



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی  
مهندسی کنترل

عنوان:

# کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهریور ۱۴۰۰

سلام افلا

## سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

## چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی<sup>۱</sup> استفاده شده است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش<sup>۲</sup> که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش ورودی مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی مقاومت مناسبی دارد. از روش ارائه شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده است. برای ارزیابی عملکرد این روش ابتدا شبیه‌سازی‌هایی در محیط سیمولینک انجام شده است و سپس، با پیاده‌سازی آن صحت عملکرد آن تایید شده است.

کلیدواژه‌ها: چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، مدل مبنا، تنظیم‌کننده مربعی خطی

---

<sup>1</sup>Game Theory

<sup>2</sup>Nash Equilibrium

# فهرست مطالب

۲	۱ مدل سازی چهارپره
۲	۱-۱ فرضیات مدل سازی
۳	۲-۱ معادله گشتاور
۴	۱-۲-۱ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره ها
۵	۲-۲-۱ گشتاور ناشی از نیروی تکیه گاه
۷	۳-۱ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ ها
۸	۴-۱ گشتاورهای ناشی از جرم استند
۸	۱-۴-۱ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی
۱۰	۵-۱ استخراج فرم فضای حالت
۱۲	۶-۱ خطی سازی
۱۳	۱-۶-۱ خطی سازی به فرم چند ورودی چند خروجی
۱۶	۲-۶-۱ خطی سازی به فرم یک ورودی یک خروجی

# فهرست شکل‌ها

۱-۱ شماتیک استند چهارپره	۳
--------------------------	---

## فهرست جدول‌ها

۱-۱	پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۵]	۱۲
-----	----------------------------------------	----

# فصل ۱

## مدلسازی چهارپره

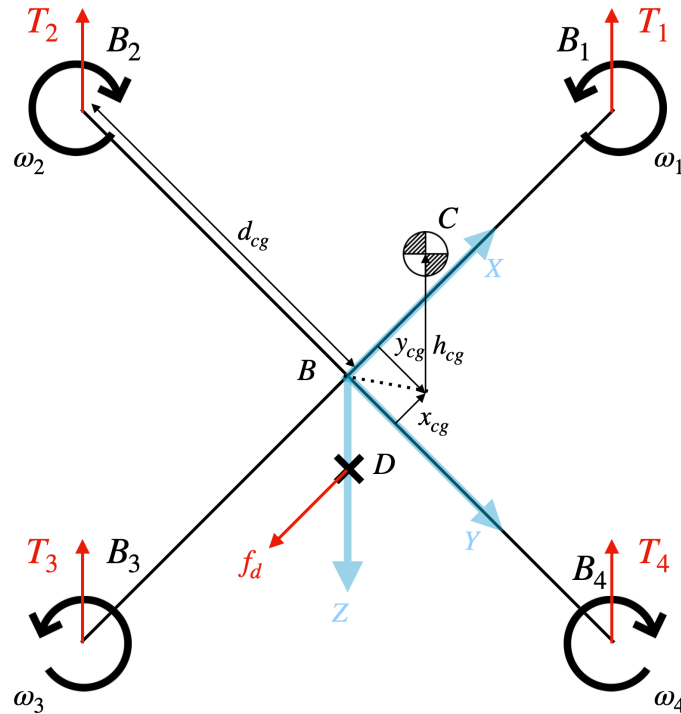
در این فصل به مدلسازی استند چهارپره آزمایشگاهی پرداخته شده است. به این منظور، ابتدا فرضیات مربوط به مدلسازی چهارپره بیان می‌شود. سپس معادلات حاکم بر حرکات دورانی چهارپره بیان می‌شود. در ادامه، به استخراج گشتاورهای خارجی اعمالی به استند شامل گشتاورهای آیرودینامیکی ناشی از پره، گشتاور نیروی تکیه گاه و گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها پرداخته می‌شود. در گام بعد، معادله نهایی دینامیک دورانی استند استخراج می‌شود. سپس، فرم فضای حالت استند آزمایشگاهی استخراج می‌شود. لازم به توضیح است که فرم نهایی فضای حالت استند بدون در نظر گرفتن اصطکاک بیرینگ‌ها از منبع [۱] آورده شده است که در آن منبع، مدل استخراج شده با اعمال ورودی‌ها و شرایط اولیه مختلف اعتبارسنجی شده است.

