Übungsblatt 9

Ali Bektas 588063 Julian Kremer 562717
Ruben Dorfner 550204

15. Januar 2020

Aufgabe 42

a)

Sei $A \in \oplus C$ mittels einem Polynom p und einer p-balancierten Sprache $B \in C$. Weiter gelte $A' \leq_m^{log}$ A mittels einer FL-Fkt. f. Nach Lemma 86 existieren Polynom q und q-balancierte Sprache $B' \in C$ mit:

$$\#B'(x)/2^{q(|x|)} = \#B(f(x))/2^{p(|f(x)|)}$$

Nun folgt :

$$x \in A' \iff f(x) \in A \iff \#B(f(x)) \equiv_2 1 \iff \#B'(x) \equiv_2 1$$

Woraus folgt $A' = \oplus B'$.

b)

$\subset$

Seien p und q Polynome , $A \in \oplus \oplus C$, $A' \in \oplus C$ p-balancierte und $A'' \in \oplus \oplus C$ q-balancierte Sprachen mit $A = \oplus A', A' = \oplus A''$.Wir wollen zeigen : $A \in \oplus C$. Dazu betrachte die Sprache

$$B = \{x\#yz|x\#y\#z \in A'', y \in \{0,1\}^{p(|x|)}, z \in \{0,1\}^{q\cdot(p+1)(|x|)+q(1)}\}$$

und die Funktion f , die an der $p(|x|)+1$-ten Stelle ein # schreibt. Da Zählen der $p(|x|)+1$-ten Stelle in FL (wie von Unar zu Binär) ist gilt , dass $f \in FL$. Somit gilt wegen der Abgeschlossenheit von C unter $\leq_m^{log}$ und $A'' \in C$: $B \in C$.Da B aus den Wörtern besteht , die die Konkatinierung von y und z (wie oben definiert) als Zeuge haben , gibt es für jedes Wort $x \in A$ $\#A'(x)*A''(x\#y)$ viele , also ungerade viele , paarweise verschiedene Zeugen (weil $x \in A \rightarrow \#A'(x) \equiv_2 1$ und $x\#y \in A' \rightarrow \#A''(x\#y) \equiv_2 1$). A enthält also genau die Elemente , für die es gilt : $x \in A \rightarrow \#A'(x) \equiv_2 1$ und $x\#y \in A' \rightarrow \#A''(x\#y) \equiv_2 1$).

Jetzt argumentieren wir , warum $\oplus B$ genau die Elemente enthält die in A sind, indem wir zeigen dass die restlichen Fälle zu einem Widerspruch führen : Angenommen gäbe es für eine Präfix $x \in A$ gerade viele Zeugen z ($x\#y\#z \in A''$). Es gilt:

$$x \in A \to \#A'(x) \equiv_2 1 \text{ und } x\#y \in A' \to \#A''(x\#y) \equiv_2 1$$
$$\#B(x) \equiv_2 0 \to x \notin A \lightning$$

$\supset$

Seien p Polynom , $A \in \oplus C'$ eine Sprache und $A' \in C$ eine p-balancierte Sprache mit $A = \oplus A'$.Wir wollen zeigen : $A \in \oplus \oplus C$. Dazu betrachte die Sprache

$$B = \{x\#y\#i | x\#y \in A' i \in \{1\}^{r(|x\#y|)}\}$$

wobei i ein beliebiges Polynom ist. Es ist leicht zu sehen dass $A' = \oplus B$ ist. Sei f diesmal eine Funktion die alle Einsen nach dem letzten #-Zeichen der Eingabe x entfernt. Dadurch gilt $B \leq A$. Aus diesen Tatsachen folgt $A = \oplus A' = \oplus \oplus B$

c)

Dieser Teil ist vollkommen analog zu b, weshalb wir darauf verzichten , denselben Beweis zu führen.

d)

$\subset$

Der Beweis dieses Teils ist auch analog zu b

$\supset$

In diesem Teil ist die konsturierte Sprache anders zu definieren. Betrachte für diesen Fall die Sprache

$$B = \{x\#y\#i | x\#y \in A' i \in \{1, \underbrace{0}_{\text{der Unterschied}}\}^{r(|x\#y|)}\}$$

Der Rest des Beweises erfolgt wiederum analog.