دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی
مهندسی کنترل

عنوان:

کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

شهرویر ۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی[1] استتفاده شده‌است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده‌است. هر یک از دو بازیکن سعی می‌کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن‌ها در نظر گرفته شده‌است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش[2] که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می‌شود. این روش نسبت به اغتشاش ورودی مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی مقاومت مناسبی دارد. از روش ارائه‌شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده‌است. برای ارزیابی عملکرد این روش ابتدا شبیه‌سازی‌هایی در محیط سیمولینک انجام شده‌است و سپس، با پیاده‌سازی آن صحت عملکرد آن تایید شده‌است.

کلیدواژه‌ها: چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی،مدل‌مبنا، تنظیم‌کننده مربعی خطی

[1]Game Theory
[2]Nash Equilibrium

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر[1] یکی از انواع وسایل پرنده است. چهارپره‌ها نوعی هواگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپره‌ها جای دارند. چهارپره‌ها به‌دلیل داشتن توانایی مانور خوب و امکان پرواز ایستا با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گسترده‌ای دارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده‌است. بنابراین، روزانه پیشرفت چشمگیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویربرداری، تفریحی و کشاورزی از کاربرد زیاد و روزافزونی دارند و مدل‌های دارای سرنشین آن نیز تولید شده‌است.

۱-۱ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندپره در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Jacques و Louis Breguet ساخته‌شد. پرنده آن‌ها موفق به پرواز به‌صورت عمودی شد؛ ولی تنها تا ارتفاع دو فوتی پرواز کرد. پرواز انجام شده یک پرواز آزاد[2] نبود و پرنده به کمک چهار مرد ثابت نگه‌داشته شده‌بود [۱]. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمی‌گردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی به نام Étienne Oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع کرد و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد. در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد [۲].

[1] Quadcopter
[2] Free Flight

در سال ۱۹۲۲ در آمریکا George de Bothezata موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود.

در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده‌است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده است و به تدریج رواج یافته‌است [۳].

از حدود سال ۲۰۰۶ کواد کوپترها شروع به رشد صنعتی به‌صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

۱-۲ تعریف مسئله

مسئله‌ای که در این پروژه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مربعی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی (شکل ۱-۲) شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده است. در این صورت، تنها وضعیت چهارپره (زوایای رول[۳]، پیچ[۴] و یاو[۵]) تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین، می‌توان با مقیدکردن چرخش حول هر محور، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به‌صورت مجزا و یا با یکدیگر بررسی کرد.

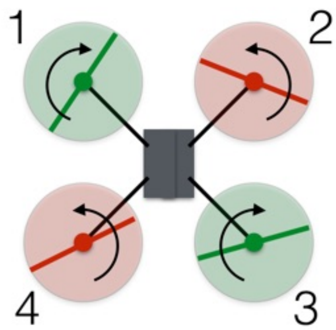
شکل ۱-۱: استند کنترل وضعیت سه درجه آزادی چهارپره [۴]

[3] Roll
[4] Pitch
[5] Yaw

با توجه به شکل، مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان آن را به‌صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین، سامانه به‌صورت حلقه‌باز ناپایدار است. این سامانه دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زوایای اویلر (ψ, θ, ϕ) است. در مدل‌سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد؛ اما، با توجه به کنترل‌کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به‌صورت اغتشاش درنظر گرفت و سامانه را به خوبی کنترل کرد.

۱-۲-۱ ساختار چهارپره

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها گشتاورهای عکس‌العملی یکدیگر را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.



شکل ۱-۲: جهت چرخش پره‌های چهارپره [۵]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیادتر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به‌صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و گشتاور یاو ایجاد می‌شود و نیروی برآ ثابت می‌ماند؛ بنابراین، چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. همچنین، با کم و زیاد کردن دو به دو سرعت موتورهای مجاور چهارپره از حالت افقی خارج شده و در صفحه افق حرکت می‌کند.

۱-۳ نظریه بازی

نظریه بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. نظریه بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه بازی در تلاش است تا به وسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایط راهبردی یا در یک بازی که در آن موفقیت فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی

در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراه جان هارسانی و راینهارد سیلتن به خاطر مطالعات خلاقانه‌ی خود در زمینه‌ی نظریه بازی، برنده‌ی جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برندگان جایزه‌ی نوبل اقتصاد از میان متخصصین نظریه بازی انتخاب شدند. آخرین آن‌ها، ژان تیرول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد [۶].

۱-۳-۲ تعادل نش

پژوهش‌ها در این زمینه اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به عنوان تعادل در بازی‌ها استوار است. این راهبردها به‌طور معمول از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش است. تعادل نش در بازی‌هایی کاربرد دارد در آن فرض شده‌است که هر بازیکن به راهبرد تعادل دیگر بازیکنان آگاه است. بر اساس نظریه‌ی تعادل نش، در یک بازی که هر بازیکن امکان انتخاب‌های گوناگون دارد اگر بازیکنان به روش منطقی راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حداکثر سود در بازی باشند، دست کم یک راهبرد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن وجود دارد و چنانچه بازیکن راهکار دیگری را انتخاب کند، نتیجه‌ی بهتری به دست نخواهد آورد.

فصل ۲

بازی دیفرانسیلی

در تئوری بازی‌ها، بازی‌های دیفرانسیل مجموعه‌ای از مسائل مربوط به مدل‌سازی و تحلیل در چارچوب یک سامانه دینامیکی هستند. ویژگی بازی‌های دیفرانسیلی این است که در آن‌ها رفتار متغیرهای حالت با یک معادله دیفرانسیل بیان می‌شود [۷]. در بخش ۲-۱ به بررسی کوتاه بازی دیفرانسیلی پرداخته می‌شود. در بخش ۲-۴ کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی [۱] و در بخش ۲-۴ به معرفی کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی [۲] پرداخته می‌شود.

