دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی
مهندسی کنترل

عنوان:

کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهرویر ۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی[1] استتفاده شده‌است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده‌است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده‌است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش[2] که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش ورودی مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی مقاومت مناسبی دارد. از روش ارائه‌شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده‌است. برای ارزیابی عملکرد این روش ابتدا شبیه‌سازی‌هایی در محیط سیمولینک انجام شده‌است و سپس، با پیاده‌سازی آن صحت عملکرد آن تایید شده‌است.

کلیدواژه‌ها: چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی،مدل‌مبنا، تنظیم‌کننده مربعی خطی

---

[1] Game Theory
[2] Nash Equilibrium

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر[1] یکی از انواع وسایل پرنده است. چهارپره‌ها نوعی هواگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپره‌ها جای دارند. چهارپره‌ها به‌دلیل داشتن توانایی مانور خوب و امکان پرواز ایستا با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده‌ای دارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده‌است. بنابراین، روزانه پیشرفت چشمگیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویربرداری، تفریحی و کشاورزی از کاربرد زیاد و روزافزونی دارند و مدل‌های دارای سرنشین آن نیز تولید شده‌است.

۱-۱ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندپره در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Jacques و Louis Breguet ساخته‌شد. پرنده آن‌ها موفق به پرواز به‌صورت عمودی شد؛ ولی تنها تا ارتفاع دو فوتی پرواز کرد. پرواز انجام شده یک پرواز آزاد[2] نبود و پرنده به کمک چهار مرد ثابت نگه‌داشته شده‌بود [۱]. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمی‌گردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی به نام Étienne Oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع کرد و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد. در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد [۲].

[1] Quadcopter
[2] Free Flight

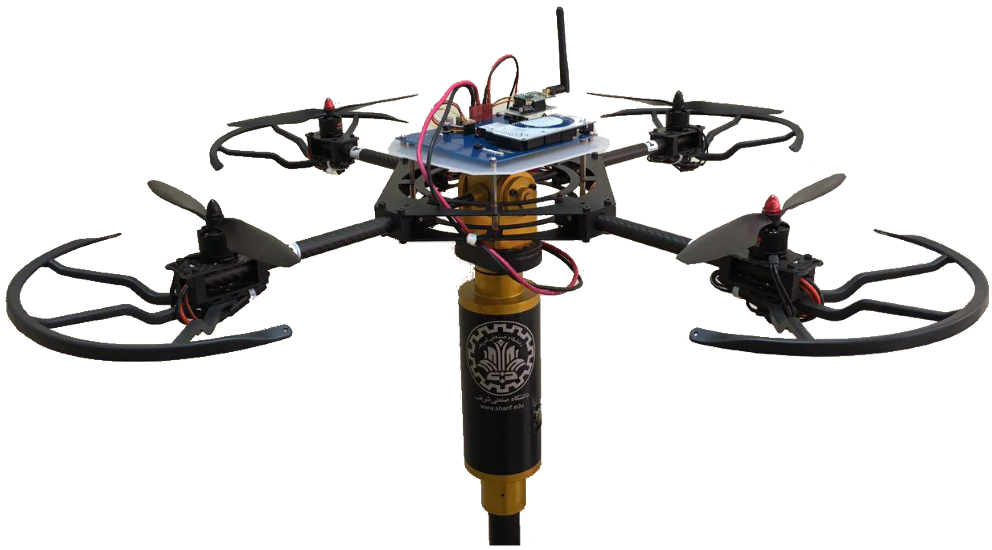
در سال ۱۹۲۲ در آمریکا George de Bothezata موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود.

در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده‌است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده است و به تدریج رواج یافته‌است [۳].

از حدود سال ۲۰۰۶ کواد کوپترها شروع به رشد صنعتی به‌صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

۱-۲ تعریف مسئله

مسئله‌ای که در این پروژه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مربعی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی (شکل ۱-۲) شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده است. در این صورت، تنها وضعیت چهارپره (زوایای رول[۳]، پیچ[۴] و یاو[۵]) تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین، می‌توان با مقیدکردن چرخش حول هر محور، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به‌صورت مجزا و یا با یکدیگر بررسی کرد.



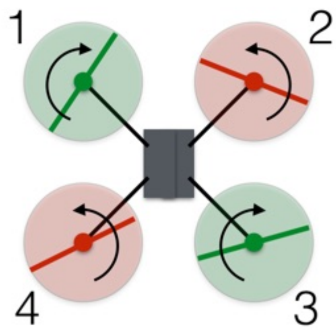
شکل ۱-۱: استند کنترل وضعیت سه درجه آزادی چهارپره [۴]

[3] Roll
[4] Pitch
[5] Yaw

با توجه به شکل، مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان آن را به‌صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین، سامانه به‌صورت حلقه‌باز ناپایدار است. این سامانه دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زوایای اویلر (ψ, θ, ϕ) است. در مدل‌سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد؛ اما، با توجه به کنترل‌کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به‌صورت اغتشاش درنظر گرفت و سامانه را به خوبی کنترل کرد.