### ۱-۱ فرضیات مدلسازی

شماتیک استند چهارپره در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم، فرض می‌شود که چهارپره صلب و متقارن است. همچنین ماتریس گشتاور اینرسی چهارپره به صورت قطری در نظر گرفته می‌شود. مرکز جرم سازه چهارپره روی نقطه  $B$  و مرکز ثقل هر یک از پره‌ها به همراه قسمت دوار موتور روی نقاط  $B_1$  تا  $B_4$  است. مبدأ دستگاه مختصات بدنی روی محل تقاطع بازوهای چهارپره یعنی نقطه  $B$  در نظر گرفته شده است. از آنجایی که مرکز ثقل پره‌ها بالاتر از مرکز ثقل سازه چهارپره است، مرکز ثقل کلی چهارپره جایی بین مرکز ثقل موتورها و سازه، یعنی نقطه‌ی  $C$  می‌گیرد. همچنین قابل ذکر است که نقطه‌ی  $D$  محل اتصال کلی استند چهارپره است. جهت مثبت محور  $X^B$  و  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی به



ترتیب در راستای بازوی مربوط به موتور ۱ و ۴ فرض می شود. همچنین جهت مثبت محور  $Z^B$  با توجه به قانون دست راست حاصل می شود.



شکل ۱-۱: شماتیک استند چهارپره

## ۲-۱ معادله گشتاور

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت دورانی چهارپره، از قوانین نیوتن اوایلر استفاده می شود. معادله دیفرانسیلی اوایلر برای یک پرنده حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر بیان می شود [۲]:

$$[\dot{\omega}^{BI}]^B = ([J]^B)^{-1} \left( -[\Omega^{BI}]^B \times ([J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B) + [m_b]^B \right) \quad (1-1)$$

در رابطه ۱-۱، عبارت  $[\omega^{BI}]^B$  بیانگر بردار مشتق نرخ های زاویه ای چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین ماتریس  $[J]^B$  نشان دهنده گشتاورهای اینرسی چهارپره حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات

بدنی است که به دلیل تقارن چهارپره به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$[J]^B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \quad (۲-۱)$$

در رابطه ۲-۱، پارامترهای  $J_{11}$ ،  $J_{22}$  و  $J_{33}$  به ترتیب بیانگر گشتاورهای اینرسی چهارپره حول محورهای  $X^B$ ،  $Y^B$  و  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین بردار  $[I_R]^B$  در رابطه ۱-۱ بیانگر مجموع تکانه زاویه ای کلی پره ها در دستگاه مختصات بدنی است. از آنجا که، تکانه زاویه ای پره ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است؛ در نتیجه  $[I_R]^B$  به صورت زیر حاصل می شود:

$$[I_R]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_R \end{bmatrix} \quad (۳-۱)$$

در رابطه ۳-۱،  $l_R$  بیانگر تکانه زاویه ای کلی پره ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است که به صورت زیر حاصل می شود:

$$l_R = J_R \omega_d \quad (۴-۱)$$

در رابطه ۴-۱، پارامتر  $J_R$  بیانگر ممان اینرسی هر یک از پره ها است. همچنین  $\omega_d$  نشان دهنده تفاضل نسبی سرعت های زاویه ای پره ها است که با توجه به شکل ۱-۱ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega_d = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \quad (۵-۱)$$

همچنین  $[m_b]^B$  در رابطه ۱-۱ برآیند گشتاورهای خارجی اعمالی به چهارپره، شامل گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره ها و گشتاورهای ناشی از نیروی تکیه گاه است که در ادامه به آن پرداخته می شود.

## ۱-۲-۱ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره ها

آیرودینامیک پره ها باعث ایجاد نیروی برآ و در نتیجه گشتاورهای رول و پیچ ناشی از اختلاف نیروی برآ می شود. با استفاده از تفاضل نیروی برآی پره ها دو گشتاور رول و پیچ ایجاد می شود. با توجه به تئوری مومنتوم، نیروی برآی هر پره ( $T_i$ ) از رابطه ی زیر حاصل می شود [۳]:

$$T_i = b\omega_i^2 \quad (۶-۱)$$

در رابطه ۶-۱ و  $\omega_i$  به ترتیب بیانگر فاکتور نیروی برآ و سرعت زاویه ای هر پره است؛ بنابراین مطابق شکل ۱-۱ گشتاور رول حول محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی از رابطه زیر حاصل می شود.

