه موردنیاز برای مدل‌سازی دینامیک دورانی استند بهصورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B = & \left( [\mathbf{J}]^B \right)^{-1} \left( - [\boldsymbol{\Omega}^{BI}] \times \left( [\mathbf{J}]^B [\omega^{BI}]^B + [\mathbf{I}_R]^B \right) + \right. \\ & [\mathbf{m}_A]^B + [\mathbf{s}_{DC}]^B \left( - [\mathbf{G}]^B - [\mathbf{T}]^B + \right. \\ & \left. m_{tot} \left\{ 2 [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B + \left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B \right\} \right) \left. \right) \end{aligned} \quad (۲۲-۳)$$

در رابطه ۲۲-۳، عبارت  $\left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B$  بیانگر ماتریس پادمتریارن بردار مشتق سرعت زاویهای بدنه است. جمله آخر در معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_{tot} [\mathbf{s}_{DC}]^R \left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B [\mathbf{s}_{CD}]^R = m_{tot} [\mathbf{s}_{DC}]^R [\mathbf{s}_{DC}]^R [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \quad (۲۳-۳)$$

با جایگذاری معادله ۲۳-۳ در معادله ۲۲-۳ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B \left( I - m_{tot} \left( [\mathbf{J}]^B \right)^{-1} [\mathbf{s}_{DC}]^B [\mathbf{s}_{DC}]^B \right) = \\ \left( [\mathbf{J}]^B \right)^{-1} \left( - [\boldsymbol{\Omega}^{BI}] \times \left( [\mathbf{J}]^B [\omega^{BI}]^B + [\mathbf{I}_R]^B \right) + \right. \\ \left. [\mathbf{m}_A]^B + [\mathbf{s}_{DC}]^B \left( - [\mathbf{F}_g]^B - [\mathbf{F}_T]^B + \right. \right. \\ \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B + \left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (۲۴-۳)$$

با ساده‌سازی رابطه ۲۴-۳ بردار سرعت زاویه‌ای استند به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B &= a^{-1} b \\ a &= I - m_{tot} \left( [\mathbf{J}]^B \right)^{-1} [\mathbf{s}_{DC}]^B [\mathbf{s}_{DC}]^B \\ b &= \left( [\mathbf{J}]^B \right)^{-1} \left( - [\boldsymbol{\Omega}^{BI}] \times \left( [\mathbf{J}]^B [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B + [\mathbf{I}_R]^B \right) + \right. \\ &\quad [\mathbf{m}_A]^B + [\mathbf{s}_{DC}]^B \left( - [\mathbf{F}_g]^B - [\mathbf{F}_T]^B + \right. \\ &\quad \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B + \left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (25-۳)$$

با جایگذاری معادلات ۳-۳، ۴-۳ و ۵-۳ معادله مربوط به تکانه کلی پره‌ها، معادله ۶-۳ مربوط به برآی پره و معادله ۱۰-۳ در معادله ۲۵-۳، مؤلفه‌های بردار مشتق سرعت زاویه‌ای چهارپره به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{h_{cg} g m_{dot} \cos(\theta) \sin(\phi) + (J_{22} - J_{33} + 2m_{tot} h_{ch}^2) qr}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ &\quad + \frac{bd_{cg} (\omega_2^2 - \omega_4^2) + q J_R (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{p}{|p|} P_1 \mu r_x}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \end{aligned} \quad (26-۳)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{h_{cg} g m_{dot} \sin(\theta) \cos(\phi) + (J_{33} - J_{11} + 2m_{tot} h_{ch}^2) pr}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ &\quad + \frac{bd_{cg} (\omega_1^2 - \omega_3^2) - p J_R (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{q}{|q|} P_2 \mu r_y}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \end{aligned} \quad (27-۳)$$

$$\dot{r} = \frac{pq(J_{11} - J_{22}) + d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{r}{|r|} P_3 \mu r_z}{J_{33}} \quad (28-۳)$$

به منظور انتشار وضعیت دورانی چهارپره، از روش انتشار اویلر استفاده می‌شود. در این صورت [۱۰] :

$$\dot{\phi} = p + q \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta)$$

$$\dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin(phi)) + r \cos(phi) \sec(\theta)$$

## ۴-۳ استخراج فرم فضای حالت

به منظور استخراج فرم فضای حالت، متغیرهای حالت استند سه درجه آزادی چهارپره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (29-3)$$

معادلات ارائه شده به فرم زیر برای فضای حالت بازنویسی شدند:

$$\dot{x}_1 = x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \quad (30-3)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \quad (31-3)$$

$$\dot{x}_3 = (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \quad (32-3)$$

(33-3)

$$\dot{x}_4 = A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 (\omega_2^2 - \omega_4^2) + A_4 x_5 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 \quad (34-3)$$

$$\dot{x}_5 = B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 (\omega_1^2 - \omega_3^2) + B_4 x_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 \quad (35-3)$$

$$\dot{x}_6 = C_1 x_4 x_5 + C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \quad (36-3)$$

ثابت‌های معادلات بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_2 = \frac{2m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22} - J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_3 = \frac{bd_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_4 = \frac{J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}}$$

$$A_5 = \frac{m_1 g \mu r_x}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}}$$

$$B_1 = \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_2 = \frac{-2m_{tot} h_{cg}^2 - J_{11} + J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_3 = \frac{bd_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_4 = \frac{-J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}}$$

$$B_5 = \frac{m_2 g \mu r_y}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}}$$

$$C_1 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \quad C_2 = \frac{d}{J_{33}} \quad C_3 = \frac{m_3 g \mu r_z}{J_{33}}$$

به منظور شبیه‌سازی، پارامترهای استند به صورت جدول ۱-۳ درنظر گرفته شده است که مقدار پارامترهای استند آزمایشگاه است.

جدول ۱-۳: پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۱۳]

پارامتر	واحد	مقدار پارامتر استند چهارپره
$J_{11}$	$kg.m^2$	0.02839
$J_{22}$	$kg.m^2$	0.03066
$J_{33}$	$kg.m^2$	0.0439
$J_R$	$kg.m^2$	$4.4398 \times 10^{-5}$
$m_{tot}$	$kg$	1.074
$m_1$	$kg$	1.272
$m_2$	$kg$	1.074
$m_3$	$kg$	1.693
$d_{cg}$	$m$	0.2
$h_{eg}$	$m$	0.02
$r_x$	$m$	0.01
$r_y$	$m$	0.01
$r_z$	$m$	0.025
$b$	1	$3.13 \times 10^{-5}$
$d$	1	$3.2 \times 10^{-6}$
$\mu_s$	1	0.003
$\mu_k$	1	0.002
$g$	$m/s^2$	9.81

## ۵-۳ خطی‌سازی

با استفاده از فرم فضای حالت استخراج شده در بخش ۴-۳ در این قسمت خطی‌سازی انجام شده است. در قسمت ۱-۵-۳ به صورت چند ورودی و چند خروجی<sup>۱</sup> برای سرعت دورانی پره‌ها در RPM 2000 و حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در قسمت ۲-۵-۳ مسئله به صورت یک ورودی و یک خروجی<sup>۲</sup> حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در این قسمت برای فازهای مختلف یک سیستم تک ورودی تک خروجی در نظر گرفته شده است و برای فازهای رول، پیچ و یاو مسئله حل شده است سپس از مجموع خروجی‌های بدست‌آمده خروجی کلی یعنی سرعت دورانی پره‌ها بدست آمده است.

