دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی
مهندسی کنترل

عنوان:

کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهریور ۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی[1] استتفاده شده‌است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده‌است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده‌است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش[2] که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش خارجی و نویز سنسور مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی نیز از مقاومت مناسبی برخوردار است. از روش ارائه‌شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده‌است. عملکرد این روش با اجرای شبیه‌سازی‌های مختلف مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. همچنین، عملکرد آن در حضور نویز و اغتشاش و عدم قطعیت مدل از طریق شبیه‌سازی ارزیابی خواهدشد.

کلیدواژه‌ها: چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، شبیه‌سازی، تابع هزینه

[1]Game Theory
[2]Nash Equilibrium

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۲

۱-۱ ساختار ۲

۱-۲ تاریخچه ۵

۱-۳ تعریف مسئله ۵

۱-۴ تئوری بازی ۶

۱-۴-۱ تاریخچه تئوری بازی ۷

۱-۴-۲ تعادل نش ۷

۲ بازی دیفرانسیلی ۸

۲-۱ بازی حلقه‌باز ۹

۲-۲ بازی همراه با بازخورد ۱۱

۳ مدل‌سازی چهارپره ۱۳

۳-۱ فرضیات مدل‌سازی ۱۴

۳-۲ معادله گشتاور ۱۵

۳-۳ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها ۱۶

۳-۴ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه ۱۷

۳-۵ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی ۱۹
۳-۶ استخراج فرم فضای حالت ۲۱
۳-۷ خطی‌سازی ۲۳
۳-۷-۱ خطی‌سازی به فرم چند ورودی چند خروجی ۲۴
۳-۷-۲ خطی‌سازی به فرم یک ورودی یک خروجی ۲۶
۳-۸ نتیجه‌گیری ۳۰

فهرست شکل‌ها

۱-۱ هلیکوپتر شینوک[۱] ۳
۱-۲ چرخش پره‌های چهارپره[۲] ۴
۱-۳ استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه[۳] ۶
۳-۱ شماتیک استند چهارپره[۴] ۱۴

فهرست جدول‌ها

۳-۱ پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره[۵] ۲۲

فصل ۱

مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر[1] یکی از انواع وسایل پهپاد[2] است. چهارپره‌ها نوعی هواگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپروانه‌ها جای دارند و به دلیل کمک گرفتن از چهار پروانه برای نیروی پیشرانش، به عنوان کواد (چهار) کوپتر نامیده می‌شوند. چهارپره‌ها به دلیل داشتن قدرت مانور فوق‌العاده و پروازهایی با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده برخوردارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده‌است و لذا روزانه پیشرفت چشم‌گیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویر برداری، تفریحی و سمپاشی از کاربرد بالا و روزافزونی برخوردارند و مدل‌های دارای سرنشین آن نیز تولید شده‌است.

۱-۱ ساختار

چهارپره‌ها همانند انواع دیگر وسایل پرنده از ایجاد اختلاف فشار در اتمسفر پیرامون خود برای بلند شدن و حرکت در هوا استفاده می‌نمایند. همان‌طور که هلیکوپترها به کمک پره اصلی این اختلاف فشار را ایجاد می‌کنند و نیروی برآ ی خود را تأمین می‌کنند. در هلیکوپترها به دلیل وجود نیروی عمل و عکس‌العمل، پس از اینکه پره اصلی شروع به چرخش می‌کند با برخورد مولکول‌های هوا به این پره و وجود عکس‌العمل، یک نیرویی با جهت مخالف جهت چرخش پره به پره و در ادامه به شفت متصل به پره اعمال می‌شود (نیروی

[1] Quadcopter

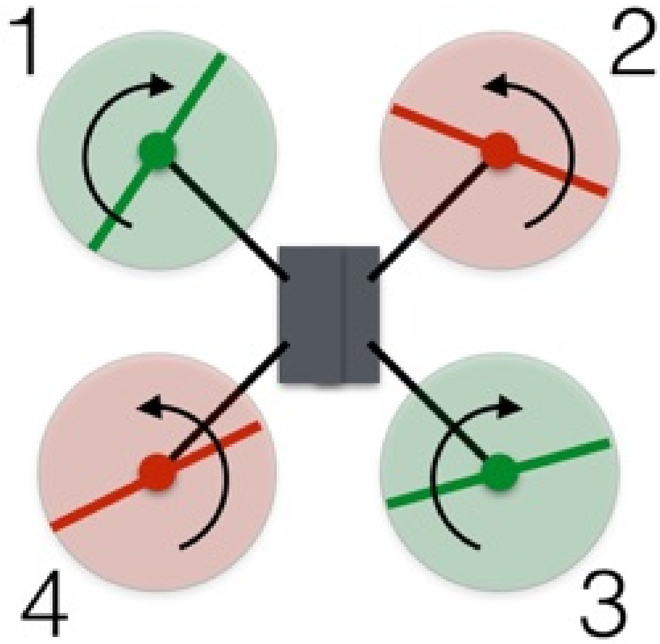
[2] پرنده‌ی هدایت‌پذیر از دور

گشتاور) و باعث چرخش هلیکوپتر به دور خود می‌شود. حالا برای حل این مشکل از پره دم هلیکوپتر استفاده می‌شود تا نیرویی را تولید کند که مانع چرخش هلیکوپتر به دور خود شود. حال اگر هلیکوپتر به جای داشتن یک پره اصلی از دو پره اصلی که خلاف جهت یکدیگر بچرخند استفاده می‌نمود، به دلیل خنثی شدن دو نیروی گشتاور توسط یکدیگر، دیگر هلیکوپتر به دور خود نمی‌چرخید. مانند هلیکوپترهای شینوک[۳]. حال با توجه به توضیحات داده شده راحت‌تر می‌توان به ساختار چهارپره‌ها اشاره نمود.

شکل ۱-۱: هلیکوپتر شینوک[۱]

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها نیروی گشتاورهای ایجاد شده را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.