۲-۱ مقدمه‌ای بر بازی دیفرانسیلی

این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله برای یک سامانه خطی پیوسته با معالات حالت:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{u_2}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{D_2}\boldsymbol{u_2}(t)\end{aligned} \tag{۲-۱}$$

که در رابطه (۲-۱) $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$، $\boldsymbol{u_1}$ و $\boldsymbol{u_2}$ به ترتیب بیانگر بردار حالت، بردار خروجی، بردار ورودی بازیکن اول و بردار ورودی بازیکن دوم هستند. همچنین، $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B_1}$، $\boldsymbol{B_2}$، $\boldsymbol{C}$، $\boldsymbol{D_1}$ و $\boldsymbol{D_2}$ به ترتیب بیانگر ماتریس حالت، ماتریس ورودی بازیکن اول، ماتریس ورودی بازیکن دوم، ماتریس خروجی، ماتریس فیدفوروارد بازیکن اول و ماتریس فیدفوروارد بازیکن دوم هستند [۸]. بر اساس رابطه (۲-۱) دینامیک سامانه تحت تاثیر هر

[1] Linear Quadratic Regulator Based on the Differential Game Theory (LQDG)
[2] Linear Quadratic Integral Regulator Based on the Differential Game Theory (LQDG)

دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا ممکن است تلاش بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. این پروژه حالت همکاری دو بازیکن را بررسی نمی‌کند و دو بازیکن در تلاش برای کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن در زمان $t \in [0, T]$ به‌صورت مربعی[3] است. هدف اصلی کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه برای بازیکن شماره i (این مسئله شامل دو بازیکن است) به فرم رابطه (۲-۲) نوشته می‌شود.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u_i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{u_i}(t) + \boldsymbol{u_j}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ij}}\boldsymbol{u_j}(t)\right) dt \qquad (۲-۲)$$

در رابطه (۲-۲) $\boldsymbol{Q_i}$، $\boldsymbol{R_{ii}}$ و $\boldsymbol{R_{ij}}$ به ترتیب بیانگر اهمیت میزان اهمیت انحراف متغیرهای حالت مقادیر مطلوب برای بازیکن شماره i ،میزان تلاش کنترلی بازیگر شماره i و میزان تلاش کنترلی بازیگر شماره j هستند. در اینجا ماتریس‌های $\boldsymbol{Q_i}$ ، $\boldsymbol{R_{ii}}$ و $\boldsymbol{H}$ متقارن فرض شده‌اند و ماتریس $\boldsymbol{R_{ii}}$ به صورت مثبت معین $(\boldsymbol{R_{ii}} > 0)$ فرض شده است[۹].

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان $t \in [0, T]$ فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سامانه را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان هماهنگی بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش یک راه حل برای بازی دیفرانسیلی با شرایط اشاره شده ارائه می‌دهد.

قضیه‌ی ۲-۱ به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول $(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$ یک **تعادل نش** برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات قابل قبول $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2})$ از نامساوی (۲-۳) پیروی کنند.

$$J_1(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_1(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}^*) \text{ and } J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*) \leqslant J_2(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}) \qquad (۲-۳)$$

در اینجا قابل قبول بودن به‌معنی آن است که $\boldsymbol{u_i}(.)$ به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه‌ی حرکات که بستگی به اطلاعات بازیکنان از بازی دارد، مجموعه‌ای از راهبردهایی است که بازیکنان ترجیح می‌دهند برای کنترل سامانه انجام دهند و سامانه (۲-۱) باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد.

[3] Quadratic Cost Function

به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات $(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$ یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه $J_i, \ (i = 1, 2)$ است.

۲-۲ کنترل‌کننده مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

در بخش ۲-۱ به بررسی اجمالی بازی دیفرانسیلی پرداخته شد. در ادامه بخش ۲-۳ به معرفی کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی (LQDG) و در بخش ۲-۴ به معرفی کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی (LQIDG) پرداخته می‌شود.

۲-۳ کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

برای یک سامانه خطی پیوسته با معادلات حالت:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{u_2}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D_1}\boldsymbol{u_1}(t) + \boldsymbol{D_2}\boldsymbol{u_2}(t) \end{aligned} \tag{۲-۴}$$

فرمان کنترلی بهینه LQDG بازیکن شماره i به‌صورت رابطه (۲-۵) محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{u_i}(t) = -\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_i}(t)\boldsymbol{x}(t), \quad i = 1, 2 \tag{۲-۵}$$

که در رابطه (۲-۵)، ضریب ماتریس $\boldsymbol{x}(t)$ بیانگر بهره بازخورد بهینه است. این بهره به گونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هزینه مربعی بازیکن شماره i با فرض بدترین حرکت سایر بازیکنان کمینه شود. تابع هزینه بازیکن شماره i در زیر آورده شده است.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u_i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{u_i}(t) + \boldsymbol{u_j}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ij}}\boldsymbol{u_j}(t)\right) dt \tag{۲-۶}$$

در رابطه (۲-۵) ، ماتریس $\boldsymbol{K_i}(t)$ بیانگر پاسخ معادله کوپل ریکاتی[۴] زیر است [۷]:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_1}(t) - \boldsymbol{K_1}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_1} + \boldsymbol{K_1}(t)\boldsymbol{S_1}(t)\boldsymbol{K_1}(t) + \boldsymbol{K_1}(t)\boldsymbol{S_2}(t)\boldsymbol{K_2}(t) \\ \dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{2}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_2}(t) - \boldsymbol{K_2}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_2} + \boldsymbol{K_2}(t)\boldsymbol{S_2}(t)\boldsymbol{K_2}(t) + \boldsymbol{K_2}(t)\boldsymbol{S_1}(t)\boldsymbol{K_1}(t) \end{aligned} \tag{۲-۷}$$

[4] Coupled Riccati Differential Equations

برای سادگی از نمادسازی $\boldsymbol{S_i} := \boldsymbol{B_i}\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_i}^{\mathrm{T}}$ استفاده شده‌است.

