دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی
مهندسی کنترل

عنوان:

کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهریور ۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی[1] استتفاده شده‌است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده‌است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده‌است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعال نش[2] که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش خارجی و نویز سنسور مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی نیز از مقاومت مناسبی برخوردار است. از روش ارائه‌شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده‌است. عملکرد این روش با اجرای شبیه‌سازی‌های مختلف مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. همچنین، عملکرد آن در حضور نویز و اغتشاش و عدم قطعیت مدل از طریق شبیه‌سازی ارزیابی خواهدشد.

کلیدواژه‌ها: چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، شبیه‌سازی، تابع هزینه

---
[1] Game Theory
[2] Nash Equilibrium

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر[۱] یکی از انواع وسایل پرنده است. چهارپره‌ها نوعی هواگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپره‌ها جای دارند. چهارپره‌ها به‌دلیل داشتن توانایی مانور خوب و امکان پرواز ایستا با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده‌ای برخوردارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده‌است و لذا روزانه پیشرفت چشمگیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویربرداری، تفریحی و کشاورزی از کاربرد زیاد و روزافزونی برخوردارند و مدل‌های دارای سرنشین آن نیز تولید شده.

۱-۱ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندپره در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Jacques و Louis Breguet انجام شد. پرنده آن‌ها موفق به پرواز به‌صورت عمودی شد؛ ولی پرنده تا ارتفاع دو فوت بیشتر پرواز نکرد. پرواز انجام شده یک پرواز آزاد[۲] نبود و پرنده به کمک چهار مرد ثابت نگه داشته شده بود [۶]. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمی‌گردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی به نام Étienne Oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع کرد و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد. در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد [۷].

[1] Quadcopter
[2] Free Flight

در سال ۱۹۲۲ در آمریکا George de Bothezata موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود.

در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده‌است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده است و به تدریج رواج یافته‌است [۸].

از حدود سال ۲۰۰۶ کواد کوپترها شروع به رشد صنعتی به‌صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

۱-۲ تعریف مسئله

مسئله‌ای که در این پروژه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مربعی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده است. در این صورت، تنها وضعیت (زوایای رول[۳]، پیچ[۴] و یاو[۵]) چهارپره تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین می‌توان با مقید کردن چرخش حول هر محور ، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به‌صورت مجزا و یا با یکدیگر بررسی کرد. استند آزمایشگاهی سه درجه آزادی چهارپره در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.

شکل ۱-۱: استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه [۱]

[3] Roll
[4] Pitch
[5] Yaw

با توجه به شکل مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان آن را به‌صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین سیستم بدون حضور کنترل کننده ناپایدار است. این سیستم دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زاویه‌ای اویلر (ψ, θ, ϕ) است. در مدل سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد، اما با توجه به کنترل کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به‌صورت اغتشاش در نظر گرفت و سیستم را به خوبی کنترل کرد. در پایان این کنترل کننده با کنترل کننده تناسبی–انتگرالی–مشتقی[۶] و کنترل کننده رگلاتور مربعی خطی[۷] مقایسه خواهد شد.

۱-۲-۱ ساختار بالگرد

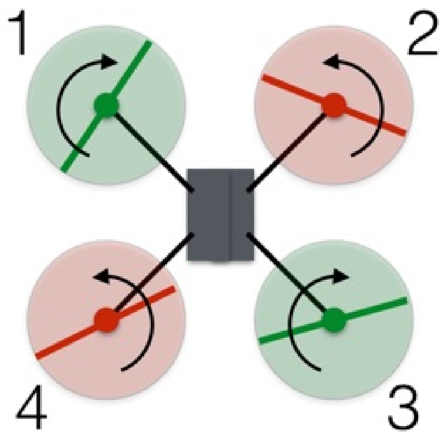
چهارپره‌ها همانند انواع دیگر وسایل پرنده از ایجاد اختلاف فشار در اتمسفر پیرامون خود برای بلند شدن و حرکت در هوا استفاده می‌کنند. همان‌طور که بالگردها به کمک پره اصلی این اختلاف فشار را ایجاد می‌کنند و نیروی برآی[۸] خود را تأمین می‌کنند. به‌دلیل وجود نیروی عمل و عکس‌العمل در بالگردها، پس از اینکه پره اصلی شروع به چرخش می‌کند با برخورد مولکول‌های هوا به این پره و وجود عکس‌العمل، یک نیرویی با جهت مخالف جهت چرخش پره به پره و در ادامه به شفت متصل به پره اعمال می‌شود (نیروی گشتاور) و این نیرو باعث چرخش بالگرد به دور خود می‌شود. حال برای حل این مشکل از پره دم بالگرد استفاده می‌شود تا نیرویی را تولید کند که مانع چرخش بالگرد به دور خود شود. حال اگر بالگرد به جای داشتن یک پره اصلی از دو پره اصلی که خلاف جهت یکدیگر بچرخند استفاده می‌نمود، به‌دلیل خنثی شدن دو نیروی گشتاور توسط یکدیگر، دیگر بالگرد به دور خود نمی‌چرخید. مانند بالگردهای شینوک[۹] که نمایی از آن در شکل ۱-۲ آورده شده‌است. حال با توجه به توضیحات داده شده راحت‌تر می‌توان به ساختار چهارپره‌ها اشاره نمود.

[6] PID (Proportional–Integral–Derivative)
[7] LQR (Linear Quadratic Regulator)
[8] Thrust
[9] Boeing CH-47 Chinook

شکل ۱-۲: بالگرد شینوک [۲]

۱-۲-۲ ساختار چهارپره

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها نیروی گشتاورهای ایجاد شده را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.



