Übungsblatt 8

Ali Bektas 588063 Julian Kremer 562717
Ruben Dorfner 550204

8. Januar 2020

Aufgabe 39

Idee : In jedem Schritt führt das Flippen eines Literals in einer **unerfüllten** Klausel dazu , dass wir uns entweder (mit einer größeren Wkt. 'mehr dazu unten') h annähern oder davon wegbewegen.

i)

$t_0 = 0$ lässt sich wie folgt interpretieren : Wenn sich unsere Antwort von einer erfüllenden Belegung durch keine Variablen unterscheidet , dann ist die erwartete Anzahl an Schleifendurchläufen Null , was ja der Fall ist , denn wir haben keine zu erfüllende Klauseln , d.h die gesamte Formel ist erfült , woraus folgt dass While-Loop nicht durchlaufen wird.

ii)

$t_n \leq t_{n-1} + 1$: Wenn alle Variablen falsch belegt sind , dann sind wir nach einem Schritt näher an die erfüllende Belegung , weil es einfach nicht möglich ist mehr als die gesamte Anzahl von Variablen (n) falsche Belegungen zu haben.

iii)

Da wir jedesmal eine falsche Klausel wählen und da die falsche Klauseln niemals 2 richtig gewählte Literalen enthalten können , hat man eine Wkt. von mehr als $\frac{1}{2}$ dass man nach diesem Schritt näher an die Lösung kommt. Wir betrachten die Random-Walk mithilfe von folgender Formel:

$$t_i = p_{i,i-1}(1 + t_{i-1}) + p_{i,i+1}(1 + t_{i+1})$$

wobei $p_{i,i-1}$ die Wkt. ist dass wir ein falsch belegtes Literal wählen. Wir setzen $p_{i,i-1} = \frac{1}{2} + \epsilon$, mit $\frac{1}{2} \geq \epsilon > 0$.

$$
\begin{aligned}
t_i &= (\frac{1}{2}+\epsilon)(t_{i-1}+1)+(\frac{1}{2}-\epsilon)(t_{i+1}+1) \\
&= 1+\frac{1}{2}t_{i-1}+\frac{1}{2}t_{i+1}+\underbrace{\epsilon t_{i-1}-\epsilon t_{i+1}}_{<0} \\
&\leq 1+\frac{1}{2}t_{i-1}+\frac{1}{2}t_{i+1}
\end{aligned}
$$

iv)

Wir machen die Ungleichungen aus i,ii,iii zu Gleichungen. Die daraus gebildete Funktion stellt das Maximum dar. Dann

$$
\begin{aligned}
&2t(1)-2 = t(0)+t(2) \\
&2t(2)-2 = t(1)+t(3) \\
&\vdots \rightarrow 2(t(1)+\dots+t(n-1)-(n-1)) = t(0)+t(1)+2(t(2)+t(3)+\dots) \\
&\rightarrow t(1)-2(n-1)+t(n-1) = t(n) = t(n-1) \\
&\rightarrow t(1)-2(n-1) = 1
\end{aligned}
$$

Dadurch dass wir oben $t(1) = 2n-1$ einsetzen erhalten wir im Allgemeinen $t_i = i(2n-i)$ und dadurch haben wir das Gesuchte.

Damit eine Eingabe von PM akzeptiert wird muss die Akzeptanzwkt über $\frac{1}{2}$ liegen. Um zu argumentieren dass die Laufzeit dann polynomiell wäre , verwenden wir die Markov-Ungleichung. Aus iv folgt dass die erwartete Anzahl von Schleifendurchläufen $\leq n^2$ist. Dann folgt:

$$P(X \geq \frac{1}{2}) \leq \frac{n^2}{\frac{1}{2}} = 2n^2$$