



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده مهندسی هوافضا

پروژه کارشناسی  
مهندسی کنترل

عنوان:

کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند چهارپره به روش  
کنترل کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

نگارش:

علی بنی اسد

استاد راهنما:

دکتر نوبهاری

۱۴۰۱ تیر

اللهُ أَكْبَرُ

## سپاس

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نوبهاری که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دriegشان، بنده را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم. همچنین از دوست عزیزم جناب آقای مهندس رضا پرداال که نظرات ارزشمند او همواره راهگشای مشکلات بنده بود، تشکر می‌کنم. از پدر دلسوزم ممنونم که در انجام این پروژه مرا یاری نمود. در نهایت در کمال تواضع، با تمام وجود بر دستان مادرم بوسه می‌زنم که اگر حمایت بی‌دriegش، نگاه مهربانش و دستان گرمش نبود برگ برگ این دست نوشته و پروژه وجود نداشت.

## چکیده

در این پژوهش از یک روش مبتنی بر تئوری بازی<sup>۱</sup> استفاده شده است. در این روش سیستم و اغتشاش دو بازیکن اصلی در نظر گرفته شده است. هر یک از دو بازیکن سعی می کنند امتیاز خود را با کمترین هزینه افزایش دهند که در اینجا، وضعیت استند امتیاز بازیکن ها در نظر گرفته شده است. در این روش انتخاب حرکت با استفاده از تعادل نش<sup>۲</sup> که هدف آن کم کردن تابع هزینه با فرض بدترین حرکت دیگر بازیکن است، انجام می شود. این روش نسبت به اغتشاش ورودی مقاوم است. همچنین نسبت به عدم قطعیت مدلسازی مقاومت مناسبی دارد. از روش ارائه شده برای کنترل یک استند سه درجه آزادی چهارپره که به نوعی یک آونگ معکوس نیز هست، استفاده شده است. برای ارزیابی عملکرد این روش ابتدا شبیه سازی هایی در محیط سیمولینک انجام شده است و سپس، با پیاده سازی آن صحت عملکرد آن تایید شده است.

**کلیدواژه‌ها:** چهارپره، بازی دیفرانسیلی، تئوری بازی، تعادل نش، استند سه درجه آزادی، مدل مبنا، تنظیم کننده مربعی خطی

---

<sup>1</sup>Game Theory

<sup>2</sup>Nash Equilibrium

# فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۲	۱-۱ تاریخچه	۲
۳	۲-۱ تعریف مسئله	۳
۴	۱-۲-۱ ساختار چهارپره	۴
۵	۳-۱ نظریه بازی	۵
۵	۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی	۵
۵	۲-۳-۱ تعادل نش	۵
۶	۲ بازی دیفرانسیلی	۶
۶	۱-۲ مقدمه‌ای بر بازی دیفرانسیلی	۶
۸	۲-۲ کنترل‌کننده مبتنی بر بازی دیفرانسیلی	۸
۸	۱-۲-۲ کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی	۸
۹	۲-۲-۲ کنترل‌کننده مربعی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی	۹
۱۱	۳ مدل‌سازی چهارپره	۱۱
۱۱	۱-۳ فرضیات مدل‌سازی	۱۱
۱۲	۲-۳ معادله گشتاور	۱۲

۱۳	۱-۲-۳ گشتاورهای ناشی از آئرودینامیک پره‌ها
۱۴	۲-۲-۳ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه
۱۶	۳-۳ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها
۱۷	۴-۳ گشتاورهای ناشی از جرم استند
۱۷	۱-۴-۳ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی
۱۹	۵-۳ استخراج فرم فضای حالت
۲۲	۶-۳ خطی‌سازی
۲۲	۱-۶-۳ فرم خطی فضای حالت چهارپره
۲۴	۲-۶-۳ فرم خطی فضای حالت کanal‌های چهارپره
۲۸	۴ شبیه‌سازی استند سه درجه آزادی در محیط سیمولینک
۲۸	۱-۴ طراحی مدل مبنا
۲۹	۲-۴ شبیه‌سازی استند سه درجه آزادی در محیط سیمولینک
۳۰	۳-۴ اصلاح پارامترهای استند چهارپره
۳۶	۵ طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای استند سه درجه آزادی چهارپره
۳۶	۱-۵ طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای کanal رول
۳۷	۱-۱-۵ تعقیب مقدار مطلوب خروجی
۴۱	۲-۱-۵ بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز اندازه‌گیری
۴۴	۲-۵ طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای کanal رول-پیچ
۴۴	۱-۲-۵ تعقیب مقدار مطلوب خروجی
۴۷	۲-۲-۵ بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز اندازه‌گیری
۴۸	۳-۵ طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای سه درجه آزادی
۴۹	۱-۳-۵ تعقیب مقدار مطلوب خروجی

۵۵	۲-۳-۵ برسی عملکرد کنترل کننده در حضور نویز اندازه‌گیری
۶۰	۶ پیاده‌سازی کنترل کننده روی استند سه درجه آزادی چهارپره
۶۰	۱-۶ پیاده‌سازی کنترل کننده برای کanal پیچ
۶۳	۲-۶ پیاده‌سازی کنترل کننده برای کنترل کanal رول-پیچ
۶۵	۳-۶ پیاده‌سازی کنترل کننده روی استند سه درجه آزادی
۶۵	۱-۳-۶ پیاده‌سازی کنترل کننده به صورت سه کanal تک ورودی
۶۸	۲-۳-۶ پیاده‌سازی کنترل کننده به صورت چهار ورودی

# فهرست شکل‌ها

۱-۱	استند کنترل وضعیت سه درجه آزادی چهارپره [۴]	۳
۲-۱	جهت چرخش پره‌های چهارپره [۵]	۴
۱-۳	شماتیک استند چهارپره	۱۲
۱-۴	مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل	۲۹
۲-۴	مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل	۲۹
۳-۴	نمایی از داخل بلوک Quad System	۳۰
۴-۴	نماد جعبه‌بازار Parameter Estimator در سیمولینک	۳۱
۵-۴	جعبه‌بازار Parameter Estimator	۳۱
۶-۴	مقایسه وضعیت کانال رول موتور خاموش در شبیه‌سازی و واقعیت	۳۲
۷-۴	مقایسه وضعیت کانال رول در شبیه‌سازی و واقعیت	۳۲
۸-۴	مقایسه وضعیت کانال پیچ موتور خاموش در شبیه‌سازی و واقعیت	۳۳
۹-۴	مقایسه وضعیت کانال پیچ در شبیه‌سازی و واقعیت	۳۳
۱۰-۴	مقایسه وضعیت کانال یاو در شبیه‌سازی و واقعیت	۳۴
۱۱-۴	مقایسه وضعیت کانال رول-پیچ در شبیه‌سازی و واقعیت	۳۴
۱۲-۴	مقایسه وضعیت کانال رول-پیچ-یاو در شبیه‌سازی و واقعیت	۳۵

۱-۵ عملکرد کنترل کننده LQR در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۳۸
۲-۵ فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۳۸
۳-۵ عملکرد کنترل کننده LQDG در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۳۹
۴-۵ فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۳۹
۵-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۴۰
۶-۵ فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۴۱
۷-۵ عملکرد کنترل کننده LQR در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۱
۸-۵ فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۲
۹-۵ عملکرد کنترل کننده LQDG در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۲
۱۰-۵ فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۳
۱۱-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۳
۱۲-۵ فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۴
۱۳-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۴۶
۱۴-۵ فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۴۶
۱۵-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول و پیچ با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۷
۱۶-۵ فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول و پیچ با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۴۸
۱۷-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۵۱
۱۸-۵ فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۵۲
۱۹-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۵۴
۲۰-۵ فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۵۵
۲۱-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل وضعیت با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۵۶
۲۲-۵ فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت با حضور نویز اندازه‌گیری . . . . .	۵۷
۲۳-۵ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۵۸

۲۴-۵ فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول، پیچ و یا و (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۵۹
۱-۶ عملکرد کنترل کننده LQR در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۱
۲-۶ فرمان کنترلی موتورهای یک و سه در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۱
۳-۶ عملکرد کنترل کننده LQDG در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۲
۴-۶ فرمان کنترلی موتورهای یک و سه در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۲
۵-۶ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۳
۶-۶ فرمان کنترلی موتورهای یک و سه در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۳
۷-۶ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۴
۸-۶ فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۴
۹-۶ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۶
۱۰-۶ فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۷
۱۱-۶ عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۸
۱۲-۶ فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر) . . . . .	۶۹

## فهرست جدول‌ها

۱-۳	پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۱۵]	۲۱
۱-۴	مقایسه پارامترهای کانال رول موتور خاموش قبل و بعد از اصلاح	۳۲
۲-۴	مقایسه پارامترهای کانال رول قبل و بعد از اصلاح	۳۲
۳-۴	مقایسه پارامترهای کانال پیچ موتور خاموش قبل و بعد از اصلاح	۳۳
۴-۴	مقایسه پارامترهای کانال پیچ قبل و بعد از اصلاح	۳۳
۵-۴	مقایسه پارامترهای کانال یاو قبل و بعد از اصلاح	۳۴
۶-۴	مقایسه پارامترهای کانال رول-پیچ قبل و بعد از اصلاح	۳۴
۷-۴	مقایسه پارامترهای کانال رول-پیچ-یاو قبل و بعد از اصلاح	۳۵

# فصل ۱

## مقدمه

چهارپره یا کوادکوپتر<sup>۱</sup> یکی از انواع وسایل پرنده است. چهارپره‌ها نوعی هوایگرد بالگردان هستند و در دسته‌ی چندپره‌ها جای دارند. چهارپره‌ها به دلیل داشتن توانایی مانور خوب و امکان پرواز ایستا با تعادل بالا از کاربردهای بسیار گستردۀای دارند. در سال‌های اخیر توجه شرکت‌ها، دانشگاه‌ها و مراکز تحقیقاتی بیش از پیش به این نوع از پهپادها جلب شده است. بنابراین، روزانه پیشرفت چشمگیری در امکانات و پرواز این نوع از پرنده‌ها مشاهده می‌کنیم. چهارپره‌ها در زمینه‌های تحقیقاتی، نظامی، تصویربرداری، تفریحی و کشاورزی از کاربرد زیاد و روزافزونی دارند و مدل‌های دارای سرنشیان آن نیز تولید شده است.

### ۱-۱ تاریخچه

مدل اولیه آزمایشی یک چندپره در سال ۱۹۰۷ توسط دو برادر فرانسوی بنام Jacques و Louis Breguet ساخته شد. پرنده آن‌ها موفق به پرواز به صورت عمودی شد؛ ولی تنها تا ارتفاع دو فوتی پرواز کرد. پرواز انجام شده یک پرواز آزاد<sup>۲</sup> نبود و پرنده به کمک چهار مرد ثابت نگهداشته شده بود [۱]. بعد از آن ساخت بالگرد چهار پروانه‌ای به سال ۱۹۲۰ میلادی برمی‌گردد. در آن سال یک مهندس فرانسوی به نام Étienne Oehmichen اولین بالگرد چهارپره را اختراع کرد و مسافت ۳۶۰ متر را با چهارپره خود پرواز کرد. در همان سال او مسافت یک کیلومتر را در مدت هفت دقیقه و چهل ثانیه پرواز کرد [۲].

<sup>1</sup>Quadcopter

<sup>2</sup>Free Flight

در سال ۱۹۲۲ در آمریکا George de Bothezata موفق به ساخت و تست تعدادی چهارپره برای ارتش شد که قابلیت کنترل و حرکت در سه بعد را داشت، ولی پرواز با آن بسیار سخت بود.

در سال‌های اخیر توجه مراکز دانشگاهی به طراحی و ساخت پهپادهای چهارپره جلب شده است و مدل‌های مختلفی در دانشگاه استنفورد و کورنل ساخته شده است و به تدریج رواج یافته است [۳].

از حدود سال ۲۰۰۶ کوادکوپترها شروع به رشد صنعتی به صورت وسایل پرنده بدون سرنشین نمودند.

## ۲-۱ تعریف مسئله

مسئله‌ای که در این پژوهه بررسی می‌شود، کنترل وضعیت سه درجه آزادی استند آزمایشگاهی چهارپره با استفاده از روش کنترل خطی مربعی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی است. این استند آزمایشگاهی (شکل ۱-۱) شامل یک چهارپره است که از مرکز توسط یک اتصال به یک پایه وصل شده است. در این صورت، تنها وضعیت چهارپره (زوایای رول<sup>۳</sup>، پیچ<sup>۴</sup> و یاو<sup>۵</sup>) تغییر کرده و فاقد حرکت انتقالی است. همچنین، می‌توان با مقید کردن چرخش حول هر محور، حرکات رول، پیچ و یاو پرنده را به صورت مجزا و یا با یکدیگر بررسی کرد.



شکل ۱-۱: استند کنترل وضعیت سه درجه آزادی چهارپره [۴]

<sup>3</sup>Roll

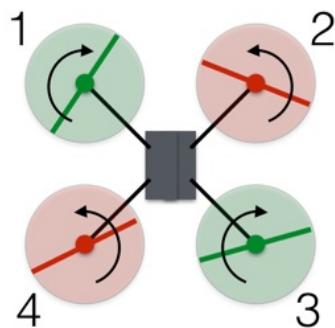
<sup>4</sup>Pitch

<sup>5</sup>Yaw

با توجه به شکل، مرکز جرم این استند بالاتر از مفصل قرار دارد که می‌توان آن را به صورت آونگ معکوس در نظر گرفت. بنابراین، سامانه به صورت حلقه باز ناپایدار است. این سامانه دارای چهار ورودی مستقل (سرعت چرخش پره‌ها) و سه خروجی زوایای اویلر ( $\phi, \theta, \psi$ ) است. در مدل‌سازی این استند عدم قطعیت وجود دارد؛ اما، با توجه به کنترل‌کننده مورد استفاده می‌توان این عدم قطعیت را به صورت اغتشاش درنظر گرفت و سامانه را به خوبی کنترل کرد.

## ۱-۲-۱ ساختار چهارپره

چهارپره‌ها با بهره‌گیری از چهار موتور و پره مجزا و چرخش دو به دو معکوس این موتورها گشتاورهای عکس‌العملی یکدیگر را خنثی می‌کنند و همچنین اختلاف فشار لازم جهت ایجاد نیروی برآ را تأمین می‌کنند.



شکل ۱-۲-۱: جهت چرخش پره‌های چهارپره [۵]

نحوه ایجاد فرامین کنترلی در چهارپره‌ها به این صورت است که برای تغییر ارتفاع از کم یا زیاد کردن سرعت چرخش موتورها استفاده می‌شود و باعث کمتر یا زیادتر شدن نیروی برآ می‌شود. برای چرخش چهارپره به دور خود و به صورت درجا، دو پره هم جهت با سرعت کمتر و دو پره هم جهت دیگر با سرعت بیشتر می‌چرخند و گشتاور یا ایجاد می‌شود و نیروی برآ ثابت می‌ماند؛ بنابراین، چهارپره در ارتفاع ثابت به دور خود می‌چرخد. همچنین، با کم و زیاد کردن دو به دو سرعت موتورهای مجاور چهارپره از حالت افقی خارج شده و در صفحه افق حرکت می‌کند.

## ۱-۳ نظریه بازی

نظریه بازی با استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می‌پردازد. نظریه بازی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین‌الملل، علوم رایانه، بازاریابی و فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه بازی در تلاش است تا به وسیله‌ی ریاضیات، رفتار را در شرایط راهبردی یا در یک بازی که در آن موفقیت فرد در انتخاب کردن، وابسته به انتخاب دیگران می‌باشد، برآورد کند.

### ۱-۳-۱ تاریخچه نظریه بازی

در سال ۱۹۹۴ جان فوربز نش به همراه جان هارسانی و راینهارد سیلتون به خاطر مطالعات خلاقانه‌ی خود در زمینه‌ی نظریه بازی، برنده‌ی جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های پس از آن نیز بسیاری از برنده‌گان جایزه‌ی نوبل اقتصاد از میان متخصصین نظریه بازی انتخاب شدند. آخرین آنها، ژان تیروول فرانسوی است که در سال ۲۰۱۴ این جایزه را کسب کرد [۶].

### ۱-۳-۲ تعادل نش

پژوهش‌ها در این زمینه اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به عنوان تعادل در بازی‌ها استوار است. این راهبردها به‌طور معمول از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش است. تعادل نش در بازی‌هایی کاربرد دارد در آن فرض شده است که هر بازیکن به راهبرد تعادل دیگر بازیکنان آگاه است. بر اساس نظریه‌ی تعادل نش، در یک بازی که هر بازیکن امکان انتخاب‌های گوناگون دارد اگر بازیکنان به روش منطقی راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حداکثر سود در بازی باشند، دست کم یک راهبرد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن وجود دارد و چنانچه بازیکن راهکار دیگری را انتخاب کند، نتیجه‌ی بهتری به دست نخواهد آورد.

## فصل ۲

### بازی دیفرانسیلی

در تئوری بازی‌ها، بازی‌های دیفرانسیل مجموعه‌ای از مسائل مربوط به مدل‌سازی و تحلیل در چارچوب یک سامانه دینامیکی هستند. ویژگی بازی‌های دیفرانسیلی این است که در آن‌ها رفتار متغیرهای حالت با یک معادله دیفرانسیل بیان می‌شود [۷]. در بخش ۱-۲ به بررسی کوتاه بازی دیفرانسیلی پرداخته می‌شود. در بخش ۲-۲-۱ کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی<sup>۱</sup> و در بخش ۲-۲-۲ به معرفی کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی<sup>۲</sup> پرداخته می‌شود.

#### ۱-۲ مقدمه‌ای بر بازی دیفرانسیلی

این پروژه حالت دو بازیکن را بررسی می‌کند. در این مسئله برای یک سامانه خطی پیوسته با معالات حالت:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_1 u_1(t) + D_2 u_2(t)\end{aligned}\tag{۱-۲}$$

که در رابطه (۱-۲)  $x$ ،  $y$ ،  $u_1$  و  $u_2$  به ترتیب بیانگر بردار حالت، بردار خروجی، بردار ورودی بازیکن اول و بردار ورودی بازیکن دوم هستند. همچنین،  $A$ ،  $B_1$ ،  $B_2$ ،  $C$ ،  $D_1$  و  $D_2$  به ترتیب بیانگر ماتریس حالت، ماتریس ورودی بازیکن اول، ماتریس ورودی بازیکن دوم، ماتریس خروجی، ماتریس فیدفوروارد بازیکن اول و ماتریس فیدفوروارد بازیکن دوم هستند [۸]. بر اساس رابطه (۱-۲) دینامیک سامانه تحت تاثیر هر

<sup>1</sup>Linear Quadratic Regulator Based on the Differential Game Theory (LQDG)

<sup>2</sup>Linear Quadratic Integral Regulator Based on the Differential Game Theory (LQDG)

دو بازیکن قرار می‌گیرد. در اینجا ممکن است تلاش بازیکن اول موجب دور شدن بازیکن دوم از هدف شود و یا برعکس. این پروژه حالت همکاری دو بازیکن را بررسی نمی‌کند و دو بازیکن در تلاش برای کم کردن تابع هزینه خود و زیاد کردن تابع هزینه بازیکن مقابل هستند.

فرض شده که تابع هزینه برای هر بازیکن در زمان  $t \in [0, T]$  به صورت مربعی<sup>۳</sup> است. هدف اصلی کم کردن تابع هزینه برای بازیکنان است. تابع هزینه برای بازیکن شماره  $i$  (این مسئله شامل دو بازیکن است) به فرم رابطه (۲-۲) نوشته می‌شود.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T (x^T(t)Q_i x(t) + u_i^T(t)R_{ii}u_i(t) + u_j^T(t)R_{ij}u_j(t)) dt \quad (2-2)$$

در رابطه (۲-۲)  $R_{ii}$ ،  $Q_i$  و  $R_{ij}$  به ترتیب بیانگر اهمیت میزان اهمیت انحراف متغیرهای حالت مقادیر مطلوب برای بازیکن شماره  $i$ ، میزان تلاش کنترلی بازیگر شماره  $i$  و میزان تلاش کنترلی بازیگر شماره  $j$  هستند. در اینجا ماتریس‌های  $Q_i$ ،  $R_{ii}$  و  $H$  متقارن فرض شده‌اند و ماتریس  $R_{ii}$  به صورت مثبت معین (فرض شده است)  $[R_{ii} > 0]$ .

در این حالت فرض شده است که تمامی بازیکنان در زمان  $t \in [0, T]$  فقط اطلاعات شرایط اولیه و مدل سامانه را دارند. این فرض به این صورت تفسیر می‌شود که دو بازیکن همزمان حرکت خود را در انتخاب می‌کنند. در این حالت امکان هماهنگی بین دو بازیکن وجود ندارد. تعادل نش یک راه حل برای بازی دیفرانسیلی با شرایط اشاره شده ارائه می‌دهد.