۲-۴ کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

در صورت وجود اغتشاش و یا خطای مدل‌سازی، عدم وجود انتگرال‌گیر در کنترل‌کننده LQDG میتواند باعث ایجاد خطای حالت ماندگار شود. به‌منظور حذف این خطا، کنترل‌کننده LQIDG بر پایه کنترل‌کننده LQDG تعمیم‌یافته است. در این کنترل‌کننده، انتگرال اختلاف بین خروجی سیستم و مقدار مطلوب به بردار حالت اضافه شده‌است. بنابراین، بردار حالت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{x_a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_d} - \boldsymbol{x} \\ \int (\boldsymbol{y_d} - \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} \tag{۲-۸}$$

در رابطه (۲-۸)، بردار حالت افزوده[5]، $\boldsymbol{x_d}$ بردار حالت مطلوب و $\boldsymbol{y_d}$ بردار خروجی مطلوب است. ماتریس $\boldsymbol{C}$ یک ماتریس همانی است در نظر گرفته شده‌است؛ بنابراین، بردار خروجی برابر با بردار حالت خواهد بود:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \tag{۲-۹}$$

با تعریف بردار حالت افزوده، معادلات حالت به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}}(t) &= \boldsymbol{A_a}\boldsymbol{x_a}(t) + \boldsymbol{B_{a_{a_1}}}\boldsymbol{u_{a_1}}(t) + \boldsymbol{B_{a_{a_2}}}\boldsymbol{u_{a_2}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C_a}\boldsymbol{x_a}(t) + \boldsymbol{D_{a_{a_1}}}\boldsymbol{u_{a_1}}(t) + \boldsymbol{D_{a_{a_2}}}\boldsymbol{u_{a_2}}(t) \end{aligned} \tag{۲-۱۰}$$

که ماتریسهای $\boldsymbol{A_a}$ و $\boldsymbol{B_a}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{A_a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{۲-۱۱}$$

$$\boldsymbol{B_a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۲-۱۲}$$

[5] Augmented

با معرفی معادلات حالت جدید برای سامانه، سایر گام‌های طراحی کنترل‌کننده LQIDG مشابه کنترل‌کننده LQDG است. بنابراین، فرمان کنترلی بهینه LQIDG بازیکن شماره i به‌صورت رابطه (۲-۱۳) محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{u_i}(t) = -\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_{a_i}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_{a_i}}(t)\boldsymbol{x_a}(t), \quad i = 1, 2 \tag{۲-۱۳}$$

که در رابطه (۲-۱۳)، ضریب ماتریس $\boldsymbol{x_a}(t)$ بیانگر بهره بازخورد بهینه است. این بهره به گونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هزینه مربعی بازیکن شماره i با فرض بدترین حرکت سایر بازیکنان کمینه شود. تابع هزینه بازیکن شماره i در زیر آورده شده است.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T \left(\boldsymbol{x_a}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x_a}(t) + \boldsymbol{u_i}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ii}}\boldsymbol{u_i}(t) + \boldsymbol{u_j}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R_{ij}}\boldsymbol{u_j}(t)\right) dt \tag{۲-۱۴}$$

در رابطه (۲-۵) ، ماتریس $\boldsymbol{K_i}(t)$ بیانگر پاسخ معادله کوپل ریکاتی[۶] زیر است [۷]:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{a_1}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_{a_1}}(t) - \boldsymbol{K_{a_1}}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_{a_1}} + \boldsymbol{K_{a_1}}(t)\boldsymbol{S_{a_1}}(t)\boldsymbol{K_{a_1}}(t) + \boldsymbol{K_{a_1}}(t)\boldsymbol{S_{a_2}}(t)\boldsymbol{K_{a_2}}(t)\\
\dot{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{a_2}}(t) &= -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K_{a_2}}(t) - \boldsymbol{K_{a_2}}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q_{a_2}} + \boldsymbol{K_{a_2}}(t)\boldsymbol{S_{a_2}}(t)\boldsymbol{K_{a_2}}(t) + \boldsymbol{K_{a_2}}(t)\boldsymbol{S_{a_1}}(t)\boldsymbol{K_{a_1}}(t)
\end{aligned} \tag{۲-۱۵}$$

برای سادگی از نمادسازی $\boldsymbol{S_{a_i}} := \boldsymbol{B_{a_i}}\boldsymbol{R_{ii}}^{-1}\boldsymbol{B_{a_i}}^{\mathrm{T}}$ استفاده شده‌است.

[6] Coupled Riccati Differential Equations

فصل ۳

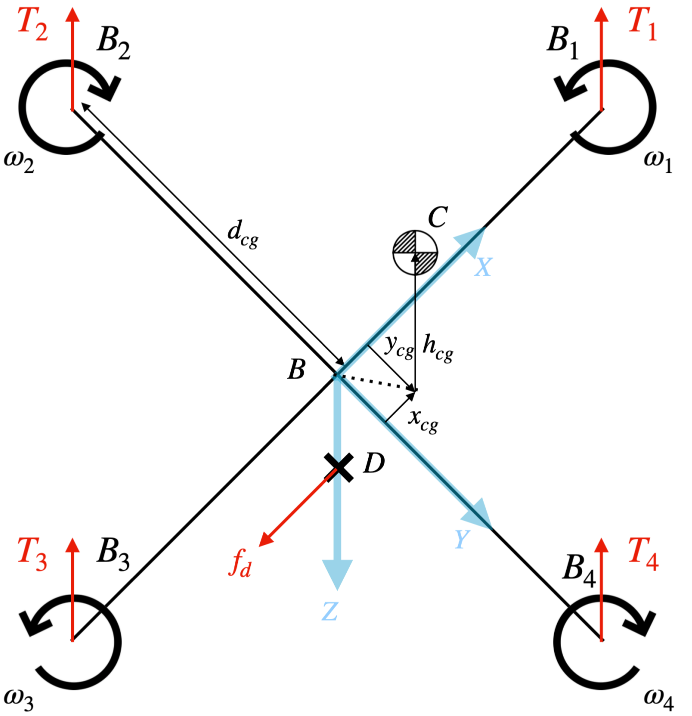
مدل‌سازی چهارپره

در این فصل به مدلسازی استند چهارپره آزمایشگاهی پرداخته شده است. به این منظور، ابتدا فرضیات مربوط به مدلسازی چهارپره بیان می‌شود. سپس معادلات حاکم بر حرکات دورانی چهارپره بیان می‌شود. در ادامه، به استخراج گشتاورهای خارجی اعمالی به استند شامل گشتاورهای آیرودینامیکی ناشی از پره، گشتاور نیروی تکیه گاه و گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها پرداخته می‌شود. در گام بعد، معادله نهایی دینامیک دورانی استند استخراج می‌شود. سپس، فرم فضای حالت استند آزمایشگاهی استخراج می‌شود. لازم به توضیح است که فرم نهایی فضای حالت استند بدون درنظرگرفتن اصطکاک بیرینگ‌ها از منبع [۱۰] آورده شده است که در آن منبع، مدل استخراج‌شده با اعمال ورودی‌ها و شرایط اولیه مختلف اعتبارسنجی شده است.

