



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی  
مهندسی کنترل

عنوان:

# کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهریور ۱۴۰۰

سلام افلا

## سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

## چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی<sup>۱</sup> استفاده شده است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش<sup>۲</sup> که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش خارجی و نویز سنسور مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدل‌سازی نیز از مقاومت مناسبی برخوردار است. از روش ارائه شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده است. عملکرد این روش با اجرای شبیه‌سازی‌های مختلف مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. همچنین، عملکرد آن در حضور نویز و اغتشاش و عدم قطعیت مدل از طریق شبیه‌سازی ارزیابی خواهد شد.

**کلیدواژه‌ها:** چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، شبیه‌سازی، تابع هزینه

---

<sup>1</sup>Game Theory

<sup>2</sup>Nash Equilibrium

# فهرست مطالب

۲	۱ مقدمه
۲	۱-۱ تاریخچه
۳	۲-۱ تعریف مسئله
۴	۱-۲-۱ ساختار بالگرد
۵	۲-۲-۱ ساختار چهارپره
۶	۳-۱ نظریه بازی
۶	۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی
۶	۲-۳-۱ تعادل نش
۸	۲ بازی دیفرانسیلی
۹	۱-۲ بازی حلقه باز
۱۱	۲-۲ بازی همراه با بازخورد
۱۳	۳ مدل سازی چهارپره
۱۴	۱-۳ فرضیات مدل سازی
۱۵	۲-۳ معادله گشتاور
۱۷	۱-۲-۳ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره ها

۱۸	۲-۲-۳ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه
۲۰	۳-۳ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها
۲۱	۱-۳-۳ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی
۲۳	۴-۳ استخراج فرم فضای حالت
۲۵	۵-۳ خطی‌سازی
۲۶	۱-۵-۳ خطی‌سازی به فرم چند ورودی چند خروجی
۳۰	۲-۵-۳ خطی‌سازی به فرم یک ورودی یک خروجی
۳۵	۶-۳ نتیجه‌گیری

## فهرست شکل‌ها

۳	۱-۱	استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه [۱]
۵	۲-۱	بالگرد شینوک [۲]
۵	۳-۱	جهت چرخش پره‌های چهارپره [۳]
۱۴	۱-۳	شماتیک استند چهارپره [۴]

## فهرست جدول‌ها

۱-۳	پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۵]	۲۴
-----	--	----



# فصل ۱

## مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر<sup>۱</sup> یکی از انواع وسایل پرنده است. چهارپره‌ها نوعی هواگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپره‌ها جای دارند. چهارپره‌ها به دلیل داشتن توانایی مانور خوب و امکان پرواز ایستا با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده‌ای برخوردارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده‌است و لذا روزانه پیشرفت چشمگیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویربرداری، تفریحی و کشاورزی از کاربرد زیاد و روزافزونی برخوردارند و مدل‌های دارای سرنشین آن نیز تولید شده.

## ۱-۱ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندپره در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Louis Breguet و Jacques انجام شد. پرنده آن‌ها موفق به پرواز به صورت عمودی شد؛ ولی پرنده تا ارتفاع دو فوت بیشتر پرواز نکرد. پرواز انجام شده یک پرواز آزاد<sup>۲</sup> نبود و پرنده به کمک چهار مرد ثابت نگه داشته شده بود [۶]. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمی‌گردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی به نام Étienne Oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع کرد و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد. در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد [۷].

<sup>۱</sup>Quadcopter

<sup>۲</sup>Free Flight

در سال ۱۹۲۲ در آمریکا George de Bothezata موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود. در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده است و به تدریج رواج یافته است [۸]. از حدود سال ۲۰۰۶ کواد کوپترها شروع به رشد صنعتی به صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

## ۲-۱ تعریف مسئله

مسئله‌ای که در این پروژه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مربعی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده است. در این صورت، تنها وضعیت (زوایای رول<sup>۳</sup>، پیچ<sup>۴</sup> و یاو<sup>۵</sup>) چهارپره تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین می‌توان با مقید کردن چرخش حول هر محور، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به صورت مجزا و یا با یکدیگر بررسی کرد. استند آزمایشگاهی سه درجه آزادی چهارپره در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱: استند سه درجه آزادی چهارپره آزمایشگاه [۱]

<sup>۳</sup>Roll

<sup>۴</sup>Pitch

<sup>۵</sup>Yaw

با توجه به شکل مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان آن را به صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین سیستم بدون حضور کنترل کننده ناپایدار است. این سیستم دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زاویه‌ای اوایلر  $(\psi, \theta, \phi)$  است. در مدل سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد، اما با توجه به کنترل کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به صورت اغتشاش در نظر گرفت و سیستم را به خوبی کنترل کرد. در پایان این کنترل کننده با کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی<sup>۶</sup> و کنترل کننده رگلاتور مربعی خطی<sup>۷</sup> مقایسه خواهد شد.