۱-۲-۱ ساختار چهارپره

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها گشتاورهای عکس‌العملی یکدیگر را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.



شکل ۱-۲: جهت چرخش پره‌های چهارپره [۵]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیادتر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به‌صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و گشتاور یاو ایجاد می‌شود و نیروی برآ ثابت می‌ماند؛ بنابراین، چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. همچنین، با کم و زیاد کردن دو به دو سرعت موتورهای مجاور چهارپره از حالت افقی خارج شده و در صفحه افق حرکت می‌کند.

۱-۳ نظریه بازی

نظریه بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. نظریه بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه بازی در تلاش است تا به وسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایط راهبردی یا در یک بازی که در آن موفقیت فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی

در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراه جان هارسانی و راینهارد سیلتن به خاطر مطالعات خلاقانه‌ی خود در زمینه‌ی نظریه بازی، برنده‌ی جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برندگان جایزه‌ی نوبل اقتصاد از میان متخصصین نظریه بازی انتخاب شدند. آخرین آن‌ها، ژان تیرول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد [۶].

۱-۳-۲ تعادل نش

پژوهش‌ها در این زمینه اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به عنوان تعادل در بازی‌ها استوار است. این راهبردها به‌طور معمول از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش است. تعادل نش در بازی‌هایی کاربرد دارد در آن فرض شده‌است که هر بازیکن به راهبرد تعادل دیگر بازیکنان آگاه است. بر اساس نظریه‌ی تعادل نش، در یک بازی که هر بازیکن امکان انتخاب‌های گوناگون دارد اگر بازیکنان به روش منطقی راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حداکثر سود در بازی باشند، دست کم یک راهبرد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن وجود دارد و چنانچه بازیکن راهکار دیگری را انتخاب کند، نتیجه‌ی بهتری به دست نخواهد آورد.

فصل ۲

بازی دیفرانسیلی

در تئوری بازی‌ها، بازی‌های دیفرانسیل مجموعه‌ای از مسائل مربوط به مدل‌سازی و تحلیل در چارچوب یک سامانه دینامیکی هستند. ویژگی بازی‌های دیفرانسیلی این است که در آن‌ها رفتار متغیرهای حالت با یک معادله دیفرانسیل بیان می‌شود [۷]. در بخش ۲-۱ به بررسی کوتاه بازی دیفرانسیلی پرداخته می‌شود. در بخش ۲-۳ کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی [۱] و در بخش ۲-۳ به معرفی کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی [۲] پرداخته می‌شود. به بررسی کنترل‌کننده مبتی بر بر بازی دیفرانسیلی پرداخته می‌شود.

۲-۱ مقدمه‌ای بر بازی دیفرانسیلی

این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله برای یک سامانه خطی پیوسته با معالات حالت:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{u_2}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{D_2}\boldsymbol{u_2}(t) \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

که در رابطه (۲-۱) $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$، $\boldsymbol{u_1}$ و $\boldsymbol{u_2}$ به ترتیب بیانگر بردار حالت، بردار خروجی، بردار ورودی بازیکن اول و بردار ورودی بازیکن دوم هستند. همچنین، $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B_1}$، $\boldsymbol{B_2}$، $\boldsymbol{C}$، $\boldsymbol{D_1}$ و $\boldsymbol{D_2}$ به ترتیب بیانگر ماتریس حالت، ماتریس ورودی بازیکن اول، ماتریس ورودی بازیکن دوم، ماتریس خروجی، ماتریس فیدفوروارد بازیکن

[1] Linear Quadratic Regulator Based on the Differential Game Theory (LQDG)
[2] Linear Quadratic Integral Regulator Based on the Differential Game Theory (LQDG)

اول و ماتریس فیدفوروارد بازیکن دوم هستند [۸]. بر اساس رابطه (۲-۱) دینامیک سامانه تحت تاثیر هر دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا ممکن است تلاش بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. این پروژه حالت همکاری دو بازیکن را بررسی نمی‌کند و دو بازیکن در تلاش برای کم کردن تابع هزینه خود و زیادکردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن در زمان $t \in [0, T]$ به صورت مربعی[۳] است. هدف اصلی کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه برای بازیکن شماره i (این مسئله شامل دو بازیکن است) به فرم رابطه (۲-۲) نوشته می‌شود.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u_i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{u_i}(t) + \boldsymbol{u_j}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ij}}\boldsymbol{u_j}(t)\right) dt \qquad (۲-۲)$$