شکل ۱-۳: جهت چرخش پره‌های چهارپره [۳]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش همه موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیاد تر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به‌صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و نیروی گشتاور به یک سمت ایجاد می‌شود و نیروی برآ همانند قبل است (زیرا دو پره با سرعت کمتر و دو پره دیگر به همان نسبت با سرعت بیشتر می‌چرخند) لذا چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. برای حرکت چهارپره‌ها در جهت‌های مختلف (عقب، جلو، چپ و راست) توسط کم و زیاد کردن سرعت موتورها چهارپره را از حالت افقی خارج کرده و باعث حرکت آن می‌شوند.

۱-۳ نظریه بازی

نظریه بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. نظریه بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه بازی در تلاش است تا به وسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایط راهبردی یا در یک بازی که در آن موفقیت فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی

در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراه جان هارسانی و راینهارد سیلتن به خاطر مطالعات خلاقانه‌ی خود در زمینه‌ی نظریه بازی، برنده‌ی جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برندگان جایزه‌ی نوبل اقتصاد از میان متخصصین نظریه بازی انتخاب شدند. آخرین آن‌ها، ژان تیرول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد [۹].

۱-۳-۲ تعادل نش

پژوهش‌ها در این زمینه اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به عنوان تعادل در بازی‌ها استوار است. این راهبردها به‌طور معمول از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش است. در نظریه بازی، تعادل نش (به نام جان فوربز نش، که آن را پیشنهاد کرد) راه حلی از نظریه بازی است

که شامل دو یا چند بازیکن است، که در آن فرض بر آگاهی هر بازیکن به راهبرد تعادل دیگر بازیکنان است. بر اساس نظریه‌ی تعادل نش، اگر فرض کنیم در هر بازی با استراتژی مختلط، بازیکنان به طریق منطقی و معقول راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حد اکثر سود در بازی هستند، دست کم یک راهبرد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن قابل انتخاب است و چنانچه بازیکن راهکار دیگری به غیر از آن را انتخاب کند، نتیجه‌ی بهتری به دست نخواهد آورد.

فصل ۲

بازی دیفرانسیلی

در این قسمت به خلاصه‌ای از بازی دیفرانسیلی پرداخته شده است. تمامی توضیحات و روابط از منبع [۱۰] آورده شده است. در این فصل حالت حلقه‌باز[۱] و حالت همراه با بازخورد[۲] بررسی می‌شود. این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن به فرم مربعی است. هدف اصلی کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه به فرم رابطه (۲-۱) نوشته می‌شود.

(۲-۱)

$$J_i(u_1,u_2) = \int_0^T \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u_i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{u_i}(t) + \boldsymbol{u_j}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_{ij}}\boldsymbol{u_j}(t)\right) dt + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{H_i}\boldsymbol{x}(T)$$

در اینجا ماتریس‌های $\boldsymbol{Q_i}$ ، $\boldsymbol{R_{ii}}$ و $\boldsymbol{H}$ متقارن فرض شده‌اند و ماتریس $\boldsymbol{R_{ii}}$ به صورت مثبت معین $(\boldsymbol{R_{ii}} > 0)$ فرض شده است. دینامیک سیستم تحت تاثیر هر دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا دینامیک سیستم به فرم رابطه (۲-۲) در نظر گرفته شده است.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{u_2}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{۲-۲}$$

در رابطه (۲-۲)، $\boldsymbol{u_1}$ برابر با تلاش کنترلی بهینه بازیکن اول است. در اینجا ممکن است تلاش کنترلی بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. این پروژه حالت همکاری دو بازیکن را بررسی نمی‌کند و دو بازیکن در تلاش برای کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

[1] Opne Loop
[2] Feedback

۲-۱ بازی حلقه‌باز

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان $t \in [0, T]$ فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سیستم را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان هماهنگی بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش در ادامه تعریف شده است.

قضیه‌ی ۲-۱ به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول $(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$ یک **تعادل نش** برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات قابل قبول $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2})$ از نامساوی (۲-۳) پیروی کنند.

$$J_1(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_1(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}^*) \text{ and } J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}) \qquad (۲\text{-}۳)$$

در اینجا قابل قبول بودن به‌معنی آن است که $\boldsymbol{u_i}(.)$ به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه‌ی حرکات که بستگی به اطلاعات بازیکنان از بازی دارد، مجموعه‌ای از راهبردهایی است که بازیکنان ترجیح می‌دهند برای کنترل سیستم انجام دهند و سیستم (۲-۲) باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد. به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات $(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$ یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه $J_i, \ (i = 1, 2)$ است.

برای سادگی از نمادسازی $\boldsymbol{S_i} := \boldsymbol{B_i}\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_i}^{\mathrm{T}}$ استفاده شده‌است. در اینجا فرض شده است که زمان T محدود است.

قضیه‌ی ۲-۲ ماتریس $\boldsymbol{M}$ را در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{S_1} & -\boldsymbol{S_2} \\ -\boldsymbol{Q_1} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{Q_2} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۴)$$

فرض شده است که دو معادله دیفرانسیلی ریکاتی (۲-۵)، در بازه $[0, T]$ جواب متقارن دارند.

$$\dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{i}}(t) = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_i}(t) - \boldsymbol{K_i}(t)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{K_i}(t)\boldsymbol{S_i}\boldsymbol{K_i}(t) - \boldsymbol{Q_i}, \quad \boldsymbol{K_i}(T) = \boldsymbol{H}, \quad i = 1, 2 \qquad (۲\text{-}۵)$$

پس بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم دو نفره[3] تعادل نش حلقه‌باز در هر شرایط اولیه $\boldsymbol{X_0}$ دارد اگر ماتریس

$$\boldsymbol{H}(T) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-\boldsymbol{M}T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{H_1} \\ \boldsymbol{H_2} \end{bmatrix} \tag{۲-۶}$$

قابلیت معکوس شدن را داشته باشد.