$$m_X^B = d_{cg}(T_2 - T_4) = d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (۷-۱)$$

در رابطه ۷-۱ عبارت  $d_{cg}$  بیانگر فاصله مرکز هر پره از مرکز جرم چهارپره در راستای محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی است. همچنین گشتاور پیچ حول محور  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۱-۱ از رابطه زیر حاصل می شود:

$$m_Y^B = d_{cg}(T_1 - T_3) = d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \quad (۸-۱)$$

گشتاور یاو آیرودینامیکی از اختلاف گشتاور ناشی از پسای پرها ایجاد می شود؛ بنابراین، جهت این گشتاور همواره در جهت مخالف چرخش پرها است. بنابراین، گشتاور یاو حول محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۱-۱، مطابق رابطه زیر حاصل می شود:

$$m_Z^B = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (۹-۱)$$

رابطه ۹-۱ عبارت  $d$  بیانگر فاکتور گشتاور پسای پرها است. در نتیجه با توجه به معادلات ۷-۱، ۸-۱ و ۹-۱ بردار گشتاورهای خارجی ناشی از آیرودینامیک پرها در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر حاصل می شود:

$$[m_A]^B = \begin{bmatrix} m_X^B \\ m_Y^B \\ m_Z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (۱۰-۱)$$

## ۲-۲-۱ گشتاور ناشی از نیروی تکیه گاه

همانطور که در شکل ۱-۱ مشاهده می شود، نیروی  $f_d$  که در نقطه ی  $D$  از طریق اتصال کلی به چهارپره وارد می شود، باعث ایجاد گشتاور حول مرکز ثقل چهارپره می شود. به منظور مدل سازی گشتاور ناشی از این نیرو حول نقطه  $C$ ، لازم است ابتدا نیروی  $f_d$  استخراج شود. از آنجایی که نقطه ی  $D$  منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نیست؛ لذا معادله حرکت انتقالی برای نقطه اتصال  $D$  با استفاده از معادله انتقال یافته نیوتن (معادله گروبین) به صورت معادله زیر حاصل می شود [۲]:

$$m_{tot} [D^I v_D^I]^B = [\Sigma f]^B - m_{tot} \left( [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \quad (۱۱-۱)$$

در رابطه ۱-۱۱،  $m_{tot}$  مجموع جرم چهارپره و  $[D^I v_D^I]^B$  مشتق دورانی سرعت نقطه  $D$  نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[\Sigma f]^B$  بیان کننده برآیند نیروهای وارده بر نقطه  $D$  و  $[\Omega^{BI}]^B$  ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاوی های چهارپره نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[D^I \Omega^{BI}]^B$  نشان دهنده مشتق دورانی سرعت زاوی های چهارپره نسبت به قاب اینرسی و  $[s_{cd}]^B$  بردار واصل از نقطه  $D$  به نقطه  $C$  است. با انتقال قاب بدنی به قاب اینرسی معادله ۱-۱۱ به صورت زیر حاصل می شود:

$$m_{tot} [D^B v_D^I]^B + m_{tot} [\Omega^{BI}]^B [v_D^I]^B = [\Sigma f]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \quad (12-1)$$

همچنین به دلیل اینکه سرعت محل اتصال چهارپره (نقطه  $D$ ) صفر است؛ دو عبارت سمت چپ معادله ۱-۱۲ هر دو صفر هستند. در نتیجه معادله به صورت زیر ساده می شود.

$$[\Sigma f]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right) = 0 \quad (13-1)$$

عبارت  $[\Sigma f]^B$  بیانگر مجموع نیروهای وارد بر چهارپره است که به صورت معادله زیر بیان می شود:

$$[\Sigma f]^B = [f_D]^B + [f_T]^B + [f_G]^B \quad (14-1)$$

در رابطه ۱-۱۴، بردار  $[f_D]^B$  مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه  $D$  است. همچنین بردار  $[f_T]^B$  بیانگر مجموع نیروی برآی پره ها در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می شود:

$$[f_T]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{bmatrix} \quad (15-1)$$

مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه  $D$  است. همچنین بردار  $[f_G]^B$  بیانگر نیروی وزن چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می شود:

$$[f_G]^B = [C]^{BL} [f_G]^L \quad (16-1)$$

در رابطه ۱-۱۶، ماتریس  $[C]^{BL}$  انتقال از دستگاه مختصات تراز محلی ( $L$ ) به دستگاه مختصات بدنی است. با جایگذاری روابط ۱-۱۴، ۱-۱۵ و ۱-۱۶ در ۱-۱۳ عبارت زیر برای نیروی تکیه گاهی حاصل

می شود.

$$[f_D]^B = -[f_G]^B - [f_T]^B + m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \quad (۱۷-۱)$$

سپس از حاصل ضرب نیروی تکیه‌گاه مدل شده در معادله ۱۷-۱ در بردار محل اثر آن، گشتاور ایجاد شده توسط نیروی اتصال کلی به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_D]^B = [s_{DC}]^B \left( -[f_G]^B - [f_T]^B m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \quad (۱۸-۱)$$

در رابطه ۱۸-۱ بردار  $[s_{DC}]^B$  بیانگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $D$  از مرکز ثقل چهارپره ( $h_{cg}$ ) است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[s_{DC}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cg} \end{bmatrix} \quad (۱۹-۱)$$

در نتیجه با جمع گشتاورهای ناشی از نیروهای آیرودینامیک پره‌ها از معادله ۱۰-۱ و گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه از معادله ۱۸-۱، گشتاور خارجی کلی اعمالی به چهارپره به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_B]^B = [m_A]^B + [m_D]^B \quad (۲۰-۱)$$

### ۳-۱ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها

هر یک از محورهای استند آزمایشگاهی به وسیله بیرینگ به یکدیگر متصل شده‌اند. گشتاور ناشی از اصطکاک بیرینگها در استند را میتوان به صورت زیر مدل کرد [۴]:

$$[m_f]^B = \begin{bmatrix} P_1 \mu_s r_x \\ P_2 \mu_s r_y \\ P_3 \mu_s r_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \mu_k r_x \\ P_2 \mu_k r_y \\ P_3 \mu_k r_z \end{bmatrix} \quad (۲۱-۱)$$

در رابطه ۲۲-۱،  $P$  نیروی عمودی وارد بر تکیه‌گاه هر یک از محورها،  $\mu_s$  و  $\mu_k$  به ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی بیرینگ‌ها و  $r$  شعاع هر یک از بیرینگ‌ها است.

## ۴-۱ گشتاورهای ناشی از جرم استند

هر یک از محورهای استند آزمایشگاهی به وسیله بیرینگ به یکدیگر متصل شده‌اند. گشتاور ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها در استند را می‌توان به صورت زیر مدل کرد [۴]:

$$[m_{cg}]^B = \begin{bmatrix} m_{tot}gy_{cg} \\ m_{tot}gx_{cg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۲۲-۱)$$

در رابطه ۲۲-۱،  $P$  نیروی عمودی وارد بر تکیه‌گاه هر یک از محورها،  $\mu_s$  و  $\mu_k$  به ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی بیرینگ‌ها و  $r$  شعاع هر یک از بیرینگ‌ها است.

## ۱-۴-۱ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی

با جایگذاری گشتاورهای خارجی چهارپره و تکانه زاویه‌ای کلی پرها در معادله دیفرانسیل اوایلر، شکل نهایی معادله دیفرانسیل استند چهارپره حاصل می‌شود. به این منظور، با جایگذاری مقدار گشتاورهای اعمالی به چهارپره از معادله ۲۰-۱ در معادله ۱-۱ رابطه موردنیاز برای مدل سازی دینامیک دورانی استند به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B &= ([J]^B)^{-1} \left( -[\Omega^{BI}] \times ([J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B) + \right. \\ &\quad [m_A]^B + [m_{cg}]^B + [s_{DC}]^B \left( -[G]^B - [T]^B + \right. \\ &\quad \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (۲۳-۱)$$

در رابطه ۲۳-۱، عبارت  $\left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B$  بیانگر ماتریس پادمتقارن بردار مشتق سرعت زاویه‌ای بدنی  $\left( \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B \right)$  است. جمله آخر در معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_{tot} [s_{DC}]^R \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{CD}]^R = m_{tot} [s_{DC}]^R [s_{DC}]^R [\omega^{BI}]^B \quad (۲۴-۱)$$

