第八章 拉普拉斯（Laplace）变换

问题分析：Fourier 变换的“局限性”？

- 古典意义下的傅里叶变换要求绝对可积，这是一个相当强的条件，使得一些简单函数(如常数函数、线性函数、正弦余弦函数等等)的 傅里叶变换也受到限制。

- 广义 Fourier 变换对以指数级增长的函数如 e^{at} $(a>0)$ 等仍然无能为力；而且在变换式中出现广义函数，也使人感到不太满意。

- 在工程实际问题中，许多以时间 t 为自变量的函数做傅里叶变换时，没有必要(或者不可能) 在整个实轴上进行。

问题分析：如何对 Fourier 变换进行改造？

基本想法

(1) 将函数 $f(t)$ 乘以一个单位阶跃函数 $u(t)$，

使得函数在 $t<0$ 的部分补零（或者充零）；

(2) 将函数再乘上一个衰减指数函数 $e^{-\beta t}(\beta>0)$，

使得函数在 $t>0$ 的部分尽快地衰减下来。

- 这样，就有希望使得函数 $f(t)\cdot u(t)\cdot e^{-\beta t}$ 满足 Fourier 变换的条件，从而对它进行 Fourier 变换。

问题分析：如何对 Fourier 变换进行改造？

实施结果

$$\mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+j\omega)t}\mathrm{d}t$$

将上式中的 $\beta + j\omega$ 记为 s，就得到了一种新的变换：

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{记为}} F(s).$$

注 上述广义积分存在的关键：$\boxed{\text{变量 } s \text{ 的实部 } \mathrm{Re}\, s = \beta \text{ 足够大。}}$

8.1.1 拉氏变换的定义

定义 8.1.1 设函数 $f(t)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的实值函数，如果对于复参数 $s=\beta+j\omega$，积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在复平面 s 的某一区域内收敛，则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换或象函数，记为 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，即

$$\boxed{F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\,.}$$

相应地，称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换或象原函数，记为 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

注 $f(t)$ 的 Laplace 变换就是 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换。

常用函数的Laplace变换

例 $\mathscr{L}[1]=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},\quad (\operatorname{Re}s>0)$

$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\quad (\operatorname{Re}s>0)$

$\mathscr{L}[\operatorname{sgn}t]=\int_0^{+\infty}\operatorname{sgn}t\,e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\quad (\operatorname{Re}s>0)$

若 a 为正实数，

$\mathscr{L}[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\,dt=\frac{1}{-(s-a)}e^{-(s-a)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a},\quad (\operatorname{Re}s>a)$

要点 $\boxed{\text{进行积分时，确定 } s \text{ 的取值范围，保证积分存在。}}$

常用函数的 Laplace 变换

例 若 a 为正实数，

$$\mathscr{L}[\cos a t] = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{jat}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-jat}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[\mathrm{e}^{jat}] + \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-jat}]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja} + \frac{1}{s+ja}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

$(\mathrm{Re}\, s > 0)$

$$\mathscr{L}[\sin a t] = \frac{1}{2j}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{jat}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-jat}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\mathscr{L}[\mathrm{e}^{jat}] - \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-jat}]\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-ja} - \frac{1}{s+ja}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

$(\mathrm{Re}\, s > 0)$

8.1.2. 拉氏变换的存在性定理

定理 8.1.1 设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时，满足：

(1) 在任何有限区间上分段连续；

(2) 具有有限的增长性，

充分条件！！

即存在常数 c 及 $M>0$，使得 $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{ct}$，

(其中，c 称为函数 $f(t)$ 的 “增长” 指数)。

则象函数 $F(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,s>c$ 上一定存在且解析。

注 (1) 像函数 $F(s)$ 的存在域一般是一个右半平面 $\mathrm{Re}\,s>c$，

即只要复数 s 的实部足够大就可以了。(可略去存在域)

(2) 在 Laplace 变换中的函数一般均约定在 $t<0$ 时为零，

即函数 $f(t)$ 等价于函数 $f(t)u(t)$.