در معادلات بالا تلاش کنترلی برای هر بازیکن به فرم رابطه ۲-۷ تعریف شده است.

$$\boldsymbol{u_1}(t) = -\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{B_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t) \tag{۲-۷}$$

در آخر با استفاده از قضیه ۲-۲ با حل دو معادله کوپل ریکاتی دیفرانسیلی می‌توان به جواب رسید.

$$\dot{\boldsymbol{K}}_1 = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_1} - \boldsymbol{K_1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_1} + \boldsymbol{K_1}\boldsymbol{S_1}\boldsymbol{K_1} + \boldsymbol{K_1}\boldsymbol{S_2}\boldsymbol{K_2}; \quad \boldsymbol{K_1}(T) = \boldsymbol{H_1} \tag{۲-۸}$$

$$\dot{\boldsymbol{K}}_2 = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_2} - \boldsymbol{K_2}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_2} + \boldsymbol{K_2}\boldsymbol{S_2}\boldsymbol{K_2} + \boldsymbol{K_2}\boldsymbol{S_1}\boldsymbol{K_1}; \quad \boldsymbol{K_2}(T) = \boldsymbol{H_2} \tag{۲-۹}$$

[3]the two player linear quadratic differential game

۲-۲ بازی همراه با بازخورد

تفاوت بازی همراه با بازخورد[۴] با بازی حلقه‌باز در این است که بازیکنان در هر لحظه از بازی بازخورد می‌گیرند و متناسب با بازخورد رفتار می‌کنند. این بازخورد ممکن است باعث شود یک بازیکن انگیزه پیدا کند که از بازی انحراف پیدا کند در حالی که این اتفاق در بازی حلقه‌باز رخ نمی‌دهد. این اتفاق منجر به یک راه حل تعادلی دیگر می‌شود. از طرف دیگر راه حل تعادلی نباید در طول بازی خودش را با بازکنان سازگار کند.

با توجه به اینکه سیستم خطی است، می‌توان استدلال کرد که حرکات تعادل به صورت تابعی خطی از وضعیت سیستم است. این بدین مفهوم است که تعادل نش باید در فضای ذکر شده باشد. فضای راهبردی به فرم رابطه ۲-۱۰

$$\boldsymbol{\Gamma_i^{lfb}} :\ = \{\boldsymbol{u_i}(0,T)|\boldsymbol{u_i}(t) = \boldsymbol{F_i}(t)\boldsymbol{x}(t),\ i = 1,2\} \qquad (۲-۱۰)$$

تعریف می‌شود. در رابطه ۲-۱۰ $\boldsymbol{F_i}(.)$ قسمتی از یک تابع است. حرکات تعادل نش $(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$ در فضای استراتژی $\boldsymbol{\Gamma_1^{lfb}} \times \boldsymbol{\Gamma_2^{lfb}}$ است.

قضیه‌ی ۲-۳ مجموعه‌ی حرکات کنترلی $\boldsymbol{u_i}^*(t) = \boldsymbol{F_i}^*(t)\boldsymbol{x}(t)$ تشکیل شده‌است از بازخورد خطی تعادل نش اگر

$$J_1(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_1(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}^*) \text{ and } J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2})$$

برای هر $\boldsymbol{u_i} \in \boldsymbol{\Gamma_i^{lfb}}$ برقرار باشد.

قضیه‌ی ۲-۴ بازی دیفرانسیلی خطی درجه دوم دو نفره برای هر شرایط اولیه، تعادل نش خطی بازخورد دارد اگر و فقط اگر مجموعه معادلات کوپل ریکاتی

[4] The Feeback Game

$$\dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}(t) = -(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{2}}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}(t) - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}(t)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{2}}(t)) + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}(t)\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}(t) - \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{1}}$$
$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}(T) = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{1}}$$

(۲-۱۱)

$$\dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{2}}(t) = -(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{2}}(t) - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{2}}(t)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}(t)) + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{2}}(t)\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{2}}(t) - \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{2}}$$
$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{2}}(T) = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{2}}$$

(۲-۱۲)

در بازه زمانی $[0, T]$ جواب متقارن داشته باشند (برای سادگی $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{12}} = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{21}} = \boldsymbol{0}$ فرض شده است). در این حالت دارای تعادل منحصر به فرد است. حرکت‌های تعادل به فرم رابطه ۲-۱۳ است.

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{*}(t) = -\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ii}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{i}}^{T}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i}}(T)\boldsymbol{x}(T),\ i = 1, 2 \qquad (۲-۱۳)$$