قضیه ۱-۲ به مجموعه‌ای از حرکات قابل قبول  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی می‌گویند اگر تمامی حرکات قابل قبول  $(u_1, u_2)$  از نامساوی (۳-۱) پیروی کنند.

$$J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*) \text{ and } J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2) \quad (3-2)$$

در اینجا قابل قبول بودن به معنی آن است که  $(.)_i u$  به یک مجموعه محدود حرکات تعلق دارد، این مجموعه حرکات که بستگی به اطلاعات بازیکنان از بازی دارد، مجموعه‌ای از راهبردهایی است که بازیکنان ترجیح می‌دهند برای کنترل سامانه انجام دهند و سامانه (۱-۲) باید یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

تعادل نش به گونه‌ای تعریف می‌شود که هیچ یک از بازیکنان انگیزه‌ی یک طرفه برای انحراف از بازی ندارند. قابل ذکر است که نمی‌توان انتظار داشت که یک تعادل نش منحصر به فرد وجود داشته باشد.

<sup>3</sup>Quadratic Cost Function

به هر حال به راحتی می‌توان تایید کرد که حرکات  $(u_1^*, u_2^*)$  یک تعادل نش برای بازی با تابع هزینه  $J_i$ , ( $i = 1, 2$ ) است.

## ۲-۲ کنترل‌کننده مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

در بخش ۱-۲ به بررسی اجمالی بازی دیفرانسیلی پرداخته شد. در ادامه بخش ۱-۲-۲ به معرفی کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی (LQDG) و در بخش ۲-۲-۲ به معرفی کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی (LQIDG) پرداخته می‌شود.

### ۱-۲-۲ کنترل‌کننده مربعی خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

برای یک سامانه خطی پیوسته با معادلات حالت:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_1 u_1(t) + D_2 u_2(t)\end{aligned}\quad (4-2)$$

فرمان کنترلی بهینه LQDG بازیکن شماره  $i$  به صورت رابطه (۵-۲) محاسبه می‌شود.

$$u_i(t) = -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i(t)x(t), \quad i = 1, 2 \quad (5-2)$$

که در رابطه (۵-۲)، ضریب ماتریس  $x(t)$  بیانگر بهره بازخورد بهینه است. این بهره به گونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هزینه مربعی بازیکن شماره  $i$  با فرض بدترین حرکت سایر بازیکنان کمینه شود. تابع هزینه بازیکن شماره  $i$  در زیر آورده شده است.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T (x^T(t)Q_i x(t) + u_i^T(t)R_{ii}u_i(t) + u_j^T(t)R_{ij}u_j(t)) dt \quad (6-2)$$

در رابطه (۵-۲)، ماتریس  $K_i(t)$  بیانگر پاسخ معادله کوپل ریکاتی<sup>۴</sup> زیر است [۷]:

$$\begin{aligned}\dot{K}_1(t) &= -A^T K_1(t) - K_1(t)A - Q_1 + K_1(t)S_1(t)K_1(t) + K_1(t)S_2(t)K_2(t) \\ \dot{K}_2(t) &= -A^T K_2(t) - K_2(t)A - Q_2 + K_2(t)S_2(t)K_2(t) + K_2(t)S_1(t)K_1(t)\end{aligned}\quad (7-2)$$

برای سادگی از نمادسازی  $S_i := B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$  استفاده شده است.

<sup>4</sup>Coupled Riccati Differential Equations

## ۲-۲-۲ کنترل‌کننده مربعی خطی انتگرالی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی

در صورت وجود اغتشاش و یا خطای مدل‌سازی، عدم وجود انتگرال‌گیر در کنترل‌کننده LQDG میتواند باعث ایجاد خطای حالت ماندگار شود. بهمنظور حذف این خطأ، کنترل‌کننده LQIDG بر پایه کنترل‌کننده LQDG تعمیم‌یافته است. در این کنترل‌کننده، انتگرال اختلاف بین خروجی سیستم و مقدار مطلوب به بردار حالت اضافه شده است. بنابراین، بردار حالت به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۰]:

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \\ \int (\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

در رابطه (۸-۲)، بردار حالت افزوده<sup>۵</sup>،  $\mathbf{x}_d$  بردار حالت مطلوب و  $\mathbf{y}_d$  بردار خروجی مطلوب است. ماتریس  $C$  یک ماتریس همانی است در نظر گرفته شده است؛ بنابراین، بردار خروجی برابر با بردار حالت خواهد بود:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \quad (9-2)$$

با تعریف بردار حالت افزوده، معادلات حالت به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_a(t) &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{B}_{a_{a_1}} \mathbf{u}_{a_1}(t) + \mathbf{B}_{a_{a_2}} \mathbf{u}_{a_2}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{D}_{a_{a_1}} \mathbf{u}_{a_1}(t) + \mathbf{D}_{a_{a_2}} \mathbf{u}_{a_2}(t) \end{aligned} \quad (10-2)$$

که ماتریسهای  $A_a$  و  $B_a$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (11-2)$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12-2)$$

با معرفی معادلات حالت جدید برای سامانه، سایر گام‌های طراحی کنترل‌کننده LQIDG مشابه کنترل‌کننده LQDG است. بنابراین، فرمان کنترلی بهینه LQIDG بازیکن شماره i به صورت رابطه (۱۳-۲) محاسبه می‌شود.

<sup>5</sup>Augmented

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_{a_i}^T \mathbf{K}_{a_i}(t) \mathbf{x}_a(t), \quad i = 1, 2 \quad (13-2)$$

که در رابطه (13-2)، ضریب ماتریس  $\mathbf{x}_a(t)$  بیانگر بهره بازخورد بهینه است. این بهره به گونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هزینه مربعی بازیکن شماره  $i$  با فرض بدترین حرکت سایر بازیکنان کمینه شود. تابع هزینه بازیکن شماره  $i$  در زیر آورده شده است.

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T (\mathbf{x}_a^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{u}_i^T(t) \mathbf{R}_{ii} \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(t)) dt \quad (14-2)$$

در رابطه (5-2)، ماتریس  $\mathbf{K}_i(t)$  بیانگر پاسخ معادله کوپل ریکاتی<sup>6</sup> زیر است [5]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_{a_1}(t) &= -\mathbf{A}^T \mathbf{K}_{a_1}(t) - \mathbf{K}_{a_1}(t) \mathbf{A} - \mathbf{Q}_{a_1} + \mathbf{K}_{a_1}(t) \mathbf{S}_{a_1}(t) \mathbf{K}_{a_1}(t) + \mathbf{K}_{a_1}(t) \mathbf{S}_{a_2}(t) \mathbf{K}_{a_2}(t) \\ \dot{\mathbf{K}}_{a_2}(t) &= -\mathbf{A}^T \mathbf{K}_{a_2}(t) - \mathbf{K}_{a_2}(t) \mathbf{A} - \mathbf{Q}_{a_2} + \mathbf{K}_{a_2}(t) \mathbf{S}_{a_2}(t) \mathbf{K}_{a_2}(t) + \mathbf{K}_{a_2}(t) \mathbf{S}_{a_1}(t) \mathbf{K}_{a_1}(t) \end{aligned} \quad (15-2)$$

برای سادگی از نمادسازی  $\mathbf{S}_{a_i} := \mathbf{B}_{a_i} \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_{a_i}^T$  استفاده شده است.

---

<sup>6</sup>Coupled Riccati Differential Equations

## فصل ۳

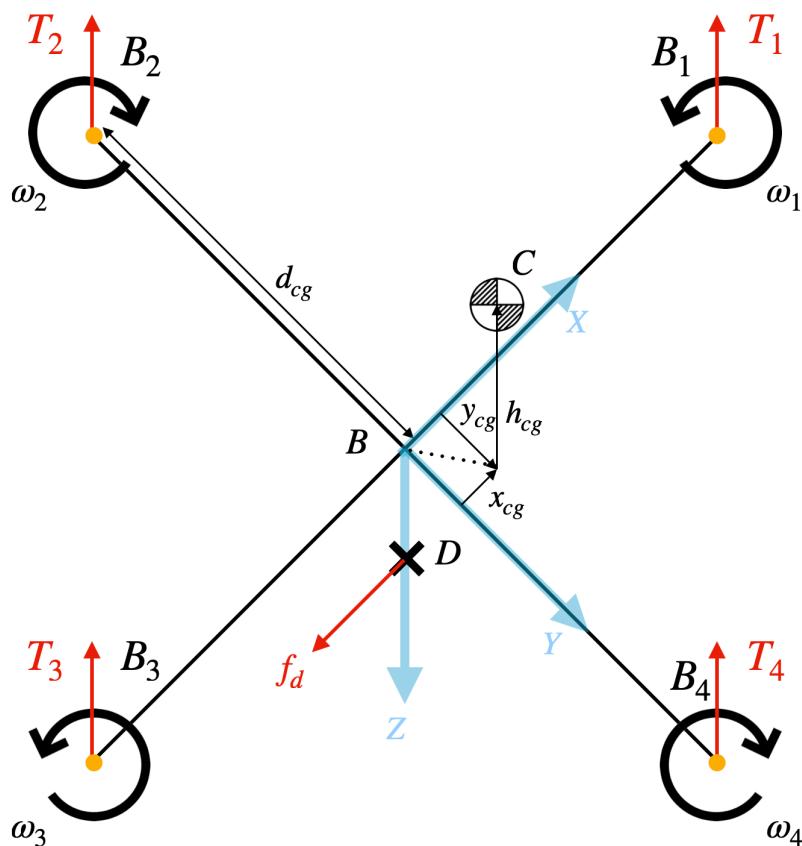
### مدل‌سازی چهارپره

در این فصل به مدل‌سازی استند چهارپره آزمایشگاهی پرداخته شده است. به این منظور، ابتدا فرضیات مربوط به مدل‌سازی چهارپره بیان می‌شود. سپس معادلات حاکم بر حرکات دورانی چهارپره بیان می‌شود. در ادامه، به استخراج گشتاورهای خارجی اعمالی به استند شامل گشتاورهای آیرودینامیکی ناشی از پره، گشتاور نیروی تکیه گاه و گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها پرداخته می‌شود. در گام بعد، معادلهنهایی دینامیک دورانی استند استخراج می‌شود. سپس، فرم فضایی حالت استند آزمایشگاهی استخراج می‌شود. لازم به توضیح است که فرمنهایی فضایی حالت استند بدون درنظرگرفتن اصطکاک بیرینگ‌ها از منبع [۱۱] آورده شده است که در آن منبع، مدل استخراج شده با اعمال ورودی‌ها و شرایط اولیه مختلف اعتبارسنجی شده است.

#### ۱-۳ فرضیات مدل‌سازی

شماتیک استند چهارپره در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. به منظور استخراج معادلات حاکم بر سیستم، فرض می‌شود که چهارپره صلب و متقارن است. همچنین ماتریس گشتاور اینرسی چهارپره به صورت قطعی درنظر گرفته می‌شود. مرکز جرم سازه چهارپره روی نقطه  $B$  و مرکز ثقل هر یک از پره‌ها به همراه قسمت دور موتور روی نقاط  $B_1$  تا  $B_4$  است. مبدأ دستگاه مختصات بدنه روی محل تقاطع بازوهای چهارپره یعنی نقطه  $B$  در نظر گرفته شده است. از آنجایی که مرکز ثقل پره‌ها بالاتر از مرکز ثقل سازه چهارپره است، مرکز ثقل کلی چهارپره جایی بین مرکز ثقل موتورها و سازه، یعنی نقطه‌ی  $C$  می‌گیرد. همچنین قابل ذکر است که

نقطه‌ی  $D$  محل اتصال کلی استند چهارپره است. جهت مثبت محور  $X^B$  و  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی به ترتیب در راستای بازوی مربوط به موتور ۱ و ۴ فرض می‌شود. همچنین جهت مثبت محور  $Z^B$  با توجه به قانون دست راست حاصل می‌شود.



شکل ۱-۳: شماتیک استند چهارپره

## ۲-۳ معادله گشتاور

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت دورانی چهارپره، از قوانین نیوتن اویلر استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیلی اویلر برای یک پرنهه حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\dot{\omega}^{BI}]^B = \left( [J]^B \right)^{-1} \left( - [\Omega^{BI}]^B \times ([J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B) + [m_b]^B \right) \quad (1-3)$$

در رابطه (۱-۳)، عبارت  $[J]^B$  بیانگر بردار مشتق نرخ‌های زاویه‌ای چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین ماتریس  $[J]^B$  نشان‌دهنده گشتاورهای اینرسی چهارپره حول مرکز ثقل آن در دستگاه مختصات بدنی است که به دلیل تقارن چهارپره به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$[J]^B = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

در رابطه (۲-۳)، پارامترهای  $J_{11}$ ،  $J_{22}$  و  $J_{33}$  به ترتیب بیانگر گشتاورهای اینرسی چهارپره حول محورهای  $Z^B$ ،  $X^B$  و  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین بردار  $[I_R]^B$  در رابطه (۱-۳) بیانگر مجموع تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است. ازانجا که، تکانه زاویه‌ای پره‌ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است؛ در نتیجه  $[I_R]^B$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[I_R]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_R \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

در رابطه (۳-۳)،  $l_R$  بیانگر تکانه زاویه‌ای کلی پره‌ها در راستای محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی است که به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$l_R = J_R \omega_d \quad (4-3)$$

در رابطه (۴-۳)، پارامتر  $J_R$  بیانگر ممان اینرسی هر یک از پره‌ها است. همچنین  $\omega_d$  نشان‌دهنده تفاضل نسبی سرعت‌های زاویه‌ای پره‌ها است که با توجه به شکل ۱-۳ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_d = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \quad (5-3)$$

همچنین  $[m_b]^B$  در رابطه (۱-۳) برآیند گشتاورهای خارجی اعمالی به چهارپره، شامل گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها و گشتاورهای ناشی از نیروی تکیه‌گاه است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

### ۱-۲-۳ گشتاورهای ناشی از آیرودینامیک پره‌ها

آیرودینامیک پره‌ها باعث ایجاد نیروی برآ و درنتیجه گشتاورهای رول و پیچ ناشی از اختلاف نیروی برآ می‌شود. با استفاده از تفاضل نیروی برآی پره‌ها دو گشتاور رول و پیچ ایجاد می‌شود. با توجه به تئوری

مومنتوم، نیروی برآی هر پره ( $T_i$ ) از رابطه زیر حاصل می‌شود [۱۳] :

$$T_i = b\omega_i^2 \quad (6-3)$$

در رابطه (۶-۳)  $b$  و  $\omega_i$  به ترتیب بیانگر فاکتور نیروی برآ و سرعت زاویه‌ای هر پره است؛ بنابراین مطابق شکل ۱-۳ گشتاور رول حول محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$m_X^B = d_{cg}(T_2 - T_4) = d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (7-3)$$

در رابطه (۷-۳) عبارت  $d_{cg}$  بیانگر فاصله مرکز هر پره از مرکز جرم چهارپره در راستای محور  $X^B$  دستگاه مختصات بدنی است. همچنین گشتاور پیچ حول محور  $Y^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۱-۳ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Y^B = d_{cg}(T_1 - T_3) = d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \quad (8-3)$$

گشتاور یاو آیرودینامیکی از اختلاف گشتاور ناشی از پسای پره‌ها ایجاد می‌شود؛ بنابراین، جهت این گشتاور همواره در جهت مخالف چرخش پره‌ها است. بنابراین، گشتاور یاو حول محور  $Z^B$  دستگاه مختصات بدنی با توجه به شکل ۱-۳، مطابق رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$m_Z^B = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (9-3)$$

رابطه (۹-۳) عبارت  $d$  بیانگر فاکتور گشتاور پسای پره‌ها است. در نتیجه با توجه به معادلات (۷-۳)، (۸-۳) و (۹-۳) بردار گشتاورهای خارجی ناشی از آیرودینامیک پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[m_A]^B = \begin{bmatrix} m_X^B \\ m_Y^B \\ m_Z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{cg}b(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ d_{cg}b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (10-3)$$

## ۲-۲-۳ گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه

همانطور که در شکل ۱-۳ مشاهده می‌شود، نیروی  $f_d$  که در نقطه‌ی  $D$  از طریق اتصال کلی به چهارپره وارد می‌شود، باعث ایجاد گشتاور حول مرکز ثقل چهارپره می‌شود. به منظور مدل‌سازی گشتاور ناشی از این نیرو

حول نقطه  $C$ ، لازم است ابتدا نیروی  $f_d$  استخراج شود. از انجایی که نقطه  $D$  منطبق بر مرکز ثقل چهارپره نیست؛ لذا معادله حرکت انتقالی برای نقطه اتصال  $D$  با استفاده از معادله انتقال یافته نیوتن (معادله گروبین) به صورت معادله زیر حاصل می‌شود [۱۲] :

$$m_{tot} [D^I \mathbf{v}_D^I]^B = [\Sigma \mathbf{f}]^B - m_{tot} \left( [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \quad (11-3)$$

در رابطه (11-3)،  $m_{tot}$  مجموع جرم چهارپره و  $[D^I \mathbf{v}_D^I]^B$  مشتق دورانی سرعت نقطه  $D$  نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[\Sigma \mathbf{f}]^B$  بیان‌کننده برآیند نیروهای واردہ بر نقطه  $D$  و  $[\Omega^{BI}]^B$  ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاویه‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی در دستگاه مختصات بدنی است. همچنین  $[D^I \Omega^{BI}]^B$  نشان‌دهنده مشتق دورانی سرعت زاویه‌های چهارپره نسبت به قاب اینرسی و  $[s_{cd}]^B$  بردار واصل از نقطه  $D$  به نقطه  $C$  است. با انتقال قاب بدنی به قاب اینرسی معادله (11-3) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} m_{tot} [D^B \mathbf{v}_D^I]^B + m_{tot} [\Omega^{BI}]^B [\mathbf{v}_D^I]^B = \\ [\Sigma \mathbf{f}]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + [D^I \Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B \right) \end{aligned} \quad (12-3)$$

همچنین به دلیل اینکه سرعت محل اتصال چهارپره (نقطه  $D$ ) صفر است؛ دو عبارت سمت چپ معادله (12-3) هر دو صفر هستند. در نتیجه معادله به صورت زیر ساده می‌شود.

$$[\Sigma \mathbf{f}]^B - m_{tot} \left( 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right) = 0 \quad (13-3)$$

عبارت  $[\Sigma \mathbf{f}]^B$  بیان‌گر مجموع نیروهای وارد بر چهارپره است که به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$[\Sigma \mathbf{f}]^B = [\mathbf{f}_D]^B + [\mathbf{f}_T]^B + [\mathbf{f}_G]^B \quad (14-3)$$

در رابطه (14-3)، بردار  $[\mathbf{f}_D]^B$  مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه  $D$  است. همچنین بردار  $[\mathbf{f}_T]^B$  بیان‌گر مجموع نیروی برآی پره‌ها در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\mathbf{f}_T]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{bmatrix} \quad (15-3)$$

مقدار نیروی اعمال شده توسط اتصال کلی در نقطه  $D$  است. همچنین بردار  $[\mathbf{f}_G]^B$  بیان‌گر نیروی وزن چهارپره در دستگاه مختصات بدنی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\mathbf{f}_G]^B = [\mathbf{C}]^{BL} [\mathbf{f}_G]^L \quad (16-3)$$

در رابطه (۱۶-۳)، ماتریس  $[C]^{BL}$  انتقال از دستگاه مختصات تراز محلی ( $L$ ) به دستگاه مختصات بدنی است. با جایگذاری روابط (۱۴-۳)، (۱۵-۳) و (۱۶-۳) در (۱۷-۳) عبارت زیر برای نیروی تکیه‌گاهی حاصل می‌شود.

$$[f_D]^B = -[f_G]^B - [f_T]^B + m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \quad (17-3)$$

سپس از حاصل ضرب نیروی تکیه‌گاه مدل شده در معادله (۱۷-۳) در بردار محل اثر آن، گشتاور ایجاد شده توسط نیروی اتصال کلی به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[\mathbf{m}_D]^B = [\mathbf{s}_{DC}]^B \left( -[\mathbf{f}_G]^B - [\mathbf{f}_T]^B m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B \right\} \right) \quad (18-3)$$

در رابطه (۱۸-۳) بردار  $[\mathbf{s}_{DC}]^B$  بیانگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $D$  از مرکز ثقل چهارپره ( $h_{cg}$ ) است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\mathbf{s}_{DC}]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cg} \end{bmatrix} \quad (19-3)$$

در نتیجه با جمع گشتاورهای ناشی از نیروهای آیرودینامیک پرها از معادله (۱۰-۳) و گشتاور ناشی از نیروی تکیه‌گاه از معادله (۱۸-۳)، گشتاور خارجی کلی اعمالی به چهارپره به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$[\mathbf{m}_B]^B = [\mathbf{m}_A]^B + [\mathbf{m}_D]^B \quad (20-3)$$

### ۳-۳ گشتاورهای ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها

هر یک از محورهای استند آزمایشگاهی به وسیله بیرینگ به یکدیگر متصل شده‌اند. گشتاور ناشی از اصطکاک بیرینگ‌ها در استند را می‌توان به صورت زیر مدل کرد [۱۴] :

$$[\mathbf{m}_f]^B = \begin{bmatrix} P_1 \mu_s r_x \\ P_2 \mu_s r_y \\ P_3 \mu_s r_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \mu_k r_x \\ P_2 \mu_k r_y \\ P_3 \mu_k r_z \end{bmatrix} \quad (21-3)$$

در رابطه (۲۱-۳)،  $P$  نیروی عمودی وارد بر تکیه‌گاه هر یک از محورها،  $\mu_s$  و  $\mu_k$  به ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی بیرینگ‌ها و  $r$  شعاع هر یک از بیرینگ‌ها است.