定理 8.1.2 设 $f(t)$ 为连续函数，$F(s)$是$f(t)$的拉氏变换，则

(1) 若积分$F(s_0)$收敛，则积分$F(s)$在半平面区域 $(\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0)$上收敛。

(2) 若积分$F(s_0)$发散，则积分$F(s)$在半平面区域 $(\mathrm{Re}\, s < \mathrm{Re}\, s_0)$上发散。

注： 类似幂级数的Abel定理。

常用函数的 Laplace 变换

例 $\mathscr{L}[t^m] = \dfrac{m!}{s^{m+1}} = \dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}};$

解 $\mathscr{L}[t^m] = \int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{-s}\int_0^{+\infty} t^m \mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-st}$

$$= \frac{1}{-s} t^m \mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} + \frac{m}{s}\int_0^{+\infty} t^{m-1}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{m}{s}\mathscr{L}[t^{m-1}]$$

(Re $s > 0$)

$$= \frac{m(m-1)}{s^2}\mathscr{L}[t^{m-2}] = \cdots = \frac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1] = \frac{m!}{s^{m+1}}.$$

以上是整数情况，当m不是整数时，结果涉及Γ函数。

（Γ函数简介）

$$\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{m-1}\,\mathrm{d}t, \quad 0 < m < +\infty.$$

常用函数的 Laplace 变换

例 $\mathscr{L}[\delta(t)]=1;$

解 $\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;=\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0} \;=1.$

- 当函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 附近有界时，$f(0)$ 的取值将不会影响其 Laplace 变换的结果。

- 当函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处含 δ 函数时，则需考察一下Laplace变换中积分下限的设定，我们将 δ 函数的 Laplace 变换定义为：

$$\mathscr{L}[f(t)] \triangleq \mathscr{L}_{-}[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

常用函数的 Laplace 变换汇总

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$.

第八章 拉普拉斯（Laplace）变换

8.2.1 基本性质

1. 线性性质（性质8.2.1）

设 a，b 为常数，则有

$$\mathscr{L}[a f(t)+b g(t)]=a F(s)+b G(s);$$

$$\mathscr{L}^{-1}[a F(s)+b G(s)]=a f(t)+b g(t).$$

2. 平移性质（ 性质8.2.4&8.2.5 ）

平移性 设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对任一非负实数 τ 有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).\quad (\mathscr{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).)$$

象平移性 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a).$

3. 伸缩性质（相似性质8.2.6）

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 $F(s)=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}$， 由线性性质

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}]-\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}]$$

$$=e^{2t}-e^{t}.$$

例 求 $\mathscr{L}[e^{-at}\sin kt]$

解 已知：$F(s)=\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$.

由位移性质 $\mathscr{L}[e^{-at}\sin kt]=F(s+a)=\dfrac{k}{(s+a)^2+k^2}$

例8.2.17 求$\mathscr{L}[u(5t)]$和$\mathscr{L}[u(5t-2)]$

注 一般地，$\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)],(a>0,b>0)$

$$=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-s\frac{b}{a}}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

例 设 $F(s)=\dfrac{1}{s-1}\mathrm{e}^{-2s}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 由于 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-1}]=\mathrm{e}^{t}u(t)$，根据延迟性质有

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{t-2}u(t-2)$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{t-2}, & t>2,\\ 0, & t<2.\end{cases}$$

8.2.2 微、积分性质

1. 导数的象函数(性质8.2.2)

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

一般地，有

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

其中， $f^{(k)}(0)$ 应理解为 $\lim\limits_{t\to 0^+} f^{(k)}(t).$

2. 象函数的导数(式(8.2.5)&(8.2.6))

$$F'(s) = -\mathscr{L}[t\,f(t)];$$

一般地，有 $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)].$

例 求函数 $f(t)=t^m$ 的Laplace变换(m为正整数)。

解 利用导数的象函数性质来求解本题

由 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$ 以及 $f^{(m)}(t)=m!$ 有

$$\mathscr{L}[f^{(m)}(t)]=\mathscr{L}[m!]$$

$$=s^mF(s)-s^{m-1}f(0)-s^{m-2}f'(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0)$$

$$=s^m\mathscr{L}[f(t)]=s^m\mathscr{L}[t^m],$$

故有 $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{1}{s^m}\mathscr{L}[m!]=\dfrac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}.$

