علی بیجاری - علی موحدی

حل تمرین سری دوم:

①

$$H=\sum_{i=1}^{4} S_i \cdot S_{i+1} = \sum_{i=1}^{4} S_{z(i)} \cdot S_{z(i+1)} + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2}\left(S_{+i} S_{-(i+1)} + S_{-i} S_{+(i+1)}\right)$$

عناصر کلاس بخش S_z:

2: $|++++\rangle$

1: $|+++-\rangle$ $|++-+\rangle$ $|+-++\rangle$ $|-+++\rangle$

0: $|++--\rangle$ $|--++\rangle$ $|+--+\rangle$ $|-++-\rangle$ $|-+-+\rangle$ $|+-+-\rangle$

-1: $|---+\rangle$ $|--+-\rangle$ $|-+--\rangle$ $|+---\rangle$

-2: $|----\rangle$

$$H=(S_{1z}S_{2z}+S_{2z}S_{3z}+S_{3z}S_{4z}+S_{4z}S_{1z}) + \frac{1}{2}\{(S_1^+S_2^- + S_1^-S_2^+) + (S_2^+S_3^- + S_2^-S_3^+) + (S_3^+S_4^- + S_3^-S_4^+) + (S_4^+S_1^- + S_4^-S_1^+)\}$$

for $S_z=2$:

$$H|++++\rangle = \{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})\}|++++\rangle + \frac{1}{2}\{(|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle)\} = |++++\rangle + \tfrac{1}{2}|0\rangle$$

for $S_z=1$:

$$H|+++-\rangle = \{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})\}|+++-\rangle + \frac{1}{2}\{(|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|+++-+\rangle) + (|-+++\rangle+|0\rangle)\} = 0|+++-\rangle + \frac{1}{2}\{|++-+\rangle + |-+++\rangle\}$$

$$H|++-+\rangle = \{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{2})(+\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})\}|++-+\rangle + \frac{1}{2}\{(|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|+--++\rangle) + (|+++-\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle)\} = 0|++-+\rangle + \frac{1}{2}\{|+-++\rangle + |+++-\rangle\}$$

$H|-++\rangle = \{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\}|-++\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|+-++\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |+++-\rangle)\}$

$= 0|-+++\rangle + \frac{1}{2}\{|+-++\rangle + |+++-\rangle\}$

$H|+-++\rangle = \{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\}|+-++\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|0\rangle + |-+++\rangle) + (|+-+-\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |0\rangle)\}$

$= 0|+-++\rangle + \frac{1}{2}\{|-+++\rangle + |++-+\rangle\}$

for $S_z = 0$:

$H|+-+-\rangle = \{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\}|+-+-\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|0\rangle + |-++-\rangle) + (|++--\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |+--+\rangle) + (|0\rangle + |--++\rangle)\}$

$= -1|+-+-\rangle + \frac{1}{2}\{|-++-\rangle + |++--\rangle + |+--+\rangle + |--++\rangle\}$

$H|-+-+\rangle = \{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\}|-+-+\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|+--+\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |-++-\rangle) + (|-++-\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |+--+\rangle)\}$

$= 0|-+-+\rangle + \frac{1}{2}\{|+--+\rangle + |-++-\rangle\}$

$H|-+-+\rangle = \{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\}|-+-+\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|+--+\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |--++\rangle) + (|-++-\rangle + |0\rangle) + (|0\rangle + |++--\rangle)\}$

$= -1|-+-+\rangle + \frac{1}{2}\{|+--+\rangle + |--++\rangle + |-++-\rangle + |++--\rangle\}$

$H|+--+\rangle = \{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\}|+--+\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|0\rangle+|-+-+\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle) + (|+--+\rangle+|0\rangle+(|0\rangle+|0\rangle)\}$

$= 0|+--+\rangle + \frac{1}{2}\{|-+-+\rangle + |+-+-\rangle\}$

$H|--++\rangle = \{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\}|--++\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|0\rangle+|0\rangle) + (|-+-+\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|+--+\rangle)\}$

$= 0|--++\rangle + \frac{1}{2}\{|-+-+\rangle + |+-+-\rangle\}$

$H|++--\rangle = \{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\}|++--\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|+--+\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle) + (|+--+\rangle+|0\rangle)\}$

$= 0|++--\rangle + \frac{1}{2}\{|+--+\rangle + |-++-\rangle\}$

for $S_z = -1$:

$H|---+\rangle = \{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\}|---+\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|0\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle) + (|--+-\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|+---\rangle)\}$

$= 0|---+\rangle + \frac{1}{2}\{|--+-\rangle + |+---\rangle\}$

$H|--+-\rangle = \{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\}|--+-\rangle$

$+\frac{1}{2}\{(|0\rangle+|0\rangle) + (|-+--\rangle+|0\rangle) + (|0\rangle+|---+\rangle) + (|0\rangle+|0\rangle)\}$

$= 0|--+-\rangle + \frac{1}{2}\{|+--\rangle + |---+\rangle\}$

$$H|-++-\rangle = \left\{\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right\}|-++-\rangle$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{(|++--\rangle+|10\rangle)+(|10\rangle+|--++\rangle)+(|10\rangle+|0\rangle)+(|10\rangle+|10\rangle)\right\}$$

$$= 0|-++-\rangle+\tfrac{1}{2}\left\{|++--\rangle+|--++\rangle\right\}$$

$$H|+---\rangle = \left\{\left(+\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\right\}|+---\rangle$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{(|10\rangle+|-+--\rangle)+(|10\rangle+|10\rangle)+(|10\rangle+|10\rangle)+(|---+\rangle+|10\rangle)\right\}$$

$$= 0|+---\rangle+\tfrac{1}{2}\left\{|-+--\rangle+|---+\rangle\right\}$$

for $S_z=-2$:

$$H|----\rangle = \left\{\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right\}|----\rangle$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{(|10\rangle+|10\rangle)+(|10\rangle+|10\rangle)+(|10\rangle+|10\rangle)+(|10\rangle+|10\rangle)\right\} = 1|----\rangle+\tfrac{1}{2}|10\rangle$$

---

for $S_z=2 \Rightarrow$ $\langle++++|$ (ستون) $|++++\rangle$ (سطر) $= [1]$

for $S_z=1 \Rightarrow$

	$\lvert+++-\rangle$	$\lvert++-+\rangle$	$\lvert+-++\rangle$	$\lvert-+++\rangle$
$\langle+++-\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\langle++-+\rvert$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$\langle+-++\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\langle-+++\rvert$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

for $S_z=-2 \Rightarrow$ $\langle----|$ $|----\rangle = [1]$

for $S_z = -1$: $\Rightarrow$

	$\lvert ---+\rangle$	$\lvert --+-\rangle$	$\lvert -+--\rangle$	$\lvert +---\rangle$
$\langle ---+\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\langle --+-\rvert$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$\langle -+--\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\langle +---\rvert$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

for $S_z = 0$: $\Rightarrow$

	$\lvert ++--\rangle$	$\lvert +-+-\rangle$	$\lvert +--+\rangle$	$\lvert -++-\rangle$	$\lvert -+-+\rangle$	$\lvert --++\rangle$
$\langle ++--\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\langle +-+-\rvert$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\langle +--+\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\langle -++-\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\langle -+-+\rvert$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
$\langle --++\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0