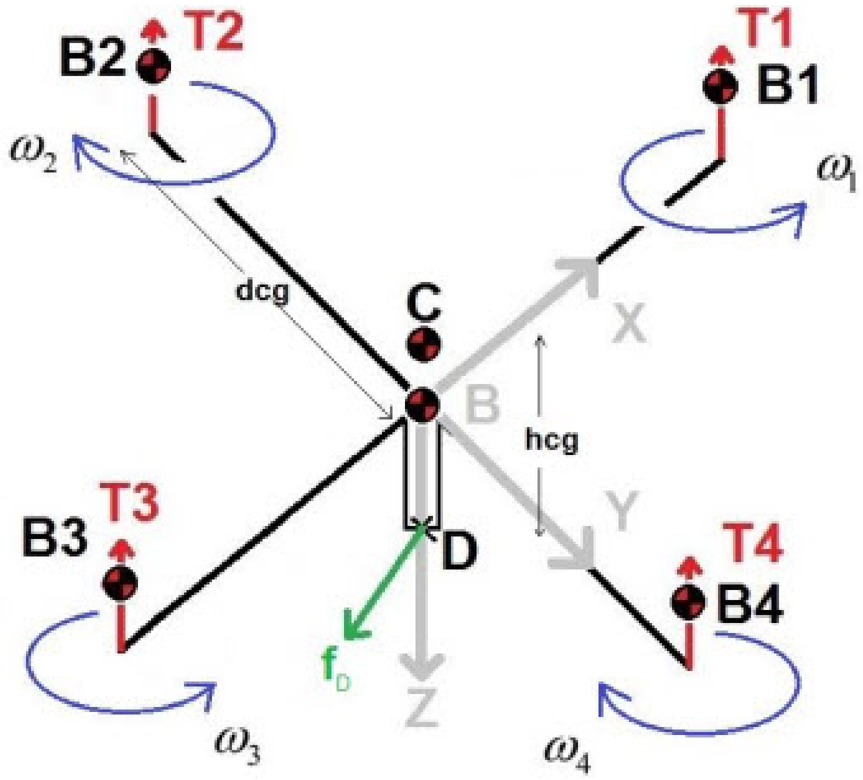
فصل ۳

مدل‌سازی چهارپره

در این فصل به مدلسازی استند چهارپره آزمایشگاهی پرداخته شده است. به این منظور، ابتدا فرضیات مربوط به مدلسازی چهارپره بیان می‌شود. سپس معادلات حاکم بر حرکات دورانی چهارپره بیان می‌شود. در ادامه به استخراج گشتاورهای خارجی اعمالی به استند شامل گشتاورهای آیرودینامیکی ناشی از پره، گشتاور نیروی تکیه گاه و گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها پرداخته می‌شود. در گام بعد، معادله نهایی دینامیک دورانی استند استخراج می‌شود. سپس، فرم فضای حالت استند آزمایشگاهی استخراج می‌شود. لازم به توضیح است که فرم نهایی فضای حالت استند بدون درنظرگرفتن اصطکاک بیریناگ ها از منبع [۴] آورده شده است که در آن منبع، مدل استخراج شده با اعمال ورودی های و شرایط اولیه مختلف اعتبارسنجی شده است.

۳-۱ فرضیات مدل‌سازی

شماتیک استند چهارپره در شکل ۳-۱نشان داده شده است. به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم، فرض می‌شود که چهارپره صلب و متقارن است. همچنین ماتریس گشتاور اینرسی چهارپره به صورت قطری درنظر گرفته می‌شود. مرکز ثقل سازه چهارپره روی نقطه B و مرکز ثقل هر یک از پره‌ها به همراه قسمت دوار موتور روی نقاط B_1 تا B_4 است. مبدأ دستگاه مختصات بدنی روی محل تقاطع بازوهای چهارپره یعنی نقطه B در نظر گرفته شده است. از آنجایی که مرکز ثقل پره‌ها بالاتر از مرکز ثقل سازه چهارپره است، مرکز ثقل کلی چهارپره جایی بین مرکز ثقل موتورها و سازه، یعنی نقطه‌ی C می‌گیرد. همچنین قابل ذکر است که نقطه‌ی D محل اتصال کلی استند چهارپره است. جهت مثبت محور X^B و Y^B دستگاه مختصات بدنی به ترتیب در راستای بازوی مربوط به موتور ۱ و ۴ فرض می‌شود. همچنین جهت مثبت محور Z^B با توجه به قانون دست راست حاصل می‌شود.



شکل ۳-۱: شماتیک استند چهارپره [۴]

۳-۲ معادله گشتاور

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت دورانی چهارپره، از قوانین نیوتن اویلر استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیلی اویلر برای یک پرنده حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۱]:

$$\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{BI}\right]^B = \left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1}\left(-\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B \times \left([\boldsymbol{J}]^B\left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B + [\boldsymbol{I}_R]^B\right) + [\boldsymbol{m}_b]^B\right) \qquad (۳-۱)$$

در رابطه ۳-۱، عبارت $\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{BI}\right]^B$ بیانگر بردار مشتق نرخ‌های زاویه‌ای چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین ماتریس $[\boldsymbol{J}]^B$ نشان‌دهنده گشتاورهای اینرسی چهارپره حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی است که به دلیل تقارن چهارپره به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$[\boldsymbol{J}]^B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \qquad (۳-۲)$$

در رابطه ۳-۲، پارامترهای J_{11}، J_{22} و J_{33} به ترتیب بیانگر گشتاورهای اینرسی چهارپره حول محورهای X^B، Y^B و Z^B دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین بردار $[\boldsymbol{I}_R]^B$ در رابطه‌ی ۳-۱ بیانگر مجموع تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است. ازآنجا که، تکانه زاویه‌ای پره‌ها در راستای محور Z^B دستگاه مختصات بدنی است؛ در نتیجه $[\boldsymbol{I}_R]^B$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{I}_R]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_R \end{bmatrix} \qquad (۳-۳)$$

در رابطه‌ی ۳-۳ ، l_R بیانگر تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در راستای محور Z^B دستگاه مختصات بدنی است که به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$l_R = J_R \omega_d \qquad (۳-۴)$$

در رابطه‌ی ۳-۴، پارامتر J_R بیانگر ممان اینرسی هر یک از پره‌ها است. همچنین ω_d نشان دهنده تفاضل نسبی سرعت‌های زاویه‌ای پره‌ها است که با توجه به شکل ۳-۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_d = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \qquad (۳-۵)$$