## ۱-۲-۱ ساختار بالگرد

چهارپره‌ها همانند انواع دیگر وسایل پرنده از ایجاد اختلاف فشار در اتمسفر پیرامون خود برای بلند شدن و حرکت در هوا استفاده می‌کنند. همان‌طور که بالگردها به کمک پره اصلی این اختلاف فشار را ایجاد می‌کنند و نیروی برآی<sup>۸</sup> خود را تأمین می‌کنند. به دلیل وجود نیروی عمل و عکس‌العمل در بالگردها، پس از اینکه پره اصلی شروع به چرخش می‌کند با برخورد مولکول‌های هوا به این پره و وجود عکس‌العمل، یک نیرویی با جهت مخالف جهت چرخش پره به پره و در ادامه به شفت متصل به پره اعمال می‌شود (نیروی گشتاور) و این نیرو باعث چرخش بالگرد به دور خود می‌شود. حال برای حل این مشکل از پره دم بالگرد استفاده می‌شود تا نیرویی را تولید کند که مانع چرخش بالگرد به دور خود شود. حال اگر بالگرد به جای داشتن یک پره اصلی از دو پره اصلی که خلاف جهت یکدیگر بچرخند استفاده می‌نمود، به دلیل خنثی شدن دو نیروی گشتاور توسط یکدیگر، دیگر بالگرد به دور خود نمی‌چرخید. مانند بالگردهای شینوک<sup>۹</sup> که نمایی از آن در شکل ۱-۲ آورده شده‌است. حال با توجه به توضیحات داده شده راحت‌تر می‌توان به ساختار چهارپره‌ها اشاره نمود.

<sup>۶</sup>PID (Proportional-Integral-Derivative)

<sup>۷</sup>LQR (Linear Quadratic Regulator)

<sup>۸</sup>Thrust

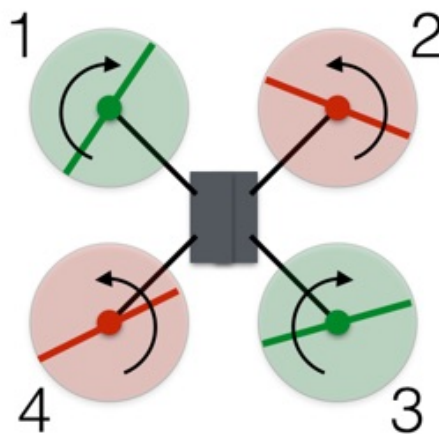
<sup>۹</sup>Boeing CH-47 Chinook



شکل ۱-۲: بالگرد شینوک [۲]

## ۲-۲-۱ ساختار چهارپره

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها نیروی گشتاورهای ایجاد شده را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.



شکل ۱-۳: جهت چرخش پره‌های چهارپره [۳]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش همه موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیاد تر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به‌صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و نیروی گشتاور به یک سمت ایجاد می‌شود و نیروی برآ همانند قبل است (زیرا دو پره با سرعت کمتر و دو پره دیگر به همان نسبت با سرعت بیشتر می‌چرخند) لذا چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. برای حرکت چهارپره‌ها در جهت‌های مختلف (عقب، جلو، چپ و راست) توسط کم و زیاد کردن سرعت موتورهای چهارپره را از حالت افقی خارج کرده و باعث حرکت آن می‌شوند.

## ۳-۱ نظریه بازی

نظریه بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. نظریه بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه بازی در تلاش است تا به وسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایط راهبردی یا در یک بازی که در آن موفقیت فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

### ۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی

در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراه جان هارسانی و راینهارد سیلتن به خاطر مطالعات خلاقانه‌ی خود در زمینه‌ی نظریه بازی، برنده‌ی جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برندگان جایزه‌ی نوبل اقتصاد از میان متخصصین نظریه بازی انتخاب شدند. آخرین آن‌ها، ژان تیرول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد [۹].

### ۲-۳-۱ تعادل نش

پژوهش‌ها در این زمینه اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به عنوان تعادل در بازی‌ها استوار است. این راهبردها به‌طور معمول از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش است. در نظریه بازی، تعادل نش (به نام جان فوربز نش، که آن را پیشنهاد کرد) راه حلی از نظریه بازی است

که شامل دو یا چند بازیکن است، که در آن فرض بر آگاهی هر بازیکن به راهبرد تعادل دیگر بازیکنان است. بر اساس نظریه‌ی تعادل نش، اگر فرض کنیم در هر بازی با استراتژی مختلط، بازیکنان به طریق منطقی و معقول راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حد اکثر سود در بازی هستند، دست کم یک راهبرد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن قابل انتخاب است و چنانچه بازیکن راهکار دیگری به غیر از آن را انتخاب کند، نتیجه‌ی بهتری به دست نخواهد آورد.

## فصل ۲

### بازی دیفرانسیلی

در این قسمت به خلاصه‌ای از بازی دیفرانسیلی پرداخته شده است. تمامی توضیحات و روابط از منبع [۱۰] آورده شده است. در این فصل حالت حلقه باز<sup>۱</sup> و حالت همراه با بازخورد<sup>۲</sup> بررسی می‌شود. این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن به فرم مربعی است. هدف اصلی کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه به فرم رابطه (۲-۱) نوشته می‌شود.

(۱-۲)

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T (x^T(t)Q_i x(t) + u_i^T(t)R_{ii}u_i(t) + u_j^T(t)Q_{ij}u_j(t)) dt + x^T(T)H_i x(T)$$

در اینجا ماتریس‌های  $Q_i$ ،  $R_{ii}$  و  $H$  متقارن فرض شده‌اند و ماتریس  $R_{ii}$  به صورت مثبت معین ( $R_{ii} > 0$ ) فرض شده است. دینامیک سیستم تحت تاثیر هر دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا دینامیک سیستم به فرم رابطه (۲-۲) در نظر گرفته شده است.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2-2)$$

در رابطه (۲-۲)،  $u_1$  برابر با تلاش کنترلی بهینه بازیکن اول است. در اینجا ممکن است تلاش کنترلی بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. این پروژه حالت همکاری دو بازیکن را بررسی نمی‌کند و دو بازیکن در تلاش برای کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه مقابل هستند.

