随机变量及其分布

§3.1 随机变量的概念

随机试验E，样本空间S

若对S中的每个基本事件e都有唯一的实数值X(e)与之对应，则称X(e)为随机变量，简记为X.

随机变量所能取的值

- 有限个 / 可列无穷多个($\aleph_0$) — 离散型随机变量
- 连续充满一个区间 — 连续型随机变量

§3.2 离散型随机变量

只能取有限个值或可列无穷多个值的随机变量X称为离散型随机变量

通常要了解其取每一个可能值的概率，即：

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

称此式为离散型随机变量X的概率分布列，简称分布列/分布律，也可用表格表示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

常见分布列：

① 0-1分布（伯努利分布，两点分布）

X	0	1
p	$1-p$	p

称X服从0-1分布

记作 $X \sim B(1,p)$

② 二项分布

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

$k=0,1,2,\cdots,n$，$0<p<1$

称X服从二项分布，记作 $X \sim B(n,p)$

③ 泊松分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \lambda>0,$$

$k=0,1,2,\cdots$

称X服从参数为λ的泊松分布，记作 $X \sim P(\lambda)$

④ 几何分布

$$P(X=k)=(1-q)^{k-1}p,$$

$k=1,2,\cdots$，$0<p<1$

称X服从参数为p的几何分布

记作 $X \sim G(p)$

在伯努利试验中，经独立重复试验直到首次出现成功为止，所需试验次数X服从几何分布.

几何分布具有无记忆性：

$$P(X>n+m \mid X>n)=P(X>m)$$

⑤ 超几何分布

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,\cdots,l$$

其中 $l=\min\{M,n\}$,

规定当 $i>m$ 时, $C_m^i=0$

则称X服从超几何分布,

记作 $X\sim H(n,N,M)$

$\begin{cases}\text{二项分布}\rightarrow\text{放回抽样}\\ \text{超几何分布}\rightarrow\text{不放回抽样}\end{cases}$

若n为取定正整数且 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{M}{N}=p,0<p<1$

则 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$

故当N充分大(一般取 $n\le 0.1N$)时,可使用二项分布来近似超几何分布

§3.3 随机变量的分布函数

随机变量X,称

$$F(x)=P(X\le x)$$

为X的分布函数,其中x为随意实数

则有:

$$P(x_1<X\le x_2)=P(X\le x_2)-P(X\le x_1)$$

$$=F(x_2)-F(x_1)$$

离散型随机变量的分布函数为阶梯形,

设其分布列: $P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots$

则其分布函数: $F(x)=P(X\le x)=\sum\limits_{x_i\le x}P(X=x_i)$

在 $x=x_i$ 处具有跳跃值

分布函数应满足:

$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

右连续: $F(x^+)=F(x)$

对于不同类型的区间：

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2^-) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2^-) - F(x_1^-)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1^-)$$

从区间的角度容易理解(是否含边界)

§3.4 连续型随机变量

设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，若存在一个非负函数 $f(x)$，对任何实数 x 有：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 为 X 的概率密度

则有：$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$P(X = x) = 0$ → 取个别值的概率为0

(概率为0未必是不可能事件)