در رابطه (۲-۲) $\boldsymbol{Q_i}$، $\boldsymbol{R_{ii}}$ و $\boldsymbol{R_{ij}}$ به ترتیب بیانگر اهمیت میزان اهمیت انحراف متغیرهای حالت مقادیر مطلوب برای بازیکن شماره i ،میزان تلاش کنترلی بازیگر شماره i و میزان تلاش کنترلی بازیگر شماره j هستند. در اینجا ماتریس‌های $\boldsymbol{Q_i}$ ، $\boldsymbol{R_{ii}}$ و $\boldsymbol{H}$ متقارن فرض شده‌اند و ماتریس $\boldsymbol{R_{ii}}$ به صورت مثبت معین $(\boldsymbol{R_{ii}} > 0)$ فرض شده است[۹].

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان $t \in [0, T]$ فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سامانه را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان هماهنگی بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش یک راه حل برای بازی دیفرانسیلی با شرایط اشاره شده ارائه می‌دهد.

قضیه‌ی ۲-۱ به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول $(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$ یک **تعادل نش** برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات قابل قبول $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2})$ از نامساوی (۲-۳) پیروی کنند.

$$J_1(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_1(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}^*) \text{ and } J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}) \qquad (۲-۳)$$

در اینجا قابل قبول بودن به‌معنی آن است که $\boldsymbol{u_i}(.)$ به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه‌ی حرکات که بستگی به اطلاعات بازیکنان از بازی دارد، مجموعه‌ای از راهبردهایی است که بازیکنان ترجیح می‌دهند برای کنترل سامانه انجام دهند و سامانه (۲-۱) باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

[3] Quadratic Cost Function

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد. به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات $(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$ یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه $J_i,\ (i = 1, 2)$ است.

۲-۲ کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

برای یک سامانه خطی پیوسته با معادلات حالت:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{u_2}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{D_2}\boldsymbol{u_2}(t) \end{aligned} \tag{۲-۴}$$

فرمان کنترلی بهینه LQDG بازیکن شماره i به‌صورت رابطه (۲-۵) محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{u_i}(t) = -\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_i}(t)\boldsymbol{x}(t), \quad i = 1, 2 \tag{۲-۵}$$

که در رابطه (۲-۵)، ضریب ماتریس $\boldsymbol{x}(t)$ بیانگر بهره بازخورد بهینه است. این بهره به گونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هزینه مربعی بازیکن شماره i با فرض بدترین حرکت سایر بازیکنان کمینه شود. تابع هزینه بازیکن شماره i در زیر آورده شده است.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u_i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{u_i}(t) + \boldsymbol{u_j}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ij}}\boldsymbol{u_j}(t)\right) dt \tag{۲-۶}$$

در رابطه (۲-۵)، ماتریس $\boldsymbol{K_i}(t)$ بیانگر پاسخ معادله کوپل ریکاتی[۴] زیر است [۷]:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_1}(t) - \boldsymbol{K_1}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_1} + \boldsymbol{K_1}(t)\boldsymbol{S_1}(t)\boldsymbol{K_1}(t) + \boldsymbol{K_1}(t)\boldsymbol{S_2}(t)\boldsymbol{K_2}(t) \\ \dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{2}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_2}(t) - \boldsymbol{K_2}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_2} + \boldsymbol{K_2}(t)\boldsymbol{S_2}(t)\boldsymbol{K_2}(t) + \boldsymbol{K_2}(t)\boldsymbol{S_1}(t)\boldsymbol{K_1}(t) \end{aligned} \tag{۲-۷}$$

برای سادگی از نمادسازی $\boldsymbol{S_i} := \boldsymbol{B_i}\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_i}^{\mathrm{T}}$ استفاده شده‌است.

[4]Coupled Riccati Differential Equations

۲-۳ کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

در صورت وجود اغتشاش و یا خطای مدل‌سازی، عدم وجود انتگرال‌گیر در کنترل‌کننده LQDG می‌تواند باعث ایجاد خطای حالت ماندگار شود. به‌منظور حذف این خطا، کنترل‌کننده LQIDG بر پایه کنترل‌کننده LQDG تعمیم‌یافته است. در این کنترل‌کننده، انتگرال اختلاف بین خروجی سیستم و مقدار مطلوب به بردار حالت اضافه شده‌است. بنابراین، بردار حالت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{x_a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_d} - \boldsymbol{x} \\ \int (\boldsymbol{y_d} - \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} \tag{۲-۸}$$