---

<sup>۱</sup>MIMO (Multiple Input Multiple Output)

<sup>۲</sup>SISO (Single Input Single Output )

### ۱-۵-۳ خطی‌سازی به فرم چند ورودی چند خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 (\omega_2^2 - \omega_4^2) + A_4 x_5 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 (\omega_1^2 - \omega_3^2) + B_4 x_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad p \quad q \quad r]^T \quad (36-3)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T \quad (37-3)$$

برای خطی‌سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \delta \boldsymbol{\omega} \quad (38-3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\delta \dot{x}_1 \quad \delta \dot{x}_2 \quad \delta \dot{x}_3 \quad \delta \dot{x}_4 \quad \delta \dot{x}_5 \quad \delta \dot{x}_6]^T \quad (39-3)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (40-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} x_5 \cos(x_1) \tan(x_2) - x_6 \sin(x_1) \tan(x_2) \\ -x_6 \cos(x_1) - x_5 \sin(x_1) \\ \frac{x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_1 \cos(x_1) \cos(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} \frac{x_6 \cos(x_1)}{\cos(x_2)^2} + \frac{x_5 \sin(x_1)}{\cos(x_2)^2} \\ 0 \\ \frac{\tan(x_2) (x_6 \cos(x_1) + x_5 \sin(x_1))}{\cos(x_2)} \\ -A_2 \sin(x_1) \sin(x_2) \\ B_1 \cos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_2 x_6 + B_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ C_1 x_5 \end{bmatrix} \quad (44-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_5} = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \tan(x_2) \\ \cos(x_1) \\ \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_2 x_6 + A_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ 0 \\ C_1 x_4 \end{bmatrix} \quad (45-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_6} = \begin{bmatrix} \cos(x_1) \tan(x_2) \\ -\sin(x_1) \\ \frac{\cos(x_1)}{\cos(x_2)} \\ 0 \\ B_2 x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46-3)$$

$$A = \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_4} \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_5} \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_6} \right] \quad (47-3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_4} \end{bmatrix} \quad (48-3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 x_5 & 2 A_3 \omega_2 - A_4 x_5 & A_4 x_5 & -2 A_3 \omega_4 - A_4 x_5 \\ 2 B_3 \omega_1 + B_4 x_4 & -B_4 x_4 & B_4 x_4 - 2 B_3 \omega_3 & -B_4 x_4 \\ 2 C_2 \omega_1 & -2 C_2 \omega_2 & 2 C_2 \omega_3 & -2 C_2 \omega_4 \end{bmatrix} \quad (۴۹-۳)$$

### ۲-۵-۳ خطی‌سازی به فرم یک ورودی یک خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 (\omega_2^2 - \omega_4^2) + A_4 x_5 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 (\omega_1^2 - \omega_3^2) + B_4 x_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \end{bmatrix}$$

در این قسمت برای ساده‌سازی، ورودی مسئله را از سرعت دورانی به نیروهای تاثیرگذار در مودهای رول، پیچ و یاو تغیر داده شده است. این کار باعث می‌شود که مسئله از چند ورودی و چند خروجی به سه مسئله یک ورودی و یک خروجی تبدیل شود. نیروها به فرم رابطه ۵۰-۳ تعریف می‌شوند.

$$u_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad u_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad u_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \quad (50-3)$$

با توجه به اینکه سه نیرو در نظر گرفته شده و مسئله نیاز به چهار خروجی دارد یک نیروی دیگر نیز در نظر گرفته می‌شود که به فرم رابطه ۵۱-۳ است و مقدار آن به صورت ثابت و برابر با سرعت دورانی تمام پره‌ها در دور نامی یعنی 2000 RPM در نظر گرفته شده است.

$$u_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \quad (51-3)$$

در ادامه روابط ۵۰-۳ و ۵۱-۳ را در فضای حالت سیستم جایگزین می‌کنیم و برای سادگی قسمت‌های  $(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)$  از معادلات حذف می‌کنیم.

فضای حالت جدید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 u_1 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 u_2 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 u_3 \end{bmatrix} \quad (52-3)$$

$$\mathbf{x} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad p \quad q \quad r]^T \quad (53-3)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T \quad (54-3)$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \quad (55-3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\delta \dot{x}_1 \quad \delta \dot{x}_2 \quad \delta \dot{x}_3 \quad \delta \dot{x}_4 \quad \delta \dot{x}_5 \quad \delta \dot{x}_6]^T \quad (56-3)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (57-3)$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} & \frac{\partial a_1}{\partial u_2} & \frac{\partial a_1}{\partial u_3} & \frac{\partial a_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial u_1} & \frac{\partial a_2}{\partial u_2} & \frac{\partial a_2}{\partial u_3} & \frac{\partial a_2}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial u_1} & \frac{\partial a_3}{\partial u_2} & \frac{\partial a_3}{\partial u_3} & \frac{\partial a_3}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} & \frac{\partial a_4}{\partial u_2} & \frac{\partial a_4}{\partial u_3} & \frac{\partial a_4}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_1} & \frac{\partial a_5}{\partial u_2} & \frac{\partial a_5}{\partial u_3} & \frac{\partial a_5}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_1} & \frac{\partial a_6}{\partial u_2} & \frac{\partial a_6}{\partial u_3} & \frac{\partial a_6}{\partial u_4} \end{bmatrix} \quad (58-۳)$$

روابط بالا به فرم چند سیستم یک ورودی و چند خروجی نوشته شده است. آن را به یک ورودی و یک خروجی تبدیل می‌کنیم.

### مود رول

$$A_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (59-۳)$$

$$B_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (60-۳)$$

### مود پیچ

$$A_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (61-۳)$$

$$\mathbf{B}_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (62-3)$$

مود یا و

$$\mathbf{A}_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63-3)$$

$$\mathbf{B}_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (64-3)$$

استخراج سرعت دورانی پره‌ها از نیروها

چهار معادله و چهار مجهول:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ u_2 &= \omega_1^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \\ u_4 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{aligned} \quad (65-3)$$

جواب معادلات ۶۵-۳ به فرم رابطه ۶۶-۳ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}}\end{aligned}\tag{۶۶-۳}$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{u_4 - u_3 - 2u_2}{4}}$$

## فصل ۴

### شبیه‌سازی در محیط سیمولینک

سیمولینک<sup>۱</sup> یک ابزار شبیه‌سازی همراه با نرم‌افزار متلب است. با استفاده از سیمولینک می‌توان رفتار یک سیستم را بدون نیاز به ساخت آن را تحلیل نمود. در نتیجه با استفاده از سیمولینک می‌توان علاوه بر صرفه‌جویی در هزینه و زمان به بررسی تأثیر اغتشاشات یا سایر عوامل ورودی بر عملکرد یک سیستم پرداخت. همچنین شبیه‌سازی سیستم‌ها این توانایی را در اختیار می‌گذارد تا عکس العمل یک سیستم در صورت تغییر پارامترهای ورودی آن به خوبی شناخته شود. سیمولینک به صورت یک کتابخانه در نرم‌افزار متلب<sup>۲</sup> عرضه شده است که شبیه‌سازی توسط بلوک‌های این کتابخانه به صورت دیاگرام‌های بلوکی انجام می‌شود.