[3] Boeing CH-47 Chinook



شکل ۱-۲: چرخش پره‌های چهارپره[۲]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که، برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش همه موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیاد تر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و نیروی گشتاور به یک سمت ایجاد می‌شود و نیرویه برآ همانند قبل است (زیرا دو پره با سرعت کمتر و دو پره دیگر به همان نسبت با سرعت بیشتر می‌چرخند) لذا چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. برای حرکت چهارپره‌ها در جهت‌های مختلف (عقب، جلو، چپ و راست) توسط کم و زیاد کردن سرعت موتورها چهارپره را از حالت افقی خارج کرده و باعث حرکت آن می‌شوند.

۱-۲ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندموتوره[۴] در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Jacques and Louis Breguet در پروژه‌ای بنام Quadcopter ساخته و تست شد، هرچند آن‌ها نتوانستند پرنده خود را در آسمان نگه دارند ولی موفق به پرواز ثابت شدند. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمیگردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی بنام etienne oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع نمود و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد.

در حدود سال ۱۹۲۲ در آمریکا Dr George de Btheza موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود.

در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده‌است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده‌است و به تدریج رواج یافته‌است [۶].

از حدود سال ۲۰۰۶ کواد کوپترها شروع به رشد صنعتی به صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

۱-۳ تعریف مسئله

مسئلهای که در این پروژه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده‌است. در این صورت، تنها وضعیت (زوایای رول، پیچ و یاو) چهارپره تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین میتوان با مقیدکردن چرخش حول هر محور ، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به صورت مجرا و با یکدیگر بررسای کارد. استند آزمایشگاهی سه درجه آزادی چهارپره در شکل ۱-۳ نشان داده شده‌است.

[4] Multiroter

شکل ۱-۳: استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه[۳]

با توجه به شکل مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان به صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین سیستم بدون جضور کنترل کننده ناپایدار است. این سیستم دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زاوای اویلر (ψ, θ, ϕ) است. در مدل سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد، اما با توجه به کنترل کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به صورت اغتشاش در نظر گرفت و سیستم را به خوبی کنترل کرد. در پایان این کنترل کننده را با کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی[5] مقایسه خواهدشد.

۱-۴ تئوری بازی

تئوری بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. تئوری بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. تئوری بازی در تلاش است تا بوسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایطِ راهبردی یا در یک بازی که در آن‌ها موفقیتِ فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

[5] PID(Proportional–Integral–Derivative)

۱-۴-۱ تاریخچه تئوری بازی

در سال ۱۹۲۱ یک ریاضی‌دان فرانسوی به نام اِمیل بُرل برای نخستین بار به مطالعهٔ تعدادی از بازی‌های رایج در قمارخانه‌ها پرداخت و چند مقاله در موردِ آن‌ها نوشت. او در این مقاله‌ها بر قابل پیش‌بینی بودنِ نتایجِ این نوعِ بازی‌ها از راه‌های منطقی، تأکید کرده بود. در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراهِ جان هارسانی و راینهارد سیلتن به خاطر مطالعات خلاقانه خود در زمینهٔ نظریهٔ بازی، برندهٔ جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برندگانِ جایزه‌ی نوبل اقتصاد از میانِ متخصصینِ تئوری بازی انتخاب شدند. آخرینِ آنها، ژان تیرول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد.

۲-۴-۱ تعادل نش

در تئوری بازی، تعادل نش (به نام جان فوربز نش، که آن را پیشنهاد کرد) راه حلی از تئوری بازی است که شامل دو یا چند بازیکن، که در آن فرض بر آگاهی هر بازیکن به استراتژی تعادل بازیکنان دیگر است و بدون هیچ بازیکنی که فقط برای کسب سود خودش با تغییر استراتژی یک جانبه عمل کند. اگر هر بازیکنی استراتژی را انتخاب کند هیچ بازیکنی نمی‌تواند با تغییر استراتژی خود در حالی که امتیاز بازیکن دیگر را بدون تغییر نگه داشته باشد عمل کند، سپس مجموعه انتخاب‌های استراتژی فعلی و بهره‌مندی مربوطه، تعادل نش را تشکیل می‌دهد.

فصل ۲

بازی دیفرانسیلی

در این قسمت به خلاصه‌ای از بازی دیفرانسیلی پرداخته شده‌است. تمامی توضیحات و روابط از منبع [۷] آمده‌است. در این فصل حالت حلقه‌باز و حالت همراه با بازخورد[1] بررسی می‌شود. این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن به فرم مربعی است. هدف اصلی پروژه کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه به فرم رابطه ۲-۱ نوشته می‌شود.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T \left(x^T(t)Q_i x(t) + u_i^T(t)Q_{ii}u_i(t) + u_j^T(t)Q_{ij}u_j(t)\right) dt + x^T(T)H_i x(T) \tag{۲-۱}$$

در اینجا ماترس‌های Q_i ، R_{ii} و H متقارن فرض شده‌اند و ماتریس R_{ii} به صورت مثبت معین($R_{ii} > 0$) فرض شده‌است. دینامیک سیستم تحت تاثیر هر دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا دینامک سیستم به فرم رابطه ۲-۲ در نظر گرفته شده‌است.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1 + B_2u_2, \quad x(0) = x_0 \tag{۲-۲}$$

در رابطه ۲-۲ u_1 برابر با تلاش کنترلی بهینه بازیکن اول است. در اینجا ممکن است تلاش کنترلی بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. در این پروژه حالت همکاری دو بازیکن در نظرگرفته نمی‌شود و دو بازیکن در سبب کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

[1] Feedback

۲-۱ بازی حلقه‌باز

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان $t \in [0,T]$ فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سیستم را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان بستن قرارداد بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش در ادامه تعریف شده‌است.