### ۴-۳ گشتاورهای ناشی از جرم استند

بر اساس شکل ۱-۳، مرکز جرم بر رویه مرکز تقارن چهارپره قرار ندارد پس عدم تقارن مرکز جرم باعث به وجود آمدن گشتاور می‌شود.

$$[\mathbf{m}_{cg}]^B = \begin{bmatrix} m_{tot}gy_{cg} \\ -m_{tot}gx_{cg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22-3)$$

در رابطه (۲۲-۳)،  $x_{cg}$  و  $y_{cg}$  به ترتیب فاصله مرکز جرم از محور  $Y$  و  $X$  است.

### ۱-۴-۳ استخراج معادله نهایی دینامیک دورانی

با جایگذاری گشتاورهای خارجی چهارپره و تکانه زاویه‌ای کلی پرها در معادله دیفرانسیل اویلر، شکل نهایی معادله دیفرانسیل استند چهارپره حاصل می‌شود. به این منظور، با جایگذاری مقدار گشتاورهای اعمالی به چهارپره از معادله (۱-۳) در معادله (۲۰-۳) رابطه موردنیاز برای مدل‌سازی دینامیک دورانی استند به صورت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}^{BI}}{dt} \right]^B = \left( [\mathbf{J}]^B \right)^{-1} \left( - [\boldsymbol{\Omega}^{BI}] \times \left( [\mathbf{J}]^B [\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B + [\mathbf{I}_R]^B \right) + [\mathbf{m}_A]^B + [\mathbf{m}_{cg}]^B + [\mathbf{s}_{DC}]^B \left( - [\mathbf{G}]^B - [\mathbf{T}]^B + m_{tot} \left\{ 2 [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\boldsymbol{\Omega}^{BI}]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B + \left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B [\mathbf{s}_{cd}]^B \right\} \right) \right) \quad (23-3)$$

در رابطه (۲۳-۳)، عبارت  $\left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B$  بیانگر ماتریس پادمتقارن بردار مشتق سرعت زاویه‌ای بدنه (۲۳-۳) است. جمله آخر در معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_{tot} [\mathbf{s}_{DC}]^R \left[ \frac{d\boldsymbol{\Omega}^{BI}}{dt} \right]^B [\mathbf{s}_{CD}]^R = m_{tot} [\mathbf{s}_{DC}]^R [\mathbf{s}_{DC}]^R [\dot{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B \quad (24-3)$$

با جایگذاری معادله (۲۴-۳) در معادله (۲۳-۳) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B \left( I - m_{tot} \left( [J]^B \right)^{-1} [s_{DC}]^B [s_{DC}]^B \right) = \\ \left( [J]^B \right)^{-1} \left( - [\Omega^{BI}] \times \left( [J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B \right) + \right. \\ \left. [m_A]^B + [m_{cg}]^B + [s_{DC}]^B \left( - [F_g]^B - [F_T]^B + \right. \right. \\ \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (25-3)$$

با ساده‌سازی رابطه (۲۵-۳)، بردار سرعت زاویه‌ای استند به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B = a^{-1} b \\ a = I - m_{tot} \left( [J]^B \right)^{-1} [s_{DC}]^B [s_{DC}]^B \\ b = \left( [J]^B \right)^{-1} \left( - [\Omega^{BI}] \times \left( [J]^B [\omega^{BI}]^B + [I_R]^B \right) + \right. \\ \left. [m_A]^B + [m_{cg}]^B + [s_{DC}]^B \left( - [F_g]^B - [F_T]^B + \right. \right. \\ \left. \left. m_{tot} \left\{ 2 [\Omega^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B [s_{cd}]^B + \left[ \frac{d\Omega^{BI}}{dt} \right]^B [s_{cd}]^B \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (26-3)$$

با جایگذاری معادلات (۳-۳)، (۴-۳) و (۵-۳) معادله مربوط به تکانه کلی پره‌ها، معادله (۶-۳) مربوط به برآی پره و معادله (۱۰-۳) در معادله (۲۶-۳)، مؤلفه‌های بردار مشتق سرعت زاویه‌ای چهارپره به صورت

زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{p} = \frac{h_{cg}gm_{dot}\cos(\theta)\sin(\phi) + (J_{22} - J_{33} + 2m_{tot}h_{ch}^2)qr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} + \frac{bd_{cg}(\omega_2^2 - \omega_4^2) + qJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{p}{|p|}P_1\mu r_x}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} \quad (27-3)$$

$$\dot{q} = \frac{h_{cg}gm_{dot}\sin(\theta) + (J_{33} - J_{11} + 2m_{tot}h_{ch}^2)pr}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} + \frac{bd_{cg}(\omega_1^2 - \omega_3^2) - pJ_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - \frac{q}{|q|}P_2\mu r_y}{m_{tot}h_{cg}^2 + J_{11}} \quad (28-3)$$

$$\dot{r} = \frac{pq(J_{11} - J_{22}) + d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - \frac{r}{|r|}P_3\mu r_z}{J_{33}} \quad (29-3)$$

به منظور انتشار وضعیت دورانی چهارپره، از روش انتشار اویلر استفاده می‌شود. در این صورت [۱۲] :

$$\dot{\phi} = p + q\sin(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\tan(\theta) \quad (30-3)$$

$$\dot{\theta} = q\cos(\phi) - r\sin(\phi) \quad (31-3)$$

$$\dot{\psi} = (q\sin(phi)) + r\cos(\phi)\sec(\theta) \quad (32-3)$$

## ۵-۳ استخراج فرم فضای حالت

به منظور استخراج فرم فضای حالت، متغیرهای حالت استند سه درجه آزادی چهارپره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (33-3)$$

همچنین، بردار ورودی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{bmatrix}^T \quad (34-3)$$

معادلات ارائه شده به فرم زیر برای فضای حالت بازنویسی می‌شوند:

$$\dot{x} = f(x, \omega) \quad (35-3)$$

که  $F(x)$  مطابق روابط (۲۷-۳) تا (۳۲-۳) به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$f = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 \sigma_1 + A_4 x_5 \sigma_4 - \frac{x_4}{|x_4|} A_5 + A_6 \cos(x_1) \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 \sigma_2 + B_4 x_4 \sigma_4 - \frac{x_5}{|x_5|} B_5 + B_6 \cos(x_2) \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 \sigma_3 - \frac{x_6}{|x_6|} C_3 \end{bmatrix} \quad (36-3)$$

$$\sigma_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad \sigma_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2, \quad \sigma_4 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$$

ثابت‌های معادلات بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_2 &= \frac{2 m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22} - J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_3 &= \frac{bd_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ A_4 &= \frac{J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_5 &= \frac{m_1 g \mu r_x}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} & A_6 &= \frac{m_{tot} x_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{11}} \\ B_1 &= \frac{h_{cg} g m_{tot}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_2 &= \frac{-2 m_{tot} h_{cg}^2 - J_{11} + J_{33}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_3 &= \frac{bd_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \\ B_4 &= \frac{-J_R}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_5 &= \frac{m_2 g \mu r_y}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} & B_6 &= \frac{m_{tot} y_{cg}}{m_{tot} h_{cg}^2 + J_{22}} \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \quad C_2 = \frac{d}{J_{33}} \quad C_3 = \frac{m_3 g \mu r_z}{J_{33}}$$

به منظور شبیه‌سازی، پارامترهای استند آزمایشگاه به صورت جدول ۱-۳ درنظر گرفته شده‌است.

جدول ۱-۳: پارامترهای شبیه‌سازی استند چهارپره [۱۵]

پارامتر	واحد	مقدار پارامتر استند چهارپره
$J_{11}$	$kg.m^2$	0.02839
$J_{22}$	$kg.m^2$	0.03066
$J_{33}$	$kg.m^2$	0.0439
$J_R$	$kg.m^2$	$4.4398 \times 10^{-5}$
$m_{tot}$	$kg$	1.074
$m_1$	$kg$	1.272
$m_2$	$kg$	1.074
$m_3$	$kg$	1.693
$d_{cg}$	$m$	0.2
$h_{cg}$	$m$	0.02
$x_{cg}$	$m$	0.03
$y_{cg}$	$m$	0.06
$r_x$	$m$	0.01
$r_y$	$m$	0.01
$r_z$	$m$	0.025
$b$	1	$3.13 \times 10^{-5}$
$d$	1	$3.2 \times 10^{-6}$
$\mu_s$	1	0.003
$\mu_k$	1	0.002
$g$	$m/s^2$	9.81

## ۶-۳ خطی‌سازی

در این قسمت، با استفاده از فرم فضای حالت استخراج شده در بخش ۵-۳، خطی‌سازی انجام شده است. در قسمت ۱-۶-۳ ابتدا صورت کلی فرم فضای حالت چهارپره محاسبه شده است. سپس، در بخش ۲-۶-۳ فرم فضای حالت برای هر کanal به صورت جداگانه بیان شده است.

### ۱-۶-۳ فرم خطی فضای حالت چهارپره

در این قسمت با توجه به معادلات فضای حالت بدست آمده، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود. به این منظور، نقطه کار به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (37-3)$$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \begin{bmatrix} 2000 & 2000 & 2000 & 2000 \end{bmatrix}^T \text{RPM} \quad (38-3)$$

که  $\mathbf{x}^*$  بردار حالت تعادلی و  $\boldsymbol{\omega}^*$  بردار ورودی حالت تعادلی است. برای خطی‌سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \boldsymbol{\omega} \quad (39-3)$$

که:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \quad (40-3)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\boldsymbol{\omega}^*} \quad (41-3)$$

ماتریس‌های  $A$  و  $B$  مطابق روابط (۴۰-۳) تا (۴۲-۳) محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{A} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_4} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_5} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_6} \right] \quad (42-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} x_5 \cos(x_1) \tan(x_2) - x_6 \sin(x_1) \tan(x_2) \\ -x_6 \cos(x_1) - x_5 \sin(x_1) \\ \frac{x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_1 \cos(x_1) \cos(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} \frac{x_6 \cos(x_1)}{\cos(x_2)^2} + \frac{x_5 \sin(x_1)}{\cos(x_2)^2} \\ 0 \\ \frac{\tan(x_2) (x_6 \cos(x_1) + x_5 \sin(x_1))}{\cos(x_2)} \\ -A_2 \sin(x_1) \sin(x_2) \\ B_1 \cos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_2 x_6 + B_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ C_1 x_5 \end{bmatrix} \quad (46-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_5} = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \tan(x_2) \\ \cos(x_1) \\ \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_2)} \\ A_2 x_6 + A_4 (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ 0 \\ C_1 x_4 \end{bmatrix} \quad (47-۳)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_6} = \begin{bmatrix} \cos(x_1) \tan(x_2) \\ -\sin(x_1) \\ \frac{\cos(x_1)}{\cos(x_2)} \\ 0 \\ B_2 x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48-۳)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 x_5 & 2 A_3 \omega_2 - A_4 x_5 & A_4 x_5 & -2 A_3 \omega_4 - A_4 x_5 \\ 2 B_3 \omega_1 + B_4 x_4 & -B_4 x_4 & B_4 x_4 - 2 B_3 \omega_3 & -B_4 x_4 \\ 2 C_2 \omega_1 & -2 C_2 \omega_2 & 2 C_2 \omega_3 & -2 C_2 \omega_4 \end{bmatrix} \quad (49-۳)$$

### ۲-۶-۳ فرم خطی فضای حالت کانال‌های چهارپره

در این قسمت، با توجه به فضای حالت بدست آمده در بخش ۵-۳، چهارپره حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود. برای ساده‌سازی، ورودی مسئله را از سرعت دورانی به نیروهای تاثیرگذار در مودهای رول، پیچ و یاو تغییر داده شده است. این کار باعث می‌شود که مسئله از چند ورودی و چند خروجی به سه مسئله یک ورودی و یک خروجی تبدیل شود. نیروها به فرم رابطه (۵۰-۳) تعریف می‌شوند.

$$u_1 = \omega_2^2 - \omega_4^2, \quad u_2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \quad u_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \quad (50-۳)$$

با توجه به اینکه سه نیرو در نظر گرفته شده و مسئله نیاز به چهار خروجی (سرعت دورانی موتورها) دارد یک نیروی دیگر نیز در نظر گرفته می‌شود که به فرم رابطه (۵۱-۳) است و مقدار آن به صورت ثابت و برابر با سرعت دورانی تمام پره‌ها در دور نامی یعنی <sup>۱</sup>RPM 2000 در نظر گرفته شده است.

$$u_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \quad (51-3)$$

در ادامه روابط (۵۰-۳) و (۵۱-۳) را در فضای حالت سیستم جایگزین می‌کنیم و برای سادگی قسمت‌های ( $\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$ ) را از معادلات حذف می‌کنیم.

فضای حالت جدید:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_4 + x_5 \sin(x_1) \tan(x_2) + x_6 \cos(x_1) \tan(x_2) \\ x_5 \cos(x_1) - x_6 \sin(x_1) \\ (x_5 \sin(x_1) + x_6 \cos(x_1)) \sec(x_2) \\ A_1 \cos(x_2) \sin(x_1) + A_2 x_5 x_6 + A_3 u_1 \\ B_1 \sin(x_2) + B_2 x_4 x_6 + B_3 u_2 \\ C_1 x_4 x_5 + C_2 u_3 \end{bmatrix} \quad (52-3)$$

بردار ورودی جدید به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T \quad (53-3)$$

برای خطی سازی از بسط تیلور استفاده شده است.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (54-3)$$

$$\mathbf{x}^* = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (55-3)$$

$$\mathbf{u}^* = [0 \ 0 \ 0 \ 4 \times 2000^2]^T \quad (56-3)$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \quad (57-3)$$

---

<sup>۱</sup>Revolutions Per Minute

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}^*} \quad (58-3)$$

روابط بالا به فرم چند سیستم یک ورودی و چند خروجی نوشته شده است. آن را به یک ورودی و یک خروجی تبدیل می‌کنیم.

مود رول

$$\mathbf{A}_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (59-3)$$

$$\mathbf{B}_{roll} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (60-3)$$

مود پیچ

$$\mathbf{A}_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ B_1 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (61-3)$$

$$\mathbf{B}_{pitch} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_5}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (62-3)$$

مود یاو

$$\mathbf{A}_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63-3)$$

$$\mathbf{B}_{yaw} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_6}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (64-3)$$

استخراج سرعت دورانی پره‌ها از نیروها

چهار معادله و چهار مجهول به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ u_2 &= \omega_1^2 - \omega_3^2 \\ u_3 &= \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2 \\ u_4 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{aligned} \quad (65-3)$$

جواب معادلات (65-3) به صورت رابطه (66-3) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 + 2u_2}{4}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 + 2u_1}{4}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{u_4 + u_3 - 2u_2}{4}} \\ \omega_4 &= \sqrt{\frac{u_4 - u_3 - 2u_1}{4}} \end{aligned} \quad (66-3)$$

## فصل ۴

# شبیه‌سازی استند سه درجه ازادی در محیط سیمولینک

سیمولینک<sup>۱</sup> یک ابزار شبیه‌سازی همراه با نرم‌افزار متلب<sup>۲</sup> است. با استفاده از سیمولینک می‌توان یک سامانه دینامیکی را شبیه‌سازی کرد. بنابراین، به کمک این نرم‌افزار می‌توان رفتار سامانه‌های دینامیکی را بدون ساخت آن‌ها تحلیل کرد. علاوه بر این، به کمک شبیه‌سازی می‌توان رفتار سامانه را در شرایط مختلف مطالعه کرد؛ شرایطی که فراهم کردن آن در دنیای واقعی ممکن است هزینه‌بر و یا دشوار باشد. سیمولینک به صورت یک افزونه در نرم‌افزار متلب عرضه شده است که شبیه‌سازی در محیط آن به صورت دیاگرام‌های بلوکی انجام می‌شود. در بخش‌های ۲-۴ و ۳-۴<sup>۳</sup> به بررسی شبیه‌سازی و اصلاح پارامتر استند سه درجه ازادی چهارپره پرداخته می‌شود.

### ۱-۴ طراحی مدل‌مبنا

در طراحی مدل‌مبنا، ابتدا سامانه دینامیکی در محیط نرم‌افزاری مدل‌سازی و کنترل‌کننده طراحی می‌شود. سپس، عملکرد کنترل‌کننده با استفاده از شبیه‌سازی نرم‌افزاری<sup>۳</sup> بررسی شده و اشکالات اولیه موجود برطرف می‌شود. در گام بعد، به‌منظور بررسی اثر نامعینی‌ها، ساده‌سازی‌ها و اشتباهات مدل‌سازی بر عملکرد

<sup>1</sup>Simulink

<sup>2</sup>MATLAB

<sup>3</sup>MIL (Model In the Loop)

کنترل کننده، شبیه‌سازی سخت افزار در حلقه سامانه<sup>۴</sup> انجام می‌شود. پس از تایید عملکرد کنترل کننده به صورت نرم افزاری، کد آن به کمک ابزار تولید خودکار کد نرم افزار سیمولینک تولید و روی آردوینو<sup>۵</sup> پیاده‌سازی می‌شود. در مرحله نهایی، برد آردوینو به سامانه حقیقی (استند سه درجه آزادی) وصل شده، به صورت زمان حقیقی<sup>۶</sup> خروجی حسگر را دریافت و فرمان کنترلی را به سامانه اعمال می‌کند.

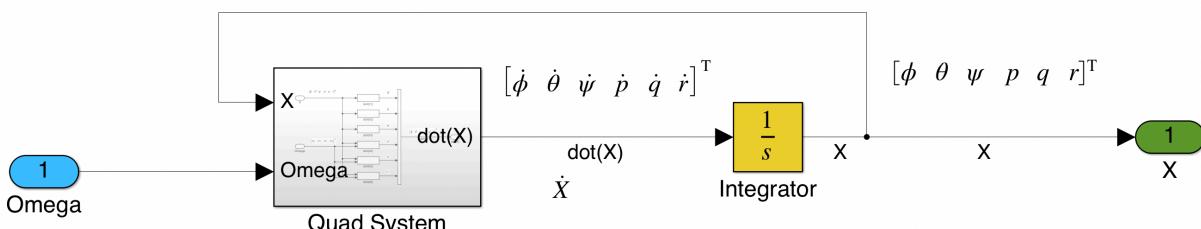
## ۲-۴ شبیه‌سازی استند سه درجه آزادی در محیط سیمولینک

در این بخش به بررسی و شبیه‌سازی مدل دینامیکی استند سه درجه آزادی پرداخته شده است. در بخش ۵-۳ فرم فضای حالت استند چهارپره استخراج شد. در شبیه‌سازی نیز از همین روابط استخراج شده، استفاده شده است. مدل شبیه‌سازی شده از استند (شکل ۱-۴) دارای چهار ورودی سرعت دورانی موتورها و دارای سه خروجی زوایای رول ( $\phi$ )، پیچ ( $\theta$ )، یا ( $\psi$ ) و سه سرعت زاویه‌ای  $p$ ،  $q$  و  $r$  است.



شکل ۱-۴: مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل

نمایی از داخل بلوک Quacopter 3DOF Nonlinear System در شکل ۲-۴ آورده شده است. این بلوک بر اساس معادلات فضای حالت بدست آمده در بخش ۵-۳ ساخته شده است.