<sup>1</sup>Opne Loop

<sup>2</sup>Feedback

## ۱-۲ بازی حلقه‌بازی

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان  $t \in [0, T]$  فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سیستم را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان هماهنگی بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش در ادامه تعریف شده است.

**قضیه ۱-۲** به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات قابل قبول  $(u_1, u_2)$  از نامساوی (۳-۲) پیروی کنند.

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ and } J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2) \quad (۳-۲)$$

در اینجا قابل قبول بودن به معنی آن است که  $u_i(\cdot)$  به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه‌ی حرکات که بستگی به اطلاعات بازیکنان از بازی دارد، مجموعه‌ای از راهبردهایی است که بازیکنان ترجیح می‌دهند برای کنترل سیستم انجام دهند و سیستم (۲-۲) باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد. به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه  $J_i, (i = 1, 2)$  است.

برای سادگی از نمادسازی  $S_i := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$  استفاده شده است. در اینجا فرض شده است که زمان محدود است.

**قضیه ۲-۲** ماتریس  $M$  را در نظر بگیرید:

$$M := \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ -Q_1 & -A^T & 0 \\ -Q_2 & 0 & -A^T \end{bmatrix} \quad (۴-۲)$$

فرض شده است که دو معادله دیفرانسیلی ریکاتی (۵-۲)، در بازه  $[0, T]$  جواب متقارن دارند.

$$\dot{K}_i(t) = -A^T K_i(t) - K_i(t) A + K_i(t) S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(T) = H, \quad i = 1, 2 \quad (۵-۲)$$



پس بازی دیفرانسیل خطی درجه دوم دو نفره<sup>۳</sup> تعادل نش حلقه‌باز در هر شرایط اولیه  $X_0$  دارد اگر ماتریس

$$H(T) := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-MT} \begin{bmatrix} I \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (۶-۲)$$

قابلیت معکوس شدن را داشته باشد.

در معادلات بالا تلاش کنترلی برای هر بازیکن به فرم رابطه ۷-۲ تعریف شده است.

$$u_1(t) = -R_{ii}B_i^T x(t) \quad (۷-۲)$$

در آخر با استفاده از قضیه ۲-۲ با حل دو معادله کوپل ریکاتی دیفرانسیلی می‌توان به جواب رسید.

$$\dot{K}_1 = -A^T K_1 - K_1 A - Q_1 + K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2; \quad K_1(T) = H_1 \quad (۸-۲)$$

$$\dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A - Q_2 + K_2 S_2 K_2 + K_2 S_1 K_1; \quad K_2(T) = H_2 \quad (۹-۲)$$

---

<sup>3</sup>the two player linear quadratic differential game

## ۲-۲ بازی همراه با بازخورد

تفاوت بازی همراه با بازخورد<sup>۴</sup> با بازی حلقه‌باز در این است که بازیکنان در هر لحظه از بازی بازخورد می‌گیرند و متناسب با بازخورد رفتار می‌کنند. این بازخورد ممکن است باعث شود یک بازیکن انگیزه پیدا کند که از بازی انحراف پیدا کند در حالی که این اتفاق در بازی حلقه‌باز رخ نمی‌دهد. این اتفاق منجر به یک راه حل تعادلی دیگر می‌شود. از طرف دیگر راه حل تعادلی نباید در طول بازی خودش را با بازیکنان سازگار کند.

با توجه به اینکه سیستم خطی است، می‌توان استدلال کرد که حرکات تعادل به صورت تابعی خطی از وضعیت سیستم است. این بدین مفهوم است که تعادل نش باید در فضای ذکر شده باشد. فضای راهبردی به فرم رابطه ۱۰-۲

$$\Gamma_i^{lfb} : = \{u_i(0, T) | u_i(t) = F_i(t)x(t), i = 1, 2\} \quad (10-2)$$

تعریف می‌شود. در رابطه ۱۰-۲  $F_i(\cdot)$  قسمتی از یک تابع است. حرکات تعادل نش  $(u_1^*, u_2^*)$  در فضای استراتژی  $\Gamma_1^{lfb} \times \Gamma_2^{lfb}$  است.

**قضیه ۳-۲** مجموعه‌ی حرکات کنترلی  $u_i^*(t) = F_i^*(t)x(t)$  تشکیل شده‌است از بازخورد خطی تعادل نش اگر

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ and } J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2)$$

برای هر  $u_i \in \Gamma_i^{lfb}$  برقرار باشد.

**قضیه ۴-۲** بازی دیفرانسیلی خطی درجه دوم دو نفره برای هر شرایط اولیه، تعادل نش خطی بازخورد دارد اگر و فقط اگر مجموعه معادلات کوپل ریکاتی

<sup>4</sup>The Feeback Game

$$\begin{aligned}\dot{K}_1(t) &= -(A - S_2 K_2(t))^T K_1(t) - K_1(t)(A - S_2 K_2(t)) + K_1(t) S_1 K_1(t) - Q_1 \\ K_1(T) &= H_1\end{aligned}\quad (۱۱-۲)$$

$$\begin{aligned}\dot{K}_2(t) &= -(A - S_1 K_1(t))^T K_2(t) - K_2(t)(A - S_1 K_1(t)) + K_2(t) S_2 K_2(t) - Q_2 \\ K_2(T) &= H_2\end{aligned}\quad (۱۲-۲)$$

در بازه زمانی  $[0, T]$  جواب متقارن داشته باشند (برای سادگی  $S_{12} = S_{21} = 0$  فرض شده است). در این حالت دارای تعادل منحصر به فرد است. حرکت‌های تعادل به فرم رابطه ۱۳-۲ است.