---

<sup>1</sup>Simulink

<sup>2</sup>MATLAB

## ۱-۴ طراحی مبتنی بر مدل

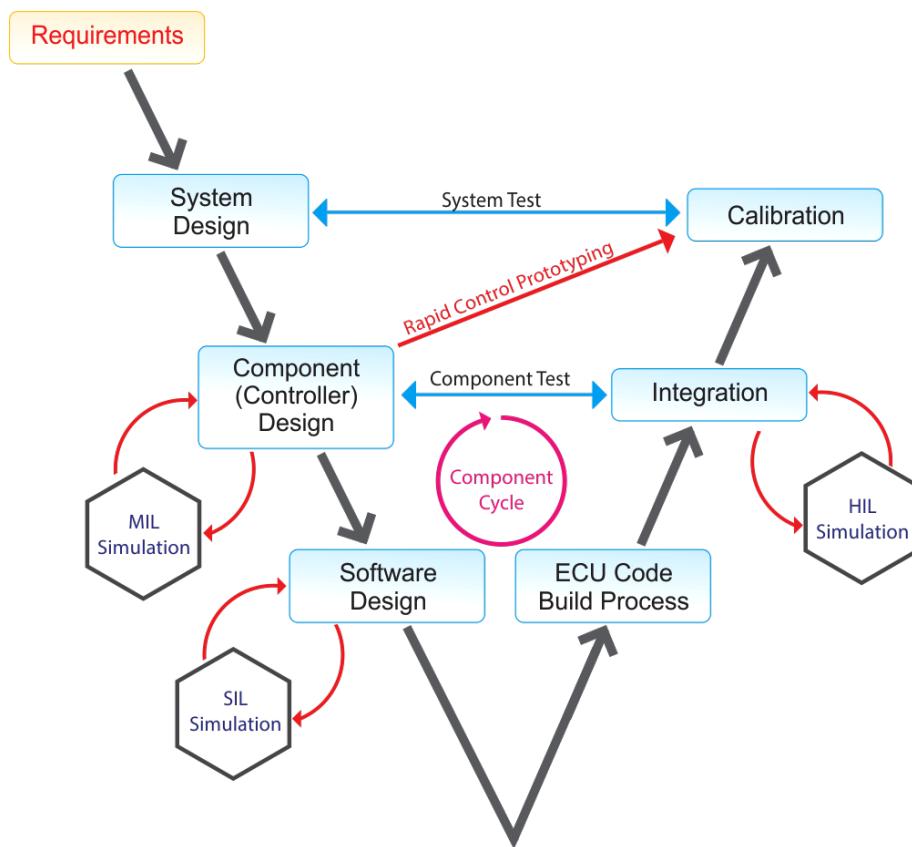
مراحل طراحی و پیاده‌سازی براساس دیاگرام ۷ (۱-۴) طی می‌شود. با توجه به این دیاگرام، ابتدا سامانه دینامیکی در محیط نرم‌افزاری مدل‌سازی و کنترل‌کننده طراحی می‌شود. سپس، عملکرد کنترل‌کننده با استفاده از شبیه‌سازی نرم‌افزاری<sup>۳</sup> بررسی شده و اشکالات اولیه موجود برطرف می‌شود. در گام بعد، به منظور بررسی اثر نامعینی‌ها، ساده‌سازی‌ها و اشتباهات مدل‌سازی بر عملکرد کنترل‌کننده، شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه پلت<sup>۴</sup> انجام می‌شود. پس از تایید عملکرد کنترل‌کننده به صورت نرم‌افزاری، کد آن به کمک ابزار تولید خودکار کد نرم‌افزار سیمولینک تولید و روی آردوینو<sup>۵</sup> پیاده‌سازی می‌شود. در این حالت، سخت‌افزار کنترل‌کننده (برد آردوینو) مدل در حلقه شبیه‌سازی قرار می‌گیرد. در مرحله نهایی، برد آردوینو به پلت حقيقی (استند سه درجه آزادی) وصل شده، به صورت زمان‌حقيقی<sup>۶</sup> خروجی حسگر را دریافت و فرمان کنترلی را به پلت اعمال می‌کند.

<sup>3</sup>MIL (Model In the Loop)

<sup>4</sup>RCP (Rapid Control Prototyping)

<sup>5</sup>Arduino

<sup>6</sup>Real-Time



شکل ۴-۱: دیاگرام V [۱۴]

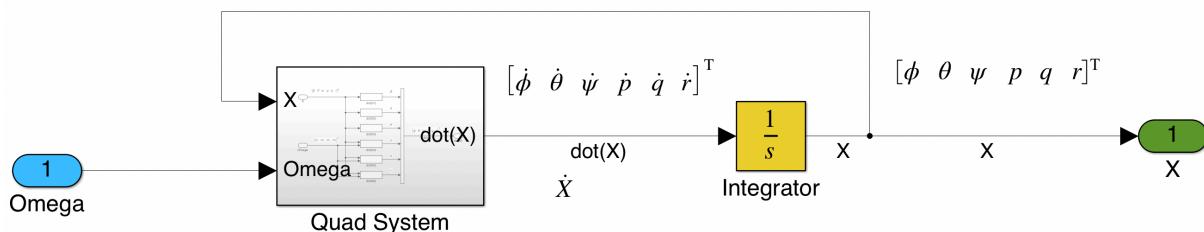
## ۲-۴ شبیه‌سازی استند سه درجه آزادی در محیط سیمولینک

این بخش به بررسی و شبیه‌سازی مدل دینامیکی استند سه درجه آزادی پرداخته شده است. در بخش (۴-۳) فرم فضای حالت استند چهار پره استخراج شد. در شبیه‌سازی نیز از همین روابط استخراج شده استفاده شده است. مدل شبیه‌سازی شده از استند (شکل ۲-۴) دارای چهار ورودی سرعت دورانی موتورها و دارای سه خروجی زوایای رول ( $\phi$ ), پیچ ( $\theta$ ), یاو ( $\psi$ ) و سه سرعت‌های زاویه‌ای  $p$ ,  $q$  و  $r$  است.



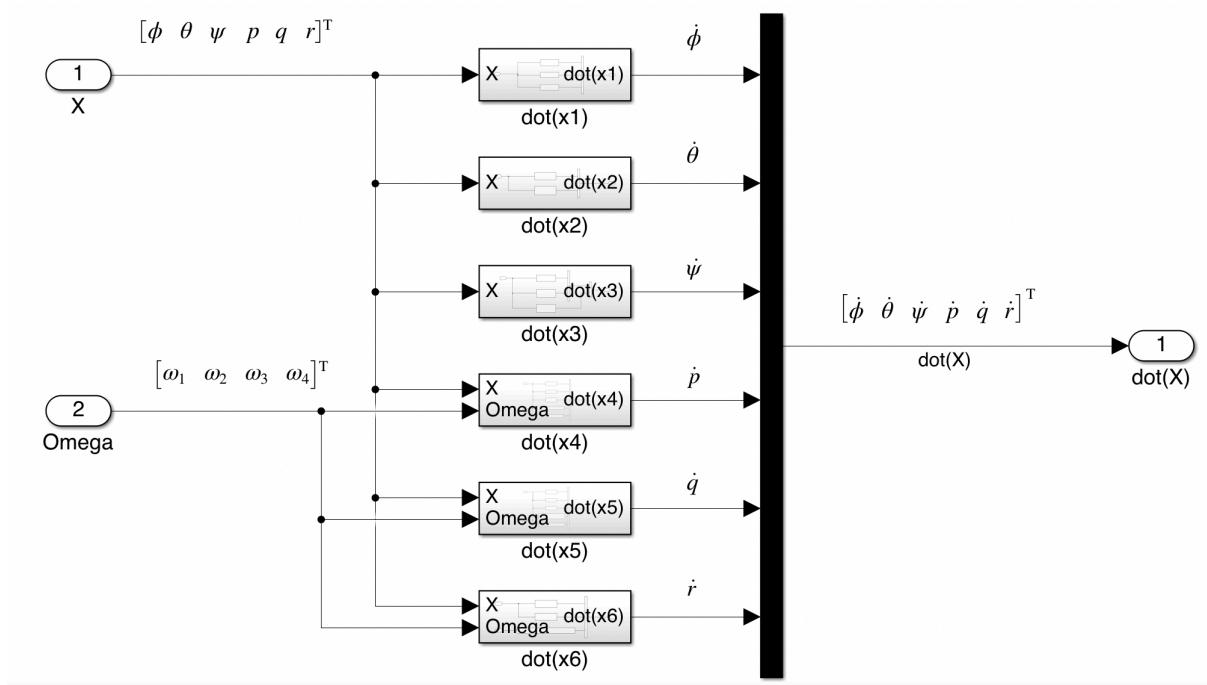
شکل ۲-۴: مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل

نمایی از داخل بلوک Quacopter 3DOF Nonlinear System در شکل (۳-۴) آورده شده است.



