Übungsblatt 7

Richardo Adrian Budianto 583669 Junhyuk Ko 531806
Ali Bektas 588063

December 8, 2019

Aufgabe 21

a)

Finden Sie $X = max\{T_1, \ldots, T_n\}$.

Um Max zu untersuchen fragt man jedesmal nach der Wkt dass alle Zufallsvariablen Werte weniger als t haben.

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t) \ldots P(T_n \leq t) \\ &= (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 t}) \cdot \cdots \cdot (1 - e^{-\lambda_n t}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \cdot t} \end{aligned}$$

b)

Finden Sie $Y = min\{T_1, \ldots, T_n\}$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq t) &= P(T_1 \geq t) \cdot P(T_2 \geq t) \cdot \cdots \cdot P(T_n \geq t) \\ &= (1 - P(T_1 \leq t)) \cdot (1 - P(T_2 \leq t)) \cdot \cdots \cdot (1 - P(T_n \leq t)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i \cdot t} \end{aligned}$$

Beachte dass sich daraus ergibt dass Y wieder exponentialverteilt ist. Dementsprechend ist $E(Y)$

$$Y = e^{-t(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)} \rightarrow E\mathbf{Y} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

c)

$$E\mathbf{X} = E[max\{T_1, \ldots, T_n\}] = E\mathbf{T}_1 = \frac{1}{\lambda}$$

d)

$$
\begin{aligned}
P(X \le 15) &= (1 - e^{-\frac{1}{20}})^5 \\
&= (1 - e^{-3}4)^5 \\
&\approx 0.0408 \\
P(Y \le 15) &= (1 - e^{-5 \cdot \frac{1}{20} \cdot 15}) \\
&= 1 - e^{-15}4 \qquad\qquad\qquad\qquad \approx 0.9764
\end{aligned}
$$

Aufgabe 22

a)

Da *exp* überall differenziebar ist und $(e^x)' \neq 0$, ist ln auch differenzierbar.Somit ist g differenzierbar. Deshalb darf man den Transformationssatz anwenden.

$$
\begin{aligned}
h(y) &= \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(e^{-\lambda y})|} \\
&= \frac{f(e^{-\lambda y})}{|-\frac{1}{\lambda \cdot e^{-\lambda y}|}}
\end{aligned}
$$

Bevor wir die endgültige Antwort liefern brauchen wir zu untersuchen wann $f(x) = 1$ gilt.

$$
\begin{aligned}
O \le e^{-\lambda \cdot y} &< 1 \\
ln(0) \le -\lambda \cdot y &< ln(1) \\
-\infty \le -\lambda \cdot y &< 0 \\
\infty > y &> 0
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$
h(y) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y} & , \text{falls} y > 0, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}
$$

b)

$$g(U) = \sqrt{-\frac{1}{\lambda} \cdot ln(U)}$$
$$g^{-1}(y) = e^{-\lambda \cdot y^2}$$
$$g'(U) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{\lambda} \cdot ln(U)}} \cdot (-\frac{1}{\lambda U})$$
$$h(y) = \frac{f(e^{-\lambda y^2})}{|\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{\lambda} - \lambda y^2}} \cdot (-\frac{1}{\lambda \cdot e^{-\lambda y^2}})|}$$

Wann gilt $f(x) = 1$?

$$0 \leq e^{-\lambda y^2} < 1$$
$$-\infty < -\lambda y^2 < 0$$
$$\infty > y^2 > 0$$
$$y > 0$$

Dann gilt:

$$h(y) = \begin{cases} 2 \cdot y \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y^2}, fally > 0 \\ 0, sonst. \end{cases}$$