Übungsblatt 10

Richardo Adrian Budianto 583669 Junhyuk Ko 531806
Ali Bektas 588063

January 13, 2020

Aufgabe 30

a)

$$\lim_{t_2 \to \infty} F(t_1, t_2) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t_1}$$
$$\lim_{t_1 \to \infty} F(t_1, t_2) = 1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t_2}$$

b)

$\rightarrow$

Seien T_1, T_2 unabhängig und exponentialverteilt.

$$F(t_1, t_2) = F_{T_1}(t_1) * F_{T_2}(t_2)$$
$$\rightarrow 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t_1} - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t_2} + e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_3 max(t_1,t_2)} = (1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t_1})(1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t_2})$$
$$= 1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t_2} - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t_1} + e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_3 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_3 t_2}$$
$$\rightarrow e^{-\lambda_3 max(t_1,t_2) = e^{-\lambda_3(t_1+t_2)}} \forall t_1, t_2 > 0$$
$$\lambda_3 = 0$$

$\leftarrow$

Sei $\lambda_3 = 0$. Wir wollen zeigen : T_1 und T_2 sind unabhängig und exponentialverteilt.

$$1 - e^{-(\lambda_1)t_1} - e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2} =: F(t_1, t_2)$$
$$\lim_{t_2 \to \infty} F(t_1, t_2) * \lim_{t_1 \to \infty} F(t_1, t_2) = (1 - e^{-\lambda_2 t_2})(1 - e^{-\lambda_1 t_1})$$
$$= F(t_1, t_2)$$

Aufgabe 31

a)

X/Y	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
-1	0	0.01	0.09	0.1	0.2
0	0.6	0.03	0.0	0.07	0.7
1	0	0.06	0.01	0.03	0.1
1	0	0.06	0.01	0.3	0.1
$p_{\cdot j}$	0.6	0.1	0.1	0.2	1

b)

$$EX = -1(0.2) + 0 + 1 * 0.1 = -0.1$$
$$EY = 1 * (0.6) + 2 * (0.1) + 3 * (0.1) + 4 * (0.2) = 1.9$$

$$XY = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.09 & 0.01 & 0 & 0.7 & 0 & 0.06 & 0.01 & 0.03 \end{pmatrix}$$

$$EXY = -0.4 - 0.27 - 0.02 + 0.12 + 0.03 + 0.12 = -0.42$$

$$cov(X,Y) = EXY - EX * EY = -0.23$$

$$\sqrt{\sigma_X^2} = 0.2(-1+0.2)^2 + (0.7)(0+0.1)^2 + \cdots = 0.5385$$
$$\sqrt{\sigma_Y^2} = 1.22$$

$$\varrho(X,Y) = \frac{-0.23}{(0.54)(1.22)} = -0.35$$

Aufgabe 32

Als Nebenrechnung berechnen wir $E(V^2)$, was in beiden Teilaufgaben benutzt wird.

$$E(V^2) = \int_0^1 x^2 \mathbb{1} dx = \frac{1}{3}$$

a)

$$
\begin{aligned}
cov(UV, V) &= E(UVV) - E(UV)E(V) \\
&= E(U)E(V^2) - E(U)E(V)E(V) \\
&= \frac{1}{2} * \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

Der Grund warum $E(UVV) = E(U)E(V^2)$ ist , beruht auf dem Satz ,der besagt: Wenn zwei Zufallsgrößen unabhängig sind , so sind alle ihrer Transformierten.

b)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{UV} &= (E(UV - E(UV))^2 = E(U^2V^2 - 2UV * E(UV) + E(UV)^2))^{\frac{1}{2}} \\
&= (E(U^2) * E(V^2) - 2E(U) * E(V) * E(E(UV)) + E(E(U^2) * E(V^2))^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{9}^2 - 2 * \frac{1}{2}^2 * \frac{1}{4} + \frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.312 \\
\sigma_V &= \frac{1}{\sqrt{12}} \\
\varrho(UV, V) &= \frac{\frac{1}{24}}{0.312 * \frac{1}{\sqrt{12}}} = 0.463
\end{aligned}
$$