۳-۱ فرضیات مدل‌سازی

شماتیک استند چهارپره در شکل ۳-۱ نشان داده شده است. به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم، فرض می‌شود که چهارپره صلب و متقارن است. همچنین ماتریس گشتاور اینرسی چهارپره به صورت قطری درنظر گرفته می‌شود. مرکز جرم سازه چهارپره روی نقطه B و مرکز ثقل هر یک از پره‌ها به همراه قسمت دوار موتور روی نقاط B_1 تا B_4 است. مبدأ دستگاه مختصات بدنی روی محل تقاطع بازوهای چهارپره یعنی نقطه B در نظر گرفته شده است. از آنجایی که مرکز ثقل پره‌ها بالاتر از مرکز ثقل سازه چهارپره است، مرکز ثقل کلی چهارپره جایی بین مرکز ثقل موتورها و سازه، یعنی نقطه‌ی C می‌گیرد. همچنین قابل ذکر است که

نقطه‌ی D محل اتصال کلی استند چهارپره است. جهت مثبت محور X^B و Y^B دستگاه مختصات بدنی به ترتیب در راستای بازوی مربوط به موتور ۱ و ۴ فرض می‌شود. همچنین جهت مثبت محور Z^B با توجه به قانون دست راست حاصل می‌شود.



شکل ۳-۱: شماتیک استند چهارپره

۳-۲ معادله گشتاور

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت دورانی چهارپره، از قوانین نیوتن اویلر استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیلی اویلر برای یک پرنده حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۱]:

$$\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{BI}\right]^B = \left(\left[\boldsymbol{J}\right]^B\right)^{-1}\left(-\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B \times \left(\left[\boldsymbol{J}\right]^B\left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B + \left[\boldsymbol{I}_R\right]^B\right) + \left[\boldsymbol{m}_b\right]^B\right) \qquad (۳-۱)$$

در رابطه (۳-۱)، عبارت $\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{BI}\right]^B$ بیانگر بردار مشتق نرخ‌های زاویه‌ای چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین ماتریس $[\boldsymbol{J}]^B$ نشان‌دهنده گشتاورهای اینرسی چهارپره حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات

بدنی است که به دلیل تقارن چهارپره به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$[\boldsymbol{J}]^B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{۳-۲}$$

در رابطه (۳-۲)، پارامترهای J_{11}، J_{22} و J_{33} به ترتیب بیانگر گشتاورهای اینرسی چهارپره حول محورهای X^B، Y^B و Z^B دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین بردار $[\boldsymbol{I}_R]^B$ در رابطه‌ی (۳-۱) بیانگر مجموع تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است. ازآنجا که، تکانه زاویه‌ای پره‌ها در راستای محور Z^B دستگاه مختصات بدنی است؛ در نتیجه $[\boldsymbol{I}_R]^B$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{I}_R]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_R \end{bmatrix} \tag{۳-۳}$$

در رابطه‌ی (۳-۳)، l_R بیانگر تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در راستای محور Z^B دستگاه مختصات بدنی است که به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$l_R = J_R \omega_d \tag{۳-۴}$$

در رابطه‌ی (۳-۴)، پارامتر J_R بیانگر ممان اینرسی هر یک از پره‌ها است. همچنین ω_d نشان دهنده تفاضل نسبی سرعت‌های زاویه‌ای پره‌ها است که با توجه به شکل (۳-۱) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_d = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \tag{۳-۵}$$

همچنین $[\boldsymbol{m}_b]^B$ در رابطه‌ی (۳-۱) برآیند گشتاورهای خارجی اعمالی به چهارپره، شامل گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها و گشتاورهای ناشی از نیروی تکیه‌گاه است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

۳-۲-۱ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها

آیرودینامیک پره‌ها باعث ایجاد نیروی برآ و درنتیجه گشتاورهای رول و پیچ ناشی از اختلاف نیروی برآ می‌شود. با استفاده از تفاضل نیروی برآی پره‌ها دو گشتاور رول و پیچ ایجاد می‌شود. با توجه به تئوری مومنتوم، نیروی برآی هر پره (T_i) از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود [۱۲] :

$$T_i = b\omega_i^2 \tag{۳-۶}$$

در رابطه ۳-۶ b و ω_i به ترتیب بیانگر فاکتور نیروی برآ و سرعت زاویه‌ای هر پره است؛ بنابراین مطابق شکل ۳-۱ گشتاور رول حول محور X^B دستگاه مختصات بدنی از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$m_X^B = d_{cg}(T_2 - T_4) = d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \tag{۳-۷}$$

در رابطه ۳-۷ عبارت d_{cg} بیانگر فاصله مرکز هر پره از مرکز جرم چهارپره در راستای محور X^B دستگاه مختصات بدنی است. همچنین گشتاور پیچ حول محور Y^B دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Y^B = d_{cg}(T_1 - T_3) = d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \tag{۳-۸}$$

گشتاور یاو آیرودینامیکی از اختلاف گشتاور ناشی از پسای پره‌ها ایجاد می‌شود؛ بنابراین، جهت این گشتاور همواره در جهت مخالف چرخش پره‌ها است. بنابراین، گشتاور یاو حول محور Z^B دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۳-۱، مطابق رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Z^B = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \tag{۳-۹}$$