قضیه‌ی ۲-۱ به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول (u_1^*, u_2^*) یک **تعادل نش** برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات حرکات قابل قبول (u_1, u_2) از نامساوی۲-۳ پیروی کنند.

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leqslant J_1(u_1, u_2^*) \ and \ J_1(u_1^*, u_2^*) \leqslant J_1(u_1^*, u_2) \qquad (۲-۳)$$

در اینجا قابل قبول بودن به معنی است که $u_i(.)$ به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه حرکات که بستگی به بازیکنان اطلاعات از بازی دارد، مجموعه‌ای از استراتژی‌هایی که بازیکنان دوست دارند برای کنترل سیستم انجام دهند و سیستم ۲-۲ باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد. به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات (u_1^*, u_2^*) یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه $J_i, \ i = 1, 2$ است. اگر تعادل نش برای تابع هزینه قسمت قبل برقرار باشد برای تابع هزینه $\alpha_i J_i, \ i = 1, 2, \ \alpha_i > 0$ نیز برقرار است.

برای سادگی از نمادسازی $S_i := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$ استفاده شده‌است. در اینجا فرض شده که زمان T محدود است.

قضیه‌ی ۲-۲ ماتریس M را در نظر بگیرید:

$$M := \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ -Q_1 & -A^T & 0 \\ -Q_2 & 0 & -A^T \end{bmatrix} \qquad (۲-۴)$$

فرض شده‌است که دو معادله دفرانسیلی ریکاتی (۲-۵)، $K_i(i)$ در بازه $[0,T]$ جواب متقارن دارند.

$$\dot{K}_i(t) = -A^T K_i(t) - K_i(t)A + K_i(t) S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(T) = H, \quad i = i, 2 \qquad (۲-۵)$$

پس بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم دو نفره[2] دارای تعادل نش حلقه‌باز در هر شرایط اولیه X_0 دارد اگر ماتریس

$$H(T) := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-MT} \begin{bmatrix} I \\ Q_{1T} \\ Q_{2T} \end{bmatrix} \tag{۲-۶}$$

قابلیت معکوس شدن را داشته باشد.

در آخر با استفاده از قضیه ۲-۲ با حل دو معادله کوپل ریکاتی دیفرانسیلی می‌توان به جواب رسید.

$$\dot{P}_1 = -A^T P_1 - P_1 A - Q_1 + P_1 S_1 P_1 + P_1 S_2 P_2; \quad P_1(T) = H_1 \tag{۲-۷}$$

$$\dot{P}_2 = -A^T P_2 - P_2 A - Q_2 + P_2 S_2 P_2 + P_2 S_1 P_1; \quad P_2(T) = H_2 \tag{۲-۸}$$

[2] the two player linear quadratic differential game

۲-۲ بازی همراه با بازخورد

تفاوت بازی همراه با بازخورد [۳] با بازی حلقه‌باز در این است که بازیکنان در هر لحظه از بازی بازخورد می‌گیرند و متانسب با بازخورد رفتار می‌کنند. این بازخورد ممکن است باعث شود یک بازیکن انگیزه پیدا کند که از بازی انحراف پیداکند در حالی که این اتفاق در بازی حلقه‌باز رخ نمی‌دهد. این اتفاق منجر به یک راه حل تعادلی دیگر می‌شود. از طرف دیگر راه حل تعادلی نباید در طول بازی خودش را با بازکنان سازگار کند.

با توجه به اینکه سیستم خطی است، می‌توان استدلال کرد که حرکات تعادل به صورت تابعی خطی از وضعیت سیستم است. این بدین مفهوم است که تعادل نش باید در فضای ذکر شده باشد. فضای استراتژی به فرم

$$\Gamma_i^{lfb} : = \{u_i(0,T) | u_i(t) = F_i(t)x(t),\ i = 1,2\} \tag{۲-۹}$$

تعریف می‌شود. در رابطه ۲-۹ $F_i(.)$ قسمتی از یک تابع است. حرکات تعادل نش (u_1^*, u_2^*) در فضای استراتژی $\Gamma_2^{lfb} \times \Gamma_1^{lfb}$ است.

قضیه‌ی ۲-۳ مجموعه‌ی حرکات کنترلی $u_i^*(t) = F_i^*(t)x(t)$ تشکیل شده‌است از بازخورد خطی تعادل نش اگر

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leqslant J_1(u_1, u_2^*)\ and\ J_1(u_1^*, u_2^*) \leqslant J_1(u_1^*, u_2)$$

برای هر $u_i \in \Gamma_i^{lfb}$ برقرار باشد.

قضیه‌ی ۲-۴ بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم دو نفره برای هر شرایط اولیه، تعادل نش خطی بازخورد دارد اگر و فقط اگر مجموعه معادلات کوپل ریکاتی

[3] The Feeback Game

$$\dot{K}_1(t) = -(A - S_2K_2(t))^T K_1(t) - K_1(t)(A - S_2K_2(t)) + K_1(t)S_1K_1(t) - Q_1$$
$$K_1(T) = H_1$$

(۱۰-۲)

$$\dot{K}_2(t) = -(A - S_1K_1(t))^T K_2(t) - K_2(t)(A - S_1K_1(t)) + K_2(t)S_2K_2(t) - Q_2$$
$$K_2(T) = H_2$$

(۱۱-۲)

در $[0, T]$ جواب متقارن داشته‌باشند(برای سادگی $S_{12} = S21 = 0$ فرض شده‌است). در این حالت دارای تعادل منحصر به فرد است. حرکت‌های تعادله به فرم رابطه ۲-۱۲ است.