例 求函数 $f(t)=t\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t$ 的 Laplace 变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$,

根据<u>位移性质</u>有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

再由<u>象函数的导数</u>性质有

$$\mathscr{L}[t\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{(s+3)^2+4}\right)$$

$$=\frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}.$$

例 求函数 $f(t)=t^2\cos^2 t$ 的 Laplace 变换。

解 $t^2\cos^2 t=\dfrac{1}{2}t^2(1+\cos 2t)$,

已知 $\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, $\mathscr{L}[\cos 2t]=\dfrac{s}{s^2+2^2}$,

根据线性性质以及象函数的导数性质有

$$\mathscr{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{2(s^6+24s^2+32)}{s^3(s^2+4)^3}.$$

8.2.2 微、积分性质

3. 积分的象函数

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

4. 象函数的积分

$$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

例 求函数 $f(t)=\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t$ 的 Laplace 变换。

解 已知 $\mathcal{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$,

根据微分性质有

$$\mathcal{L}[t\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2},$$

再由积分性质得

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{4}{(s^2+4)^2}.$$

例 求函数 $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 的 Laplace 变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$， 根据象函数的积分性质有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s=\operatorname{arccot}s.$$

即 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}s=\operatorname{arccot}s.$

- 在上式中，如果令 $s=0$，则有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}.$

启示 在 Laplace 变换及其性质中，如果取 s 为某些特定的值，就可以用来求一些函数的广义积分。

部分基本性质汇总

线性性质 $\mathscr{L}[a\,f(t)+b\,g(t)]=a\,F(s)+b\,G(s);$

$$\mathscr{L}^{-1}[a\,F(s)+b\,G(s)]=a\,f(t)+b\,g(t).$$

相似性质 $\mathscr{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right).$

平移性质 $\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

部分基本性质汇总

象平移性质 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at} f(t)] = F(s-a).$

微分性质 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

$$F'(s) = -\mathscr{L}[t f(t)];$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)].$$

积分性质 $\mathscr{L}[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t] = \frac{1}{s} F(s).$

$$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

8.2.3 周期函数的像函数

性质 设 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 内以 T 为周期的函数，且逐段光滑，

则 $$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

例 求全波整流后的正弦波 $f(t)=|\sin\omega t|$ 的象函数。

解 函数 $f(t)$ 的周期为 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$，故有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-st}(-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{s^2+\omega^2}\right|_0^T$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-sT}}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$$

8.2.4 卷积与卷积定理

1. 卷积在拉氏变换下的概念

- 按照上一章中卷积的定义，两个函数的卷积是指

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 如果函数满足：当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，则有

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad (t\geq 0).$$

- 显然，由上式给出的卷积的仍然满足交换律、结合律以及分配律等性质。

例 求函数 $f_1(t)=t$ 与 $f_2(t)=\sin t$ 的卷积。

解 $$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t \tau\,\mathrm{d}\cos(t-\tau)$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=t+\sin(t-\tau)\Big|_0^t$$

$$=t-\sin t.$$

8.2.4 卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s).$

8.3.3

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 由于 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$，$\mathscr{L}[\dfrac{s}{s^2+1}]=\cos t$，故有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\cos t*\cos t=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

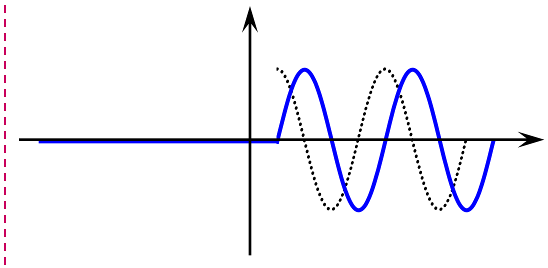
例* 求 $\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]$.