همچنین $[\boldsymbol{m}_b]^B$ در رابطه ۳-۱ برآیند گشتاورهای خارجی اعمالی به چهارپره، شامل گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها و گشتاورهای ناشی از نیروی تکیه‌گاه است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

۳-۲-۱ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها

آیرودینامیک پره‌ها باعث ایجاد نیروی برآ و درنتیجه گشتاورهای رول و پیچ ناشی از اختلاف نیروی برآ می‌شود. با استفاده از تفاضل نیروی برآی پره‌ها دو گشتاور رول و پیچ ایجاد می‌شود. با توجه به تئوری مومنتوم، نیروی برآی هر پره (T_i) از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود [۱۲] :

$$T_i = b\omega_i^2 \tag{۳-۶}$$

در رابطه ۳-۶ b و ω_i به ترتیب بیانگر فاکتور نیروی برآ و سرعت زاویه‌ای هر پره است؛ بنابراین مطابق شکل ۳-۱ گشتاور رول حول محور X^B دستگاه مختصات بدنی از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$m_X^B = d_{cg}(T_2 - T_4) = d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \tag{۳-۷}$$

در رابطه ۳-۷ عبارت d_{cg} بیانگر فاصله مرکز هر پره از مرکز جرم چهارپره در راستای محور X^B دستگاه مختصات بدنی است. همچنین گشتاور پیچ حول محور Y^B دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Y^B = d_{cg}(T_1 - T_3) = d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \tag{۳-۸}$$

گشتاور یاو آیرودینامیکی از اختالف گشتاور ناشی از پسای پره‌ها ایجاد می‌شود؛ لذا جهت این گشتاور همواره در جهت مخالف چرخش پره‌ها است؛ بنابراین گشتاور یاو حول محور Z^B دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Z^B = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \tag{۳-۹}$$

رابطه ۳-۹ عبارت d بیانگر فاکتور گشتاور پسای پره‌ها است. در نتیجه با توجه به معادلات ۳-۷، ۳-۸ و ۳-۹ بردار گشتاورهای خارجی ناشی از آیرودینامیک پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[m_A]^B = \begin{bmatrix} m_X^B \\ m_Y^B \\ m_Z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{۳-۱۰}$$

۳-۲-۲ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه

همانطور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌شود، نیروی f_d که در نقطه‌ی D از طرق اتصال کلی به چهارپره وارد می‌شود، باعث ایجاد گشتاوری حول مرکز ثقل چهارپره می‌شود. به منظور مدل‌سازی گشتاور ناشی از این نیرو حول نقطه C ، لازم است ابتدا نیروی f_d استخراج شود. از انجایی که نقطه‌ی D منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نیست؛ لذا معادله حرکت انتقالی برای نقطه اتصال D با استفاده از معادله انتقال یافته نیوتن (معادله گروبین) به صورت معادله زیر حاصل می‌شود [۱۱] :

$$m_{tot}\left[D^I\boldsymbol{v}_D^I\right]^B=[\Sigma\boldsymbol{f}]^B-m_{tot}\left(\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B+\left[D^I\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right) \quad (۳-۱۱)$$

در رابطه‌۳-۱۱، m_{tot} مجموع جرم چهارپره و $\left[D^I\boldsymbol{v}_D^I\right]^B$ مشتق دورانی سرعت نقطه D نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین $[\Sigma\boldsymbol{f}]^B$ بیان‌کننده برآیند نیروهای وارده بر نقطه‌ی D و $\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B$ ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاوی‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین $\left[D^I\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B$ نشان‌دهنده مشتق دورانی سرعت زاوی‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی و $[\boldsymbol{s}_{cd}]^B$ بردار واصل از نقطه‌ی D به نقطه C است. با انتقال قاب بدنی به قاب اینرسی معادله ۳-۱۱ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&m_{tot}\left[D^B\boldsymbol{v}_D^I\right]^B+m_{tot}\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{v}_D^I\right]^B=\\&[\Sigma\boldsymbol{f}]^B-m_{tot}\left(2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B+\left[D^I\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right)\end{aligned} \quad (۳-۱۲)$$

همچنین به دلیل اینکه سرعت محل اتصال چهارپره (نقطه D) صفر است؛ دو عبارت سمت چپ معادله ۳-۱۲ هر دو صفر هستند. در نتیجه معادله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$[\Sigma\boldsymbol{f}]^B-m_{tot}\left(2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B+\left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right)=0 \quad (۳-۱۳)$$

عبارت $[\Sigma\boldsymbol{f}]^B$ بیانگر مجموع نیروهای وارد بر چهارپره است که به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$[\Sigma\boldsymbol{f}]^B=[\boldsymbol{f}_D]^B+[\boldsymbol{f}_T]^B+[\boldsymbol{f}_G]^B \quad (۳-۱۴)$$

در رابطه ۳-۱۴، بردار $[\boldsymbol{f}_D]^B$ مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی D است. همچنین بردار $[\boldsymbol{f}_T]^B$ بیانگر مجموع نیروی برآی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{f}_T]^B=\begin{bmatrix}0\\0\\T_1+T_2+T_3+T_4\end{bmatrix} \quad (۳-۱۵)$$

مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی D است. همچنین بردار $[\boldsymbol{f}_G]^B$ بیانگر نیروی وزن چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{f}_G]^B = [\boldsymbol{C}]^{BL}\,[\boldsymbol{f}_G]^L \tag{۳-۱۶}$$

در رابطه ۳-۱۶، ماتریس $[\boldsymbol{C}]^{BL}$ انتقال از دستگاه مختصات تراز محلی (L) به دستگاه مختصات بدنی است. با جایگذاری روابط ۳-۱۴، ۳-۱۵ و ۳-۱۶ در ۳-۱۳ عبارت زیر برای نیروی تکیه‌گاهی حاصل می‌شود.