شکل ۳-۴: مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل بلوک Quad System،  $\dot{X}$  را به عنوان خروجی می‌دهد. با استفاده از بلوک انتگرالگیر (بلوک زرد رنگ) در شکل (۳-۴) از خروجی آن بر اساس شرایط اولیه استند انتگرال گرفته می‌شود و خروجی مورد نیاز (زاویه‌های رول ( $\phi$ ), پیچ ( $\theta$ ), یاو ( $\psi$ ) و سرعت‌های زاویه‌ای  $p$ ,  $q$  و  $r$ ) را می‌دهد.

داخل بلوک Quad System، شش بلوک دارد که بعضی از آن‌های دارای ورودی  $X$  و  $\omega$  هستند. مجموع خروجی این شش بلوک  $\dot{X}$  است که برای بلوک Quad System، نیز اشاره شد. نمایی از داخل بلوک Quad System در شکل (۴-۴) آورده شده است.



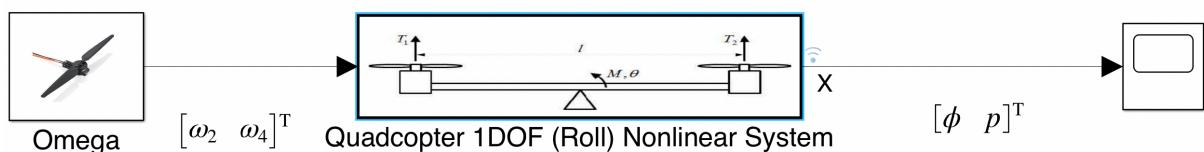
شکل ۴-۴: نمایی از داخل بلوک Quad System

## ۳-۴ شبیه‌سازی کانال‌های مختلف استند سه درجه آزادی در محیط سیمولینک

در بخش (۲-۴) به شبیه‌سازی سه درجه آزادی استند چهارپره پرداخته شد. در این بخش به شبیه‌سازی کانال‌های رول، پیج، یاو و رول-پیج پرداخته می‌شود. برای شبیه‌سازی یک کانال فرض شده است سایر کانال‌ها بسته شده‌اند و هیچگونه حرکتی در این کانال‌ها وجود ندارد.

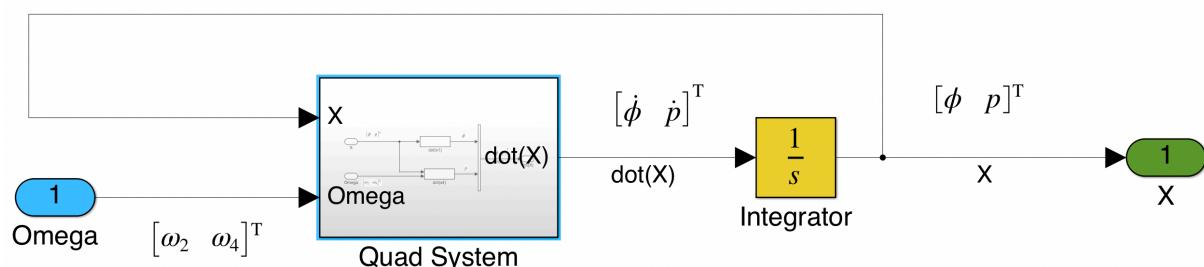
### ۱-۳-۴ شبیه‌سازی کانال رول در محیط سیمولینک

در بخش (۲-۵-۳) فرم فضایی حالت کانال‌های مختلف استند چهارپره بدست آمد در این بخش فرم فضایی حالت کانال رول در سیمولینک شبیه‌سازی می‌شود. مدل شبیه‌سازی شده از استند (شکل ۵-۴) دارای دو ورودی سرعت دورانی موتورهای دو و چهار و دارای یک خروجی زاویه‌ی رول ( $\phi$ ) و سرعت زاویه‌ای  $p$  است.



شکل ۵-۴: مدل کانال رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها

نمایی از داخل بلوک Quacopter 1DOF (Roll) Nonlinear System در شکل (۶-۴) آورده شده است.

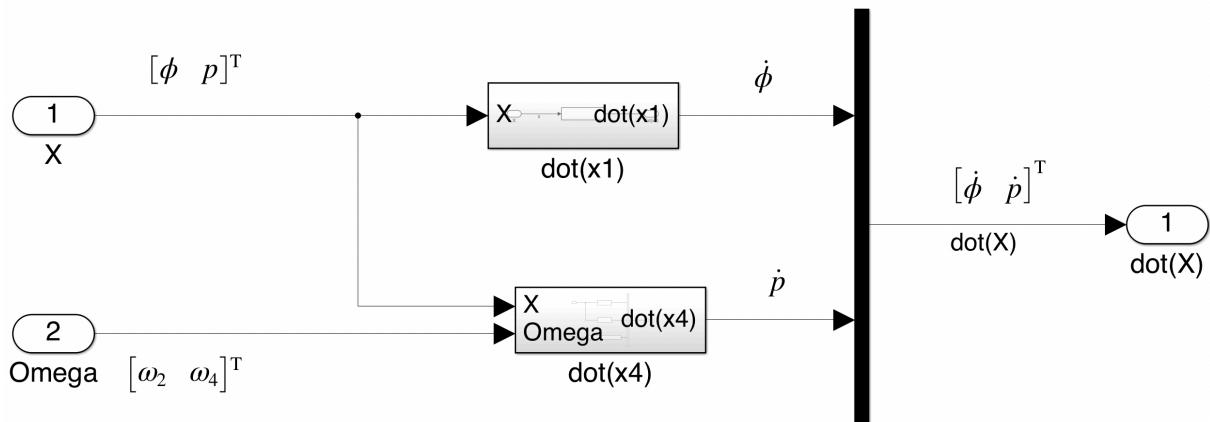


شکل ۶-۴: مدل کانال رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها

بلوک Quad System،  $\dot{X}$  را به عنوان خروجی می‌دهد. با استفاده از بلوک انتگرالگیر (بلوک زرد رنگ) در شکل (۶-۴) از خروجی آن بر اساس شرایط اولیه استند انتگرال گرفته می‌شود و خروجی مورد نیاز (زاویه

رول ( $\phi$ ) و سرعت زاویه‌ای ( $p$ ) را می‌دهد.

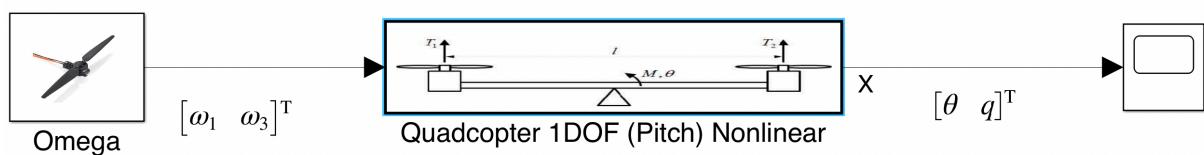
داخل بلوك Quad System، دو بلوك دارد که یکی از آن‌ها دارای ورودی  $X$  و دیگری دارای ورودی  $\omega$  هستند. مجموع خروجی این دو بلوك  $\dot{X}$  است که برای بلوك Quad System، نیز اشاره شد. نمایی از داخل بلوك Quad System در شکل (۷-۴) آورده شده است.