$$u_i^*(t) = -R_{ii}B_i^T K_i(T)x(T),\ i = 1, 2 \qquad (۱۲-۲)$$

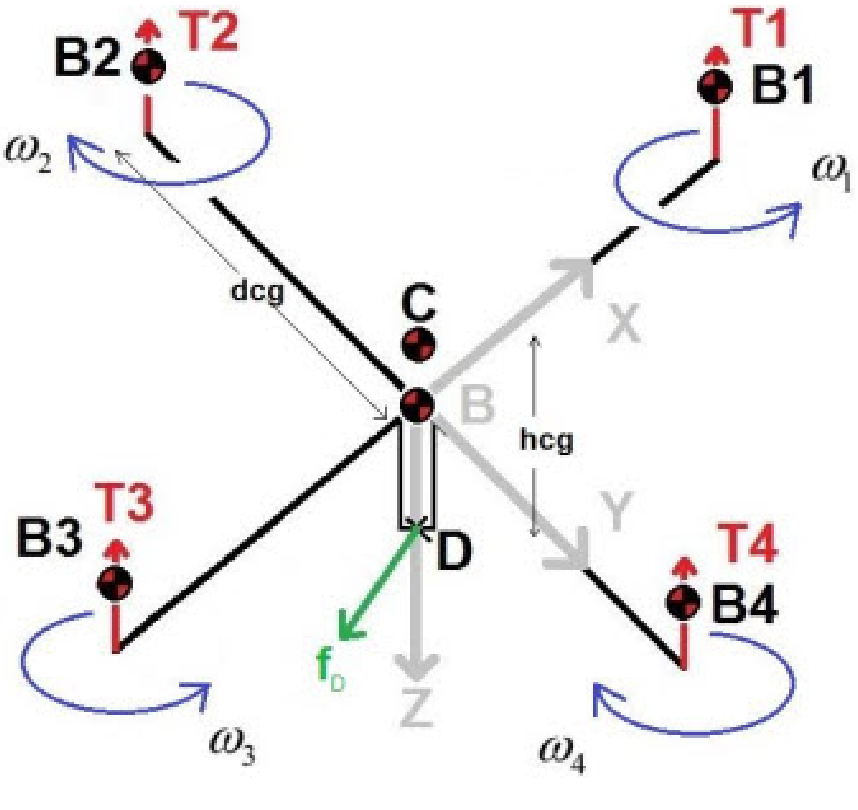
فصل ۳

مدل‌سازی چهارپره

در این فصل به مدلسازی استند آزمایشگاهی چهارپره پرداخته‌شده‌است. به این منظور، ابتدا فرضیات مربوط به مدلسازی چهارپره بیان می‌شود. سپسبه معادلات حاکم بر حرکات دورانی چهارپره و در ادامه به استخراج گشتاوره‌ای خارجی اعمالی به استند شامل گشتاوره‌ای آیرودینامیک ناشی از پره، گشتاور نیروی تکیه گاه و گشاتاوره‌ای ناشای از اصطکاک بیرینگ‌ها پرداخته می‌شود. درگام بعد،معادله نهایی دینامیک دورانی استند استخراج می‌شود. سپس، فرم فضای حالت استند آزمایشگاهی استخراج می‌شود. لازم به توضیح است که فرم نهایی فضای حالت استند بدون درنظرگرفتن اصطکاک بیریناگ ها از منبع [۴] آورده‌شده‌است که در آن منبع ، مدل استخراج شده با اعمال ورودی های و شرایط اولیه مختلاف اعتبارسنجی شده‌است.

۳-۱ فرضیات مدل‌سازی

شماتیک استند چهارپره در شکل ۳-۱نشان داده شده‌است. به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم، فرض می‌شود که چهارپره صلب و متقارن است. همچنین ماتریس گشتاور اینرسی چهارپره به صورت قطری درنظر گرفته می‌شود. مرکز ثقل سازه چهارپره روی نقطه B و مرکز ثقل هر یک از پره‌ها به همراه قسمت دوار موتور روی نقاط B_1 تا B_2 است. مبدأ دستگاه مختصات بدنی روی محل تقاطع بازوهای چهارپره یعنی نقطه B در نظر گرفته‌شده‌است. از آنجایی که مرکز ثقل پره‌ها بالاتر از مرکز ثقل سازه چهارپره است، مرکز ثقل کلی چهارپره جایی بین مرکز ثقل موتورها و سازه، یعنی نقطه‌ی C می‌گیرد. همچنین قابل ذکر است که نقطه‌ی D محل اتصال کلی استند چهارپره است. جهت مثبت محور X^B و Y^B دستگاه مختصات بدنی به ترتیب در راستای بازوی مربوط به موتور ۱ و ۴ فرض می‌شود. همچنین جهت مثبت محور Z^B با توجه به قانون دست راست حاصل می‌شود.



شکل ۳-۱: شماتیک استند چهارپره[۴]

۳-۲ معادله گشتاور

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت دورانی چهارپره، از قوانین نیوتن اویلر استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیلی اویلر برای یک پرنده حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر بیان می‌شود[۲۳]:

$$\left[\dot{\omega}^{BI}\right]^B = \left([J]^B\right)^{-1}\left(-\left[\Omega^{BI}\right]^B \times \left([J]^B\left[\omega^{BI}\right]^B + [I_R]^B\right) + [m_b]^B\right) \tag{۳-۱}$$

در رابطه ۳-۱ ، عبارت $\left[\dot{\omega}^{BI}\right]^B$ بیانگر بردار مشتق نرخ‌های زاویه‌های چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین ماتریس $[J]^B$ نشان‌دهنده گشتاوره‌ای اینرسی چهارپره حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی است که به دلیل تقارن چهارپره به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$[J]^B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{۳-۲}$$

در رابطه ۳-۲ ، پارامترهای J_{11}، J_{22} و J_{33} به ترتی بیانگر گشتاورهای اینرسی چهارپره حول محورهای X^B، Y^B و Z^B دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین بردار $[I_R]^B$ در رابطه‌ی ۳-۱ بیانگر مجموع تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است. ازآنجا که، تکانه زاویه‌ای پره‌ها در راستای محور Z^B دستگاه مختصات بدنی است؛ در نتیجه $[I_R]^B$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[I_R]^B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_R \end{bmatrix} \tag{۳-۳}$$

در رابطه‌ی ۳-۳ ، l_R بیانگر تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در راستای محور Z^B دستگاه مختصات بدنی است که به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$l_R = J_R\omega_d \tag{۳-۴}$$

در رابطه‌ی ۳-۴ ، پارامتر J_R بیانگر ممان اینرسی هر یک از پره‌ها است. همچنین ω_d نشان دهنده تفاضل نسبی سرعت‌های زاویه‌ای پره‌ها است که با توجه به شکل ۳-۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_d = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \tag{۳-۵}$$

همچنین $[M_B]^B$ در رابطه ۳-۱ برآیند گشتاوره‌ای خارجی اعمالی به چهارپره، شامل گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها و گشتاورهای ناشی از نیروی تکیه‌گاه است که در به آن پرداخته می‌شود.