$$u_i^*(t) = -R_{ii} B_i^T K_i(T) x(T), \quad i = 1, 2 \quad (۱۳-۲)$$

## فصل ۳

### مدل سازی چهارپره

در این فصل به مدلسازی استند چهارپره آزمایشگاهی پرداخته شده است. به این منظور، ابتدا فرضیات مربوط به مدلسازی چهارپره بیان می شود. سپس معادلات حاکم بر حرکات دورانی چهارپره بیان می شود. در ادامه به استخراج گشتاورهای خارجی اعمالی به استند شامل گشتاورهای آیرودینامیکی ناشی از پره، گشتاور نیروی تکیه گاه و گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ ها پرداخته می شود. در گام بعد، معادله نهایی دینامیک دورانی استند استخراج می شود. سپس، فرم فضای حالت استند آزمایشگاهی استخراج می شود. لازم به توضیح است که فرم نهایی فضای حالت استند بدون در نظر گرفتن اصطکاک بیرینگ ها از منبع [۴] آورده شده است که در آن منبع، مدل استخراج شده با اعمال ورودی های و شرایط اولیه مختلف اعتبارسنجی شده است.

## ۳-۱ فرضیات مدل سازی

شماتیک استند چهارپره در شکل ۳-۱ نشان داده شده است. به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم، فرض می شود که چهارپره صلب و متقارن است. همچنین ماتریس گشتاور اینرسی چهارپره به صورت قطری در نظر گرفته می شود. مرکز ثقل سازه چهارپره روی نقطه  $B$  و مرکز ثقل هر یک از پره ها به همراه قسمت دوار موتور روی نقاط  $B_1$  تا  $B_4$  است. مبدأ دستگاه مختصات بدنی روی محل تقاطع بازوهای چهارپره یعنی نقطه  $B$  در نظر گرفته شده است. از آنجایی که مرکز ثقل پره ها بالاتر از مرکز ثقل سازه چهارپره است، مرکز ثقل کلی چهارپره جایی بین مرکز ثقل موتورها و سازه، یعنی نقطه  $C$  می گیرد. همچنین قابل ذکر است که نقطه  $D$  محل اتصال کلی استند چهارپره است. جهت مثبت محور  $X^B$  و  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی به ترتیب در راستای بازوی مربوط به موتور ۱ و ۴ فرض می شود. همچنین جهت مثبت محور  $Z^B$  با توجه به قانون دست راست حاصل می شود.



شکل ۳-۱: شماتیک استند چهارپره [۴]

## ۲-۳ معادله گشتاور

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت دورانی چهارپره، از قوانین نیوتن اوایلر استفاده می شود. معادله دیرانسیلی اوایلر برای یک پرنده حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر بیان می شود [۱۱]:

$$[\dot{\omega}^{BI}]^B = ([J]^B)^{-1} \left( -[\Omega^{BI}]^B \times ([J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B) + [m_b]^B \right) \quad (۱-۳)$$

در رابطه ۱-۳، عبارت  $[\omega^{BI}]^B$  بیانگر بردار مشتق نرخ های زاویه ای چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین ماتریس  $[J]^B$  نشان دهنده گشتاورهای اینرسی چهارپره حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی است که به دلیل تقارن چهارپره به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$[J]^B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \quad (۲-۳)$$

در رابطه ۲-۳، پارامترهای  $J_{11}$ ،  $J_{22}$  و  $J_{33}$  به ترتیب بیانگر گشتاورهای اینرسی چهارپره حول محورهای  $X^B$ ،  $Y^B$  و  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین بردار  $[I_R]^B$  در رابطه ۱-۳ بیانگر مجموع تکانه زاویه ای کلی پره ها در دستگاه مختصات بدنی است. از آنجا که، تکانه زاویه ای پره ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است؛ در نتیجه  $[I_R]^B$  به صورت زیر حاصل می شود:

$$[I_R]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_R \end{bmatrix} \quad (۳-۳)$$

در رابطه ۳-۳،  $l_R$  بیانگر تکانه زاویه ای کلی پره ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است که به صورت زیر حاصل می شود:

$$l_R = J_R \omega_d \quad (۴-۳)$$

در رابطه ۴-۳، پارامتر  $J_R$  بیانگر ممان اینرسی هر یک از پره ها است. همچنین  $\omega_d$  نشان دهنده تفاضل نسبی سرعت های زاویه ای پره ها است که با توجه به شکل ۱-۳ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega_d = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \quad (۵-۳)$$

همچنین  $[m_b]^B$  در رابطه ۱-۳ برآیند گشتاورهای خارجی اعمالی به چهارپره، شامل گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره ها و گشتاورهای ناشی از نیروی تکیه گاه است که در ادامه به آن پرداخته می شود.

### ۳-۲-۱ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها

آیرودینامیک پره‌ها باعث ایجاد نیروی برآ و در نتیجه گشتاورهای رول و پیچ ناشی از اختلاف نیروی برآ می‌شود. با استفاده از تفاضل نیروی برآی پره‌ها دو گشتاور رول و پیچ ایجاد می‌شود. با توجه به تئوری مومنوم، نیروی برآی هر پره  $(T_i)$  از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود [۱۲]:

$$T_i = b\omega_i^2 \quad (۳-۶)$$

در رابطه ۳-۶  $b$  و  $\omega_i$  به ترتیب بیانگر فاکتور نیروی برآ و سرعت زاویه‌ای هر پره است؛ بنابراین مطابق شکل ۳-۱ گشتاور رول حول محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$m_X^B = d_{cg}(T_2 - T_4) = d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (۳-۷)$$

