0.1 Charakteristische Funktionen

Nützlich beim Zentralen GWS.

Sei X Zufallsvariable **??** mit Dichtefunktion f_X fall(X stetig) oder Wkt.funktion p_j (falls X diskret).

Definition 0.1. *Charakteristische Funktion von X*

$$\phi_X(t) := \boldsymbol{E}e^{itX} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx & \text{, falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} p_j & \text{, falls } X \text{ diskret.} \end{cases}$$

Die Funktion $\phi_X(t)$ ist die Fourier-Transformierte von f_X

Theorem 1.

1. *$\phi_X(t)$ ist in $-\infty < t < \infty$ gleichmäßig stetig.*
2. *Die Zufallsvariable $Y = aX + b$ hat die char. Funktion*

$$\phi_Y(t) = \phi_X(at)e^{ibt}$$

3. *$\phi_X(t)$ ist reelwertig $\iff$ X bzgl. x=0 symmetrisch ist.*

Theorem 2. *Multiplikationssatz Seien die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig mit den charakteristischen Funktionen ϕ_1 und ϕ_2. Dann hat die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ die charakteristische Funktion $\phi_1 \cdot \phi_2$.*

Proof.

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \mathbf{E}e^{it(X_1+X_2)} = \mathbf{E}e^{itX_1} \cdot \mathbf{E}e^{itX_2}$$

□

Theorem 3. *Eindeutigkeitssatz Die Beziehung $F_x \iff \phi_X$ ist eineindeutig. Für X stetig gilt:*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \inf_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t)dt$$

Für X diskret gilt:

$$p_j = \lim_{T \to \infty}$$