۳-۳ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها

آیرودینامیک پره‌ها باعث ایجاد نیروی تراست و درنتیجه گشتاورهای رول و پیچ ناشی از اختلاف نیروی تراست می‌شود. با استفاده از تفاضل نیروی تراست پره‌ها دو گشتاور رول و پیچ ایجاد می‌شود. با توجه به تئوری مومنتوم، نیروی تراست هر پره (T_i) از رابطه زیرحاصل می‌شود [۲۴] :

$$T_i = b\omega_i^2 \tag{۳-۶}$$

در رابطه ۳-۶ b و ω_i به ترتیب بیانگر فاکتور نیروی تراست و سرعت زاوی‌های هر پره است؛ بنابراین مطابق شکل ۳-۱ گشتاور رول حول محور X^B دستگاه مختصات بدنی از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$m_X^B = d_{cg}(T_2 - T_4) = d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \tag{۳-۷}$$

در رابطه ۳-۷ عبارت d_{cg} بیانگر فاصله مرکز هر پره از مرکز جرم چهارپره در راستای محور X^B دستگاه مختصات بدنی است. همچنین گشتاور پیچ حول محور Y^B دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱ ز رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Y^B = d_{cg}(T_1 - T_3) = d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \tag{۳-۸}$$

گشتاور یاو آیرودینامیکی از اختالف گشتاور ناشی از پسای پره‌ها ایجاد می‌شود؛ لذا جهت این گشتاور همواره در جهت مخالف چرخش پره‌ها است؛ بنابراین گشتاور یاو حول محور Z^B دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Z^B = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \tag{۳-۹}$$

رابطه ۳-۹ عبارت d بیانگر فاکتور گشتاور پسای پره‌ها است. در نتیجه با توجه به معادلات ۳-۷، ۳-۸ و ۳-۹ بردار گشتاورهای خارجی ناشی از آیرودینامیک پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[m_A]^B = \begin{bmatrix} m_X^B \\ m_Y^B \\ m_Z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{۳-۱۰}$$

۳-۴ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه

همانطور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌شود، نیروی f_d که در نقطه‌ی D از طرق اتصال کلی به چهارپره وارد می‌شود، باعث ایجاد گشتاوری حول مرکز ثقل چهارپره می‌شود. به منظور مدل‌سازی گشتاور ناشی از این نیرو حول نقطه C ، لازم است ابتدا نیروی f_d استخراج شود. از انجایی که نقطه‌ی D منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نیست؛ لذا معادله حرکت انتقالی برای نقطه اتصال D با استفاده از معادله انتقال یافته نیوتن (معادله گروبین) به صورت معادله زیر حاصل می‌شود [۲۳] :

$$m_{tot}\left[D^I v_D^I\right]^B = [\Sigma f]^B - m_{tot}\left\{\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B + \left[D^I\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B\right\} \quad (۳\text{-}۱۱)$$

در رابطه ۳-۱۱، m_{tot} مجموع جرم چهارپره و $\left[D^I v_D^I\right]^B$ مشتق دورانی سرعت نقطه D نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین $[\Sigma f]^B$ بیان‌کننده برآیند نیروهای وارده بر نقطه‌ی D و $\left[D^I\Omega^{BI}\right]^B$ ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاوی‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین $\left[D^I\Omega^{BI}\right]^B$ نشان‌دهنده مشتق دورانی سرعت زاوی‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی و $[s_{cd}]^B$ بردار واصل از نقطه‌ی D به نقطه C با انتقال قاب بدنی به قاب اینرسی، معادله ۳-۱۱ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &m_{tot}\left[D^B v_D^I\right]^B + m_{tot}\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[v_D^I\right]^B = \\ &[\Sigma f]^B - m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B + \left[D^I\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B\right\} \end{aligned} \quad (۳\text{-}۱۲)$$

همچنین به دلیل اینکه سرعت محل اتصال چهارپره(نقطه D) صفر است؛ دو عبارت سمت چپ معادله ۳-۱۲ هر دو صفر هستند. در نتیجه معادله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$[\Sigma f]^B - m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B + \left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B[s_{cd}]^B\right\} \quad (۳\text{-}۱۳)$$

عبارت $[\Sigma f]^B$ بیانگر مجموع نیروهای وارد بر چهارپره است که به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$[\Sigma f]^B = [f_D]^B + [f_T]^B + [f_G]^B \quad (۳\text{-}۱۴)$$

در رابطه ۳-۱۴، بردار $[f_D]^B$ مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی D است. همچنین بردار $[f_T]^B$ بیانگر مدموع نیروی تراست پرهها در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[f_G]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1+T_2+T_3+T_4 \end{bmatrix} \quad (۳\text{-}۱۵)$$

مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی D است. همچنین بردار $[f_G]^B$ بیانگر نیروی وزن چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[f_G]^B = [C]^{BL} [f_G]^L \tag{۳-۱۶}$$

در رابطه ۳-۱۶، ماتریس انتقال از دستگاه مختصات تراز محلی (L) به دستگاه مختصات بدنی است. با جایگذاری روابط ۳-۱۳، ۳-۱۴، ۳-۱۵ و ۳-۱۶ عبارت زیر برای نیروی تکیه‌گاهی حاصل می‌شود.