با جایگذاری معادله ۲۴-۱ در معادله ۲۳-۱ معادله زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B \left( I - m_{tot} \left( [J]^B \right)^{-1} [s_{DC}]^B [s_{DC}]^B \right) = \\ \left( [J]^B \right)^{-1} \left( - [\Omega^{BI}] \times \left( [J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B \right) + \right. \\ \left. [m_A]^B + [m_{cg}]^B + [s_{DC}]^B \left( - [F_g]^B - [F_T]^B + \right. \right. \\ \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (25-1)$$

با ساده سازی رابطه ۲۵-۱ بردار سرعت زاویه ای استند به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B = a^{-1} b \\ a = I - m_{tot} \left( [J]^B \right)^{-1} [s_{DC}]^B [s_{DC}]^B \\ b = \left( [J]^B \right)^{-1} \left( - [\Omega^{BI}] \times \left( [J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B \right) + \right. \\ \left. [m_A]^B + [m_{cg}]^B + [s_{DC}]^B \left( - [F_g]^B - [F_T]^B + \right. \right. \\ \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (26-1)$$

با جایگذاری معادلات ۳-۱، ۴-۱ و ۵-۱ معادله مربوط به تکانه کلی پره ها، معادله ۶-۱ مربوط به برآی پره و معادله ۱۰-۱ در معادله ۲۶-۱، مؤلفه های بردار مشتق سرعت زاویه ای چهارپره به صورت زیر حاصل

می شود:

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \frac{h_{cg} g m_{dot} \cos(\theta) \sin(\phi) + (J_{22} - J_{33} + 2m_{tot} h_{ch}^2) q r}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ & + \frac{b d_{cg} (\omega_2^2 - \omega_4^2) + q J_R (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{p}{|p|} P_1 \mu r_x}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \end{aligned} \quad (27-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} = & \frac{h_{cg} g m_{dot} \sin(\theta) + (J_{33} - J_{11} + 2m_{tot} h_{ch}^2) p r}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ & + \frac{b d_{cg} (\omega_1^2 - \omega_3^2) - p J_R (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{q}{|q|} P_2 \mu r_y}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \end{aligned} \quad (28-1)$$

$$\dot{r} = \frac{p q (J_{11} - J_{22}) + d (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{r}{|r|} P_3 \mu r_z}{J_{33}} \quad (29-1)$$

به منظور انتشار وضعیت دورانی چهارپره، از روش انتشار اوایلر استفاده می شود. در این صورت [۲] :

$$\dot{\phi} = p + q \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta)$$

$$\dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin(\phi)) + r \cos(\phi) \sec(\theta)$$

## ۵-۱ استخراج فرم فضای حالت

به منظور استخراج فرم فضای حالت، متغیرهای حالت سه درجه آزادی چهارپره به صورت زیر تعریف

می شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (30-1)$$



معادلات ارائه شده به فرم زیر برای فضای حالت بازنویسی شدند:

$$\dot{x}_1 = x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \quad (۳۱-۱)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \quad (۳۲-۱)$$

$$\dot{x}_3 = (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \quad (۳۳-۱)$$

$$\dot{x}_4 = A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 (\omega_2^2 - \omega_4^2) + A_4 x_5 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 \quad (۳۴-۱)$$

$$\dot{x}_5 = B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 (\omega_1^2 - \omega_3^2) + B_4 x_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 \quad (۳۵-۱)$$

$$\dot{x}_6 = C_1 x_4 x_5 + C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \quad (۳۶-۱)$$

ثابت های معادلات بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_2 &= \frac{2m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22} - J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_3 &= \frac{b d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ A_4 &= \frac{J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_5 &= \frac{m_1 g \mu r_x}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_6 &= \\ B_1 &= \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_2 &= \frac{-2m_{tot} h_{cg}^2 - J_{11} + J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_3 &= \frac{b d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \\ B_4 &= \frac{-J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_5 &= \frac{m_2 g \mu r_y}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_6 &= \\ C_1 &= \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} & C_2 &= \frac{d}{J_{33}} & C_3 &= \frac{m_3 g \mu r_z}{J_{33}} \end{aligned}$$

به منظور شبیه سازی ، پارامترهای استند به صورت جدول ۱-۱ در نظر گرفته شده است که مقدار پارامترهای استند آزمایشگاه است.