در رابطه ۳-۷ عبارت  $d_{cg}$  بیانگر فاصله مرکز هر پره از مرکز جرم چهارپره در راستای محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی است. همچنین گشتاور پیچ حول محور  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Y^B = d_{cg}(T_1 - T_3) = d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \quad (۳-۸)$$

گشتاور یاو آیرودینامیکی از اختالف گشتاور ناشی از پسای پره‌ها ایجاد می‌شود؛ لذا جهت این گشتاور همواره در جهت مخالف چرخش پره‌ها است؛ بنابراین گشتاور یاو حول محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Z^B = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (۳-۹)$$

رابطه ۳-۹ عبارت  $d$  بیانگر فاکتور گشتاور پسای پره‌ها است. در نتیجه با توجه به معادلات ۳-۷، ۳-۸ و ۳-۹ بردار گشتاورهای خارجی ناشی از آیرودینامیک پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[m_A]^B = \begin{bmatrix} m_X^B \\ m_Y^B \\ m_Z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (۳-۱۰)$$



### ۲-۲-۳ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه

همانطور که در شکل ۱-۳ مشاهده می‌شود، نیروی  $f_d$  که در نقطه‌ی  $D$  از طرق اتصال کلی به چهارپره وارد می‌شود، باعث ایجاد گشتاوری حول مرکز ثقل چهارپره می‌شود. به منظور مدل سازی گشتاور ناشی از این نیرو حول نقطه  $C$ ، لازم است ابتدا نیروی  $f_d$  استخراج شود. از انجایی که نقطه‌ی  $D$  منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نیست؛ لذا معادله حرکت انتقالی برای نقطه اتصال  $D$  با استفاده از معادله انتقال یافته نیوتن (معادله گروبین) به صورت معادله زیر حاصل می‌شود [۱۱]:

$$m_{tot} [D^I v_D^I]^B = [\Sigma f]^B - m_{tot} \left( [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \quad (۱۱-۳)$$

در رابطه ۱۱-۳،  $m_{tot}$  مجموع جرم چهارپره و  $[D^I v_D^I]^B$  مشتق دورانی سرعت نقطه  $D$  نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[\Sigma f]^B$  بیان کننده برآیند نیروهای وارده بر نقطه‌ی  $D$  و  $[\Omega^{BI}]^B$  ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاوی‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[D^I \Omega^{BI}]^B$  نشان دهنده مشتق دورانی سرعت زاوی‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی و  $[s_{cd}]^B$  بردار واصل از نقطه‌ی  $D$  به نقطه  $C$  است. با انتقال قاب بدنی به قاب اینرسی معادله ۱۱-۳ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$m_{tot} [D^B v_D^I]^B + m_{tot} [\Omega^{BI}]^B [v_D^I]^B = [\Sigma f]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \quad (۱۲-۳)$$

همچنین به دلیل اینکه سرعت محل اتصال چهارپره (نقطه  $D$ ) صفر است؛ دو عبارت سمت چپ معادله ۱۲-۳ هر دو صفر هستند. در نتیجه معادله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$[\Sigma f]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right) = 0 \quad (۱۳-۳)$$

عبارت  $[\Sigma f]^B$  بیانگر مجموع نیروهای وارد بر چهارپره است که به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$[\Sigma f]^B = [f_D]^B + [f_T]^B + [f_G]^B \quad (۱۴-۳)$$

در رابطه ۱۴-۳، بردار  $[f_D]^B$  مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی  $D$  است. همچنین بردار  $[f_T]^B$  بیانگر مجموع نیروی برآی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[f_T]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{bmatrix} \quad (۱۵-۳)$$

مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی  $D$  است. همچنین بردار  $[f_G]^B$  بیانگر نیروی وزن چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[f_G]^B = [C]^{BL} [f_G]^L \quad (۱۶-۳)$$

در رابطه ۱۶-۳، ماتریس  $[C]^{BL}$  انتقال از دستگاه مختصات تراز محلی ( $L$ ) به دستگاه مختصات بدنی است. با جایگذاری روابط ۱۴-۳، ۱۵-۳ و ۱۶-۳ در ۱۳-۳ عبارت زیر برای نیروی تکیه‌گاهی حاصل می‌شود.

$$[f_D]^B = -[f_G]^B - [f_T]^B + m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \quad (۱۷-۳)$$

سپس از حاصل ضرب نیروی تکیه‌گاه مدل شده در معادله ۱۷-۳ در بردار محل اثر آن، گشتاور ایجاد شده توسط نیروی اتصال کلی به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_D]^B = [s_{DC}]^B \left( -[f_G]^B - [f_T]^B m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \quad (۱۸-۳)$$

در رابطه ۱۸-۳ بردار  $[s_{DC}]^B$  بیانگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $D$  از مرکز ثقل چهارپره ( $h_{cg}$ ) است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[s_{DC}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cg} \end{bmatrix} \quad (۱۹-۳)$$

در نتیجه با جمع گشتاورهای ناشی از نیروهای آیرودینامیک پرها از معادله ۱۰-۳ و گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه از معادله ۱۸-۳، گشتاور خارجی کلی اعمالی به چهارپره به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[m_B]^B = [m_A]^B + [m_D]^B \quad (۲۰-۳)$$

### ۳-۳ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگها

هر یک از محورهای استند آزمایشگاهی به وسیله بیرینگ به یکدیگر متصل شده اند. گشتاور ناشی از اصطکاک بیرینگها در استند را میتوان به صورت زیر مدل کرد [۱۳]:

$$[m_f]^B = \begin{bmatrix} P_1 \mu_s r_x \\ P_2 \mu_s r_y \\ P_3 \mu_s r_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \mu_k r_x \\ P_2 \mu_k r_y \\ P_3 \mu_k r_z \end{bmatrix} \quad (۲۱-۳)$$

در رابطه ۲۱-۳،  $P$  نیروی عمودی وارد بر تکیه گاه هر یک از محورها،  $\mu_s$  و  $\mu_k$  به ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی بیرینگها و  $r$  شعاع هر یک از بیرینگها است.