شکل ۲-۴: مدل استند چهارپره شبیه‌سازی شده در سیمولینک و نمایش ورودی و خروجی‌های مدل

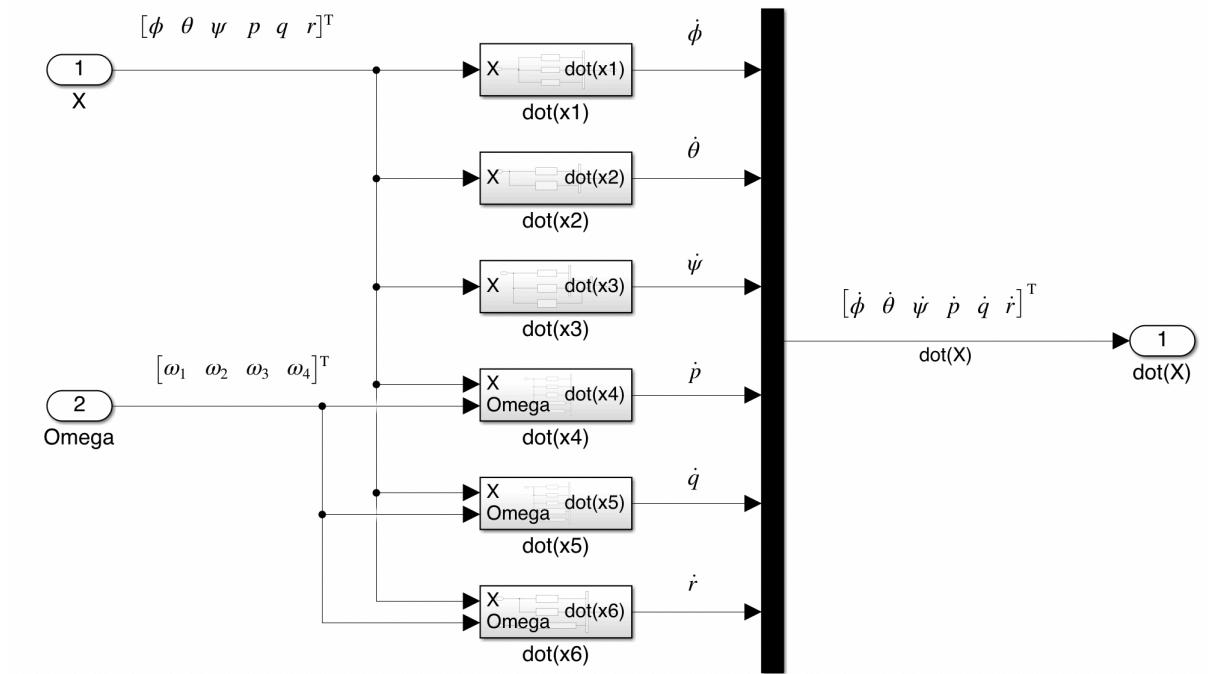
<sup>4</sup>RCP (Rapid Control Prototyping)

<sup>5</sup>Arduino

<sup>6</sup>Real-Time

خروجی بلوک Quad System، مشتق متغیرهای حالت  $\dot{X}$  است. بردار حالت سیستم با استفاده از بلوک انتگرال‌گیر (بلوک زرد رنگ در شکل ۲-۴) (زاویه‌های رول ( $\phi$ )، پیچ ( $\theta$ )، یاو ( $\psi$ ) و سرعت‌های زاویه‌ای  $p$ ,  $q$  و  $r$ ) به دست می‌آید.

در داخل بلوک Quad System، شش بلوک دیگر قرار دارد که تعدادی از آن‌ها دارای ورودی  $X$  و تعدادی دیگر دارای ورودی  $X$  و  $\omega$  هستند. مجموع خروجی این شش بلوک  $\dot{X}$  است که در توضیحات بلوک Quad System، نیز به آن اشاره شد. نمایی از داخل بلوک Quad System در شکل ۳-۴ آورده شده است.



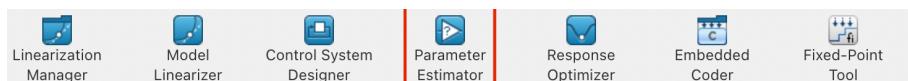
شکل ۳-۴: نمایی از داخل بلوک Quad System

### ۳-۴ اصلاح پارامترهای استند چهارپره

در بخش ۵-۳ فرم فضای حالت استند چهارپره استخراج شد و در بخش ۲-۴ شبیه‌سازی استند چهارپره انجام شد. در این بخش، با استفاده از شبیه‌سازی کانال‌های مختلف چهارپره در محیط سیمولینک و داده‌های خروجی از استند چهارپره، پارامترهای استند چهارپره اصلاح می‌شوند.

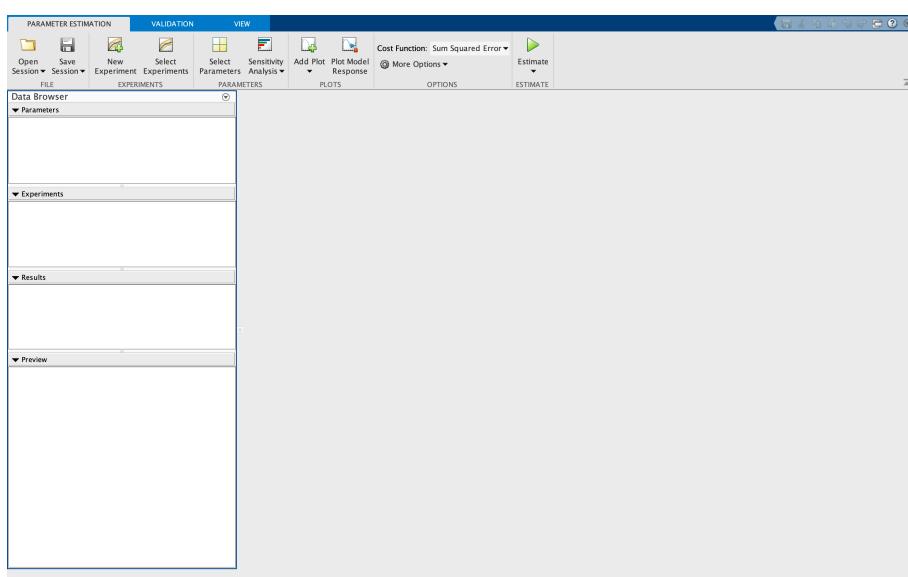
برای اصلاح پارامترهای استند چهارپره از جعبه‌ابزار Parameter Estimator موجود در محیط سیمولینک

استفاده شده است. این جعبه ابزار با استفاده از داده های وضعیت استندهای در واقعیت و داده های وضعیت استندهای در شبیه سازی سیمولینک، اقدام به اصلاح پارامترهای موجود در شبیه سازی می کند، به صورتی که وضعیت استندهای در شبیه سازی تا حد ممکن به وضعیت استندهای در واقعیت نزدیک کند.



شکل ۴-۴: نماد جعبه ابزار Parameter Estimator در سیمولینک

در شکل ۵-۴ نمایی از این جعبه ابزار آورده شده است.

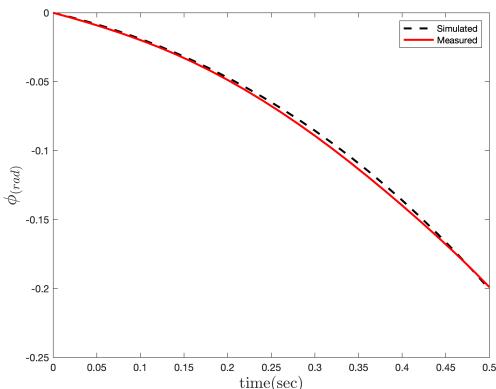


شکل ۵-۴: جعبه ابزار Parameter Estimator

به منظور افزایش دقت تخمین پارامترها، در ابتدا پارامترهای مربوط به هر کانال تخمین زده شده است و در ادامه پارامترهای مشترک کانال‌ها اصلاح شدن. برای افزایش دقت، در کانال‌های رول و پیچ، ابتدا پارامترها به صورت موتور خاموش اصلاح شدند و سپس، پارامترهای مربوط به موتور اصلاح شدند. در فرایند اصلاح پارامتر، بعد از هر مرحله اصلاح پارامتر اشاره شده در بالا، پارامترهای اصلاح شده مرحله قبلی ثابت فرض شده‌اند و سایر پارامترها تخمین زده شده‌اند. برای اصلاح پارامتر هر مرحله چندین آزمایش با سناریوهای مختلف انجام شده است، اما برای رعایت ایجاز از آوردن تمامی آزمایش‌ها پرهیز شده است.

برای انجام آزمایش، استندهای از شرایط اولیه مختلف و با ورودی‌های مختلف رها شده و از خروجی

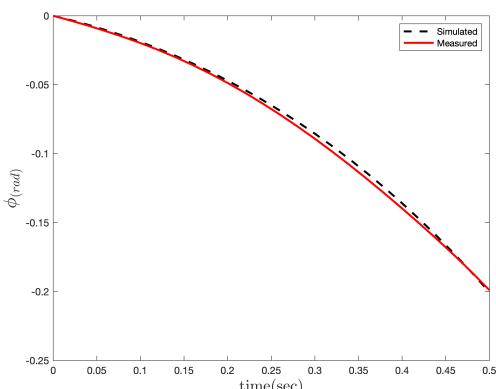
سنسور داده برداری شده است. سپس، مدل و داده‌های ثبت شدهی سنسور (وضعیت استنده) به جعبه‌ایزار Dاده‌شده‌اند. وضعیت استنده در شبیه‌سازی و واقعیت بعد از اصلاح پارامترهای Parameter Estimator مختلف در ادامه مقایسه شده است.



پارامتر	مقدار اولیه	مقدار بعد از اصلاح
4.152	7.312	$A_1$
0.0190	0.0087	$A_5$
0.65	0.51	$A_6$

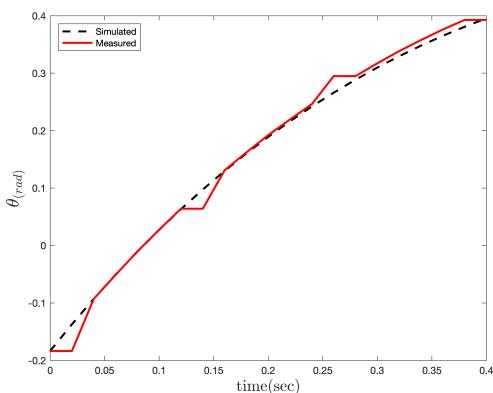
جدول ۱-۶: مقایسه پارامترهای کanal رول موتور خاموش شکل ۶-۴: مقایسه وضعیت کanal رول موتور خاموش در شبیه‌سازی و واقعیت قبل و بعد از اصلاح

در ادامه اصلاح پارامترهای موتور کanal رول چهارپره آورده شده است.



پارامتر	مقدار اولیه	مقدار بعد از اصلاح
$5.47 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-4}$	$A_3$

جدول ۲-۴: مقایسه پارامترهای کanal رول قبل و بعد از شکل ۷-۴: مقایسه وضعیت کanal رول در شبیه‌سازی و اصلاح واقعیت در ابتداء خروجی اصلاح پارامترهای کanal پیچ حالت موتور خاموش و سپس حالت کلی آورده شده است.

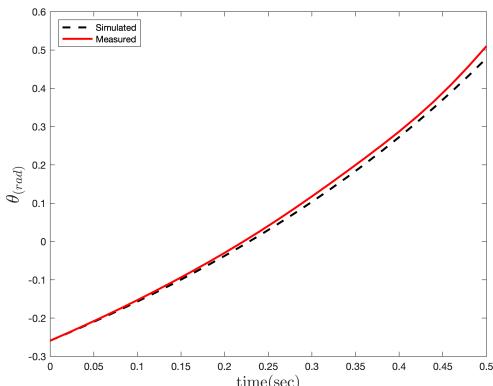


پارامتر مقدار اولیه مقدار بعد از اصلاح

4.36	4.53	$B_1$
0.012	0.007	$B_5$
4.428	4.13	$B_6$

جدول ۳-۴: مقایسه پارامترهای کanal پیچ موتور خاموش شکل ۸-۴: مقایسه وضعیت کanal پیچ موتور خاموش قبل و بعد از اصلاح در شبیه‌سازی و واقعیت

لازم به ذکر است، برای اصلاح سایر پارامترهای کanal رول، پارامترهای اصلاح شده در بخش بالا ثابت در نظر گرفته شده است.

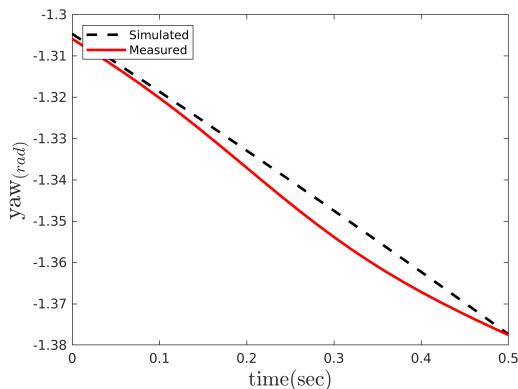


پارامتر مقدار اولیه مقدار بعد از اصلاح

$7.13 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-4}$	$B_3$
-----------------------	----------------------	-------

جدول ۴-۴: مقایسه پارامترهای کanal پیچ قبل و بعد از شکل ۹-۴: مقایسه وضعیت کanal پیچ در شبیه‌سازی و اصلاح واقعیت

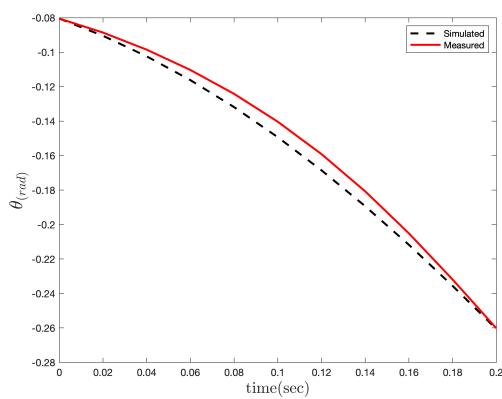
مقایسه وضعیت شبیه‌سازی و واقعیت چهارپره در کanal یاو و پارامترهای اصلاح شده آورده شده است.



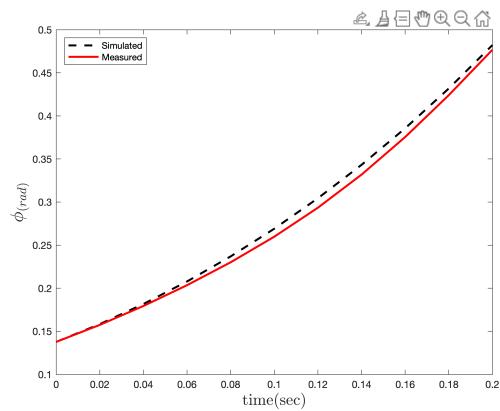
پارامتر	مقدار اولیه	مقدار بعد از اصلاح
$C_2$	$1.3 \times 10^{-5}$	$5.45 \times 10^{-5}$
$C_3$	0.017	0.014

جدول ۴-۵: مقایسه پارامترهای کانال یاو قبل و بعد از شکل ۱۰-۴: مقایسه وضعیت کانال یاو در شبیه‌سازی واقعیت و اصلاح

در این قسمت اصلاح پارامترهای کانال رول-پیچ با اثر متقابل کانال‌ها بر یکدیگر انجام شده است.



(ب) کانال پیچ



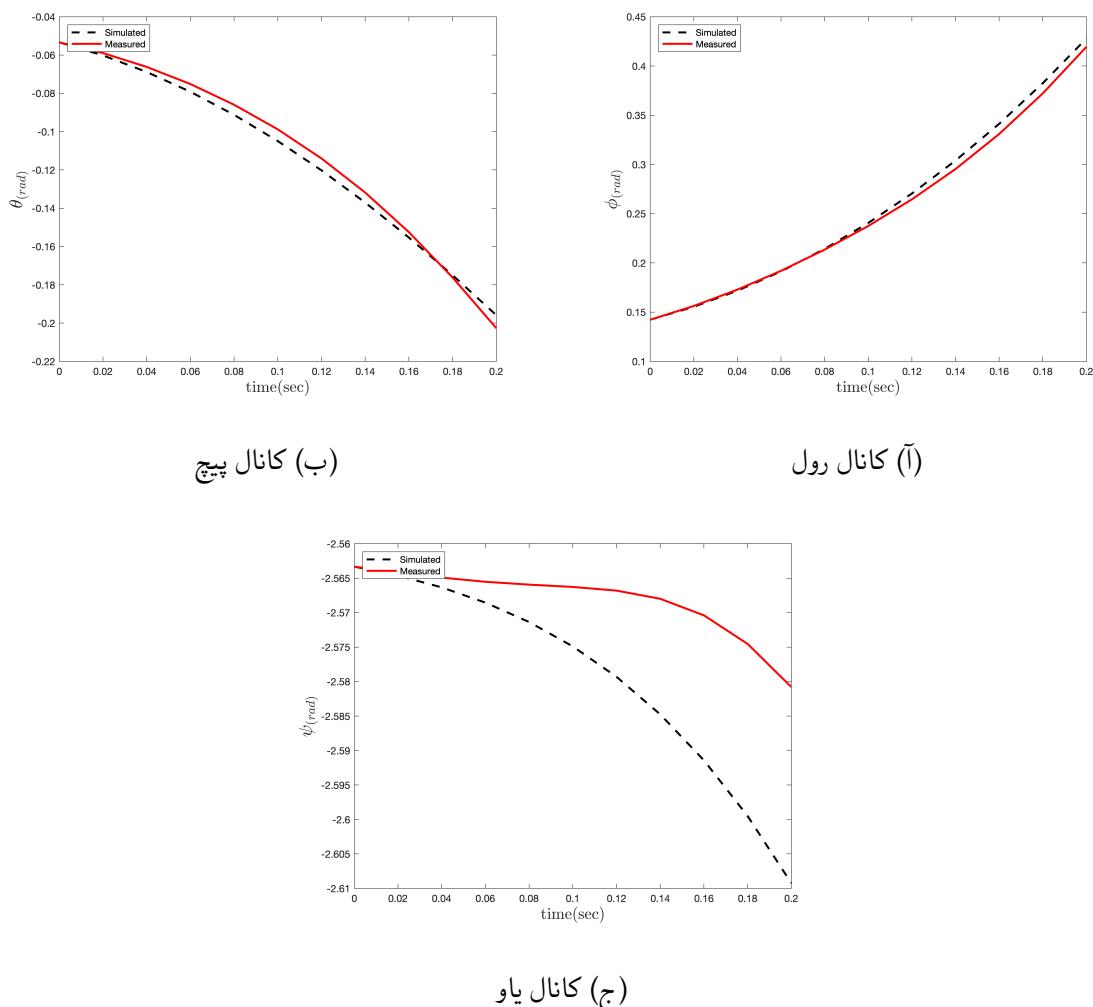
(l) کانال رول

شکل ۱۱-۴: مقایسه وضعیت کانال رول-پیچ در شبیه‌سازی واقعیت

پارامتر	مقدار اولیه	مقدار بعد از اصلاح
$A_4$	0.0020	0.0015
$B_4$	-0.0027	-0.0015

جدول ۶-۴: مقایسه پارامترهای کانال رول-پیچ قبل و بعد از اصلاح

در پایان اصلاح پارامترهای کanal رول-پیچ-یاو با اثر متقابل تمام کanalها بر یکدیگر انجام شده است.



شکل ۱۲-۴: مقایسه وضعیت کanal رول-پیچ-یاو در شبیه‌سازی و واقعیت

پارامتر	مقدار اولیه	مقدار بعد از اصلاح
-1.5652	-0.9521	$A_2$
1.5707	0.9523	$B_2$
-0.0085	-0.0017	$C_1$

جدول ۷-۴: مقایسه پارامترهای کanal رول-پیچ-یاو قبل و بعد از اصلاح

## فصل ۵

# طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای استند سه درجه آزادی چهارپره

در بخش‌های ۱-۲-۲ و ۲-۲-۲ کنترل‌کننده خطی مبتنی بر بازی دیفرانسیلی LQIDG و LQDG معرفی شد. در بخش ۱-۵ کanal رول چهارپره در حضور کنترل‌کننده‌های LQR، LQDG و LQIDG شبیه‌سازی شده است. سپس، در بخش‌های ۲-۵ و ۳-۵ به ترتیب شبیه‌سازی یک درجه آزادی، دو درجه آزادی و سه درجه آزادی در حضور کنترل‌کننده LQIDG انجام شده است.

## ۱-۵ طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای کanal رول

در بخش ۲-۴ شبیه‌سازی استند سه درجه آزادی چهارپره انجام شد. در این بخش به کنترل زاویه رول با فرض مقیدبودن زاویه پیچ و یا و پرداخته شده است. به این منظور، در بخش ۱-۱-۵ نتایج شبیه‌سازی برای تعقیب مقدار مطلوب خروجی زاویه رول ارائه شده است. سپس، در بخش ۲-۱-۵ عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز اندازه‌گیری بررسی شده است.

### ۱-۱-۵ تعقیب مقدار مطلوب خروجی

در این بخش به ارائه مختصری از کنترل‌کننده LQR پرداخته شده است. سپس، به بررسی عملکرد چهارپره در حضور کنترل‌کننده LQR پرداخته می‌شود. برای یک سامانه خطی پیوسته با معادلات حالت:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1-5)$$

فرمان کنترلی بهینه LQR به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۶]:

$$u_i(t) = -K_{LQR}x(t) \quad (2-5)$$

که در رابطه فوق، ماتریس  $K_{LQR}$  بیانگر بهره بازخورد بهینه است. این بهره به گونه‌ای محاسبه می‌شود که تابع هزینه مربعی زیر کمینه شود:

$$J_i(u_1) = \int_0^T (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (3-5)$$

در رابطه فوق، ماتریس‌های  $Q$  و  $R$  به ترتیب بیانگر میزان اهمیت انحراف متغیرهای حالت از مقادیر مطلوب و میزان تلاش کنترلی هستند. هر بهره بازخورد بهینه برای کمینه کردن رابطه (۳-۵)، از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$K_{LQR} = R^{-1}B^T P \quad (4-5)$$

در رابطه فوق، ماتریس  $P$  بیانگر پاسخ معادله ریکاتی زیر است:

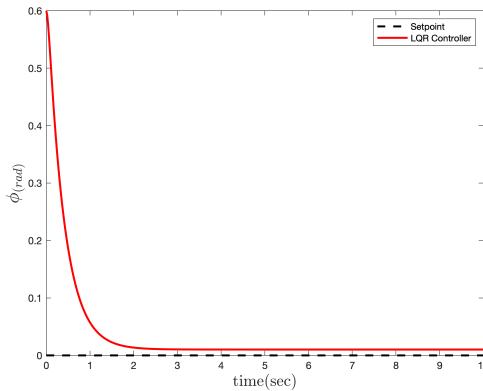
$$\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q \quad (5-5)$$

در شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی ضرایب وزنی LQR از روش بهینه‌سازی TCACS<sup>۱</sup> [۱۷] استفاده شده است. تابع هزینه ورودی TCACS به صورت ITSE<sup>۲</sup> در نظر گرفته شده است. ضرایب وزنی خروجی بهینه شده در پایین آورده شده است.