در رابطه ۲-۸، بردار حالت افزوده[5]، $\boldsymbol{x_d}$ بردار حالت مطلوب و $\boldsymbol{y_d}$ بردار خروجی مطلوب است. ماتریس $\boldsymbol{C}$ یک ماتریس همانی است در نظر گرفته شده‌است؛ بنابراین، بردار خروجی برابر با بردار حالت خواهد بود:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \tag{۲-۹}$$

با تعریف بردار حالت افزوده، معادلات حالت به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}}(t) &= \boldsymbol{A}_a \boldsymbol{x_a}(t) + \boldsymbol{B}_{a_{a_1}} \boldsymbol{u_{a_1}}(t) + \boldsymbol{B}_{a_{a_2}} \boldsymbol{u_{a_2}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}_a \boldsymbol{x_a}(t) + \boldsymbol{D}_{a_{a_1}} \boldsymbol{u_{a_1}}(t) + \boldsymbol{D}_{a_{a_2}} \boldsymbol{u_{a_2}}(t) \end{aligned} \tag{۲-۱۰}$$

که ماتریسهای $\boldsymbol{A}_a$ و $\boldsymbol{B}_a$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{A}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{۲-۱۱}$$

$$\boldsymbol{B}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۲-۱۲}$$

با معرفی معادلات حالت جدید برای سامانه، سایر گام‌های طراحی کنترل‌کننده LQIDG مشابه کنترل‌کننده LQDG است. بنابراین، فرمان کنترلی بهینه LQIDG بازیکن شماره i به‌صورت رابطه (۲-۱۳) محاسبه می‌شود.

[5] Augmented

$$\boldsymbol{u_i}(t) = -\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_{a_i}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_{a_i}}(t)\boldsymbol{x_a}(t), \quad i = 1, 2 \tag{۱۳-۲}$$

که در رابطه (۲-۱۳) ،ضریب ماتریس $\boldsymbol{x_a}(t)$ بیانگر بهره بازخورد بهینه است. این بهره به گونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هزینه مربعی بازیکن شماره i با فرض بدترین حرکت سایر بازیکنان کمینه شود. تابع هزینه بازیکن شماره i در زیر آورده شده است.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T \left(\boldsymbol{x_a}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x_a}(t) + \boldsymbol{u_i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{u_i}(t) + \boldsymbol{u_j}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ij}}\boldsymbol{u_j}(t)\right) dt \tag{۱۴-۲}$$

در رابطه (۲-۵) ، ماتریس $\boldsymbol{K_i}(t)$ بیانگر پاسخ معادله کوپل ریکاتی[۶] زیر است [۷]:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{a_1}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_{a_1}}(t) - \boldsymbol{K_{a_1}}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_{a_1}} + \boldsymbol{K_{a_1}}(t)\boldsymbol{S_{a_1}}(t)\boldsymbol{K_{a_1}}(t) + \boldsymbol{K_{a_1}}(t)\boldsymbol{S_{a_2}}(t)\boldsymbol{K_{a_2}}(t) \\
\dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{a_2}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_{a_2}}(t) - \boldsymbol{K_{a_2}}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_{a_2}} + \boldsymbol{K_{a_2}}(t)\boldsymbol{S_{a_2}}(t)\boldsymbol{K_{a_2}}(t) + \boldsymbol{K_{a_2}}(t)\boldsymbol{S_{a_1}}(t)\boldsymbol{K_{a_1}}(t)
\end{aligned} \tag{۱۵-۲}$$

برای سادگی از نمادسازی $\boldsymbol{S_{a_i}} := \boldsymbol{B_{a_i}}\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_{a_i}}^{\mathrm{T}}$ استفاده شده‌است.

[6] Coupled Riccati Differential Equations

مراجع

[1] L. Sprekelmeyer. *These We Honor: The International Aerospace Hall of Fame.* 2006.

[2] M. J. Hirschberg. A perspective on the first century of vertical flight. *SAE Transactions*, 108:1113–1136, 1999.

[3] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on se(3). In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.

[4] http://gcrc.sharif.edu. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed November 2, 2021], Available at `https://cutt.ly/yYMvhYv`.

[5] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at `https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/`.

[6] nobelprize.org. Jean tirole, 2021. [Online; accessed October 17, 2021], Available at `https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2014/tirole/facts/`.

[7] B. Djehiche, A. Tcheukam, and H. Tembine. Mean-field-type games in engineering. *AIMS Electronics and Electrical Engineering*, 1(1):18–73, 2017.

[8] W. L. Brogan. *Modern control theory.* 1974.

[9] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.

Sharif University of Technology
Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

LQDG Controler for 3DOF Quadcopter Stand

By:

Ali BaniAsad

Supervisor:

Dr. Nobahari

August 2021