شکل ۷-۴: نمایی از داخل بلوك Quad System

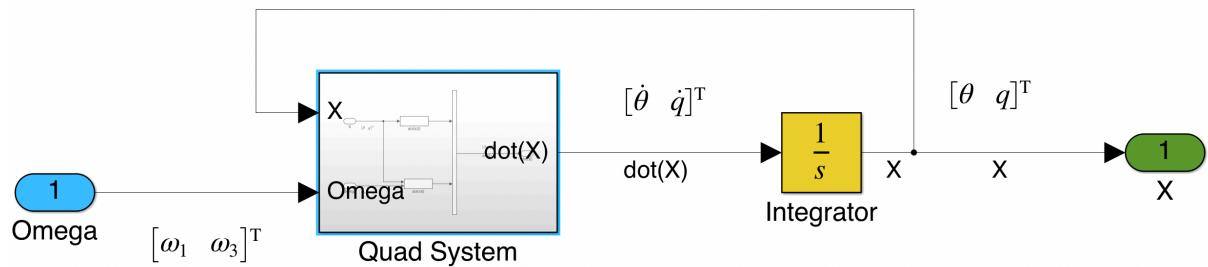
#### ۲-۳-۴ شبیه سازی کانال پیچ در محیط سیمولینک

در بخش (۲-۵-۳) فرم فضای حالت کانال‌های مختلف استند چهار پره بدست آمد در این بخش فرم فضای حالت کانال پیچ در سیمولینک شبیه‌سازی می‌شود. مدل شبیه‌سازی شده از استند (شکل ۸-۴) دارای دو ورودی سرعت دورانی موتورهای یک و سه و دارای یک خروجی زاویه‌ی پیچ ( $\theta$ ) و سرعت زاویه‌ای  $q$  است.



شکل ۸-۴: مدل کانال رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها

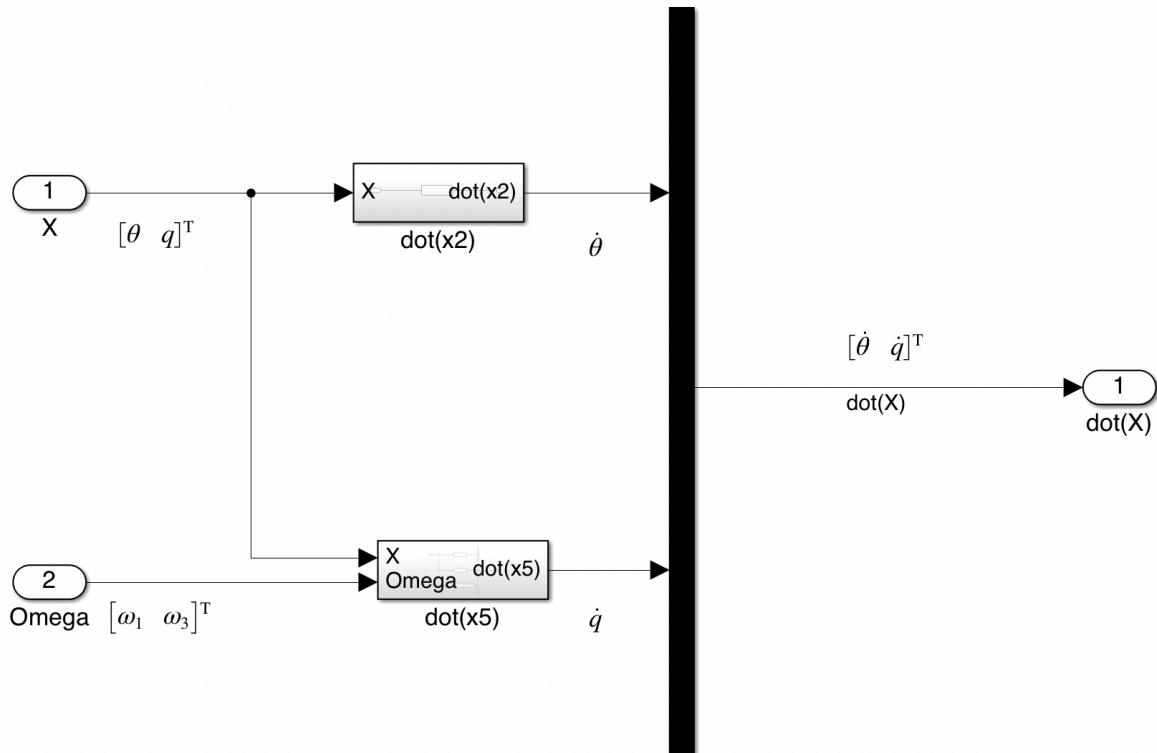
نمایی از داخل بلوك Quacopter 1DOF (Pitch) Nonlinear System در شکل (۹-۴) آورده شده است.



شکل ۹-۴: مدل کاتال رول استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها

بلوک Quad System،  $\dot{X}$  را به عنوان خروجی می‌دهد. با استفاده از بلوک انتگرالگیر (بلوک زرد رنگ) در شکل (۹-۴) از خروجی آن بر اساس شرایط اولیه استند انتگرال گرفته می‌شود و خروجی مورد نیاز (زاویه پیچ ( $\theta$ ) و سرعت زاویه‌ای ( $q$ ) را می‌دهد.

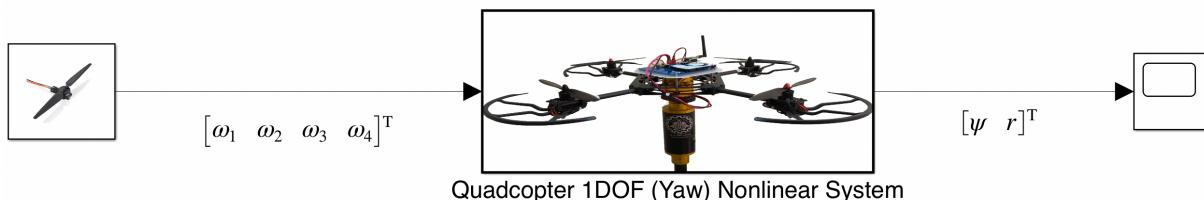
داخل بلوک Quad System، دو بلوک دارد که یکی از آن‌های دارای ورودی  $X$  و دیگری دارای ورودی  $\omega$  هستند. مجموع خروجی این دو بلوک  $\dot{X}$  است که برای بلوک Quad System، نیز اشاره شد. نمایی از داخل بلوک Quad System در شکل (۱۰-۴) آورده شده است.



شکل ۱۰-۴: نمایی از داخل بلوک Quad System

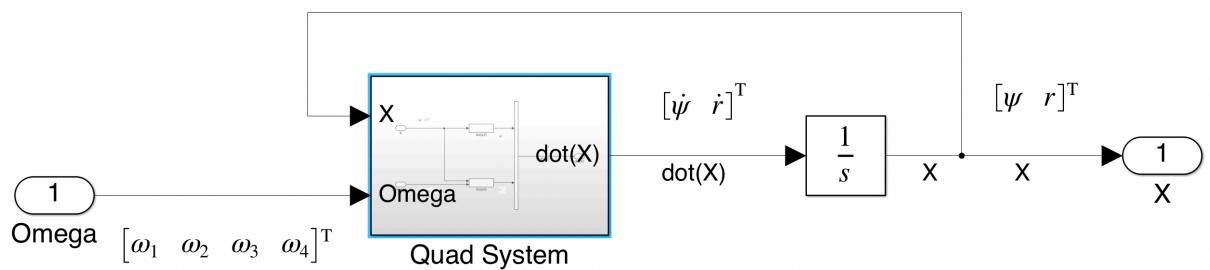
### ۳-۳-۴ شبیه سازی کanal یاو در محیط سیمولینک

در بخش (۲-۵-۳) فرم فضای حالت کانال های مختلف استند چهار پره بدست آمد در این بخش فرم فضای حالت کانال رول در سیمولینک شبیه سازی می شود. مدل شبیه سازی شده از استند (شکل ۱۱-۴) دارای چهار ورودی سرعت دورانی موتورها و دارای یک خروجی زاویه رول ( $\psi$ ) و سرعت زاویه ای  $r$  است.