### ۱-۳-۳ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی

در این بخش، گشتاورهای خارجی چهارپره و تکانه زاوی‌های کلی پره‌ها در معادله دیفرانسیل اولیه جایگذاری شده و شکل نهایی معادله دیفرانسیل استند چهارپره حاصل می‌شود. با جایگذاری مقدار گشتاورهای اعمالی به چهارپره از معادله ۲۰-۳ در معادله ۱-۳ رابطه موردنیاز برای مدل سازی دینامیک دورانی استند به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B &= ([J]^B)^{-1} \left( -[\Omega^{BI}] \times ([J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B) + \right. \\ &\quad [m_A]^B + [s_{DC}]^B \left( -[G]^B - [T]^B + \right. \\ &\quad \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (22-3)$$

در رابطه ۲۲-۳، عبارت  $\left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B$  بیانگر ماتریس پادمتقارن بردار مشتق سرعت زاویه‌ای بدنی است. جمله آخر در معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_{tot} [s_{DC}]^R \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{CD}]^R = m_{tot} [s_{DC}]^R [s_{DC}]^R [\dot{\omega}^{BI}]^B \quad (23-3)$$

با جایگذاری معادله ۲۳-۳ در معادله ۲۲-۳ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B \left( I - m_{tot} ([J]^B)^{-1} [s_{DC}]^B [s_{DC}]^B \right) &= \\ ([J]^B)^{-1} \left( -[\Omega^{BI}] \times ([J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B) + \right. \\ &\quad [m_A]^B + [s_{DC}]^B \left( -[F_g]^B - [F_T]^B + \right. \\ &\quad \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (24-3)$$

با ساده سازی رابطه ۳-۲۴ بردار سرعت زاویه ای استند به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B &= a^{-1}b \\ a &= I - m_{tot} \left( [J]^B \right)^{-1} [s_{DC}]^B [s_{DC}]^B \\ b &= \left( [J]^B \right)^{-1} \left( -[\Omega^{BI}] \times \left( [J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B \right) + \right. \\ &\quad [m_A]^B + [s_{DC}]^B \left( -[F_g]^B - [F_T]^B + \right. \\ &\quad \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (۳-۲۵)$$

با جایگذاری معادلات ۳-۳، ۳-۴ و ۳-۵ معادله مربوط به تکانه کلی پره ها، معادله ۳-۶ مربوط به برآی پره و معادله ۳-۱۰ در معادله ۳-۲۵، مؤلفه های بردار مشتق سرعت زاویه ای چهارپره به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{h_{cg} g m_{dot} \cos(\theta) \sin(\phi) + (J_{22} - J_{33} + 2m_{tot} h_{ch}^2) q r}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ &\quad + \frac{b d_{cg} (\omega_2^2 - \omega_4^2) + q J_R (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{p}{|p|} P_1 \mu r_x}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \end{aligned} \quad (۳-۲۶)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{h_{cg} g m_{dot} \sin(\theta) + (J_{33} - J_{11} + 2m_{tot} h_{ch}^2) p r}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ &\quad + \frac{b d_{cg} (\omega_1^2 - \omega_3^2) - p J_R (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{q}{|q|} P_2 \mu r_y}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \end{aligned} \quad (۳-۲۷)$$

$$\dot{r} = \frac{p q (J_{11} - J_{22}) + d (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{r}{|r|} P_3 \mu r_z}{J_{33}} \quad (۳-۲۸)$$

به منظور انتشار وضعیت دورانی چهارپره، از روش انتشار اوایلر استفاده می شود. در این صورت [۱۱]:

$$\dot{\phi} = p + q \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta)$$

$$\dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin(\phi)) + r \cos(\phi) \sec(\theta)$$

### ۴-۳ استخراج فرم فضای حالت

به منظور استخراج فرم فضای حالت، متغیرهای حالت استند سه درجه آزادی چهارپره به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (۲۹-۳)$$

معادلات ارائه شده به فرم زیر برای فضای حالت بازنویسی شدند:

$$\dot{x}_1 = x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \quad (۳۰-۳)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \quad (۳۱-۳)$$

$$\dot{x}_3 = (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \quad (۳۲-۳)$$

$$(۳۳-۳)$$

$$\dot{x}_4 = A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 (\omega_2^2 - \omega_4^2) + A_4 x_5 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_4}{|x_4|} A_5$$

$$\dot{x}_5 = B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 (\omega_1^2 - \omega_3^2) + B_4 x_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 \quad (۳۴-۳)$$

$$\dot{x}_6 = C_1 x_4 x_5 + C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \quad (۳۵-۳)$$

ثابت های معادلات بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_2 &= \frac{2m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22} - J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_3 &= \frac{b d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_4 &= \frac{J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ & & A_5 &= \frac{m_1 g \mu r_x}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ B_1 &= \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_2 &= \frac{-2m_{tot} h_{cg}^2 - J_{11} + J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_3 &= \frac{b d_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_4 &= \frac{-J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \\ & & B_5 &= \frac{m_2 g \mu r_y}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \quad C_2 = \frac{d}{J_{33}} \quad C_3 = \frac{m_3 g \mu r_z}{J_{33}}$$

به منظور شبیه سازی ، پارامترهای استند به صورت جدول ۱-۳ در نظر گرفته شده است که مقدار پارامترهای استند آزمایشگاه است.