رابطه ۳-۹ عبارت d بیانگر فاکتور گشتاور پسای پره‌ها است. در نتیجه با توجه به معادلات ۳-۷، ۳-۸ و ۳-۹ بردار گشتاورهای خارجی ناشی از آیرودینامیک پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[m_A]^B = \begin{bmatrix} m_X^B \\ m_Y^B \\ m_Z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{۳-۱۰}$$

۳-۲-۲ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه

همانطور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌شود، نیروی f_d که در نقطه‌ی D از طریق اتصال کلی به چهارپره وارد می‌شود، باعث ایجاد گشتاور حول مرکز ثقل چهارپره می‌شود. به منظور مدل‌سازی گشتاور ناشی از این نیرو حول نقطه C ، لازم است ابتدا نیروی f_d استخراج شود. از انجایی که نقطه‌ی D منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نیست؛ لذا معادله حرکت انتقالی برای نقطه اتصال D با استفاده از معادله انتقال یافته نیوتن (معادله گروبین) به صورت معادله زیر حاصل می‌شود [۱۱] :

$$m_{tot}\left[D^I \boldsymbol{v}_D^I\right]^B = [\Sigma \boldsymbol{f}]^B - m_{tot}\left(\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B + \left[D^I\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right) \tag{۳-۱۱}$$

در رابطه (۳-۱۱)، m_{tot} مجموع جرم چهارپره و $\left[D^I \boldsymbol{v}_D^I\right]^B$ مشتق دورانی سرعت نقطه D نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین $[\Sigma \boldsymbol{f}]^B$ بیان‌کننده برآیند نیروهای وارده بر نقطه‌ی D و $\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B$ ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاویه‌ای چهارپره نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین $\left[D^I \boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B$ نشان‌دهنده مشتق دورانی سرعت زاویه‌ای چهارپره نسبت به قاب اینرسی و $[\boldsymbol{s}_{cd}]^B$ بردار واصل از نقطه‌ی D به نقطه C است. با انتقال قاب بدنی به قاب اینرسی معادله (۳-۱۱) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & m_{tot}\left[D^B \boldsymbol{v}_D^I\right]^B + m_{tot}\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{v}_D^I\right]^B = \\ & [\Sigma \boldsymbol{f}]^B - m_{tot}\left(2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B + \left[D^I \boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right) \end{aligned} \tag{۳-۱۲}$$

همچنین به دلیل اینکه سرعت محل اتصال چهارپره (نقطه D) صفر است؛ دو عبارت سمت چپ معادله (۳-۱۲) هر دو صفر هستند. در نتیجه معادله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$[\Sigma \boldsymbol{f}]^B - m_{tot}\left(2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B + \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right) = 0 \tag{۳-۱۳}$$

عبارت $[\Sigma \boldsymbol{f}]^B$ بیانگر مجموع نیروهای وارد بر چهارپره است که به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$[\Sigma \boldsymbol{f}]^B = [\boldsymbol{f}_D]^B + [\boldsymbol{f}_T]^B + [\boldsymbol{f}_G]^B \tag{۳-۱۴}$$

در رابطه (۳-۱۴)، بردار $[\boldsymbol{f}_D]^B$ مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی D است. همچنین بردار $[\boldsymbol{f}_T]^B$ بیانگر مجموع نیروی برآی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{f}_T]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{bmatrix} \tag{۳-۱۵}$$

مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه‌ی D است. همچنین بردار $[\boldsymbol{f}_G]^B$ بیانگر نیروی وزن چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{f}_G]^B = [\boldsymbol{C}]^{BL}[\boldsymbol{f}_G]^L \tag{۳-۱۶}$$

در رابطه (۳-۱۶)، ماتریس $[\boldsymbol{C}]^{BL}$ انتقال از دستگاه مختصات تراز محلی (L) به دستگاه مختصات بدنی است. با جایگذاری روابط (۳-۱۴)، (۳-۱۵) و (۳-۱۶) در (۳-۱۳) عبارت زیر برای نیروی تکیه‌گاهی

حاصل می‌شود.

$$[f_D]^B = -[f_G]^B - [f_T]^B + m_{tot}\left\{2\left[\Omega^{BI}\right]^B\left[\Omega^{BI}\right]^B[s_{cd}]^B + \left[\frac{d\Omega^{BI}}{dt}\right]^B[s_{cd}]^B\right\} \quad (۳-۱۷)$$

سپس از حاصل‌ضرب نیروی تکیه‌گاه مدل شده در معادله (۳-۱۷) در بردار محل اثر آن، گشتاور ایجاد شده توسط نیروی اتصال کلی به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{m}_D]^B = [\boldsymbol{s}_{DC}]^B\left(-[\boldsymbol{f}_G]^B - [\boldsymbol{f}_T]^B m_{tot}\left\{2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right\}\right) \quad (۳-۱۸)$$

در رابطه (۳-۱۸) بردار $[\boldsymbol{s}_{DC}]^B$ بیانگر فاصله‌ی نقطه‌ی D از مرکز ثقل چهارپره (h_{cg}) است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\boldsymbol{s}_{DC}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cg} \end{bmatrix} \quad (۳-۱۹)$$

در نتیجه با جمع گشتاورهای ناشی از نیروهای آیرودینامیک پره‌ها از معادله (۳-۱۰) و گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه از معادله (۳-۱۸)، گشتاور خارجی کلی اعمالی به چهارپره به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{m}_B]^B = [\boldsymbol{m}_A]^B + [\boldsymbol{m}_D]^B \quad (۳-۲۰)$$

۳-۳ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها

هر یک از محورهای استند آزمایشگاهی به‌وسیله بیرینگ به‌یکدیگر متصل شده‌اند. گشتاور ناشی ازاصطکاک بیرینگ‌ها در استند را می‌توان به‌صورت زیر مدل کرد [۱۳] :

$$[\boldsymbol{m}_f]^B = \begin{bmatrix} P_1\mu_s r_x \\ P_2\mu_s r_y \\ P_3\mu_s r_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1\mu_k r_x \\ P_2\mu_k r_y \\ P_3\mu_k r_z \end{bmatrix} \quad (۳-۲۱)$$

در رابطه (۳-۲۱)، $\boldsymbol{P}$ نیروی عمودی وارد بر تکیه‌گاه هر یک از محورها، μ_s و μ_k به‌ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی بیرینگ‌ها و r شعاع هر یک از بیرینگ‌ها است.