شکل ۱۱-۴: مدل کانال رول استند چهارپره شبیه سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی ها

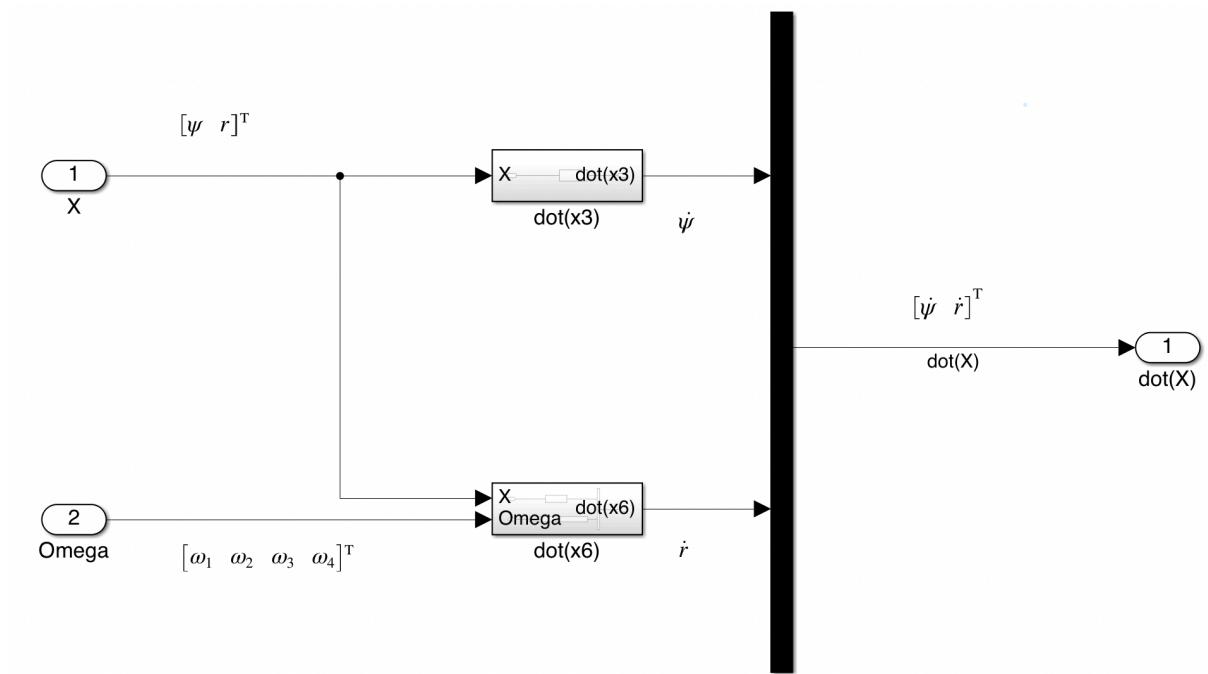
نمایی از داخل بلوک Quacopter 1DOF (Yaw) Nonlinear System در شکل (۱۲-۴) آورده شده است.



شکل ۱۲-۴: مدل کانال یاو استند چهارپره شبیه سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی ها

بلوک Quad System،  $\dot{X}$  را به عنوان خروجی می دهد. با استفاده از بلوک انتگرالگیر (بلوک زرد رنگ) در شکل (؟؟) از خروجی آن بر اساس شرایط اولیه استند انتگرال گرفته می شود و خروجی مورد نیاز (زاویه های یاو ( $\psi$ ) و سرعت زاویه ای  $r$ ) را می دهد.

داخل بلوک Quad System، دو بلوک دارد که یکی از آن های دارای ورودی  $X$  و دیگری دارای ورودی  $X$  و  $\omega$  هستند. مجموع خروجی این دو بلوک  $\dot{X}$  است که برای بلوک Quad System، نیز اشاره شد. نمایی از داخل بلوک Quad System در شکل (۱۳-۴) آورده شده است.



شکل ۱۳-۴: نمایی از داخل بلوک Quad System

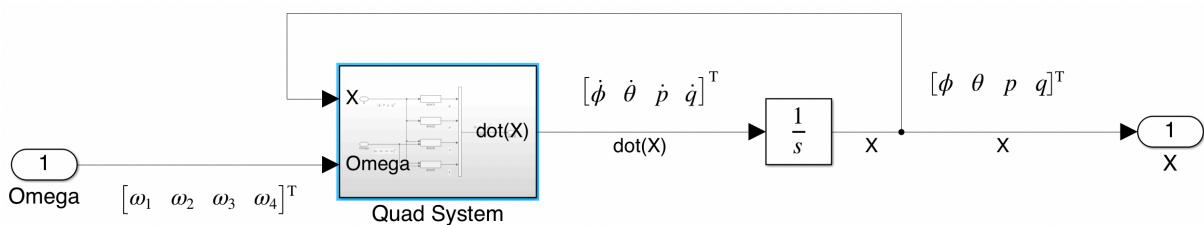
#### ۴-۳-۴ شبیه سازی کanal رول-پیچ در محیط سیمولینک

در بخش (۲-۵-۳) فرم فضایی حالت کانال های مختلف استند چهار پره بدست آمد در این بخش فرم فضایی حالت کانال رول در سیمولینک شبیه سازی می شود. فرم فضایی حالت استند چهار پره استخراج شد. در شبیه سازی نیز از همین روابط استخراج شده استفاده شده است. مدل شبیه سازی شده از استند (شکل ۱۴-۴) دارای چهار ورودی سرعت دورانی موتورها و دارای دو خروجی زوایای رول ( $\phi$ ) و پیچ ( $\theta$ ) دو سرعت های زاویه ای  $p$  و  $q$  است.



شکل ۱۴-۴: مدل کانال رول-پیچ استند چهارپره شبیه سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی ها

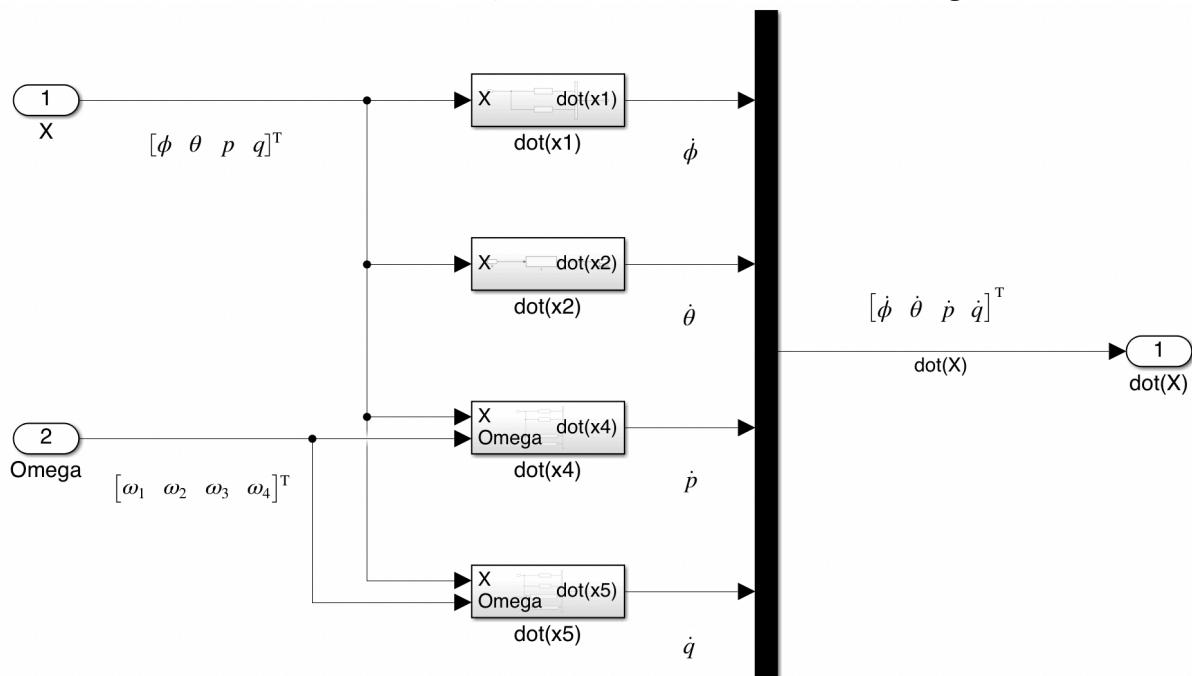
نمایی از داخل بلوک Quacopter 3DOF Nonlinear System در شکل (۱۵-۴) آورده شده است.