$$[f_D]^B = -\,[f_G]^B - [f_T]^B + m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B + \left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B[s_{cd}]^B\right\} \tag{۳-۱۷}$$

سپس از حاصل‌ضرب نیروی تکیه‌گاه مدل شده در معادله ۳-۱۷ در بردار محل اثر آن، گشتاور ایجاد شده توسط نیروی اتصال کلی به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{m}_D]^B = [\boldsymbol{s}_{DC}]^B\left(-\,[\boldsymbol{f}_G]^B - [\boldsymbol{f}_T]^B\,m_{tot}\left\{2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right\}\right) \tag{۳-۱۸}$$

در رابطه ۳-۱۸ بردار $[\boldsymbol{s}_{DC}]^B$ بیانگر فاصله‌ی نقطه‌ی D از مرکز ثقل چهارپره (h_{cg}) است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\boldsymbol{s}_{DC}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cg} \end{bmatrix} \tag{۳-۱۹}$$

در نتیجه با جمع گشتاورهای ناشی از نیروهای آیرودینامیک پره‌ها از معادله ۳-۱۰ و گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه از معادله ۳-۱۸، گشتاور خارجی کلی اعمالی به چهارپره به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{m}_B]^B = [\boldsymbol{m}_A]^B + [\boldsymbol{m}_D]^B \tag{۳-۲۰}$$

۳-۲-۳ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی

در این بخش، گشتاورهای خارجی چهارپره و تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در معادله دیفرانسیل اویلر جایگذاری شده و شکل نهایی معادله دیفرانسیل استند چهارپره حاصل می‌شود. با جایگذاری مقدار گشتاورهای اعمالی به چهارپره از معادله ۳-۲۰ در معادله ۳-۱ رابطه موردنیاز برای مدل‌سازی دینامیک دورانی استند بهصورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B = \left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1} \Bigg(&- \left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right] \times \left([\boldsymbol{J}]^B \left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B + [\boldsymbol{I}_R]^B\right) + \\ &[\boldsymbol{m}_A]^B + [\boldsymbol{s}_{DC}]^B \Bigg(- [\boldsymbol{G}]^B - [\boldsymbol{T}]^B + \\ &m_{tot} \Big\{ 2 \left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B \left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B [\boldsymbol{s}_{cd}]^B + \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B [\boldsymbol{s}_{cd}]^B \Big\} \Bigg) \Bigg)\end{aligned} \tag{۳-۲۱}$$

در رابطه ۳-۲۱، عبارت $\left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B$ بیانگر ماتریس پادمتقارن بردار مشتق سرعت زاویه‌ای بدنی $\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B$ است. جمله آخر در معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_{tot} [\boldsymbol{s}_{DC}]^R \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B [\boldsymbol{s}_{CD}]^R = m_{tot} [\boldsymbol{s}_{DC}]^R [\boldsymbol{s}_{DC}]^R \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{BI}\right]^B \tag{۳-۲۲}$$

با جایگذاری معادله ۳-۲۲ در معادله ۳-۲۱ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B \left(I - m_{tot} \left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1} [\boldsymbol{s}_{DC}]^B [\boldsymbol{s}_{DC}]^B\right) = \\ &\left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1} \Bigg(- \left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right] \times \left([\boldsymbol{J}]^B \left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B + [\boldsymbol{I}_R]^B\right) + \\ &\quad [\boldsymbol{m}_A]^B + [\boldsymbol{s}_{DC}]^B \Bigg(- [\boldsymbol{F}_g]^B - [\boldsymbol{F}_T]^B + \\ &\quad m_{tot} \Big\{ 2 \left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B \left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B [\boldsymbol{s}_{cd}]^B + \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B [\boldsymbol{s}_{cd}]^B \Big\} \Bigg) \Bigg)\end{aligned} \tag{۳-۲۳}$$

با ساده‌سازی رابطه ۳-۲۳ بردار سرعت زاویه‌ای استند به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B &= a^{-1}b \\
a &= I - m_{tot}\left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1}[\boldsymbol{s}_{DC}]^B[\boldsymbol{s}_{DC}]^B \\
b &= \left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1}\Bigg(-\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]\times\left([\boldsymbol{J}]^B\left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B + [\boldsymbol{I}_R]^B\right) + \\
&\quad [\boldsymbol{m}_A]^B + [\boldsymbol{s}_{DC}]^B\Bigg(-[\boldsymbol{F}_g]^B - [\boldsymbol{F}_T]^B + \\
&\quad m_{tot}\left\{2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B + \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right\}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned} \tag{۳-۲۴}$$

با جایگذاری معادلات ۳-۳، ۳-۴ و ۳-۵ معادله مربوط به تکانه کلی پره‌ها، معادله ۳-۶ مربوط به برآی پره و معادله ۳-۱۰ در معادله ۳-۲۴، مؤلفه‌های بردار مشتق سرعت زاویه‌ای چهارپره به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\dot{p} =& \frac{h_{cg} g m_{dot}\cos(\theta)\sin(\phi) + (J_{22} - J_{33} + 2m_{tot}h_{ch}^2)\,qr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} \\
&+ \frac{bd_{cg}\,(\omega_2^2 - \omega_4^2) + qJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}
\end{aligned} \tag{۳-۲۵}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q} =& \frac{h_{cg} g m_{dot}\sin(\theta) + (J_{33} - J_{11} + 2m_{tot}h_{ch}^2)\,pr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} \\
&+ \frac{bd_{cg}\,(\omega_1^2 - \omega_3^2) - pJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}
\end{aligned} \tag{۳-۲۶}$$

$$\dot{r} = \frac{pq(J_{11} - J_{22}) + d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)}{J_{33}} \tag{۳-۲۷}$$