几种重要的连续型随机变量

① 均匀分布

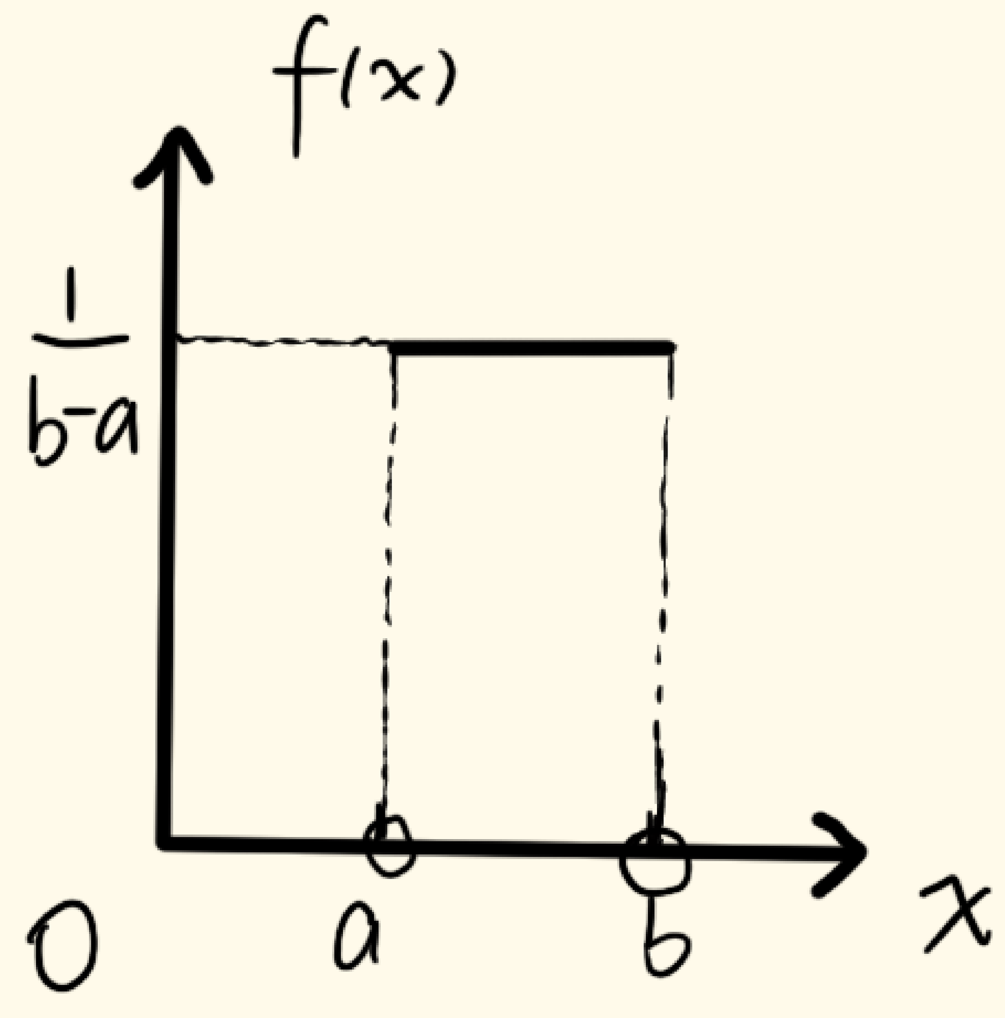
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