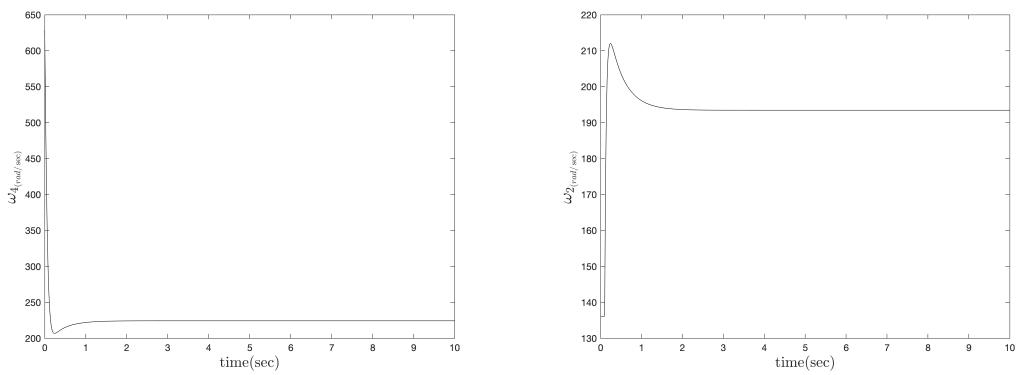
$$Q_{LQR} = \begin{bmatrix} 0.5215 & 0 \\ 0 & 0.0745 \end{bmatrix}, \quad R_{LQR} = 0.0001 \quad (6-5)$$

<sup>۱</sup>Tabu Continuous Ant Colony System

<sup>۲</sup>Integral Time Square Error



شکل ۱-۵: عملکرد کنترل کننده LQR در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)



(ب) موتور شماره چهار (ا) موتور شماره دو

شکل ۲-۵: فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)

همانطور که از شکل ۱-۵ مشخص است، زمان نشست در حدود دو ثانیه است. خطای ماندگار دارد. در این بخش به بررسی عملکرد چهارپره در حضور کنترل کننده LQDG پرداخته می‌شود. کنترل کننده LQDG در بخش ۱-۲-۲ بررسی شده است. در شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی ضرایب وزنی مانند قسمت قبل عمل شده است.

$$Q_{LQDG} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.078 \end{bmatrix}, \quad R_{1LQDG} = 1, \quad R_{2LQDG} = 99.96 \quad (V-5)$$

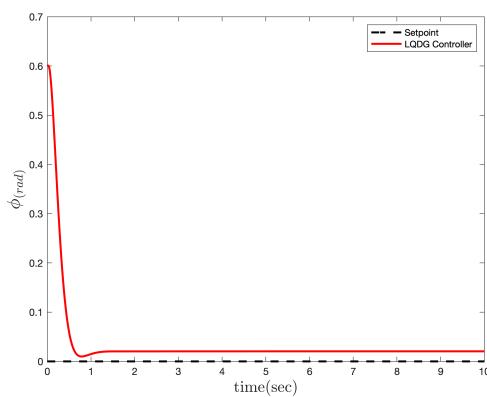
در گام بعد، با حل معادله (V-2) (برای سادگی ماتریس‌های وزنی  $Q_1$  و  $Q_2$  مساوی در نظر گرفته شده است)

ماتریس  $K_1$  به صورت زیر به دست می‌آید.

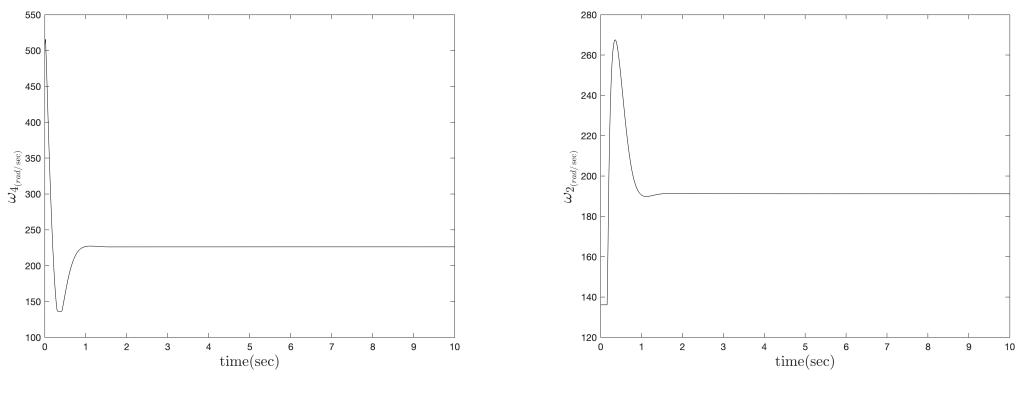
$$K_1 = \begin{bmatrix} 286.0470 & 39.1188 \\ 39.1188 & 8.8510 \end{bmatrix} \quad (8-5)$$

در نهایت فرمان کنترلی بهینه بازیکن اول از رابطه (۵-۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$u_1 = - \begin{bmatrix} 39.1188 & 8.8510 \end{bmatrix} x(t) \quad (9-5)$$



شکل ۳-۵: عملکرد کنترل‌کننده LQDG در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)



(ب) موتور شماره چهار

(ا) موتور شماره دو

شکل ۴-۵: فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)

همانطور که از شکل ۳-۵ مشخص است، زمان نشست در حدود دو ثانیه است. خطای ماندگار دارد.

در این بخش به بررسی عملکرد چهارپره در حضور کنترل‌کننده LQIDG پرداخته می‌شود. کنترل‌کننده LQIDG در بخش ۲-۲-۲ بررسی شده است. در شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی ضرایب وزنی مانند قسمت

قبل عمل شده است.

(۱۰-۵)

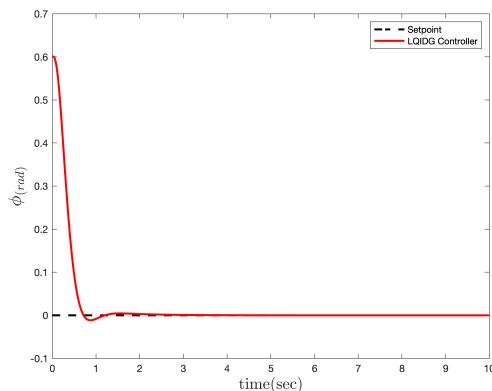
$$Q_{a_{LQIDG}} = \begin{bmatrix} 0.1707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 837.8606 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 756.1341 \end{bmatrix}, \quad R_{1_{LQDG}} = 1, \quad R_{2_{LQDG}} = 7.7422$$

در گام بعد، با حل معادله (۱۵-۲) (برای سادگی ماتریس‌های وزنی  $Q_{a_2}$  و  $Q_{a_1}$  مساوی در نظر گرفته شده است) ماتریس  $K_1$  به صورت زیر به دست می‌آید.

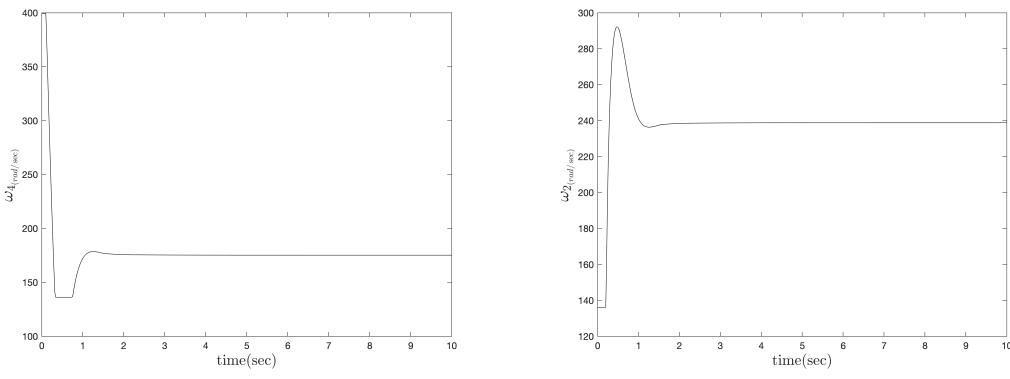
$$K_{a_1} = \begin{bmatrix} 10924.84 & 39.83 & 1014.34 & -10629.93 \\ 39.83 & 8.40 & 27.22 & 11.70 \\ 1014.34 & 27.22 & 1047.80 & -756.13 \\ -10658.93 & 11.70 & -756.13 & 10658.93 \end{bmatrix} \quad (11-5)$$

در نهایت فرمان کنترلی بهینه بازیکن اول از رابطه (۱۳-۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$u_1 = - [28.1410 \quad 8.4017 \quad 27.2223 \quad 11.6894] x_a(t) \quad (12-5)$$



شکل ۵-۵: عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)



### (ب) موتور شماره چهار

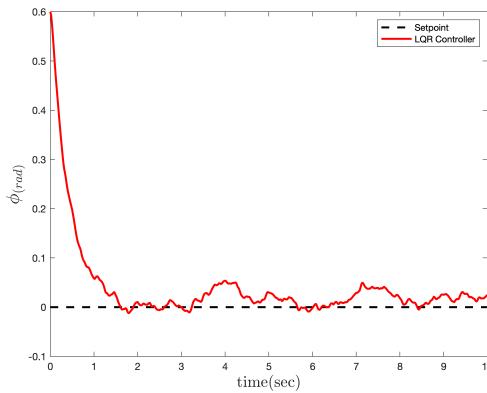
(آ) موتور شماره دو

شکل ۵-۶: فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول (تعقیب ورودی صفر)

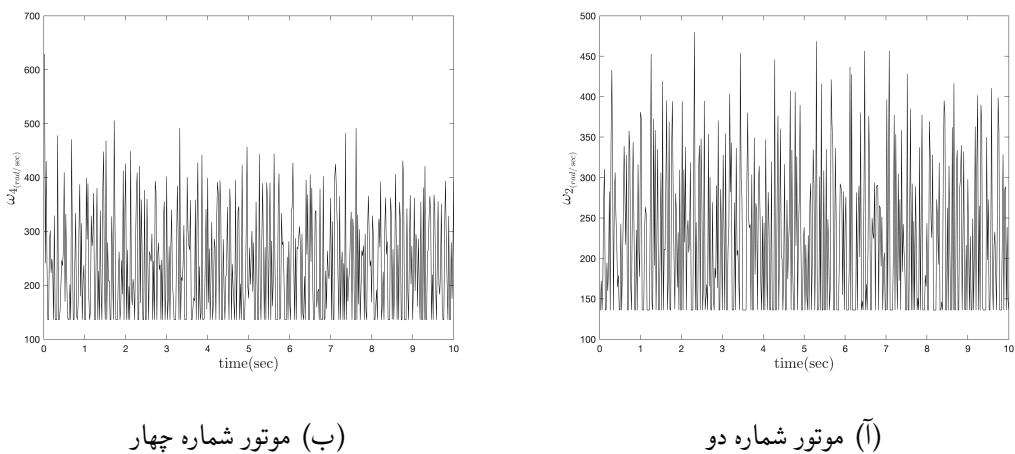
همانطور که از شکل ۵-۵ مشخص است، زمان نشست در حدود یک ثانیه است. خطای مانگار ندارد.

## ۲-۱-۵ بررسی عملکرد کنترل کننده در حضور نویز اندازه‌گیری

در این بخش عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز (نویز تصادفی حول نقطه صفر و با انحراف معیار دو صدم) وارد بر تمامی مقدار اندازه‌گیری شده‌ی سنسور، مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرکانس تولید نویز در شبیه‌سازی ۵۰ هرتز در نظر گرفته شده است.

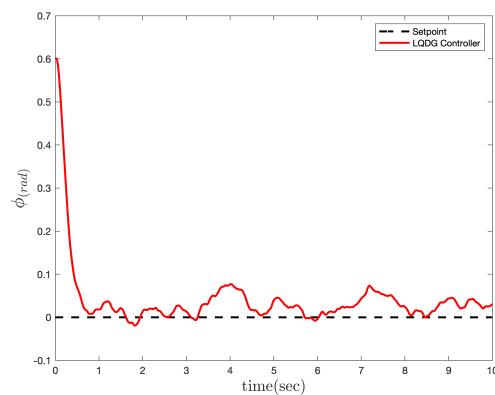


شکل ۷-۵: عملکرد کنترل کننده LQR در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری

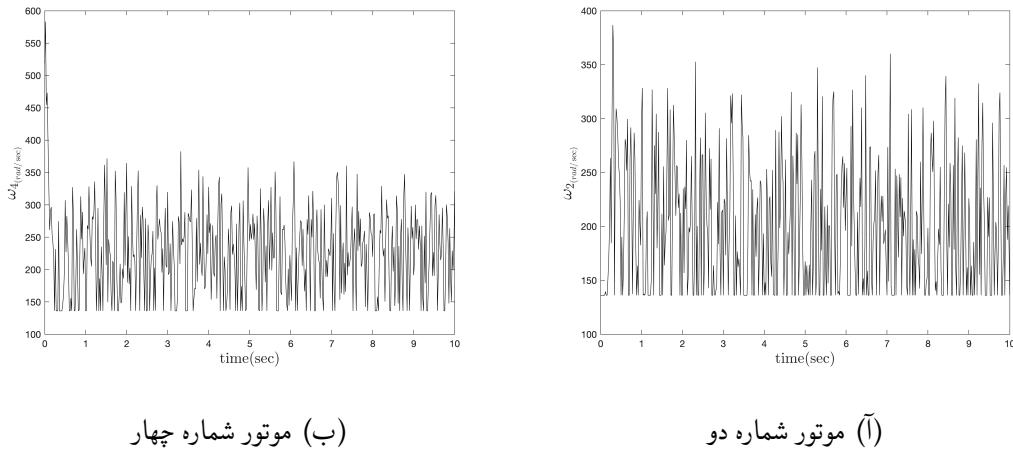


شکل ۵-۸: فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری

همانطور که از شکل ۷-۵ مشخص است، عملکرد کنترل کننده LQR در برابر نویز اندازه‌گیری ضعیف است و خروجی دارای نوسان است.

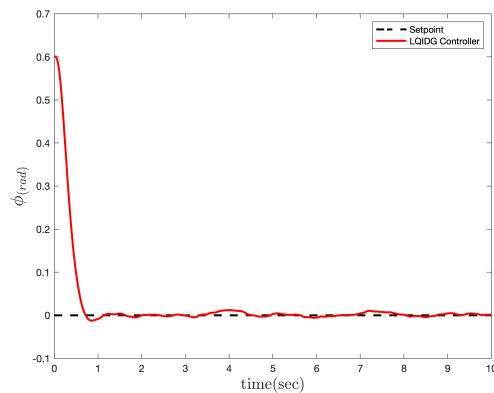


شکل ۹-۵: عملکرد کنترل کننده LQDG در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری

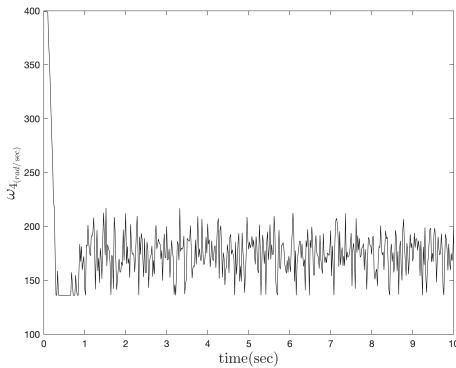


شکل ۵-۵: فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رولبا حضور نویز اندازه‌گیری

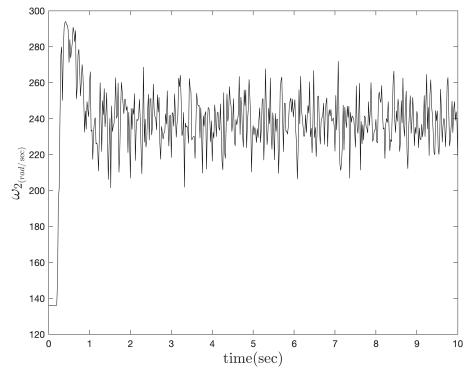
همانطور که از شکل ۹-۵ مشخص است، عملکرد کنترل کننده LQDG در برابر نویز اندازه‌گیری ضعیف است و خروجی دارای نوسان است.



شکل ۱۱-۵: عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری



(ب) موتور شماره چهار



(ا') موتور شماره دو

شکل ۱۲-۵: فرمان کنترلی موتورهای دو و چهار در کنترل زاویه رول با حضور نویز اندازه‌گیری

همانطور که از شکل ۱۱-۵ مشخص است، عملکرد کنترل‌کننده LQDG در برابر نویز اندازه‌گیری خوب است و خروجی نوسان و ندارد.

## ۲-۵ طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای کanal رول-پیچ

در این بخش به کنترل زاویه رول و پیچ با فرض مقیدبودن زاویه یا و پرداخته شده است. به این منظور، در بخش ۱-۲-۵ نتایج شبیه‌سازی برای تعقیب مقدار مطلوب خروجی زاویه رول و پیچ ارائه می‌شود. سپس، در بخش ۲-۲-۵ عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز اندازه‌گیری بررسی می‌شود.

### ۱-۲-۵ تعقیب مقدار مطلوب خروجی

در شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی ضرایب وزنی مانند قسمت قبل عمل شده است. ضرایب وزنی خروجی بهینه‌سازی در پایین آورده شده است. برای طراحی کنترل‌کننده LQIDG ضرایب وزنی  $R_1$  و  $R_2$  برای

کانال‌های مختلف یکسان فرض شده است.

$$Q_{a_{LQIDG_{roll}}} = \begin{bmatrix} 585.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 83.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{a_{LQIDG_{pitch}}} = \begin{bmatrix} 546.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 311.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{1_{LQDG}} = 1, \quad R_{2_{LQDG}} = 7.7422 \quad (13-5)$$

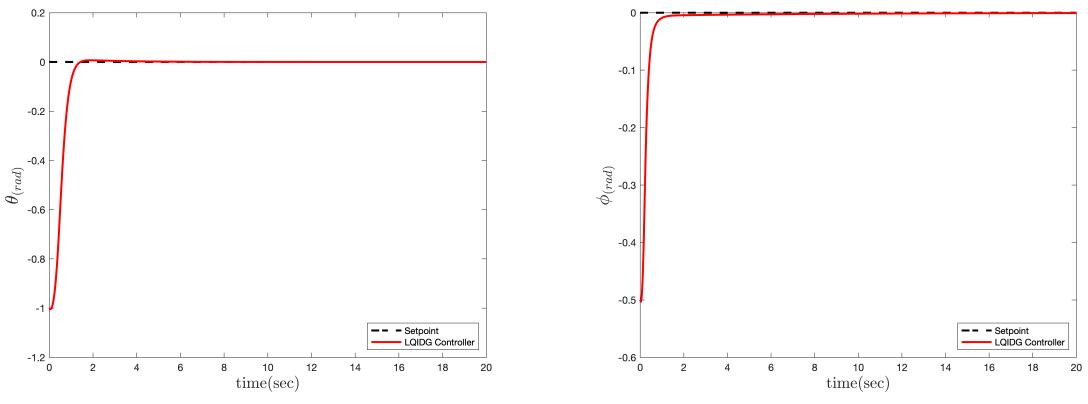
در گام بعد، با حل معادله (۱۵-۲) (برای سادگی ماتریس‌های وزنی  $Q_{a_1}$  و  $Q_{a_2}$  مساوی در نظر گرفته شده است) ماتریس  $K_1$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$K_{a_1_{roll}} = \begin{bmatrix} 1720.86 & 80.29 & 187.71 & -8.57 \\ 80.29 & 20.44 & 8.11 & 0.53 \\ 187.77 & 8.11 & 686.56 & -0.02 \\ -8.57 & 0.53 & -0.02 & 9.93 \end{bmatrix}, K_{a_1_{pitch}} = \begin{bmatrix} 243.90 & 25.01 & 80.29 & -9.50 \\ 25.01 & 7.41 & 7.33 & 0 \\ 80.29 & 7.33 & 239.14 & 0 \\ -9.50 & 0 & 0 & 9.50 \end{bmatrix} \quad (14-5)$$

در نهایت فرمان کنترلی بهینه بازیکن اول از رابطه (۱۳-۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$u_{1_{roll}} = - \begin{bmatrix} 79.7522 & 20.4432 & 8.1058 & 0.5344 \end{bmatrix} x_{a_{roll}} \quad (15-5)$$