جدول ۱-۳: پارامترهای شبیه سازی استند چهارپره [۵]

پارامتر	واحد	مقدار پارامتر استند چهارپره
$J_{11}$	$kg.m^2$	0.02839
$J_{22}$	$kg.m^2$	0.03066
$J_{33}$	$kg.m^2$	0.0439
$J_R$	$kg.m^2$	$4.4398 \times 10^{-5}$
$m_{tot}$	$kg$	1.074
$m_1$	$kg$	1.272
$m_2$	$kg$	1.074
$m_3$	$kg$	1.693
$d_{cg}$	$m$	0.2
$h_{cg}$	$m$	0.02
$r_x$	$m$	0.01
$r_y$	$m$	0.01
$r_z$	$m$	0.025
$b$	1	$3.13 \times 10^{-5}$
$d$	1	$3.2 \times 10^{-6}$
$\mu_s$	1	0.003
$\mu_k$	1	0.002
$g$	$m/s^2$	9.81

### ۳-۵ خطی‌سازی

با استفاده از فرم فضای حالت استخراج شده در بخش ۳-۴ در این قسمت خطی‌سازی انجام شده است. در قسمت ۳-۵-۱ به صورت چند ورودی و چند خروجی<sup>۱</sup> برای سرعت دورانی پره‌ها در 2000 RPM و حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در قسمت ۳-۵-۲ مسئله به صورت یک ورودی و یک خروجی<sup>۲</sup> حول نقطه صفر خطی‌سازی انجام شد. در این قسمت برای فازهای مختلف یک سیستم تک ورودی تک خروجی در نظر گرفته شده است و برای فازهای رول، پیچ و یاو مسئله حل شده است سپس از مجموع خروجی‌های بدست‌آمده خروجی کلی یعنی سرعت دورانی پره‌ها بدست آمده است.

---

<sup>۱</sup>MIMO (Multiple Input Multiple Output)

<sup>۲</sup>SISO (Single Input Single Output )



### ۳-۵-۱ خطی سازی به فرم چند ورودی چند خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی سازی می شود.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 (\omega_2^2 - \omega_4^2) + A_4 x_5 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 (\omega_1^2 - \omega_3^2) + B_4 x_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad p \quad q \quad r]^T \quad (۳۶-۳)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T \quad (۳۷-۳)$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \delta \boldsymbol{\omega} \quad (۳۸-۳)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\delta \dot{x}_1 \quad \delta \dot{x}_2 \quad \delta \dot{x}_3 \quad \delta \dot{x}_4 \quad \delta \dot{x}_5 \quad \delta \dot{x}_6]^T \quad (۳۹-۳)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (۴۰-۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} x_5 \cos(x_1) \tan(x_2) - x_6 \sin(x_1) \tan(x_2) \\ -x_6 \cos(x_1) - x_5 \sin(x_1) \\ \frac{x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_1 \cos(x_1) \cos(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۱-۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} \frac{x_6 \cos(x_1)}{\cos(x_2)^2} + \frac{x_5 \sin(x_1)}{\cos(x_2)^2} \\ 0 \\ \frac{\tan(x_2) (x_6 \cos(x_1) + x_5 \sin(x_1))}{\cos(x_2)} \\ -A_2 \sin(x_1) \sin(x_2) \\ B_1 \cos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۲-۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۳-۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_2 x_6 + B_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ C_1 x_5 \end{bmatrix} \quad (۴۴-۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_5} = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \tan(x_2) \\ \cos(x_1) \\ \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_2 x_6 + A_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ 0 \\ C_1 x_4 \end{bmatrix} \quad (۴۵-۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_6} = \begin{bmatrix} \cos(x_1) \tan(x_2) \\ -\sin(x_1) \\ \frac{\cos(x_1)}{\cos(x_2)} \\ 0 \\ B_2 x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴۶-۳)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_4} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_5} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (۴۷-۳)$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_1}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_2}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_3}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_4}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_5}{\partial \omega_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial \omega_1} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_2} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_3} & \frac{\partial a_6}{\partial \omega_4} \end{bmatrix} \quad (۴۸-۳)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 x_5 & 2 A_3 \omega_2 - A_4 x_5 & A_4 x_5 & -2 A_3 \omega_4 - A_4 x_5 \\ 2 B_3 \omega_1 + B_4 x_4 & -B_4 x_4 & B_4 x_4 - 2 B_3 \omega_3 & -B_4 x_4 \\ 2 C_2 \omega_1 & -2 C_2 \omega_2 & 2 C_2 \omega_3 & -2 C_2 \omega_4 \end{bmatrix} \quad (۴۹-۳)$$

### ۳-۵-۲ خطی سازی به فرم یک ورودی یک خروجی

در این قسمت با توجه به فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی سازی می شود.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 (\omega_2^2 - \omega_4^2) + A_4 x_5 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 (\omega_1^2 - \omega_3^2) + B_4 x_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \end{bmatrix}$$

در این قسمت برای ساده سازی، ورودی مسئله را از سرعت دورانی به نیروهای تاثیرگذار در مودهای رول، پیچ و یاو تغییر داده شده است. این کار باعث می شود که مسئله از چند ورودی و چند خروجی به سه مسئله یک ورودی و یک خروجی تبدیل شود. نیروها به فرم رابطه ۳-۵۰ تعریف می شوند.

$$u_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad u_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad u_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \quad (۳-۵۰)$$

با توجه به اینکه سه نیرو در نظر گرفته شده و مسئله نیاز به چهار خروجی دارد یک نیروی دیگر نیز در نظر گرفته می شود که به فرم رابطه ۳-۵۱ است و مقدار آن به صورت ثابت و برابر با سرعت دورانی تمام پره ها در دور نامی یعنی 2000 RPM در نظر گرفته شده است.

$$u_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \quad (۳-۵۱)$$

در ادامه روابط ۳-۵۰ و ۳-۵۱ را در فضای حالت سیستم جایگزین می کنیم و برای سادگی قسمت های  $(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)$  از معادلات حذف می کنیم.