۳-۴ گشتاورهای ناشی از جرم استند

هر یک از محورهای استند آزمایشگاهی به‌وسیله بیرینگ به‌یکدیگر متصل شده‌اند. گشتاور ناشی ازاصطکاک بیرینگ‌ها در استند را می‌توان به‌صورت زیر مدل کرد [۱۳] :

$$[\boldsymbol{m}_{cg}]^B = \begin{bmatrix} m_{tot} g y_{cg} \\ -m_{tot} g x_{cg} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۲۲}$$

در رابطه ۳-۲۱، $\boldsymbol{P}$ نیروی عمودی وارد بر تکیه‌گاه هر یک از محورها، μ_s و μ_k به‌ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی بیرینگ‌ها و r شعاع هر یک از بیرینگ‌ها است.

۳-۴-۱ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی

با جایگذاری گشتاورهای خارجی چهارپره و تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در معادله دیفرانسیل اویلر، شکل نهایی معادله دیفرانسیل استند چهارپره حاصل می‌شود. به این منظور، با جایگذاری مقدار گشتاورهای اعمالی به چهارپره از معادله (۳-۲۰) در معادله (۳-۱) رابطه موردنیاز برای مدل‌سازی دینامیک دورانی استند به‌صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B = \left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1} \Bigg(& -\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right] \times \left([\boldsymbol{J}]^B \left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B + [\boldsymbol{I}_R]^B\right) + \\ & [\boldsymbol{m}_A]^B + [\boldsymbol{m}_{cg}]^B + [\boldsymbol{s}_{DC}]^B \Big(-[\boldsymbol{G}]^B - [\boldsymbol{T}]^B + \\ & m_{tot}\Big\{ 2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B \left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B [\boldsymbol{s}_{cd}]^B + \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B [\boldsymbol{s}_{cd}]^B \Big\}\Big)\Bigg) \end{aligned} \tag{۳-۲۳}$$

در رابطه (۳-۲۳)، عبارت $\left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B$ بیانگر ماتریس پادمتقارن بردار مشتق سرعت زاویه‌ای بدنی ($\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B$) است. جمله آخر در معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_{tot} [\boldsymbol{s}_{DC}]^R \left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B [\boldsymbol{s}_{CD}]^R = m_{tot} [\boldsymbol{s}_{DC}]^R [\boldsymbol{s}_{DC}]^R \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}^{BI}\right]^B \tag{۳-۲۴}$$

با جایگذاری معادله (۳-۲۴) در معادله (۳-۲۳) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B\left(I-m_{tot}\left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1}[\boldsymbol{s}_{DC}]^B[\boldsymbol{s}_{DC}]^B\right)=\\&\left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1}\Bigg(-\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]\times\left([\boldsymbol{J}]^B\left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B+[\boldsymbol{I}_R]^B\right)+\\&[\boldsymbol{m}_A]^B+[\boldsymbol{m}_{cg}]^B+[\boldsymbol{s}_{DC}]^B\Bigg(-[\boldsymbol{F}_g]^B-[\boldsymbol{F}_T]^B+\\&m_{tot}\left\{2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B+\left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right\}\Bigg)\Bigg)\end{aligned}\tag{۳-۲۵}$$

با ساده‌سازی رابطه (۳-۲۵)، بردار سرعت زاویه‌ای استند به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt}\right]^B=a^{-1}b\\&a=I-m_{tot}\left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1}[\boldsymbol{s}_{DC}]^B[\boldsymbol{s}_{DC}]^B\\&b=\left([\boldsymbol{J}]^B\right)^{-1}\Bigg(-\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]\times\left([\boldsymbol{J}]^B\left[\boldsymbol{\omega}^{BI}\right]^B+[\boldsymbol{I}_R]^B\right)+\\&[\boldsymbol{m}_A]^B+[\boldsymbol{m}_{cg}]^B+[\boldsymbol{s}_{DC}]^B\Bigg(-[\boldsymbol{F}_g]^B-[\boldsymbol{F}_T]^B+\\&m_{tot}\left\{2\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B\left[\boldsymbol{\Omega}^{BI}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B+\left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt}\right]^B[\boldsymbol{s}_{cd}]^B\right\}\Bigg)\Bigg)\end{aligned}\tag{۳-۲۶}$$

با جایگذاری معادلات (۳-۳)، (۳-۴) و (۳-۵) معادله مربوط به تکانه کلی پره‌ها، معادله (۳-۶) مربوط به برآی پره و معادله (۳-۱۰) در معادله (۳-۲۶)، مؤلفه‌های بردار مشتق سرعت زاویه‌ای چهارپره به صورت

زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{p} =&\frac{h_{cg} g m_{dot}\cos(\theta)\sin(\phi) + \left(J_{22} - J_{33} + 2m_{tot}h_{ch}^2\right) qr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}\\ &+ \frac{bd_{cg}\left(\omega_2^2 - \omega_4^2\right) + qJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \dfrac{p}{|p|}P_1\mu r_x}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}\end{aligned} \tag{۳-۲۷}$$

$$\begin{aligned}\dot{q} =&\frac{h_{cg} g m_{dot}\sin(\theta) + \left(J_{33} - J_{11} + 2m_{tot}h_{ch}^2\right) pr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}\\ &+ \frac{bd_{cg}\left(\omega_1^2 - \omega_3^2\right) - pJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \dfrac{q}{|q|}P_2\mu r_y}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}}\end{aligned} \tag{۳-۲۸}$$

$$\dot{r} =\frac{pq(J_{11} - J_{22}) + d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \dfrac{r}{|r|}P_3\mu r_z}{J_{33}} \tag{۳-۲۹}$$