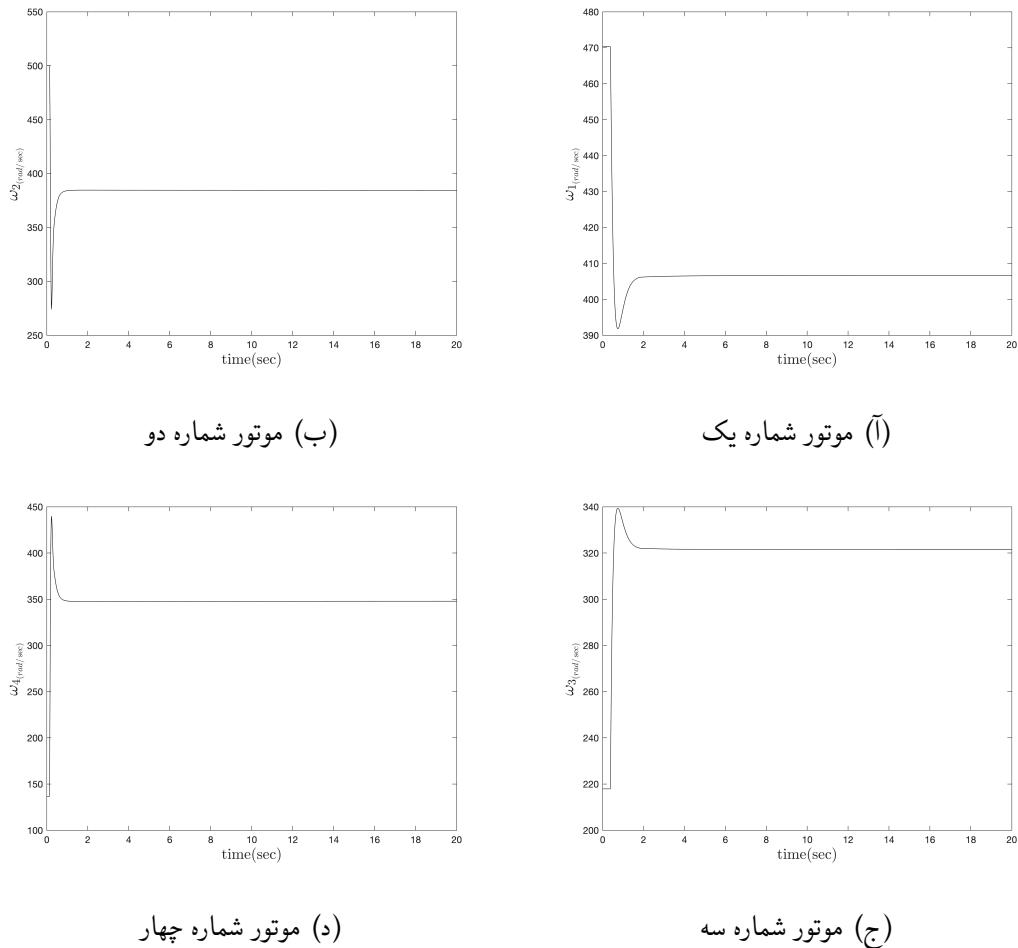
$$u_{1_{pitch}} = - \begin{bmatrix} 25.0112 & 7.40730 & 7.3280 & 0.0010 \end{bmatrix} x_{a_{pitch}}$$



(ب) تغییرات زاویه پیچ

(ا) تغییرات زاویه رول

شکل ۱۳-۵: عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر)



(د) موتور شماره چهار

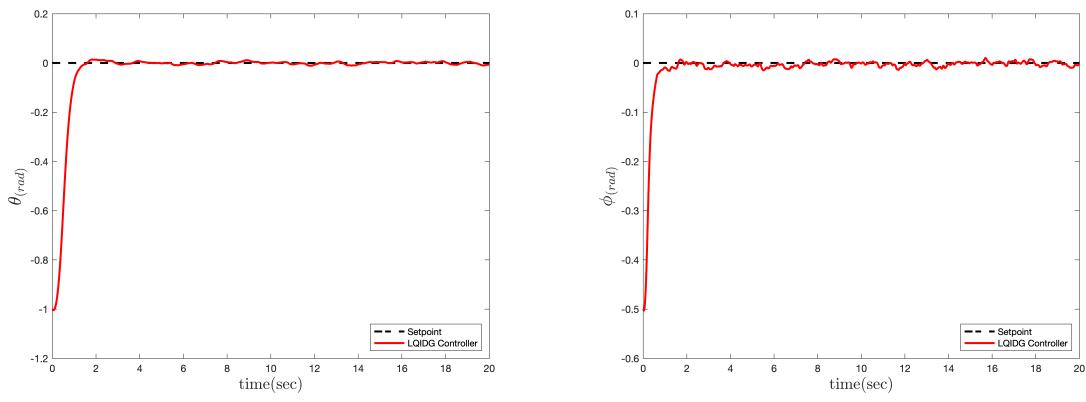
(ج) موتور شماره سه

شکل ۱۴-۵: فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر)

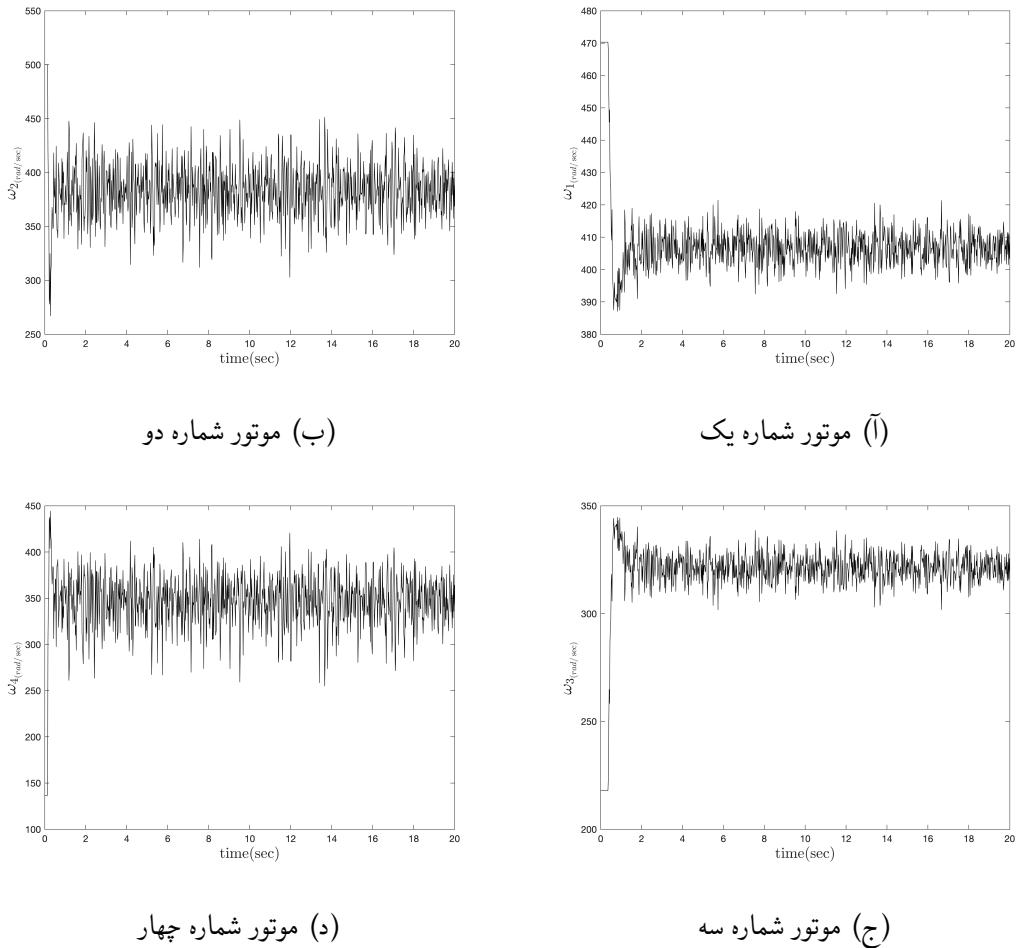
همانطور که از شکل ۱۳-۵ مشخص است، زمان نشست در برای هر دو کanal رول و پیچ حدود یک ثانیه است. خطای مانگار ندارد.

## ۲-۲-۵ بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز اندازه‌گیری

در این بخش عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز (نویز تصادفی حول نقطه صفر و با انحراف معیار دو صدم) وارد بر تمامی مقدار اندازه‌گیری شده‌ی سنسور، مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرکانس تولید نویز در شبیه‌سازی  $50^{\circ}$  هرتز در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۵-۵: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل زاویه رول و پیچ با حضور نویز اندازه‌گیری



شکل ۱۶-۵: فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول و پیچ با حضور نویز اندازه‌گیری

همانطور که از شکل ۱۵-۵ مشخص است، عملکرد کنترل‌کننده LQDG در برابر نویز اندازه‌گیری خوب است و خروجی نوسان و ندارد.

### ۳-۵ طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای سه درجه آزادی

در این بخش به کنترل وضعیت پرداخته شده است. به این منظور، در بخش ۱-۳-۵ نتایج شبیه‌سازی برای تعقیب مقدار مطلوب خروجی زاویه رول ارائه می‌شود. سپس، در بخش ۲-۳-۵ عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز اندازه‌گیری بررسی می‌شود.

### ۱-۳-۵ تعقیب مقدار مطلوب خروجی

در بخش‌های ۱-۶-۳ و ۲-۶-۳ خطی‌سازی فضای حالت چهارپره و کانال‌های مختلف چهارپره انجام شده است. در این بخش ابتدا طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده برای سه کanal تک ورودی و در ادامه طراحی و شبیه‌سازی کنترل‌کننده چند ورودی و چند خروجی انجام شده است.

#### شبیه‌سازی کنترل‌کننده به صورت سه کanal تک ورودی

در شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی ضرایب وزنی مانند قسمت قبل عمل شده است. ضرایب وزنی خروجی بهینه‌سازی در پایین آورده شده است. برای طراحی کنترل‌کننده LQIDG ضرایب وزنی  $R_1$  و  $R_2$  برای کanal‌های مختلف یکی فرض شده است.

$$\begin{aligned}
 Q_{a_{LQIDG_{roll}}} &= \begin{bmatrix} 631.85 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 214.28 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.91 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \end{bmatrix} \\
 Q_{a_{LQIDG_{pitch}}} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 873.93 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 9853.09 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.12 \end{bmatrix} \\
 Q_{a_{LQIDG_{yaw}}} &= \begin{bmatrix} 0.03 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.17 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.81 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 33333.45 \end{bmatrix} \times 10^{-4}
 \end{aligned} \tag{۱۶-۵}$$

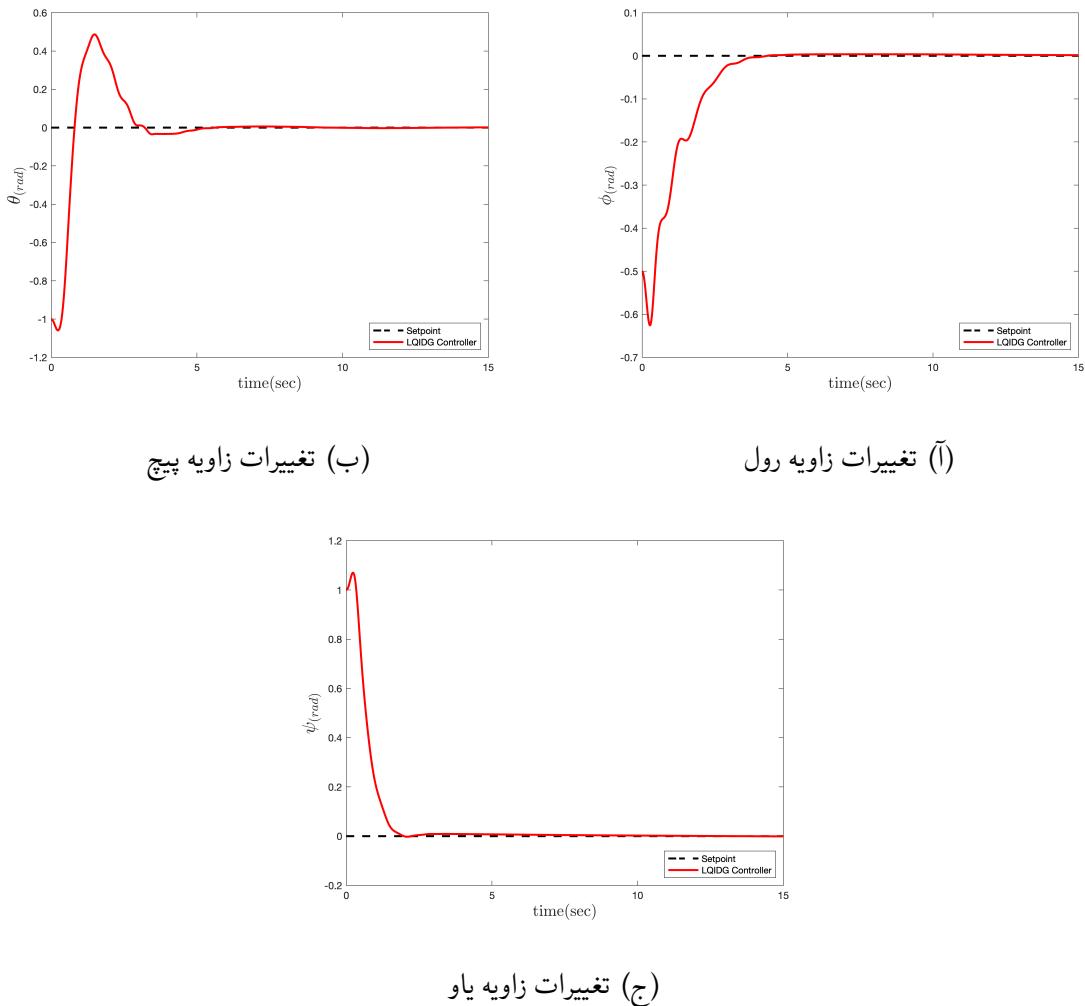
$$R_{1_{LQDG}} = 1, \quad R_{2_{LQDG}} = 1.2577$$

در گام بعد، با حل معادله (۱۵-۲) (برای سادگی ماتریس‌های وزنی  $Q_{a_2}$  و  $Q_{a_1}$  مساوی در نظر گرفته شده‌است) ماتریس  $K_1$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} K_{a_1roll} &= \begin{bmatrix} 435.89 & 20.54 & 42.44 & -9.98 \\ 20.54 & 11.93 & 1.98 & -0.00 \\ 42.44 & 1.98 & 71.49 & -0.08 \\ -9.98 & -0.00 & -0.08 & 9.93 \end{bmatrix} \\ K_{a_1pitch} &= \begin{bmatrix} 2430.43 & 59.59 & 3128.26 & -11.75 \\ 59.59 & 23.52 & 74.08 & 0.00 \\ 3128.26 & 74.08 & 7851.78 & -0.12 \\ -11.75 & 0.00 & -0.12 & 11.75 \end{bmatrix} \\ K_{a_1yaw} &= \begin{bmatrix} 57.75 & 1.46 & 3.56 & -54.52 \\ 1.46 & 1.27 & 0.10 & -0.00 \\ 3.56 & 0.10 & 0.24 & -3.34 \\ -54.52 & -0.00 & -3.34 & 54.51 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۷-۵)$$

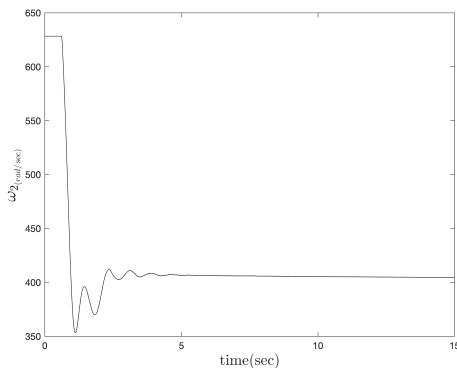
در نهایت فرمان کنترلی بهینه بازیکن اول از رابطه (۱۳-۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} u_{1roll} &= - \begin{bmatrix} 20.5410 & 11.9267 & 1.9771 & 0.0021 \end{bmatrix} x_{a_{roll}} \\ u_{1pitch} &= - \begin{bmatrix} 59.5923 & 23.5197 & 74.0822 & 0.000 \end{bmatrix} x_{a_{pitch}} \\ u_{1yaw} &= - \begin{bmatrix} 1.45710 & 1.27300 & 0.0999 & 0.0041 \end{bmatrix} x_{a_{yaw}} \end{aligned} \quad (۱۸-۵)$$

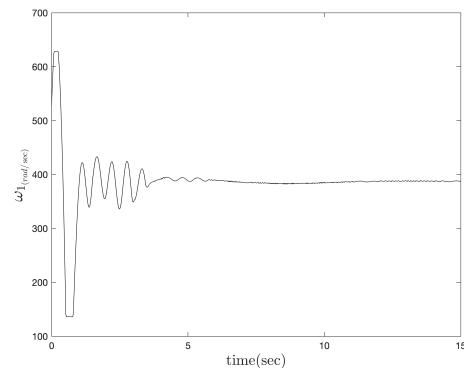


شکل ۱۷-۵: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)

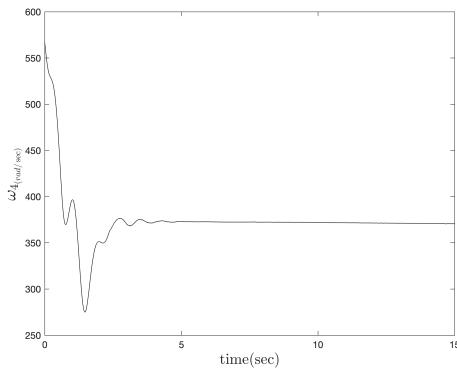
همانطور که از شکل ۱۷-۵ مشخص است، زمان نشست برای کانال‌های مختلف حداقل هشت پنج ثانیه است. خطای مانگار ندارد. در ادامه فرمان کنترلی موتورها آورده شده است.



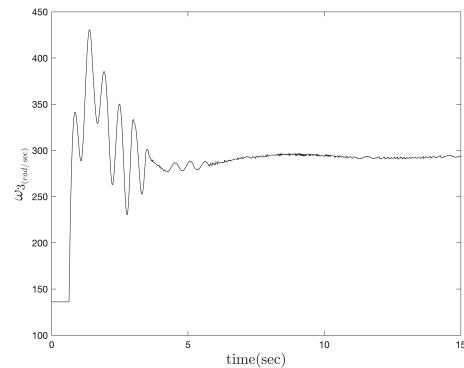
(ب) موتور شماره دو



(ا) موتور شماره یک



(د) موتور شماره چهار



(ج) موتور شماره سه

شکل ۱۸-۵: فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)

## شبیه‌سازی کنترل‌کننده به صورت چهار ورودی

$$\mathbf{K}_{a_1roll} = \begin{bmatrix} 258228.43 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 33152686.22 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 160.15 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 7541.49 \end{bmatrix}$$

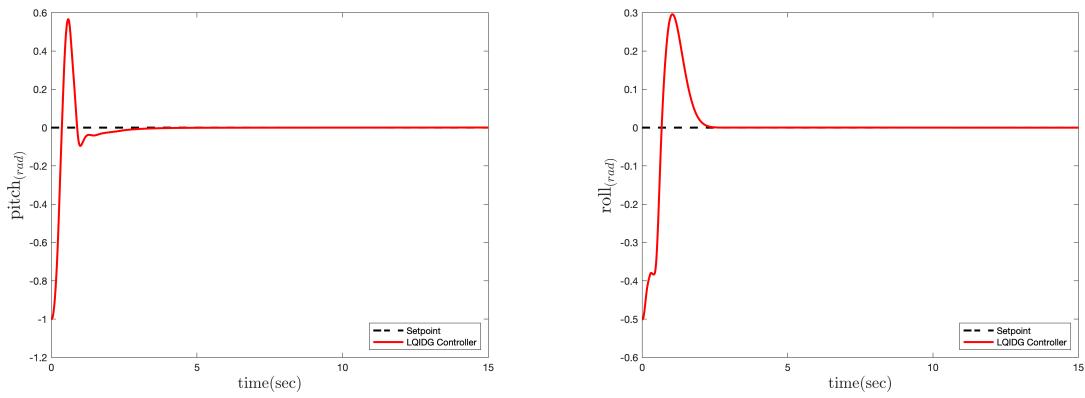
$$\mathbf{K}_{a_1pitch} = \begin{bmatrix} 382.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 20246.38 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2472592.13 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 60676037.12 \end{bmatrix} \quad (19-5)$$

$$\mathbf{K}_{a_1yaw} = \begin{bmatrix} 3390219.36 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 45.04 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 41049.01 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 881966.56 \end{bmatrix}$$

(۲۰-۵)

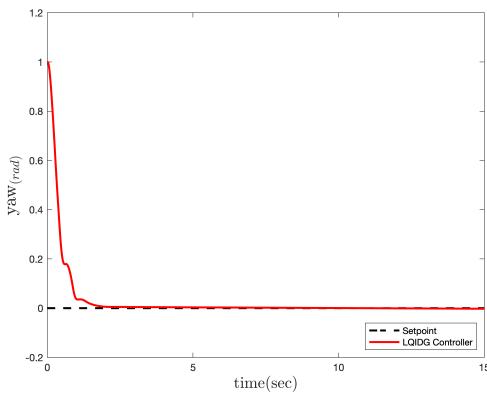
$$\mathbf{Q}_{a_{LQIDG}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a_1roll} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{a_1pitch} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{a_1yaw} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{1_{LQDG}} = 1, \mathbf{R}_{2_{LQDG}} = 15.1793$$

در گام بعد، با حل معادله (۱۵-۲) (برای سادگی ماتریس‌های وزنی  $\mathbf{Q}_{a_2}$  و  $\mathbf{Q}_{a_1}$  مساوی در نظر گرفته شده‌است) ماتریس  $\mathbf{K}_1$  به دست می‌آید. در نهایت فرمان کنترلی بهینه بازیکن اول از رابطه (۱۳-۲) به دست می‌آید (به علت حجم زیاد ماتریس‌ها از آوردن مستقیم آنها پرهیز شده‌است).