$$[f_D]^B = -[f_G]^B - [f_T]^B + m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B \left[\Omega^{BI}\right]^B [s_{cd}]^B + \left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B [s_{cd}]^B\right\} \tag{۳-۱۷}$$

سپس از حاصل‌ضرب نیروی تکیه‌گاه مدل شده در معادله ۳-۱۷ در بردار محل اثر آن، گشتاور ایجاد شده توسط نیروی اتصال کلی به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_d]^B = [s_{DC}]^B \left(-[f_G]^B - [f_T]^B m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B \left[\Omega^{BI}\right]^B [s_{cd}]^B\right\}\right) \tag{۳-۱۸}$$

در رابطه ۳-۱۸ بردار $[s_{DC}]^B$ بیانگر فاصله‌ی نقطه‌ی D از مرکز ثقل چهارپره (h_{cg}) است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[s_{DC}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cg} \end{bmatrix} \tag{۳-۱۹}$$

درنتیجه با جمع گشتاورهای ناشی از نیروهای آیرودینامیک پره‌ها از معادله ۳-۱۰ و گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه از معادله ۳-۱۸، گشتاور خارجی کلی اعمالی به چهارپره به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_B]^B = [m_A]^B + [m_D]^B \tag{۳-۲۰}$$

۳-۵ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی

در این بخش، گشتاورهای خارجی چهارپره و تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در معادله دیفرانسیل اویلر جایگذاری شده و شکل نهایی معادله دیفرانسیل استند چهارپره حاصل می‌شود. با جایگذاری مقدار گشتاورهای اعمالی به چهارپره از معادله ۳-۲۰ در معادله ۳-۱ رابطه موردنیاز برای مدل‌سازی دینامیک دورانی استند بهصورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\left[\frac{d\omega^{BI}}{dt}\right]^B = \left([J]^B\right)^{-1}\Bigg(-\left[\Omega^{BI}\right]\times\left([J]^B\left[\omega^{BI}\right]^B+[I_R]^B\right)+ [m_A]^B+[s_{DC}]^B\Bigg(-[G]^B-[T]^B+ m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B+\left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B[s_{cd}]^B\right\}\Bigg)\Bigg) \tag{۳-۲۱}$$

در رابطه ۳-۲۱، عبارت $\left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B$ بیانگر ماتریس پادمتقارن بردار مشتق سرعت زاویه‌ای بدنی $\left[\frac{d\omega^{BI}}{dt}\right]^B$ است. جمله آخر در معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_{tot}\,[s_{DC}]^R\left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B[s_{CD}]^R = m_{tot}\,[s_{DC}]^R\,[s_{DC}]^R\left[\dot\omega^{BI}\right]^B \tag{۳-۲۲}$$

با جایگذاری معادله ۳-۲۲ در معادله ۳-۲۱ و ساده سازی بردار سرعت زاویه‌ای پرنده به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{gathered}\left[\frac{d\omega^{BI}}{dt}\right]^B = A^{-1}b\\ A = I - m_{tot}\left([J]^B\right)^{-1}[s_{DC}]^B[s_{DC}]^B\\ b=\left([J]^B\right)^{-1}\Bigg(-\left[\Omega^{BI}\right]\times\left([J]^B\left[\omega^{BI}\right]^B+[I_R]^B\right)+ [m_A]^B+[s_{DC}]^B\Bigg(-[G]^B-[T]^B+ m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B+\left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B[s_{cd}]^B\right\}\Bigg)\Bigg)\end{gathered} \tag{۳-۲۳}$$

با جایگذاری معادلات بدست آمده در معادله ۳-۲۳ مؤلفه‌های بردار مشتق سرعت زاویه‌ای چهارپره به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{p} =& \frac{h_{cg} g m_{dot} \cos(\theta)\sin(\phi) + (J_{22} - J_{33} + 2m_{tot}h_{ch}^2)\, qr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} \\ &+ \frac{bd_{cg}\,(\omega_2^2 - \omega_4^2) + qJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}\end{aligned} \tag{۳-۲۴}$$

$$\begin{aligned}\dot{q} =& \frac{h_{cg} g m_{dot} \sin(\theta) + (J_{33} - J_{11} + 2m_{tot}h_{ch}^2)\, pr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} \\ &+ \frac{bd_{cg}\,(\omega_1^2 - \omega_3^2) - pJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}\end{aligned} \tag{۳-۲۵}$$

$$\dot{r} = \frac{pq(J_{11} - J_{22}) + d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)}{J_{33}} \tag{۳-۲۶}$$

به منظور انتشار وضعیت دورانی چهارپره، از روش انتشار اویلر استفاده می‌شود. در این‌صورت [۲۳] :

$$\dot{\phi} = p + q\sin(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\tan(\theta)$$

$$\dot{\theta} = q\cos(\phi) - r\sin(\phi)$$

$$\dot{\psi} = (q\sin(phi)) + r\cos(\phi))\sec(\theta)$$

۳-۶ استخراج فرم فضای حالت

به منظور استخراج فرم فضای حالت، متغیرهای حالت استند سه درجه آزادی چهارپره ب صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۷)$$

معادلات ارائه شده به فرم زیر برای فضای حالت بازنویسی شدند:

$$\dot{x}_1 = x_4 + x_5 \sin(x_1)\tan(x_2) + x_6 \cos(x_1)\tan(x_2) \qquad (۳-۲۸)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \qquad (۳-۲۹)$$

$$\dot{x}_3 = (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1))\sec(x_2) \qquad (۳-۳۰)$$

$$\dot{x}_4 = A_1 \cos(x_2)\sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3\left(\omega_2^2 - \omega_4^2\right) + A_4 x_5\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \qquad (۳-۳۱)$$

$$\dot{x}_5 = B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3\left(\omega_1^2 - \omega_3^2\right) + B_4 x_4\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \qquad (۳-۳۲)$$

$$\dot{x}_6 = C_1 x_4 x_5 + C_2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2\right) \qquad (۳-۳۳)$$

ثابت‌های معادلات بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_2 = \frac{2m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22} - J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_3 = \frac{d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \quad A_4 = \frac{J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}}$$

$$B_1 = \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_2 = \frac{-2m_{tot} h_{cg}^2 - J_{11} + J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_3 = \frac{d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \quad B_4 = \frac{-J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}}$$

$$C_1 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \quad C_2 = \frac{d}{J_{33}}$$

به منظور شبیه‌سازی ، پارامترهای استند به صورت جدول ۳-۱ درنظر گرفته شده‌است که مقدار پارامترهای استند آزمایشگاه است.