به منظور انتشار وضعیت دورانی چهارپره، از روش انتشار اویلر استفاده می‌شود. در این‌صورت [۱۱] :

$$\dot{\phi} = p + q\sin(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\tan(\theta) \tag{۳-۳۰}$$

$$\dot{\theta} = q\cos(\phi) - r\sin(\phi)) \tag{۳-۳۱}$$

$$\dot{\psi} = (q\sin(phi)) + r\cos(\phi))\sec(\theta) \tag{۳-۳۲}$$

۳-۵ استخراج فرم فضای حالت

به منظور استخراج فرم فضای حالت، متغیرهای حالت استند سه درجه آزادی چهارپره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{۳-۳۳}$$

همچنین، بردار ورودی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{۳-۳۴}$$

معادلات ارائه شده به فرم زیر برای فضای حالت بازنویسی می‌شوند:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) \tag{۳-۳۵}$$

که $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ مطابق روابط (۳-۲۷) تا (۳-۳۲) به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5\sin(x_1)\tan(x_2) + x_6\cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5\cos(x_1) - x_6\sin(x_1) \\ (x_5\sin(x_1) + x_6\cos(x_1))\sec(x_2) \\ A_1\cos(x_2)\sin(x_1) + A_2x_5x_6 + A_3\sigma_1 + A_4x_5\sigma_4 - \dfrac{x_4}{|x_4|}A_5 + A_6\cos(x_1) \\ B_1\sin(x_2) + B_2x_4x_6 + B_3\sigma_2 + B_4x_4\sigma_4 - \dfrac{x_5}{|x_5|}B_5 + B_6\cos(x_2) \\ C_1x_4x_5 + C_2\sigma_3 - \dfrac{x_6}{|x_6|}C_3 \end{bmatrix} \tag{۳-۳۶}$$

$$\sigma_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad \sigma_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_4 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$$

ثابت‌های معادلات بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{h_{cg}gm_{tot}}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} & A_2 &= \frac{2m_{tot}h_{cg}^2 + J_{22} - J_{33}}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} & A_3 &= \frac{bd_{cg}}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} \\
A_4 &= \frac{J_R}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} & A_5 &= \frac{m_1g\mu r_x}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} & A_6 &= \\
B_1 &= \frac{h_{cg}gm_{tot}}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{22}} & B_2 &= \frac{-2m_{tot}h_{cg}^2 - J_{11} + J_{33}}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{22}} & B_3 &= \frac{bd_{cg}}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{22}} \\
B_4 &= \frac{-J_R}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{22}} & B_5 &= \frac{m_2g\mu r_y}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{22}} & B_6 &=
\end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \quad C_2 = \frac{d}{J_{33}} \quad C_3 = \frac{m_3g\mu r_z}{J_{33}}$$

به منظور شبیه‌سازی، پارامترهای استند آزمایشگاه به صورت جدول ۳-۱ درنظر گرفته شده‌است.

جدول ۳-۱: پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۱۴]

پارامتر	واحد	مقدار پارامتر استند چهارپره
J_{11}	$kg.m^2$	0.02839
J_{22}	$kg.m^2$	0.03066
J_{33}	$kg.m^2$	0.0439
J_R	$kg.m^2$	4.4398×10^{-5}
m_{tot}	kg	1.074
m_1	kg	1.272
m_2	kg	1.074
m_3	kg	1.693
d_{cg}	m	0.2
h_{cg}	m	0.02
r_x	m	0.01
r_y	m	0.01
r_z	m	0.025
b	1	3.13×10^{-5}
d	1	3.2×10^{-6}
μ_s	1	0.003
μ_k	1	0.002
g	m/s^2	9.81

۳-۶ خطی‌سازی

در این قسمت، با استفاده از فرم فضای‌حالت استخراج‌شده در بخش ۳-۵، خطی‌سازی انجام شده‌است. در قسمت ۳-۶-۱ ابتدا صورت کلی فرم فضای حالت چهارپره محاسبه شده‌است. سپس، در بخش ۳-۶-۲ فرم فضای حالت برای هر کانال به صورت جداگانه بیان شده‌است.

۳-۶-۱ فرم خطی فضای حالت چهارپره

در این قسمت با توجه به معادلات فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود. به این منظور، نقطه کار به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{۳-۳۷}$$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \begin{bmatrix} 2000 & 2000 & 2000 & 2000 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathrm{RPM} \tag{۳-۳۸}$$

که $\boldsymbol{x}^*$ بردار حالت تعادلی و $\boldsymbol{\omega}^*$ بردار ورودی حالت تعادلی است. برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{\omega} \tag{۳-۳۹}$$

که:

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^*} \tag{۳-۴۰}$$

$$\boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right|_{\boldsymbol{\omega}^*} \tag{۳-۴۱}$$

ماتریس‌های $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ مطابق روابط (۳-۴۲) تا (۳-۴۹) محاسبه می‌شوند.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2} & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_3} & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_4} & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_5} & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_6} \end{bmatrix} \tag{۳-۴۲}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} x_5 \cos(x_1)\, \tan(x_2) - x_6 \sin(x_1)\, \tan(x_2) \\ -x_6 \cos(x_1) - x_5 \sin(x_1) \\ \dfrac{x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_1 \cos(x_1)\, \cos(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۳}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_6 \cos\left(x_1\right)}{\cos\left(x_2\right)^2} + \dfrac{x_5 \sin\left(x_1\right)}{\cos\left(x_2\right)^2} \\ 0 \\ \dfrac{\tan\left(x_2\right)\,\left(x_6 \cos\left(x_1\right) + x_5 \sin\left(x_1\right)\right)}{\cos\left(x_2\right)} \\ -A_2 \sin\left(x_1\right)\,\sin\left(x_2\right) \\ B_1 \cos\left(x_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۴}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۵}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_2\, x_6 + B_4 \left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ C_1\, x_5 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۶}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_5} = \begin{bmatrix} \sin\left(x_1\right)\,\tan\left(x_2\right) \\ \cos\left(x_1\right) \\ \dfrac{\sin\left(x_1\right)}{\cos\left(x_2\right)} \\ A_2\, x_6 + A_4 \left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4\right) \\ 0 \\ C_1\, x_4 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۷}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_6} = \begin{bmatrix} \cos(x_1)\,\tan(x_2) \\ -\sin(x_1) \\ \dfrac{\cos(x_1)}{\cos(x_2)} \\ 0 \\ B_2\,x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۸}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_4\,x_5 & 2\,A_3\,\omega_2 - A_4\,x_5 & A_4\,x_5 & -2\,A_3\,\omega_4 - A_4\,x_5 \\ 2\,B_3\,\omega_1 + B_4\,x_4 & -B_4\,x_4 & B_4\,x_4 - 2\,B_3\,\omega_3 & -B_4\,x_4 \\ 2\,C_2\,\omega_1 & -2\,C_2\,\omega_2 & 2\,C_2\,\omega_3 & -2\,C_2\,\omega_4 \end{bmatrix} \tag{۳-۴۹}$$