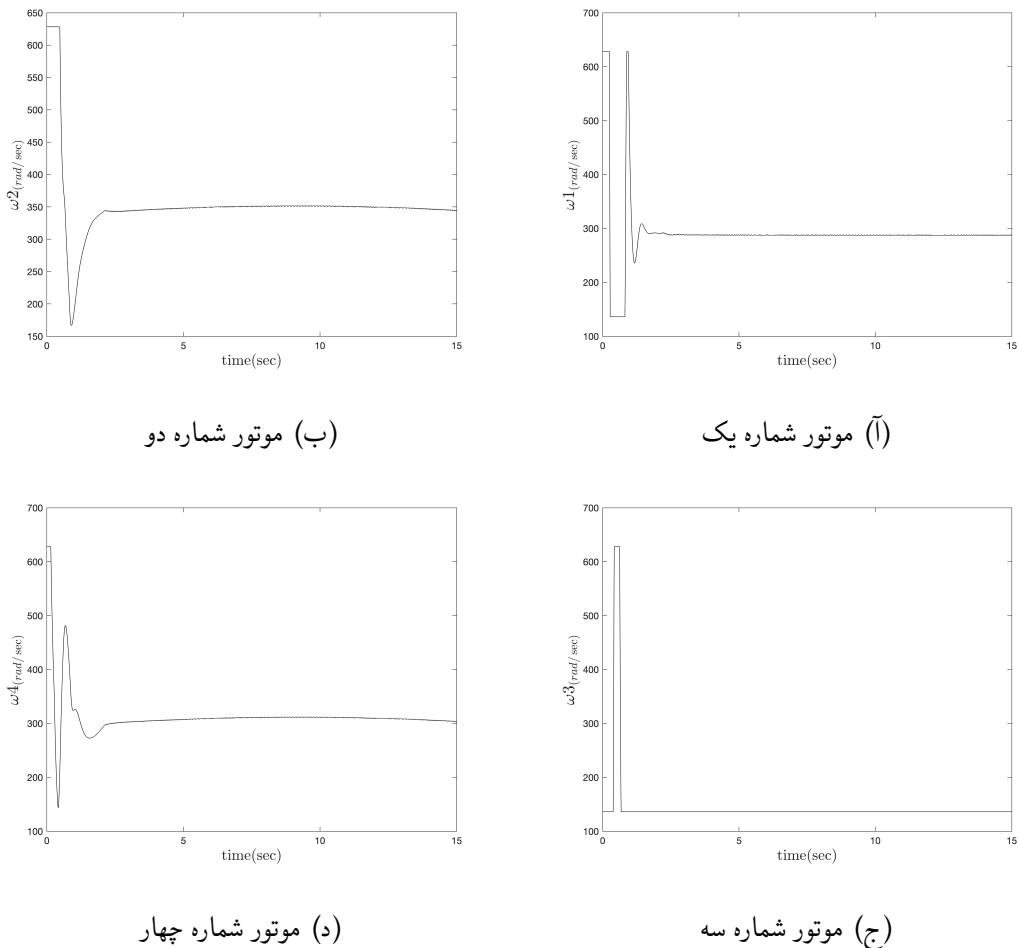
(ب) تغییرات زاویه پیچ

(ا) تغییرات زاویه رول



(ج) تغییرات زاویه یاو

شکل ۱۹-۵: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)

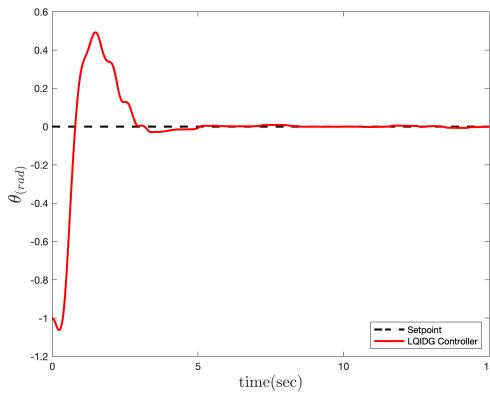


شکل ۵-۲۰: فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)

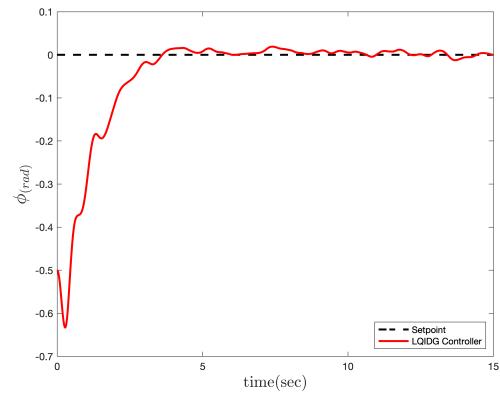
### ۲-۳-۵ بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز اندازه‌گیری

در این بخش عملکرد کنترل‌کننده در حضور نویز (نویز تصادفی حول نقطه صفر و با انحراف معیار دو صدم) وارد بر تمامی مقدار اندازه‌گیری شده‌ی سنسور، مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرکانس تولید نویز در شبیه‌سازی ۵۰ هرتز در نظر گرفته شده است.

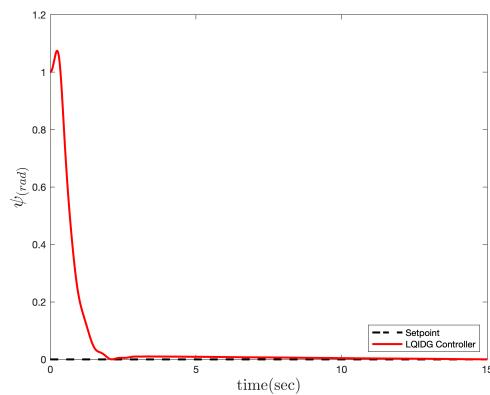
## شبیه‌سازی کنترل‌کننده به صورت سه کانال تک ورودی



(ب) تغییرات زاویه پیچ

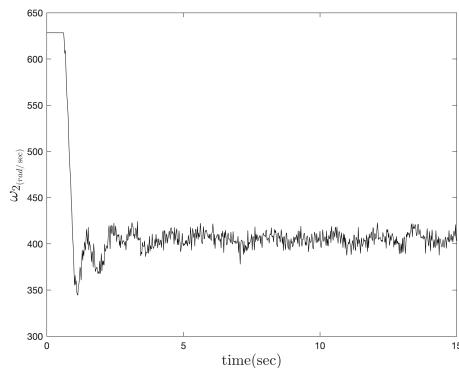


(ا) تغییرات زاویه رول

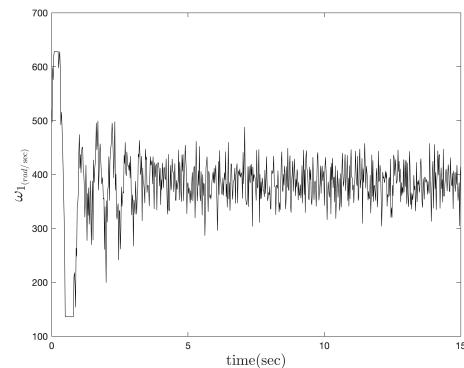


(ج) تغییرات زاویه یاو

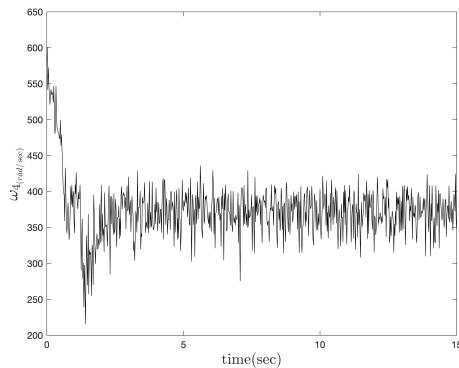
شکل ۲۱-۵: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل وضعیت با حضور نویز اندازه‌گیری



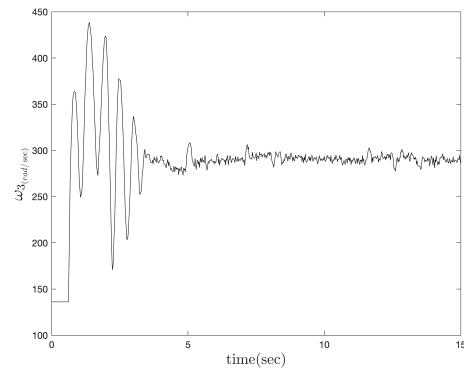
(ب) موتور شماره دو



(ا) موتور شماره یک



(د) موتور شماره چهار

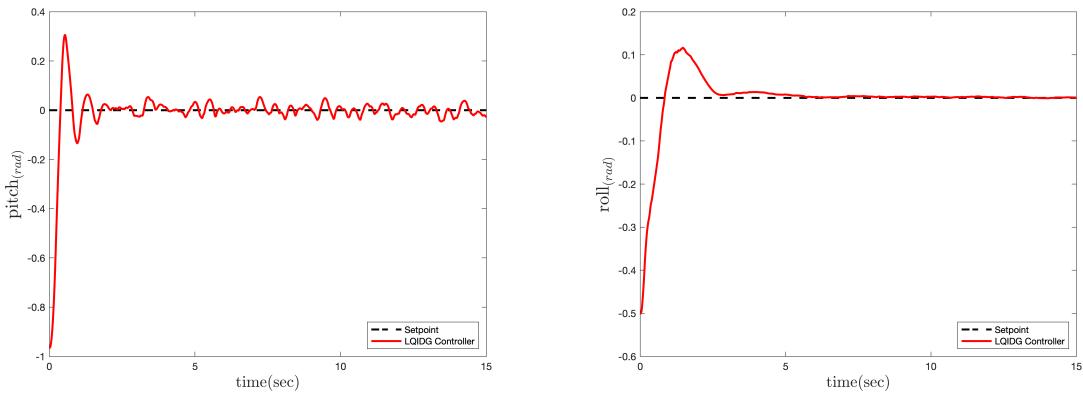


(ج) موتور شماره سه

شکل ۵-۲۲: فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت با حضور نویز اندازه‌گیری

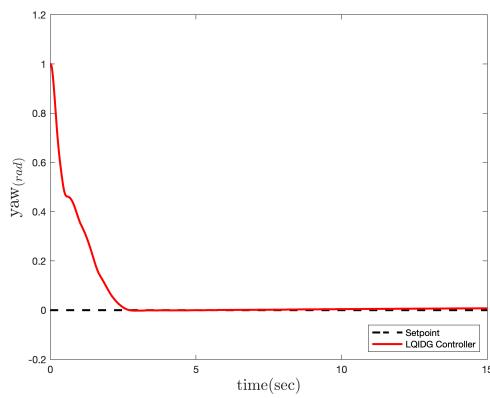
همانطور که از شکل ۵-۲۲ مشخص است، عملکرد کنترل کننده LQDG در برابر نویز اندازه‌گیری خوب است و خروجی نوسان و ندارد.

### شبیه‌سازی کنترل‌کننده به صورت چهار ورودی



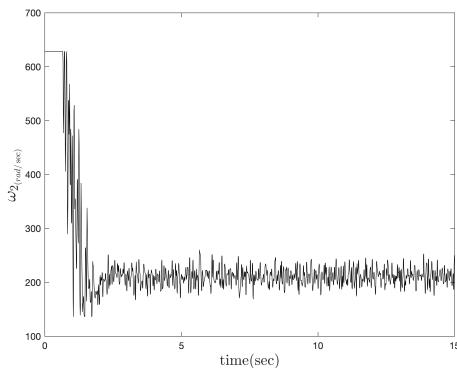
(ب) تغییرات زاویه پیچ

(ا) تغییرات زاویه رول

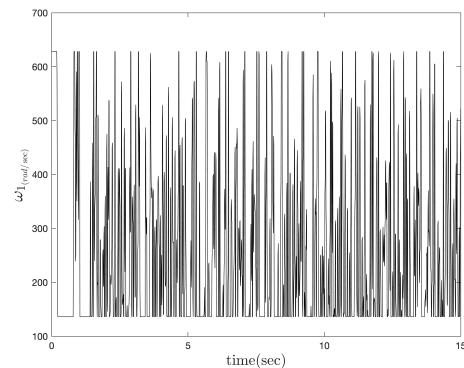


(ج) تغییرات زاویه یاو

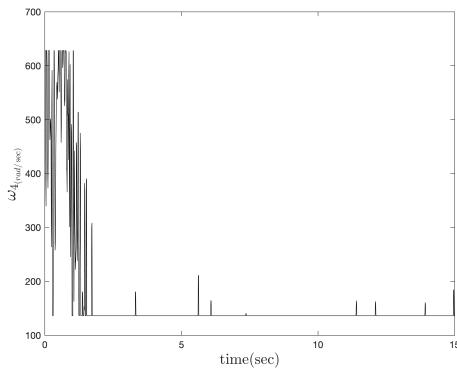
شکل ۲۳-۵: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)



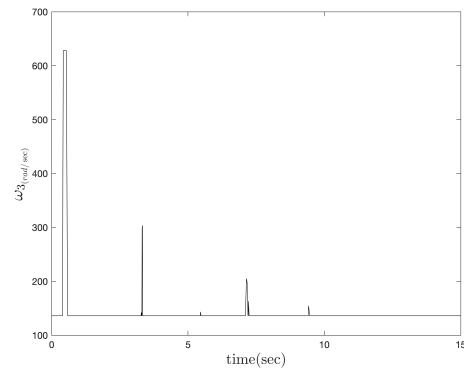
(ب) موتور شماره دو



(ا) موتور شماره یک



(د) موتور شماره چهار



(ج) موتور شماره سه

شکل ۵-۵: فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعییب و رودی صفر)

همانطور که از شکل ۲۳-۵ مشخص است، عملکرد کنترل کننده LQDG در برابر نویز اندازه‌گیری خوب است و خروجی نوسان و ندارد.

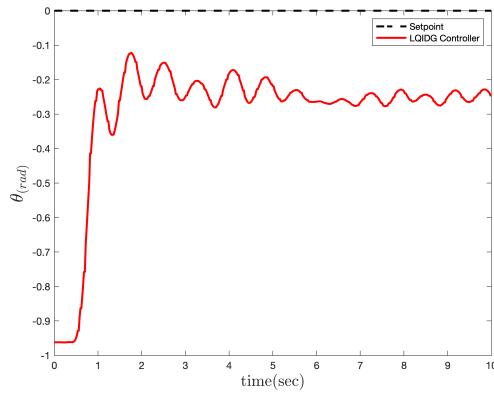
## فصل ۶

# پیاده‌سازی کنترل‌کننده روی استند سه درجه آزادی چهارپره

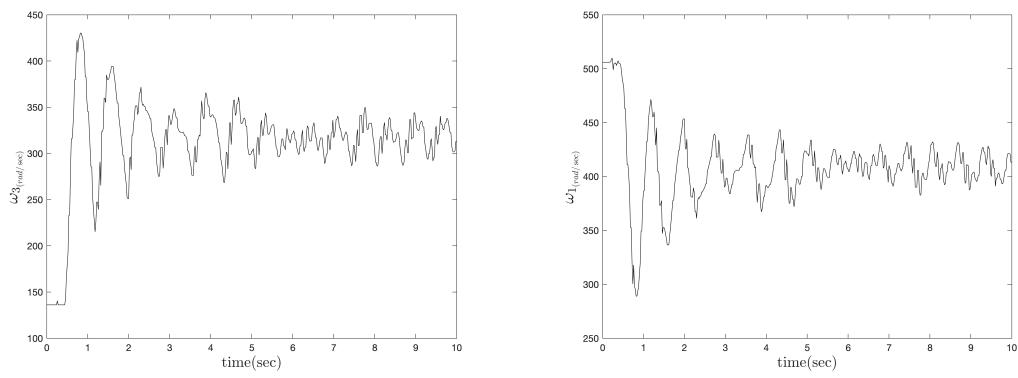
در بخش ۱-۵ ابتدا کanal رول استند چهارپره در حضور کنترل‌کننده‌ای LQR و در ادامه در حضور کنترل‌کننده‌ای LQDG و LQIDG شبیه‌سازی شد. سپس، کanal‌های رول-پیچ و رول-پیچ-یاو در بخش‌های ۱-۵ و ۲-۵ در حضور کنترل‌کننده LQIDG شبیه‌سازی شدند. در این فصل به پیاده‌سازی کنترل‌کننده روی استند سه درجه آزادی چهارپره پرداخته شده است. در بخش ۱-۶ به پیاده‌سازی کنترل‌کننده روی کanal پیچ پرداخته شده است. سپس، در بخش‌های ۲-۶ و ۳-۶ به پیاده‌سازی کنترل‌کننده روی کanal‌های رول-پیچ و رول-پیچ-یاو پرداخته شده است.

### ۱-۶ پیاده‌سازی کنترل کننده برای کanal پیچ

در پیاده‌سازی از ضرایب وزنی بهینه به دست آمده در قسمت شبیه‌سازی استفاده شده است.



شکل ۱-۶: عملکرد کنترل‌کننده LQR در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر)

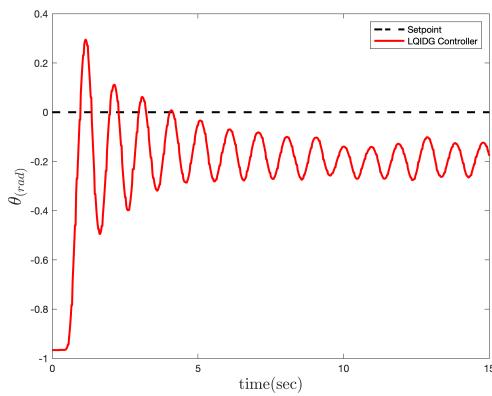


(ب) موتور شماره سه

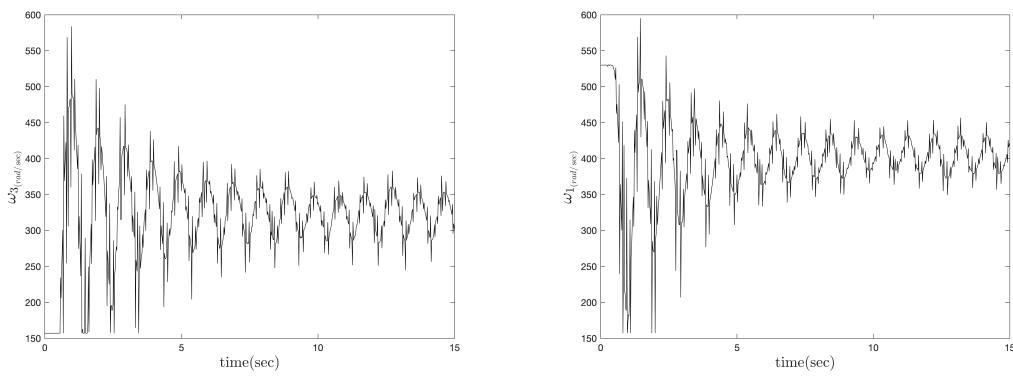
(ا) موتور شماره یک

شکل ۲-۶: فرمان کنترلی موتورهای یک و سه در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر)

در ادامه به پیاده‌سازی کنترل‌کننده LQDG بر رویه کانال پیچ استند سه درجه آزادی پرداخته می‌شود. در پیاده‌سازی از ضرایب وزنی بهینه به دست آمده در قسمت شبیه‌سازی استفاده شده است.