فضای حالت جدید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 u_1 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 u_2 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 u_3 \end{bmatrix} \quad (52-3)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{bmatrix}^T \quad (53-3)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T \quad (54-3)$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \quad (55-3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 & \delta \dot{x}_2 & \delta \dot{x}_3 & \delta \dot{x}_4 & \delta \dot{x}_5 & \delta \dot{x}_6 \end{bmatrix}^T \quad (56-3)$$

$$A = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} & \frac{\partial a_1}{\partial x_5} & \frac{\partial a_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} & \frac{\partial a_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_4} & \frac{\partial a_3}{\partial x_5} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_2} & \frac{\partial a_4}{\partial x_3} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} & \frac{\partial a_4}{\partial x_5} & \frac{\partial a_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_1} & \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_3} & \frac{\partial a_5}{\partial x_4} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} & \frac{\partial a_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_1} & \frac{\partial a_6}{\partial x_2} & \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_4} & \frac{\partial a_6}{\partial x_5} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (57-3)$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} & \frac{\partial a_1}{\partial u_2} & \frac{\partial a_1}{\partial u_3} & \frac{\partial a_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_2}{\partial u_1} & \frac{\partial a_2}{\partial u_2} & \frac{\partial a_2}{\partial u_3} & \frac{\partial a_2}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_3}{\partial u_1} & \frac{\partial a_3}{\partial u_2} & \frac{\partial a_3}{\partial u_3} & \frac{\partial a_3}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} & \frac{\partial a_4}{\partial u_2} & \frac{\partial a_4}{\partial u_3} & \frac{\partial a_4}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_1} & \frac{\partial a_5}{\partial u_2} & \frac{\partial a_5}{\partial u_3} & \frac{\partial a_5}{\partial u_4} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_1} & \frac{\partial a_6}{\partial u_2} & \frac{\partial a_6}{\partial u_3} & \frac{\partial a_6}{\partial u_4} \end{bmatrix} \quad (۵۸-۳)$$

روابط بالا به فرم چند سیستم یک ورودی و چند خروجی نوشته شده است. آن را به یک ورودی و یک خروجی تبدیل می‌کنیم.

مود رول

$$A_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_1} & \frac{\partial a_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۹-۳)$$

$$B_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial a_4}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (۶۰-۳)$$

مود پیچ

$$A_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial a_5}{\partial x_2} & \frac{\partial a_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۱-۳)$$

$$B_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial a_5}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (۶۲-۳)$$

مود یاو

$$A_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial a_6}{\partial x_3} & \frac{\partial a_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۳-۳)$$

$$B_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial a_6}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (۶۴-۳)$$

استخراج سرعت دورانی پره ها از نیروها

چهار معادله و چهار مجهول:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ u_2 &= \omega_1^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \\ u_4 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{aligned} \quad (۶۵-۳)$$



جواب معادلات ۶۵-۳ به فرم رابطه ۶۶-۳ بدست می آید.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{u_4 - u_3 + 2u_2}{4}}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}}$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{u_4 - u_3 - 2u_2}{4}}$$

(۶۶-۳)

### ۳-۶ نتیجه‌گیری

در این پروژه روش بازی دیفراسیلی بررسی شد و برای یک استند آزمایشگاهی پیاده‌سازی شد. در آخر این روش با روش معروف LQR نیز مقایسه شد. با توجه به گسترش شاخه تئوری بازی و نیازمندی زیاد به چهارپره در آینده می‌توان به این روش امیدوار بود و کاربردهای بیشتری از آن را در آینده دید.

## مراجع

- [1] <http://gcrs.sharif.edu>. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed November 2, 2021], Available at <http://gcrs.sharif.edu/%D8%A7%D8%B3%D8%AA%D9%86%D8%AF-%D8%A2%D8%B2%D9%85%D8%A7%DB%8C%D8%B4%DA%AF%D8%A7%D9%87%DB%8C-%DA%A9%D9%86%D8%AA%D8%B1%D9%84-%D9%88%D8%B6%D8%B9%DB%8C%D8%AA-%D8%B3%D9%87-%D8%AF%D8%B1%D8%AC%D9%87-%D8%A2/>.
- [2] dreamstime. boeing ch chinook, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://cutt.ly/onRvD7x>.
- [3] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/>.
- [4] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent back-stepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.
- [5] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.
- [6] L. Sprekelmeyer. *These We Honor: The International Aerospace Hall of Fame*. 2006.
- [7] M. J. Hirschberg. A perspective on the first century of vertical flight. *SAE Transactions*, 108:1113–1136, 1999.
- [8] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on  $se(3)$ . In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.

- 
- [9] nobelprize.org. Jean tirole, 2021. [Online; accessed October 17, 2021], Available at <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2014/tirole/facts/>.
- [10] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.
- [11] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [12] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.
- [13] M. A. A. Bishe. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using a heuristic nonlinear controller. January 2018.



Sharif University of Technology  
Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

# **LQDG Controller for 3DOF Quadcopter Stand**

By:

**Ali BaniAsad**

Supervisor:

**Dr. Nobahari**

August 2021