۳-۶-۲ فرم خطی فضای حالت کانال‌های چهارپره

در این قسمت، با توجه به فضای حالت بدست آمده در بخش ۳-۵، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود. برای ساده‌سازی، ورودی مسئله را از سرعت دورانی به نیروهای تاثیرگذار در مودهای رول، پیچ و یاو تغیر داده شده‌است. این کار باعث می‌شود که مسئله از چند ورودی و چند خروجی به سه مسئله یک ورودی و یک خروجی تبدیل شود. نیروها به فرم رابطه (۳-۵۰) تعریف می‌شوند.

$$u_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad u_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad u_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \tag{۳-۵۰}$$

با توجه به اینکه سه نیرو در نظر گرفته شده و مسئله نیاز به چهار خروجی (سرعت دورانی موتورها) دارد یک نیروی دیگر نیز در نظر گرفته می‌شود که به فرم رابطه (۳-۵۱) است و مقدار آن به صورت ثابت و برابر با سرعت دورانی تمام پره‌ها در دور نامی یعنی 2000 RPM[1] در نظر گرفته شده است.

$$u_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \tag{۳-۵۱}$$

[1] Revolutions Per Minute

در ادامه روابط (۳-۵۰) و (۳-۵۱) را در فضای حالت سیستم جایگزین می‌کنیم و برای سادگی قسمت‌های $(\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4)$ از معادلات حذف می‌کنیم.

فضای حالت جدید:

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} x_4+x_5\sin(x_1)\tan(x_2)+x_6\cos(x_1)\tan(x_2) \\ x_5\cos(x_1)-x_6\sin(x_1) \\ (x_5\sin(x_1)+x_6\cos(x_1))\sec(x_2) \\ A_1\cos(x_2)\sin(x_1)+A_2x_5x_6+A_3u_1 \\ B_1\sin(x_2)+B_2x_4x_6+B_3u_2 \\ C_1x_4x_5+C_2u_3 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۲}$$

بردار ورودی جدید به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{۳-۵۳}$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده‌است.

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{u} \tag{۳-۵۴}$$

$$\boldsymbol{x}^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{۳-۵۵}$$

$$\boldsymbol{u}^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4\times 2000^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{۳-۵۶}$$

$$\boldsymbol{A}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^*} \tag{۳-۵۷}$$

$$\boldsymbol{B}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}^*} \tag{۳-۵۸}$$

روابط بالا به فرم چند سیستم یک ورودی و چند خروجی نوشته شده است. آن را به یک ورودی و یک خروجی تبدیل می‌کنیم.

مود رول

$$\boldsymbol{A}_{roll} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۵۹}$$

$$\boldsymbol{B}_{roll} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{۳-۶۰}$$

مود پیچ

$$\boldsymbol{A}_{pitch} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_5} \\ \dfrac{\partial f_5}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۶۱}$$

$$\boldsymbol{B}_{pitch} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_5}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \tag{۳-۶۲}$$

مود یاو

$$\boldsymbol{A}_{yaw} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \dfrac{\partial f_6}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۳-۶۳}$$

$$\boldsymbol{B}_{yaw} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial f_6}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{۳-۶۴}$$

استخراج سرعت دورانی پره‌ها از نیروها

چهار معادله و چهار مجهول به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ u_2 &= \omega_1^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \\ u_4 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{aligned} \tag{۳-۶۵}$$

جواب معادلات (۳-۶۵) به‌صورت رابطه (۳-۶۶) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 + 2u_1}{4}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_4 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 - 2u_1}{4}} \end{aligned} \tag{۳-۶۶}$$

مراجع

[1] L. Sprekelmeyer. *These We Honor: The International Aerospace Hall of Fame.* 2006.

[2] M. J. Hirschberg. A perspective on the first century of vertical flight. *SAE Transactions*, 108:1113–1136, 1999.

[3] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on se(3). In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.

[4] http://gcrc.sharif.edu. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed November 2, 2021], Available at https://cutt.ly/yYMvhYv.

[5] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/.

[6] nobelprize.org. Jean tirole, 2021. [Online; accessed October 17, 2021], Available at https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2014/tirole/facts/.

[7] B. Djehiche, A. Tcheukam, and H. Tembine. Mean-field-type games in engineering. *AIMS Electronics and Electrical Engineering*, 1(1):18–73, 2017.

[8] W. L. Brogan. *Modern control theory.* 1974.

[9] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.

[10] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent backstepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.

[11] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics.* AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.

[12] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.

[13] M. A. A. Bishe. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using a heuristic nonlinear controller. January 2018.

[14] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.

[15] Model-based design, 2021. [Online; accessed December 16, 2021], Available at https://www.pngegg.com/en/png-xdlhx.

[16] A. Karimi, H. Nobahari, and P. Siarry. Continuous ant colony system and tabu search algorithms hybridized for global minimization of continuous multi-minima functions. *Computational Optimization and Applications*, 45(3):639–661, Apr 2010.

Sharif University of Technology

Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

LQDG Controler for 3DOF Quadcopter Stand

By:

Ali BaniAsad

Supervisor:

Dr. Nobahari

August 2021