شکل ۱۵-۴: مدل کanal رول-پیچ استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌ها

بلوک Quad System،  $\dot{X}$  را به عنوان خروجی می‌دهد. با استفاده از بلوک انتگرال‌گیر (بلوک زرد رنگ) در شکل (۱۵-۴) از خروجی آن بر اساس شرایط اولیه استند انتگرال گرفته می‌شود و خروجی مورد نیاز (زاویه‌های رول ( $\phi$ ) و پیچ ( $\theta$ ) و سرعت‌های زاویه‌ای  $p$  و  $q$ ) را می‌دهد.

داخل بلوک Quad System، چهار بلوک دارد که بعضی از آن‌های دارای ورودی  $X$  و بعضی از آن‌های دارای ورودی  $X$  و  $\omega$  هستند. مجموع خروجی این شش بلوک  $\dot{X}$  است که برای بلوک Quad System نیز اشاره شد. نمایی از داخل بلوک Quad System در شکل (۱۶-۴) آورده شده است.



شکل ۱۶-۴: نمایی از داخل بلوک Quad System

## ۴-۴ اصلاح پارامترهای استند چهارپره در شبیه‌سازی حلقه باز

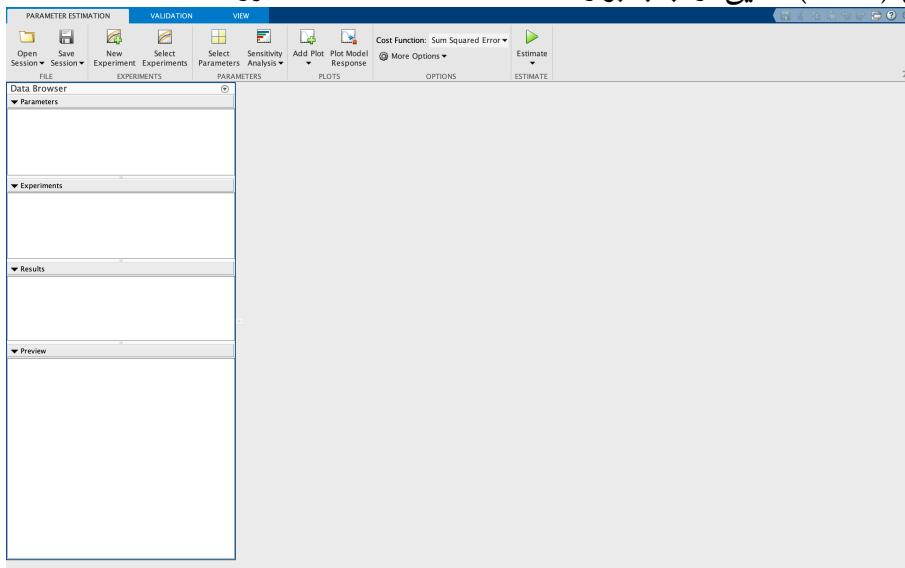
در بخش (۴-۳) فرم فضای حالت استند چهارپره استخراج شد. در بخش (۲-۴) شبیه‌سازی استند چهارپره انجام شد و در بخش (۳-۴) کانال‌های مختلف استند سه درجه آزادی چهارپره شبیه‌سازی شد. در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی‌های چهارپره در محیط سیمولینک و داده‌های خروجی از استند چهارپره، پارامترهای استند چهارپره اصلاح می‌شوند.

برای اصلاح پارامترهای استند چهارپره از جعبه‌ابزار Parameter Estimator موجود در سیمولینک استفاده شده است. این جعبه ابزار با استفاده از داده‌های خروجی در واقعیت و داده‌های خروجی در سیمولینک اقدام به اصلاح پارامتر می‌کند، به صورتی که خروجی شبیه‌سازی و خروجی داده از پلت واقعی تا حد ممکن به هم نزدیک شودند.



شکل ۱۷-۴: نماد جعبه‌ابزار Parameter Estimator در سیمولینک

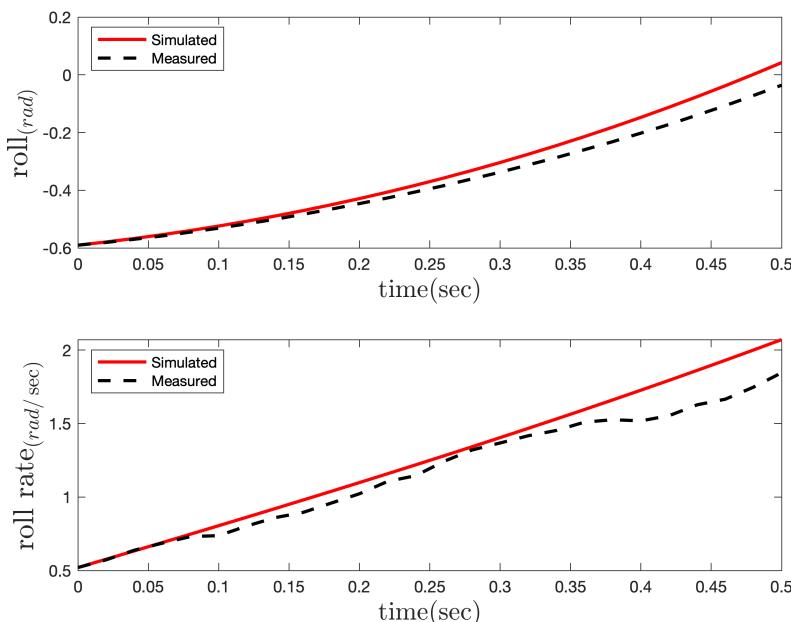
در شکل (۱۸-۴) نمایی از جعبه‌ابزار Parameter Estimator اورده شد است.



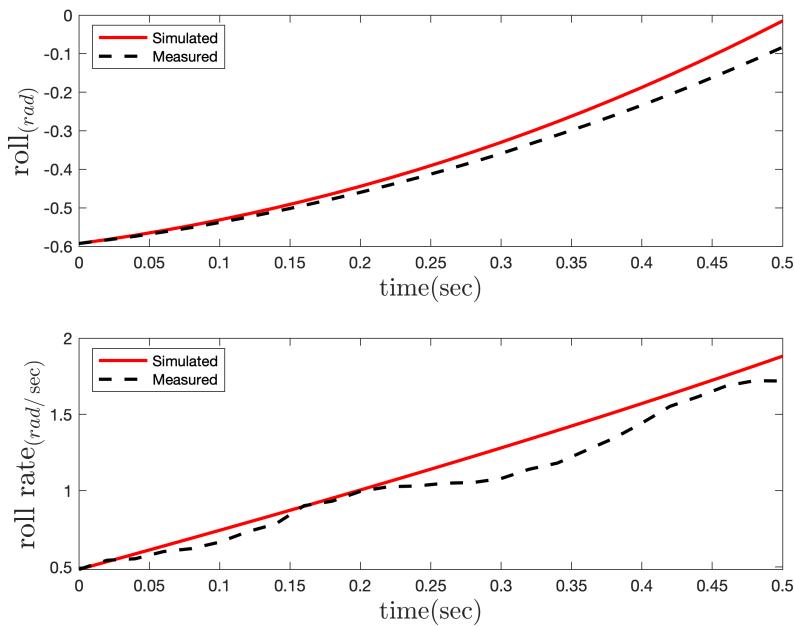
شکل ۱۸-۴: جعبه‌ابزار Parameter Estimator