به منظور انتشار وضعیت دورانی چهارپره، از روش انتشار اویلر استفاده می‌شود. در این‌صورت [۱۱] :

$$\dot{\phi} = p + q\sin(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\tan(\theta)$$

$$\dot{\theta} = q\cos(\phi) - r\sin(\phi)$$

$$\dot{\psi} = (q\sin(phi)) + r\cos(\phi))\sec(\theta)$$

۳-۳ استخراج فرم فضای حالت

به منظور استخراج فرم فضای حالت، متغیرهای حالت استند سه درجه آزادی چهارپره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{۳-۲۸}$$

معادلات ارائه شده به فرم زیر برای فضای حالت بازنویسی شدند:

$$\dot{x}_1 = x_4 + x_5 \sin(x_1)\tan(x_2) + x_6 \cos(x_1)\tan(x_2) \tag{۳-۲۹}$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \tag{۳-۳۰}$$

$$\dot{x}_3 = (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1))\sec(x_2) \tag{۳-۳۱}$$

$$\dot{x}_4 = A_1 \cos(x_2)\sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3\left(\omega_2^2 - \omega_4^2\right) + A_4 x_5 \left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \tag{۳-۳۲}$$

$$\dot{x}_5 = B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3\left(\omega_1^2 - \omega_3^2\right) + B_4 x_4 \left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \tag{۳-۳۳}$$

$$\dot{x}_6 = C_1 x_4 x_5 + C_2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2\right) \tag{۳-۳۴}$$

ثابت‌های معادلات بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_2 = \frac{2 m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22} - J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_3 = \frac{d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_4 = \frac{J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}}$$

$$B_1 = \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_2 = \frac{-2 m_{tot} h_{cg}^2 - J_{11} + J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_3 = \frac{d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_4 = \frac{-J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}}$$

$$C_1 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \quad C_2 = \frac{d}{J_{33}}$$

به منظور شبیه‌سازی ، پارامترهای استند به صورت جدول ۳-۱ درنظر گرفته شده است که مقدار پارامترهای استند آزمایشگاه است.

جدول ۳-۱: پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۵]

پارامتر	واحد	مقدار پارامتر استند چهارپره
h_{cg}	m	0.02
m_{tot}	kg	0.638
J_{11}	$kg.m^2$	0.02839
J_{22}	$kg.m^2$	0.03066
J_{33}	$kg.m^2$	0.0439
b	1	3.13×10^{-5}
d_{cg}	m	0.2
d	1	3.2×10^{-6}

۳-۴ خطی‌سازی

با استفاده از فرم فضای‌حالت استخراج شده در بخش ۳-۳ در این قسمت خطی‌سازی انجام شده است. در قسمت ۳-۴-۱ به صورت چند ورودی و چند خروجی[1] برای سرعت دورانی پره‌ها در 2000 RPM و حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در قسمت ۳-۴-۲ مسئله به صورت یک ورودی و یک خروجی [2] حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در این قسمت برای فازهای مختلف یک سیستم تک ورودی تک خروجی در نظر گرفته شده است و برای فازهای رول، پیچ و یاو مسئله حل شده است سپس از مجموع خروجی‌های بدست‌آمده خروجی کلی یعنی سرعت دورانی پره‌ها بدست آمده است.

[1] MIMO (Multiple Input Multiple Output)
[2] SISO (Single Input Single Output)

۳-۴-۱ خطی‌سازی به فرم چند ورودی چند خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5\sin(x_1)\tan(x_2) + x_6\cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5\cos(x_1) - x_6\sin(x_1) \\ (x_5\sin(x_1) + x_6\cos(x_1))\sec(x_2) \\ A_1\cos(x_2)\sin(x_1) + A_2x_5x_6 + A_3\left(\omega_2^2 - \omega_4^2\right) + A_4x_5\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ B_1\sin(x_2) + B_2x_4x_6 + B_3\left(\omega_1^2 - \omega_3^2\right) + B_4x_4\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ C_1x_4x_5 + C_2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}\phi & \theta & \psi & p & q & r\end{bmatrix}^T \tag{۳-۳۵}$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4\end{bmatrix}^T \tag{۳-۳۶}$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta\dot{\vec{x}} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{\omega}}\delta\vec{\omega} \tag{۳-۳۷}$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1 & \delta\dot{x}_2 & \delta\dot{x}_3 & \delta\dot{x}_4 & \delta\dot{x}_5 & \delta\dot{x}_6\end{bmatrix}^T \tag{۳-۳۸}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۹}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_4} \end{bmatrix} \quad (۳-۴۰)$$

به علت حجم بالای معادلات رابطه خطی‌سازی شده چهارپره در گزارش آورده نشده‌است اما در شبیه سازی به طور کامل لحاظ شده‌است.