جدول ۳-۱: پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره[۵]

پارامتر	واحد	مقدار پارامتر استند چهارپره
h_{cg}	m	0.02
m_{tot}	kg	0.638
J_{11}	$kg.m^2$	0.02839
J_{22}	$kg.m^2$	0.03066
J_{33}	$kg.m^2$	0.0439
b	1	3.13×10^{-5}
d_{cg}	m	0.2
d	1	3.2×10^{-6}

۳-۷ خطی‌سازی

با استفاده از فرم فضای‌حالت استخراج شده در بخش ۳-۶ در این قسمت خطی‌سازی انجام شده‌است. در قسمت ۳-۷-۱ به صورت چند ورودی و چند خروج [1] ی برای سرعت دورانی پره‌ها در 2000 RPM و حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در قسمت بعد مسئله به صورت یک ورودی و یک خروجی [2] حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در این قسمت برای فازهای مختلف ورودی و یک خروجی در نظر گرفته‌شده‌است و برای فازهای رول، پیچ و یاو مسئله حل شده‌است سپس از مجموع خروجی‌های بدست‌آمده خروجی کلی یعنی سرعت دورانی پره‌ها بدست‌آمده‌است.

[1] MIMO
[2] SISO

۳-۷-۱ خطی‌سازی به فرم چند ورودی چند خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود.

$$a=\begin{bmatrix} x_4+x_5\sin(x_1)\tan(x_2)+x_6\cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5\cos(x_1)-x_6\sin(x_1) \\ (x_5\sin(x_1)+x_6\cos(x_1))\sec(x_2) \\ A_1\cos(x_2)\sin(x_1)+A_2x_5x_6+A_3\left(\omega_2^2-\omega_4^2\right)+A_4x_5\left(\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4\right) \\ B_1\sin(x_2)+B_2x_4x_6+B_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)+B_4x_4\left(\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4\right) \\ C_1x_4x_5+C_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_3^2-\omega_4^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}\phi & \theta & \psi & p & q & r\end{bmatrix}^T \tag{۳-۳۴}$$

$$\vec{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4\end{bmatrix}^T \tag{۳-۳۵}$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده‌است.

$$\delta\dot{\vec{x}}=\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x}+\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{\omega}}\delta\vec{\omega} \tag{۳-۳۶}$$

$$\dot{\vec{x}}=\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1 & \delta\dot{x}_2 & \delta\dot{x}_3 & \delta\dot{x}_4 & \delta\dot{x}_5 & \delta\dot{x}_6\end{bmatrix}^T \tag{۳-۳۷}$$

$$A=\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۸}$$

$$B = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_4} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۹}$$

به علت حجم بالای معادلات رابطه خطی‌سازده شده چهارپرده در گزایش آورده نشده‌است اما در شبیه سازی به طور کامل لحاظ شده‌است.

۳-۷-۲ خطی‌سازی به فرم یک ورودی یک خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود.

$$a = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1)\tan(x_2) + x_6 \cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2)\sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 \left(\omega_2^2 - \omega_4^2\right) + A_4 x_5 \left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 \left(\omega_1^2 - \omega_3^2\right) + B_4 x_4 \left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 \left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2\right) \end{bmatrix}$$

در این قسمت برای ساده‌سازی ورودی مسئله را از سرعت رورانی به نیروهای تاثیرگذار در مودهای رول، پیچ و یاو تغیر داده‌شده‌است. این کار باعث می‌شود که مسئله از چند ورودی و چند خروجی به سه مسئله یک ورودی و یک خروجی تبدیل می‌شود. نیروها به فرم رابطه ۳-۴۰ تعریف می‌شوند.

$$u_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad u_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad u_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \tag{۳-۴۰}$$

با توجه به اینکه سه نیرو در نظر گرفته‌شده و مسئله نیاز به چهار خروجی دارد یک نیرو دیگر نیز در نظر گرفته‌می‌شود که به فرم رابطه ۳-۴۱ است و مقدار آن به صورت ثابت و برابر با سرعت دورانی تمام پره‌ها در دورنامی یعنی 2000 RPM در نظر گرفته‌شده‌است.

$$u_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \tag{۳-۴۱}$$

در ادامه روابط ۳-۴۰ و ۳-۴۱ را در فضای حالت سیستم جایگزین می‌کنیم و برای سادگی قسمت‌های $(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)$ از معادلات حذف شدند.

فضای حالت جدید:

$$a = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1)\tan(x_2) + x_6 \cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2)\sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 u_1 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 u_2 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 u_3 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۲}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}\phi & \theta & \psi & p & q & r\end{bmatrix}^T \tag{۳-۴۳}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{bmatrix}^T \tag{۳-۴۴}$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده‌است.