جدول ۱-۱: پارامترهای شبیه سازی استند چهارپره [۵]

پارامتر	واحد	مقدار پارامتر استند چهارپره
$J_{11}$	$kg.m^2$	0.02839
$J_{22}$	$kg.m^2$	0.03066
$J_{33}$	$kg.m^2$	0.0439
$J_R$	$kg.m^2$	$4.4398 \times 10^{-5}$
$m_{tot}$	$kg$	1.074
$m_1$	$kg$	1.272
$m_2$	$kg$	1.074
$m_3$	$kg$	1.693
$d_{cg}$	$m$	0.2
$h_{cg}$	$m$	0.02
$r_x$	$m$	0.01
$r_y$	$m$	0.01
$r_z$	$m$	0.025
$b$	1	$3.13 \times 10^{-5}$
$d$	1	$3.2 \times 10^{-6}$
$\mu_s$	1	0.003
$\mu_k$	1	0.002
$g$	$m/s^2$	9.81

## ۱-۶ خطی سازی

در این قسمت با استفاده از فرم فضای حالت استخراج شده در بخش ۱-۵ خطی سازی انجام شده است. در قسمت ۱-۶-۱ به صورت چند ورودی و چند خروجی<sup>۱</sup> برای سرعت دورانی پره ها در 2000 RPM و حول

<sup>۱</sup>MIMO (Multiple Input Multiple Output)

نقطه صفر خطی سازی انجام شد. در قسمت ۱-۶-۲ مسئله به صورت یک ورودی و یک خروجی<sup>۲</sup> حول نقطه صفر خطی سازی انجام شد. در این قسمت برای فازهای مختلف یک سیستم تک ورودی تک خروجی در نظر گرفته شده است و برای فازهای رول، پیچ و یاء مسئله حل شده است سپس از مجموع خروجی های بدست آمده خروجی کلی یعنی سرعت دورانی پره ها بدست آمده است.

### ۱-۶-۱ خطی سازی به فرم چند ورودی چند خروجی

در این قسمت با توجه به معادلات فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی سازی می شود.

$$\sigma_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad \sigma_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_4 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 \sigma_1 + A_4 x_5 \sigma_4 - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 + A_6 \cos(x_1) \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 \sigma_2 + B_4 x_4 \sigma_4 - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 + B_6 \cos(x_2) \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 \sigma_3 - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad p \quad q \quad r]^T \quad (37-1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T \quad (38-1)$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \delta \boldsymbol{\omega} \quad (39-1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\delta \dot{x}_1 \quad \delta \dot{x}_2 \quad \delta \dot{x}_3 \quad \delta \dot{x}_4 \quad \delta \dot{x}_5 \quad \delta \dot{x}_6]^T \quad (40-1)$$

<sup>2</sup>SISO (Single Input Single Output )

$$A = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (۴۱-۱)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} x_5 \cos(x_1) \tan(x_2) - x_6 \sin(x_1) \tan(x_2) \\ -x_6 \cos(x_1) - x_5 \sin(x_1) \\ \frac{x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_1 \cos(x_1) \cos(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۲-۱)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} \frac{x_6 \cos(x_1)}{\cos(x_2)^2} + \frac{x_5 \sin(x_1)}{\cos(x_2)^2} \\ 0 \\ \frac{\tan(x_2) (x_6 \cos(x_1) + x_5 \sin(x_1))}{\cos(x_2)} \\ -A_2 \sin(x_1) \sin(x_2) \\ B_1 \cos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۳-۱)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۴-۱)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_2 x_6 + B_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ C_1 x_5 \end{bmatrix} \quad (۴۵-۱)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_5} = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \tan(x_2) \\ \cos(x_1) \\ \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_2 x_6 + A_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ 0 \\ C_1 x_4 \end{bmatrix} \quad (۴۶-۱)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_6} = \begin{bmatrix} \cos(x_1) \tan(x_2) \\ -\sin(x_1) \\ \frac{\cos(x_1)}{\cos(x_2)} \\ 0 \\ B_2 x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۷-۱)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_4} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_5} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (۴۸-۱)$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_4} \end{bmatrix} \quad (۴۹-۱)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 x_5 & 2 A_3 \omega_2 - A_4 x_5 & A_4 x_5 & -2 A_3 \omega_4 - A_4 x_5 \\ 2 B_3 \omega_1 + B_4 x_4 & -B_4 x_4 & B_4 x_4 - 2 B_3 \omega_3 & -B_4 x_4 \\ 2 C_2 \omega_1 & -2 C_2 \omega_2 & 2 C_2 \omega_3 & -2 C_2 \omega_4 \end{bmatrix} \quad (۵۰-۱)$$