شکل ۳-۶: عملکرد کنترل‌کننده LQDG در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر)

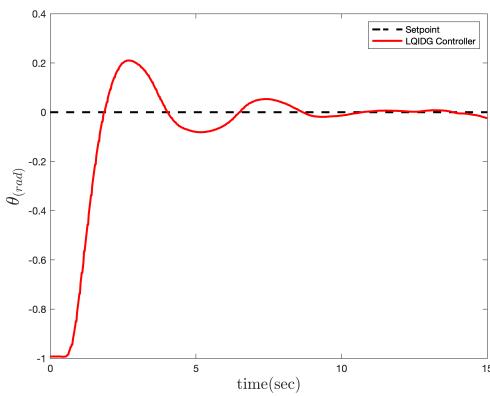


(ب) موتور شماره سه

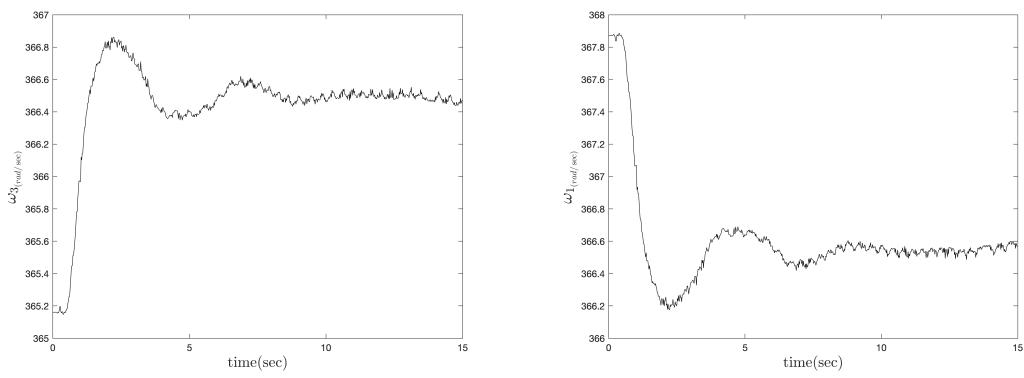
(آ) موتور شماره یک

شکل ۴-۶: فرمان کنترلی موتورهای یک و سه در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر)

در ادامه به پیاده‌سازی کنترل‌کننده LQIDG بر رویه کanal پیچ استند سه درجه آزادی پرداخته می‌شود. در پیاده‌سازی از ضرایب وزنی بهینه به دست آمده در قسمت شبیه‌سازی استفاده شده است.



شکل ۵-۶: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر)



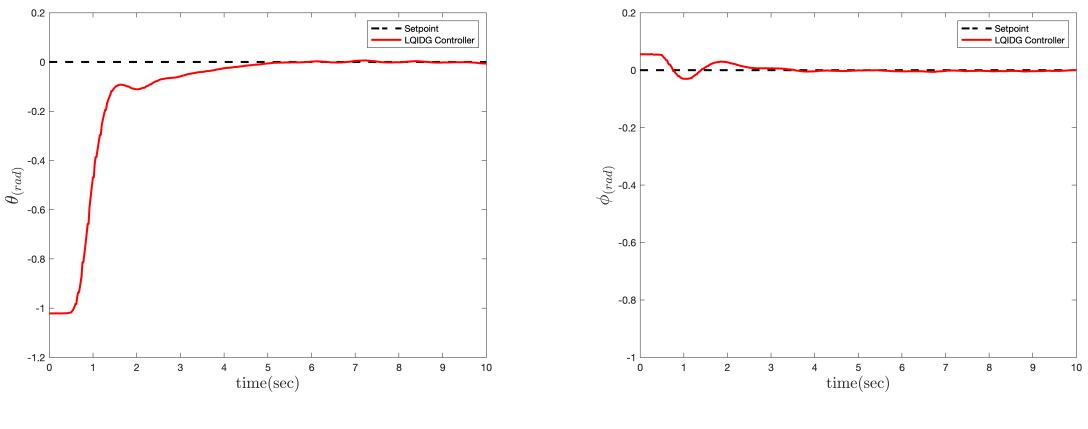
(ب) موتور شماره سه

(آ) موتور شماره یک

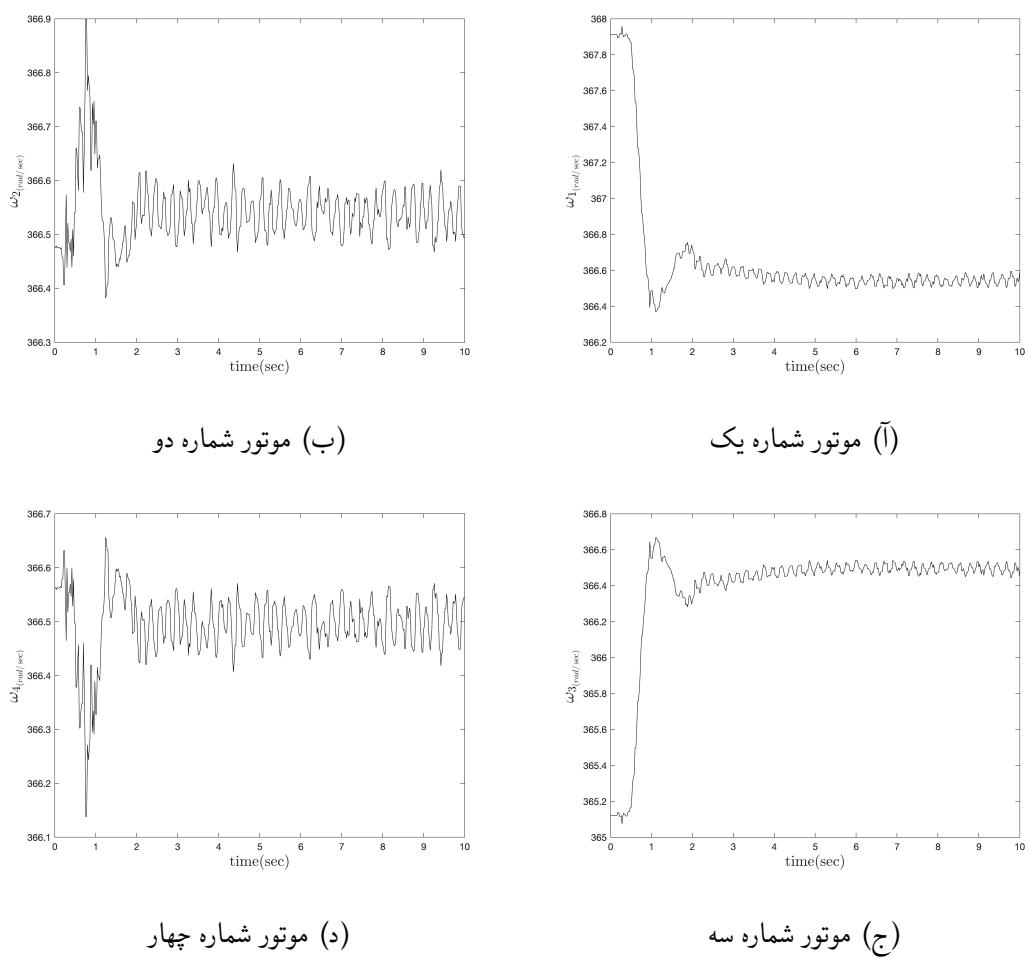
شکل ۶-۶: فرمان کنترلی موتورهای یک و سه در کنترل زاویه پیچ (تعقیب ورودی صفر)

## ۲-۶ پیاده‌سازی کنترل‌کننده برای کنترل کanal رول-پیچ

در ادامه به پیاده‌سازی کنترل‌کننده LQIDG روی کانال رول-پیچ استند سه درجه آزادی پرداخته شده است. در پیاده‌سازی از ضرایب وزنی بهینه به دست آمده در قسمت شبیه‌سازی استفاده شده است.



شکل ۷-۶: عملکرد کنترل کننده LQIDG در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر)



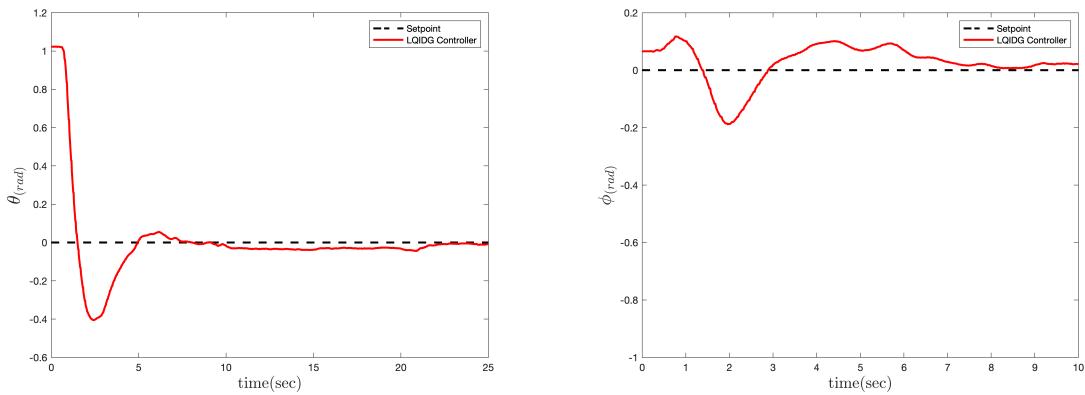
شکل ۸-۶: فرمان کنترلی موتورها در کنترل زاویه رول و پیچ (تعقیب ورودی صفر)

## ۳-۶ پیاده‌سازی کنترل‌کننده روی استند سه درجه آزادی

در بخش‌های ۱-۶-۳ و ۲-۶-۳، فرم خطی فضای حالت چهارپره و فرم خطی فضای حالت کانال‌های چهارپره محاسبه شده‌است. در بخش‌های ۱-۳-۶ و ۲-۳-۶ به ترتیب پیاده‌سازی به صورت سه کانال تک ورودی و چند ورودی انجام شده‌است.

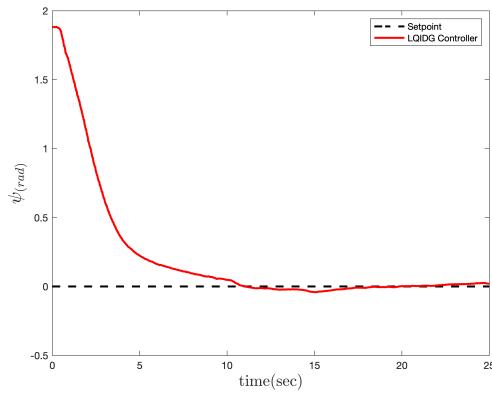
### ۱-۳-۶ پیاده‌سازی کنترل‌کننده به صورت سه کانال تک ورودی

در بخش ۳-۵ شبیه‌سازی سه درجه آزادی استند چهارپره در حضور کنترل‌کننده LQIDG انجام شد. در این بخش به پیاده‌سازی کنترل‌کننده LQIDG روی استند سه درجه آزادی پرداخته شده‌است. در پیاده‌سازی از ضرایب وزنی بهینه به دست آمده در قسمت شبیه‌سازی استفاده شده‌است.



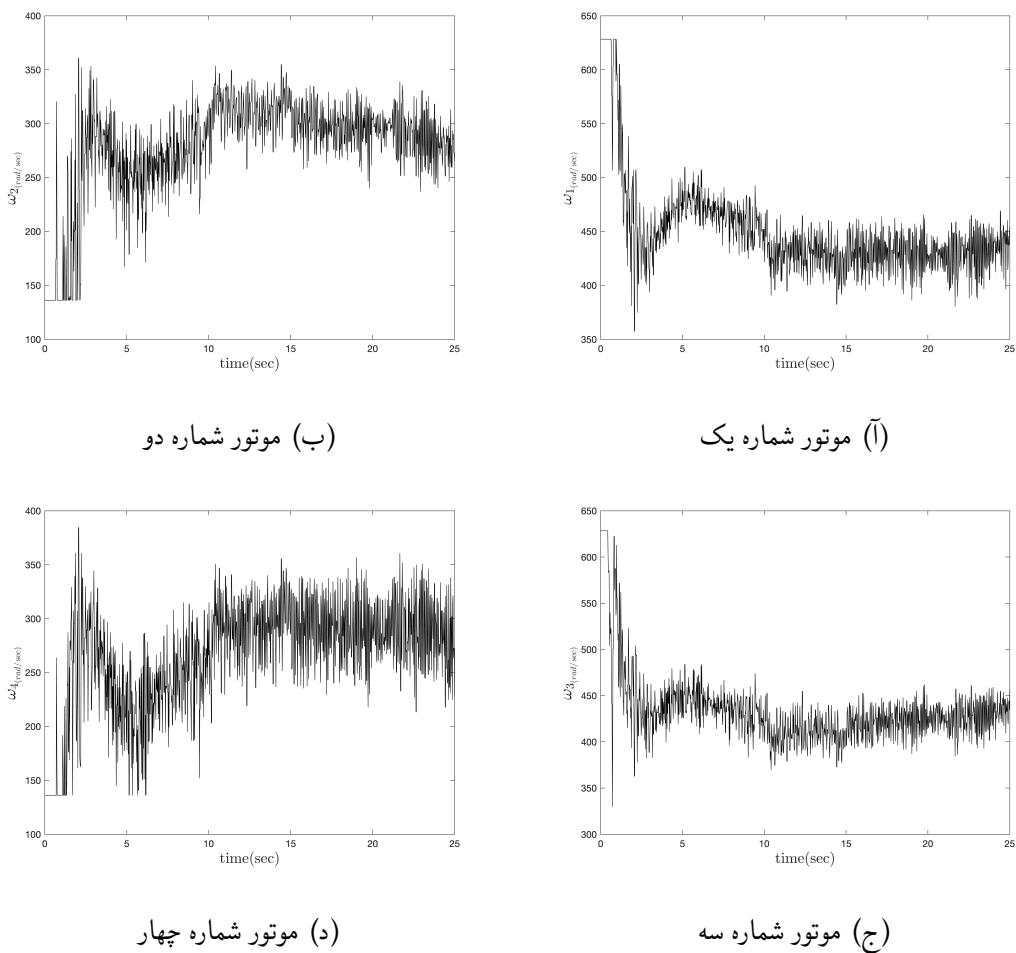
(ب) تغییرات زاویه پیچ

(ا) تغییرات زاویه رول



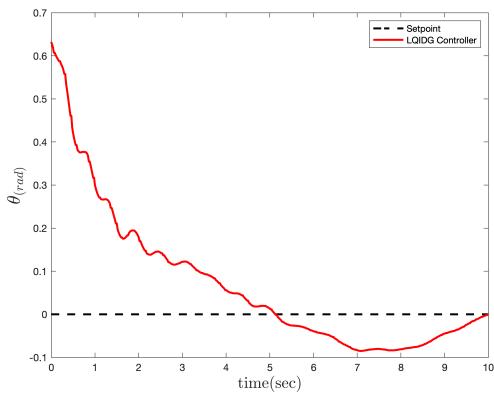
(ج) تغییرات زاویه یاو

شکل ۶-۹: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)

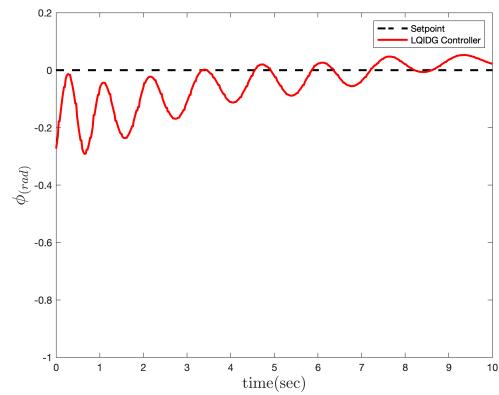


شکل ۶-۱۰: فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)

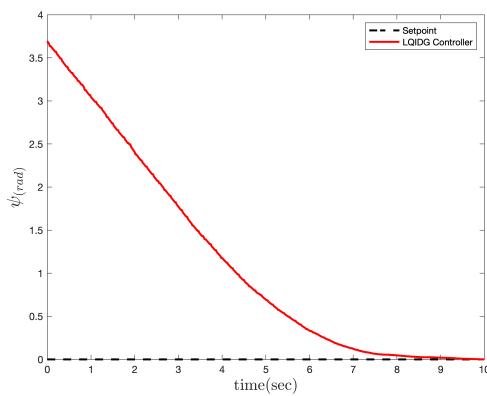
## ۲-۳-۶ پیاده‌سازی کنترل‌کننده به صورت چهار ورودی



(ب) تغییرات زاویه پیچ

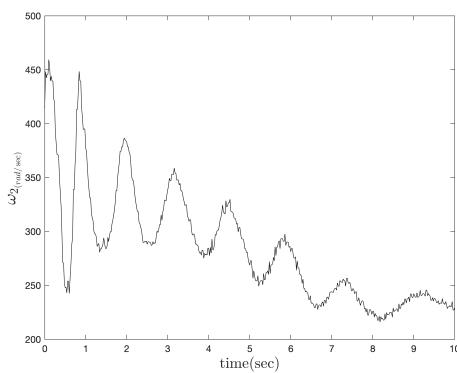


(ا) تغییرات زاویه رول

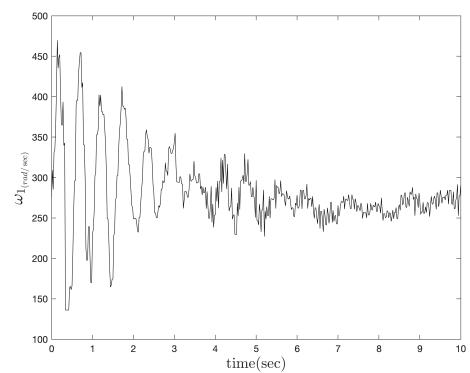


(ج) تغییرات زاویه یاو

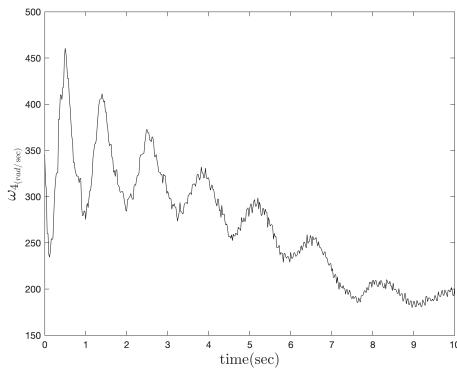
شکل ۱۱-۶: عملکرد کنترل‌کننده LQIDG در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)



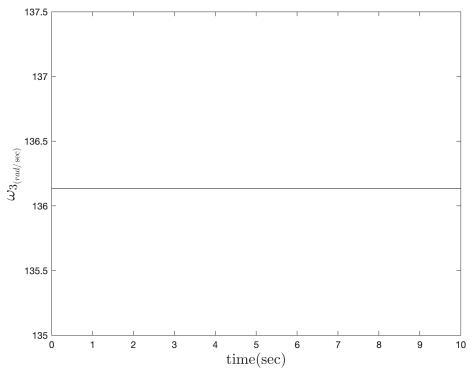
(ب) موتور شماره دو



(ا) موتور شماره یک



(د) موتور شماره چهار



(ج) موتور شماره سه

شکل ۶-۱۲: فرمان کنترلی موتورها در کنترل وضعیت (تعقیب ورودی صفر)

# مراجع

- [1] L. Sprekelmeyer. *These We Honor: The International Aerospace Hall of Fame*. 2006.
- [2] M. J. Hirschberg. A perspective on the first century of vertical flight. *SAE Transactions*, 108:1113–1136, 1999.
- [3] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on  $\text{se}(3)$ . In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5420–5425, 2010.
- [4] <http://gcrc.sharif.edu>. 3dof quadcopter, 2021. [Online; accessed November 2, 2021], Available at <https://cutt.ly/yYMvhYv>.
- [5] wired. the physics of drones, 2021. [Online; accessed June 8, 2021], Available at <https://www.wired.com/2017/05/the-physics-of-drones/>.
- [6] nobelprize.org. Jean tirole, 2021. [Online; accessed October 17, 2021], Available at <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2014/tirole/facts/>.
- [7] B. Djehiche, A. Tcheukam, and H. Tembine. Mean-field-type games in engineering. *AIMS Electronics and Electrical Engineering*, 1(1):18–73, 2017.
- [8] W. L. Brogan. *Modern control theory*. 1974.
- [9] J. Engwerda. Linear quadratic differential games: An overview. *Advances in Dynamic Games and their Applications*, 10:37–71, 03 2009.
- [10] R. Pordal. Control of a single axis attitude control system using a linear quadratic integral regulator based on the differential game theory.

- [11] P. Abeshtan. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using intelligent backstepping approach. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2016.
- [12] P. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [13] A. Sharifi. Real-time design and implementation of a quadcopter automatic landing algorithm taking into account the ground effect. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2010.
- [14] M. A. A. Bishe. Attitude control of a 3dof quadrotor stand using a heuristic nonlinear controller. January 2018.
- [15] E. Norian. Design of status control loops of a laboratory quadcopter mechanism and its pulverizer built-in using the automatic tool code generation. *MSc Thesis (PhD Thesis)*, 2014.
- [16] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Instrumentation and controls series. Prentice Hall, 2010.
- [17] A. Karimi, H. Nobahari, and P. Siarry. Continuous ant colony system and tabu search algorithms hybridized for global minimization of continuous multi-minima functions. *Computational Optimization and Applications*, 45(3):639–661, Apr 2010.



Sharif University of Technology  
Department of Aerospace Engineering

Bachelor Thesis

**Control of a Three Dimension of Freedom  
Quadcopter Stand Using a Linear Quadratic  
Integral Regulator Based on the Differential Game  
Theory**

By:

**Ali BaniAsad**

Supervisor:

**Dr. Nobahari**

July 2022