۳-۴-۲ خطی‌سازی به فرم یک ورودی یک خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود.

$$a = \begin{bmatrix} x_4 + x_5\sin(x_1)\tan(x_2) + x_6\cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5\cos(x_1) - x_6\sin(x_1) \\ (x_5\sin(x_1) + x_6\cos(x_1))\sec(x_2) \\ A_1\cos(x_2)\sin(x_1) + A_2x_5x_6 + A_3\left(\omega_2^2 - \omega_4^2\right) + A_4x_5\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ B_1\sin(x_2) + B_2x_4x_6 + B_3\left(\omega_1^2 - \omega_3^2\right) + B_4x_4\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ C_1x_4x_5 + C_2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2\right) \end{bmatrix}$$

در این قسمت برای ساده‌سازی، ورودی مسئله را از سرعت دورانی به نیروهای تاثیرگذار در مودهای رول، پیچ و یاو تغیر داده شده است. این کار باعث می‌شود که مسئله از چند ورودی و چند خروجی به سه مسئله یک ورودی و یک خروجی تبدیل شود. نیروها به فرم رابطه ۳-۴۱ تعریف می‌شوند.

$$u_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad u_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad u_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \qquad (۳-۴۱)$$

با توجه به اینکه سه نیرو در نظر گرفته شده و مسئله نیاز به چهار خروجی دارد یک نیروی دیگر نیز در نظر گرفته می‌شود که به فرم رابطه ۳-۴۲ است و مقدار آن به صورت ثابت و برابر با سرعت دورانی تمام پره‌ها در دور نامی یعنی 2000 RPM در نظر گرفته شده است.

$$u_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \qquad (۳-۴۲)$$

در ادامه روابط ۳-۴۱ و ۳-۴۲ را در فضای حالت سیستم جایگزین می‌کنیم و برای سادگی قسمت‌های $(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)$ از معادلات حذف می‌کنیم.

فضای حالت جدید:

$$a = \begin{bmatrix} x_4 + x_5\sin(x_1)\tan(x_2) + x_6\cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5\cos(x_1) - x_6\sin(x_1) \\ (x_5\sin(x_1) + x_6\cos(x_1))\sec(x_2) \\ A_1\cos(x_2)\sin(x_1) + A_2x_5x_6 + A_3u_1 \\ B_1\sin(x_2) + B_2x_4x_6 + B_3u_2 \\ C_1x_4x_5 + C_2u_3 \end{bmatrix} \qquad (۳-۴۳)$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{bmatrix}^T \tag{۴۴-۳}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T \tag{۴۵-۳}$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده‌است.

$$\delta\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{u}}\delta\vec{u} \tag{۴۶-۳}$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 & \delta\dot{x}_2 & \delta\dot{x}_3 & \delta\dot{x}_4 & \delta\dot{x}_5 & \delta\dot{x}_6 \end{bmatrix}^T \tag{۴۷-۳}$$

$$A = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \tag{۴۸-۳}$$

$$B = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} & \frac{\partial a_1}{\partial u_2} & \frac{\partial a_1}{\partial u_3} & \frac{\partial a_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial u_1} & \frac{\partial a_2}{\partial u_2} & \frac{\partial a_2}{\partial u_3} & \frac{\partial a_2}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial u_1} & \frac{\partial a_3}{\partial u_2} & \frac{\partial a_3}{\partial u_3} & \frac{\partial a_3}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} & \frac{\partial a_4}{\partial u_2} & \frac{\partial a_4}{\partial u_3} & \frac{\partial a_4}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_1} & \frac{\partial a_5}{\partial u_2} & \frac{\partial a_5}{\partial u_3} & \frac{\partial a_5}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_1} & \frac{\partial a_6}{\partial u_2} & \frac{\partial a_6}{\partial u_3} & \frac{\partial a_6}{\partial u_4} \end{bmatrix} \tag{۴۹-۳}$$

روابط بالا به فرم یک سیستم یک ورودی و یک خروجی نوشته شده است.

مود رول

$$A_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۰}$$

$$B_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۱}$$

مود پیچ

$$A_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۲}$$

$$B_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۳}$$

مود یاو

$$A_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۴}$$

$$B_{yaw} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_3}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial a_6}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۵}$$

استخراج سرعت دورانی پره‌ها از نیروها

چهارمعادله و چهارمجهول:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ u_2 &= \omega_1^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \\ u_4 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{aligned} \tag{۳-۵۶}$$

جواب معادلات ۳-۵۶ به فرم رابطه ۳-۵۷ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_4 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 - 2u_2}{4}} \end{aligned} \tag{۳-۵۷}$$

۳-۵ نتیجه‌گیری

در این پروژه روش بازی دیفراسیلی بررسی شد و برای یک استند آزمایشگاهی پیاده‌سازی شد. در آخر این روش با روش معروف LQR نیز مقایسه شد. با توجه به گسترش شاخه تئوری بازی و نیازمندی زیاد به چهارپره در آینده می‌توان به این روش امیدوار بود و کاربردهای بیشتری از آن را در آینده دید.

مراجع

[1] iranlabexpo. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed November 2, 2021], Available at http://gcrc.sharif.edu/%D8%A7%D8%B3%D8%AA%D9%86%D8%AF-%D8%A2%D8%B2%D9%85%D8%A7%DB%8C%D8%B4%DA%AF%D8%A7%D9%87%DB%8C-%DA%A9%D9%86%D8%AA%D8%B1%D9%84-%D9%88%D8%B6%D8%B9%DB%8C%D8%AA-%D8%B3%D9%87-%D8%AF%D8%B1%D8%AC%D9%87-%D8%A2/.

[2] dreamstime. boeing ch chinook, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at https://cutt.ly/onRvD7x.

[3] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/.

[4] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent back-stepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.

[5] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.

[6] L. Sprekelmeyer. *These We Honor: The International Aerospace Hall of Fame.* 2006.

[7] M. J. Hirschberg. A perspective on the first century of vertical flight. *SAE Transactions*, 108:1113–1136, 1999.

[8] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on se(3). In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.

[9] nobelprize.org. Jean tirole, 2021. [Online; accessed October 17, 2021], Available at https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2014/tirole/facts/.

[10] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.

[11] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.

[12] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.

Sharif University of Technology

Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

LQDG Controler for 3DOF Quadcopter Stand

By:

Ali BaniAsad

Supervisor:

Dr. Nobahari

August 2021