## ۱-۶-۲ خطی سازی به فرم یک ورودی یک خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی سازی می شود.

$$\sigma_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad \sigma_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_4 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 \sigma_1 + A_4 x_5 \sigma_4 - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 + A_6 \cos(x_1) \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 \sigma_2 + B_4 x_4 \sigma_4 - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 + B_6 \cos(x_2) \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 \sigma_3 - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \end{bmatrix}$$

در این قسمت برای ساده سازی، ورودی مسئله را از سرعت دورانی به نیروهای تاثیرگذار در مودهای رول، پیچ و یاو تغییر داده شده است. این کار باعث می شود که مسئله از چند ورودی و چند خروجی به سه مسئله یک ورودی و یک خروجی تبدیل شود. نیروها به فرم رابطه ۵۱-۱ تعریف می شوند.

$$u_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad u_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad u_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \quad (51-1)$$

با توجه به اینکه سه نیرو در نظر گرفته شده و مسئله نیاز به چهار خروجی دارد یک نیروی دیگر نیز در نظر گرفته می شود که به فرم رابطه ۵۲-۱ است و مقدار آن به صورت ثابت و برابر با سرعت دورانی تمام پره ها در دور نامی یعنی 2000 RPM در نظر گرفته شده است.

$$u_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \quad (52-1)$$

در ادامه روابط ۵۱-۱ و ۵۲-۱ را در فضای حالت سیستم جایگزین می کنیم و برای سادگی قسمت های  $(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)$  از معادلات حذف می کنیم.

فضای حالت جدید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 u_1 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 u_2 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 u_3 \end{bmatrix} \quad (53-1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{bmatrix}^T \quad (۵۴-۱)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T \quad (۵۵-۱)$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \quad (۵۶-۱)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 & \delta \dot{x}_2 & \delta \dot{x}_3 & \delta \dot{x}_4 & \delta \dot{x}_5 & \delta \dot{x}_6 \end{bmatrix}^T \quad (۵۷-۱)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (۵۸-۱)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} & \frac{\partial a_1}{\partial u_2} & \frac{\partial a_1}{\partial u_3} & \frac{\partial a_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial u_1} & \frac{\partial a_2}{\partial u_2} & \frac{\partial a_2}{\partial u_3} & \frac{\partial a_2}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial u_1} & \frac{\partial a_3}{\partial u_2} & \frac{\partial a_3}{\partial u_3} & \frac{\partial a_3}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} & \frac{\partial a_4}{\partial u_2} & \frac{\partial a_4}{\partial u_3} & \frac{\partial a_4}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_1} & \frac{\partial a_5}{\partial u_2} & \frac{\partial a_5}{\partial u_3} & \frac{\partial a_5}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_1} & \frac{\partial a_6}{\partial u_2} & \frac{\partial a_6}{\partial u_3} & \frac{\partial a_6}{\partial u_4} \end{bmatrix} \quad (۵۹-۱)$$



روابط بالا به فرم چند سیستم یک ورودی و چند خروجی نوشته شده است. آن را به یک ورودی و یک خروجی تبدیل می‌کنیم.

مود رول

$$\mathbf{A}_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۰-۱)$$

$$\mathbf{B}_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (۶۱-۱)$$

مود پیچ

$$\mathbf{A}_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۲-۱)$$

$$\mathbf{B}_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (۶۳-۱)$$

مود یاو

$$\mathbf{A}_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۴-۱)$$

$$B_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (۶۵-۱)$$

استخراج سرعت دورانی پره ها از نیروها

چهار معادله و چهار مجهول:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ u_2 &= \omega_1^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \\ u_4 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{aligned} \quad (۶۶-۱)$$

جواب معادلات ۶۶-۱ به فرم رابطه ۶۷-۱ بدست می آید.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_4 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 - 2u_2}{4}} \end{aligned} \quad (۶۷-۱)$$

## مراجع

- [1] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent back-stepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.
- [2] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [3] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.
- [4] M. A. A. Bishe. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using a heuristic nonlinear controller. January 2018.
- [5] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.



Sharif University of Technology  
Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

# **LQDG Controller for 3DOF Quadcopter Stand**

By:

**Ali BaniAsad**

Supervisor:

**Dr. Nobahari**

August 2021