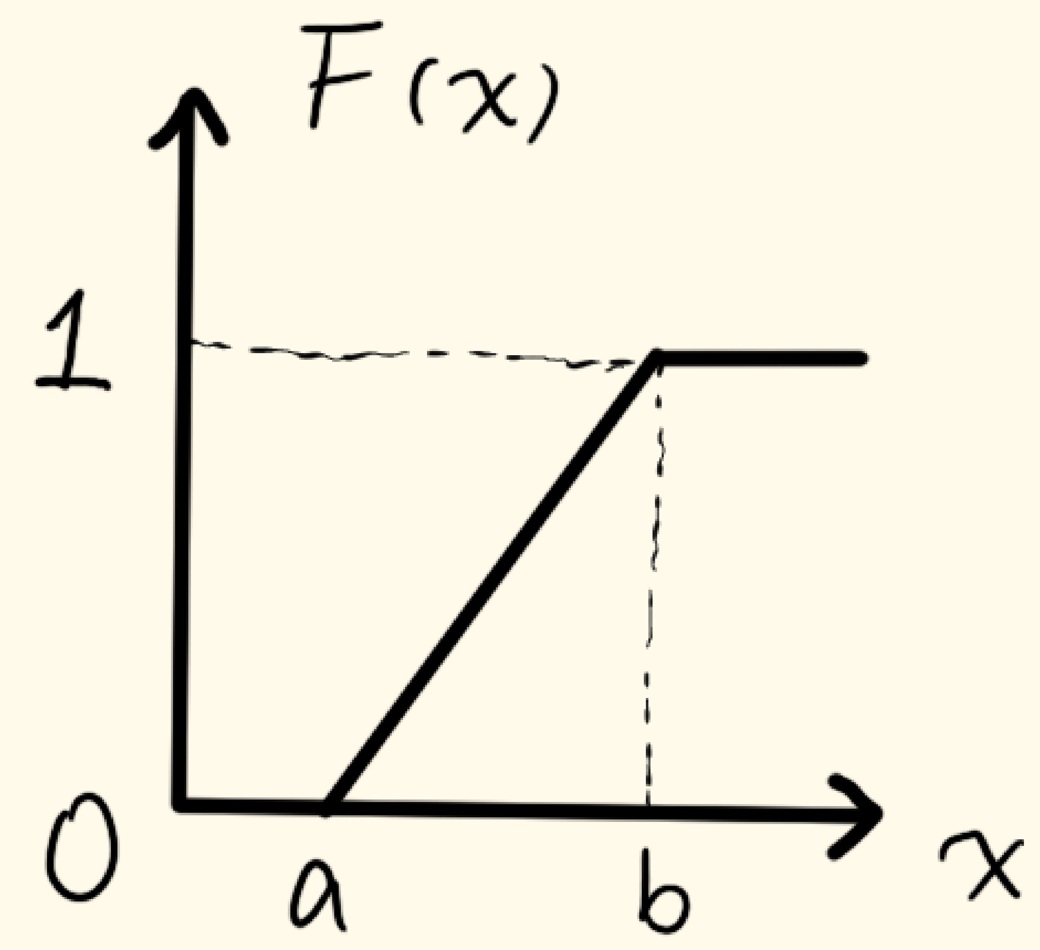
则称 X 在区间 [a, b] 上服从均匀分布，

记作 $X\sim U[a,b]$

相应分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$





在均匀分布中，X 落在长度相等的区间的可能性相等

在计算机中的舍入误差是一个在 (−0.5, 0.5) 上服从均匀分布的随机变量

② 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中 λ 为正常数，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，

记为 $X\sim E(\lambda)$

相应分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

具有无记忆性，即：

$$P(X\ge n+m\mid X\ge m)=P(X\ge n)$$

§3.5 正态分布

又称高斯分布

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty$$

其中，μ，σ 为常数且 $\sigma>0$

则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布，

也称 X 为正态变量，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

固定 σ 值改变 μ 值，$f(x)$ 将随 μ 增大而向右平移，形状保持不变.

固定 μ 值改变 σ 值，$f(x)$ 将随 σ 增大而变得陡峭，对称中心位置保持不变

称 $X\sim N(0,1)$ 为标准正态分布，

记其分布函数及概率密度分别为 $\Phi(x)$，$\varphi(x)$

有：$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad -\infty<x<+\infty$$

$\varphi(x)$ 是偶函数，即 $\varphi(-x)=\varphi(x)$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

一般的正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的分布函数 $F(x)$ 与标准正态分布关系如下：

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

故 $$P(x_1<X\leq x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

若数 u_α 满足条件 $P(X>u_\alpha)=\alpha$

即 $\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$，称 u_α 为 $N(0,1)$ 分布的上侧 α 分位数

§3.6 随机变量函数的分布

已知 $Y=g(X)$，X 概率密度 $f_X(x)$.

欲求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

① 由 X 概率密度求其分布函数：

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

② 由 $Y=g(X)$ 及 X 范围求 Y 范围

③ 将 $Y=g(X)$ 代入 $F_X(x)$ 求 $F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$$

解不等式

$$P(X\le g^{-1}(y))\text{ 或 }P(X\ge g^{-1}(y))$$

$$=F_X(g^{-1}(y))\text{ 或 }1-F_X(g^{-1}(y))$$

④ 将 $F_Y(y)$ 对 y 求导得概率密度

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\pm\left[\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(t)\,dt\right]'$$

$$=\pm[g^{-1}(y)]'f_X(g^{-1}(y))$$

求解即可得到

可知：服从正态分布的随机变量的线性函数也服从正态分布

即若 $Y=aX+b$，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

则 $Y\sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

公式法：

设 $y=g(x)$ 在 (a,b) 上严格单调可微，

则

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|, & A<y<B \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 为 $g(x)$ 的反函数

且 $A=\min\{g(a),g(b)\}$，$B=\max\{g(a),g(b)\}$