$$\delta\dot{\vec{x}} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{u}}\delta\vec{u} \tag{۳-۴۵}$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1 & \delta\dot{x}_2 & \delta\dot{x}_3 & \delta\dot{x}_4 & \delta\dot{x}_5 & \delta\dot{x}_6\end{bmatrix}^T \tag{۳-۴۶}$$

$$A = \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{x}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\
\frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\
\frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\
\frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\
\frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\
\frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6}
\end{bmatrix} \tag{۳-۴۷}$$

$$B = \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{u}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial a_1}{\partial u_1} & \frac{\partial a_1}{\partial u_2} & \frac{\partial a_1}{\partial u_3} & \frac{\partial a_1}{\partial u_4} \\
\frac{\partial a_2}{\partial u_1} & \frac{\partial a_2}{\partial u_2} & \frac{\partial a_2}{\partial u_3} & \frac{\partial a_2}{\partial u_4} \\
\frac{\partial a_3}{\partial u_1} & \frac{\partial a_3}{\partial u_2} & \frac{\partial a_3}{\partial u_3} & \frac{\partial a_3}{\partial u_4} \\
\frac{\partial a_4}{\partial u_1} & \frac{\partial a_4}{\partial u_2} & \frac{\partial a_4}{\partial u_3} & \frac{\partial a_4}{\partial u_4} \\
\frac{\partial a_5}{\partial u_1} & \frac{\partial a_5}{\partial u_2} & \frac{\partial a_5}{\partial u_3} & \frac{\partial a_5}{\partial u_4} \\
\frac{\partial a_6}{\partial u_1} & \frac{\partial a_6}{\partial u_2} & \frac{\partial a_6}{\partial u_3} & \frac{\partial a_6}{\partial u_4}
\end{bmatrix} \tag{۳-۴۸}$$

روابط بالا به فرم یک سیستم یک ورودی و یک خروجی نوشته‌شده‌است.

مود رول

$$A_{roll} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial a_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۴۹)$$

$$B_{roll} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial a_4}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \qquad (۳-۵۰)$$

مود پیچ

$$A_{pitch} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_5} \\ \dfrac{\partial a_5}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۵۱)$$

$$B_{pitch} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial a_5}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \qquad (۳-۵۲)$$

مود یاو

$$A_{yaw} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \dfrac{\partial a_6}{\partial x_3} & \dfrac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۵۳)$$

$$B_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۴}$$

استخراج سرعت دورانی پره‌ها از نیروها

چهارمعادله و چهارمجهول:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ u_2 &= \omega_1^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \\ u_4 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{aligned} \tag{۳-۵۵}$$

جواب معادلات ۳-۵۵ به فرم رابطه ۳-۵۶ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_4 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 - 2u_2}{4}} \end{aligned} \tag{۳-۵۶}$$

۳-۸ نتیجه‌گیری

در این پروژه روش بازی دیفرانسیلی بررسی شد و برای یک استند آزمایشگاهی پیاده‌سازی شد. در آخر این روش با روش معروف LQR نیز مقایسه شد. با توجه به گسترش شاخه تئوری بازی و نیازمندی زیاد به چهارپره در آینده می‌توان به این روش امیدوار بود و کاربردهای بیشتری از آن را در آینده دید.

مراجع

[1] dreamstime. boeing ch chinook, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at https://cutt.ly/onRvD7x.

[2] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/.

[3] iranlabexpo. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at https://iranlabexpo.ir/product/28033.

[4] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent backstepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.

[5] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.

[6] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on se(3). In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.

[7] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.

[8] A. Redulla and S. P. N. Singh. Simulating differential games with improved fidelity to better inform cooperative adversarial two vehicle uav flight. In *2018 IEEE International Conference on Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots (SIMPAR)*, pages 130–136, 2018.

[9] J. Wang, W. Lou, Y. Zhao, and W. Liu. Fixed-wing uav recovery reliably by moving platforms based on differential games. In *2019 IEEE International Conference on Unmanned Systems (ICUS)*, pages 694–698, 2019.

[10] B. Başpınar and E. Koyuncu. Assessment of aerial combat game via optimization-based receding horizon control. *IEEE Access*, 8:35853–35863, 2020.

[11] M. Pachter, E. Garcia, and D. W. Casbeer. Toward a solution of the active target defense differential game. *Dynamic Games and Applications*, 9(1):165–216, Mar 2019.

[12] R. Chapa-Garcia, M. Jimenez-Lizarraga, O. Garcia, and T. Espinoza-Fraire. Formation flight of fixed-wing uavs based on linear quadratic affine game. In *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 736–741, 2016.

[13] Y. Choi, M. Pachter, and D. Jacques. Optimal relay uav guidance-a new differential game. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 1024–1029, 2011.

[14] J. Salmon, L. Willey, D. Casbeer, E. García, and A. Von Moll. Single pursuer and two cooperative evaders in the border defense differential game. *Journal of Aerospace Information Systems*, 17:1–11, 03 2020.

[15] S. Bouabdallah and R. Siegwart. Full control of a quadrotor. In *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 153–158, 2007.

[16] M. Delfour. Linear quadratic differential games: Saddle point and riccati differential equation. *SIAM J. Control and Optimization*, 46:750–774, 01 2007.

[17] E. Kuantama, I. Tarca, and R. Tarca. Feedback linearization lqr control for quadcopter position tracking. In *2018 5th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, pages 204–209, 2018.

[18] M. W. Mueller and R. D'Andrea. Stability and control of a quadrocopter despite the complete loss of one, two, or three propellers. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 45–52, 2014.

[19] H. Lee and H. J. Kim. Trajectory tracking control of multirotors from modelling to experiments: A survey. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15(1):281–292, Feb 2017.

[20] P. Pradeep, S. G. Park, and P. Wei. Trajectory optimization of multirotor agricultural uavs. In *2018 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–7, 2018.

[21] C. Aoun, N. Daher, and E. Shammas. An energy optimal path-planning scheme for quadcopters in forests. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 8323–8328, 2019.

[22] S. Li, E. Öztürk, C. D. Wagter, G. C. H. E. de Croon, and D. Izzo. Aggressive online control of a quadrotor via deep network representations of optimality principles. *CoRR*, abs/1912.07067, 2019.

[23] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.

[24] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.

Sharif University of Technology

Department of Aerospace Engineering

Optimal Control I Project

LQDG Controler for 3DOF Quadcopter Stand

By:

Ali BaniAsad

Supervisor:

Dr. Nobahari

August 2021