### ۱-۴-۴ تخمین پارامتر کانال رول

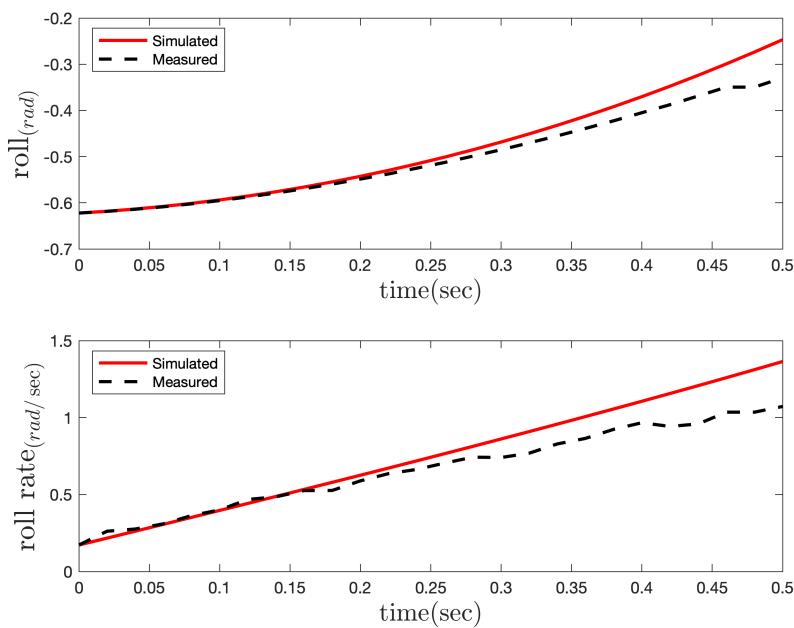
برای اصلاح پارامترها رول چندین آزمایش انجام شد و با استفاده از خروجی آزمایش و جعبه‌ابزار Parameter Estimator پارامترها اصلاح شدند. برای آزمایش رول هر یک از موتورها با دور مختلف شروع به حرکت کردند و خروجی سنسور داده برداری شد. سپس، مدل و پارامترهای داده برداری شده به جعبه‌ابزار Parameter Estimator داده شد. نتایج آزمایش‌های کانال رول بعد از اصلاح پارامترها در شکل‌های (۱) آورده شده است.



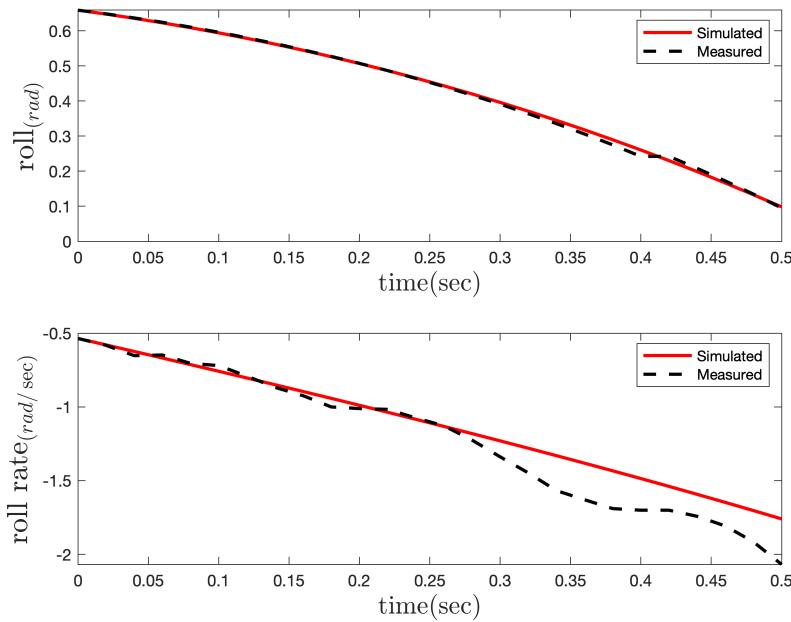
شکل ۱۹-۴: مقایسه خروجی‌های آزمایش اول و خروجی مدل‌سازی پس از تخمین پارامترها



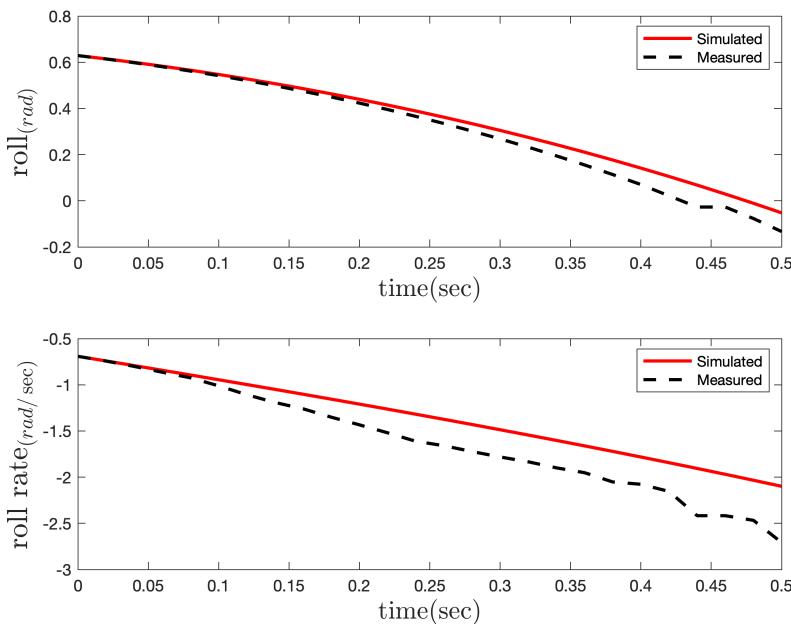
شکل ۲۰-۴: مقایسه خروجیهای آزمایش دوم و خروجی مدلسازی پس از تخمین پارامترها



شکل ۲۱-۴: مقایسه خروجیهای آزمایش سوم و خروجی مدلسازی پس از تخمین پارامترها



شکل ۲۲-۴: مقایسه خروجیهای آزمایش چهارم و خروجی مدلسازی پس از تخمین پارامترها



شکل ۲۳-۴: مقایسه خروجیهای آزمایش پنجم و خروجی مدلسازی پس از تخمین پارامترها

# مراجع

- [1] L. Sprekelmeyer. *These We Honor: The International Aerospace Hall of Fame*. 2006.
- [2] M. J. Hirschberg. A perspective on the first century of vertical flight. *SAE Transactions*, 108:1113–1136, 1999.
- [3] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on  $\text{se}(3)$ . In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.
- [4] <http://gcrc.sharif.edu>. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed November 2, 2021], Available at <https://cutt.ly/yYMvhYv>.
- [5] dreamstime. boeing ch chinook, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://cutt.ly/onRvD7x>.
- [6] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/>.
- [7] nobelprize.org. Jean tirole, 2021. [Online; accessed October 17, 2021], Available at <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2014/tirole/facts/>.
- [8] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.
- [9] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent backstepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.

- [10] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [11] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.
- [12] M. A. A. Bishe. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using a heuristic nonlinear controller. January 2018.
- [13] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.
- [14] Model-based design, 2021. [Online; accessed December 16, 2021], Available at <https://www.pngegg.com/en/png-xdlhx>.



Sharif University of Technology  
Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

## **LQDG Controller for 3DOF Quadcopter Stand**

By:

**Ali BaniAsad**

Supervisor:

**Dr. Nobahari**

August 2021