Übungsblatt 3

Ali Bektas 588063 Julian Kremer 562717
Ruben Dorfner 550204

November 13, 2019

Aufgabe 16

Wir zeigen zunächst die Aussage $A \in NE \Leftrightarrow NP$.
$\Longrightarrow$: Sei A eine Sprache $\subset \{0,1\}^*$. Es gelte $A \in NE$.

Proof.

$$A \in NE \Leftrightarrow \exists N \in TM_{NTM} : N(x), max\{i|K_{start} \rightarrow_N^i K_{end}\} \leq 2^{O(|x|)}$$

Wir betrachten , was es für ein Wort aus tally(A) bedeutet , in NP-Time entschieden zu werden. Sei n die Länge eines beliebigen Wortes aus A. Dann , zum Teil wegen der vorangestellten Eins und zum Teil wegen des exponentiellen Wachstums der Länge bei der Umwandlung von Binär- zu Unärdarstellung , lässt sich die Länge des Wortes tally(x) bzgl. x wie folgt erklären:

$$2^{|x|} \leq |tally(x)| \leq 2^{|x|+1} \tag{1}$$

Wir wollen zeigen $tally(A) \in NP$. Dann bedeutet das in Anbetracht des (1) , dass es eine NTM N' geben muss , so dass sie tally(A) innerhalb von $NTIME(poly(n))$ entscheidet. Wir schreiben diese Aussage bzgl (1) um zu: $NTIME(poly(2^{|x|+1})) = NTIME(2^{c \cdot |x|+c}) = NTIME(2^{O(|x|)})$ wobei $x \in A$.

$A \in NTIME(2^{O(|x|)})$ ist die linke Seite der Aussage. Eine Maschine die die Sprache entscheidet , steht also zur Verfügung. Wir müssen nur noch zeigen dass es eine Routine gibt , die eine Eingabe in Form von tally(A) zu Binär umwandelt und diese in $NTIME(2^{O(|x|)}) - time$ schafft :

Unär $\rightarrow$ Binär

Um die Zeitbeschränktheit von einem solchen zu beurteilen schauen wir uns die 2^0-te Stelle der Zahl , weil ihre Überquerungsfolge am längsten sein wird. Beim Hochzählen wird die erste Stelle

$$2\sum_{i=1}^{\lceil log|x|\rceil}\sum_{j=1}^{i} j$$

mal überquert.

$$\begin{aligned}&= 1+1+2+1+2+3+\cdots+1+2+...+\lceil log|x|\rceil\\&= 2(\lceil logn\rceil+(\lceil logn\rceil-1)\cdot 2+...)\\&= O(log(n))\end{aligned}$$

Die andere Richtung ist vollkommen analog und die Aussage $A \in E \Leftrightarrow tally(A) \in P$ ist nur eine schärfere Form der bewiesenen Aussage. Wir zeigen nur noch dass die Maschine die ein Wort aus A zu tally(A) umwandeln soll ,das innerhalb Zeit $O(poly(n))$ Zeit schaffen kann .

Binär $\rightarrow$ Unär

Sei N eine 3-NTM. Die Arbeitsweise zur Umwandlung ist wie folgt:

Initialisierung: Kopf des 1. Bandes bewegt sich an das Ende der Eingabe. Kopf des 2. Bandes schreibt eine 1.

Wenn der Kopf am ersten Band eine 1 liest , dann schreibt er soviel Nullen an das 3. Band wie es am 2. Band gibt , wenn nicht dann schreibt er nichts. Wenn der Kopf am Band 1 sich nach links bewegt , dupliziert sich die Anzahl der Nullen am 2 Band.

Hierbei ist die Duplizierung die zeitaufwändigste Operation und sie kostet $\sum_{i=1}^{n} i^2 = O(n^3)$ Also die Umwandlung gelingt ihr in poly. Zeit.

Schluss

Nun sei A so eine Sprache dass für sie gilt : $A \in NE \wedge A \notin E$. Dann:

$$((A \notin E \implies tally(A) \notin P) \wedge (A \in NE \implies tally(A) \in NP)) \implies P \neq NP$$

$\square$