解 方法一 已知 $\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$,

根据延迟性质有

$$\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}.$$

方法一 先充零再平移

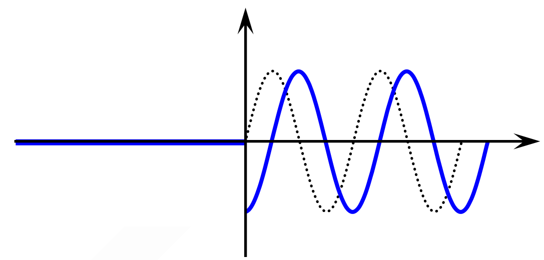


$\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t-\frac{\pi}{2})$

方法二 $\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]=\mathscr{L}[-\cos t]$

$$=\frac{1}{s^2+1}(-s).$$

方法二 先平移再充零



$\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t)$

两种方法为什么会得到不同的结果？

附：$\Gamma-$函数(gamma函数)简介

定义 $\Gamma-$函数定义为 $\Gamma(m)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t,\ 0<m<+\infty.$

性质 $\Gamma(1)=1;\quad \Gamma(m+1)=m\,\Gamma(m).$

证明 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1;$

$$\Gamma(m+1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^m\,\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}t^m\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}$$

$$=-t^m\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t^m$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,m\,t^{m-1}\,\mathrm{d}t=m\Gamma(m).$$

- 特别地，当 m 为正整数时，有 $\Gamma(m+1)=m!.$

(返回)

第八章 拉普拉斯（Laplace） 变换

求 Laplace 逆变换的方法

1. 留数法

- 利用留数计算拉普拉斯逆变换

定理 8.4.1 设函数 $F(s)$ 除复平面内有限个孤立奇点 $s_1, s_2, \cdots s_n$ 外是解析的， 且当 $s\to\infty$ 时，$F(s)\to 0$，则

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st}, \ s_k], \ (t > 0).$$

2. 查表法

- 利用Laplace变换的性质和卷积定理，并根据一些已知函数的Laplace变换来求逆变换。

几个常用的 Laplace 逆变换的性质

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)]=a\,f(t)+b\,g(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=\mathrm{e}^{at}f(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=-t\,f(t).\qquad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}F(s)]=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

常用函数的 Laplace 逆变换

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}]=1.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}]=\mathrm{e}^{at}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{m!}{s^{m+1}}]=t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}]=\mathrm{e}^{at}\,t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+b^2}]=\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}]=\mathrm{e}^{at}\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{b}{s^2+b^2}]=\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}]=\mathrm{e}^{at}\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t).$$

例： 已知$F(s)=\dfrac{5s-1}{s^2-s-2}$，求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$

解 方法一 利用查表法求解

(1) $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}=\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{3}{s-2}.$

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-a}]=e^{at}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

$$=2\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]+3\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}]$$

$$=2e^{-t}+3e^{2t}.$$

例： 已知$F(s)=\dfrac{5s-1}{s^2-s-2}$，求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$

解 方法二 利用留数法求解

(1) $s_1=-1,\ s_2=2$ 为$F(s)$的一阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-1]=\frac{5s-1}{s-2}e^{st}\Big|_{s=-1}=2e^{-t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st},2]=\frac{5s-1}{s+1}e^{st}\Big|_{s=2}=3e^{2t}.$$

(2) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-1]+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},2]$

$$=2e^{-t}+3e^{2t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法一 利用查表法求解

$$(1)\ F(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)^2}$$

$$=\frac{1}{s-2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{-1}{(s-1)^2}.$$

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right]=e^{at}$，$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2}\right]=t\,e^{at}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}-e^{t}-t\,e^{t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法二 利用留数法求解

(1) $s_1=2,\ s_2=1$ 分别为 $F(s)$ 的一阶与二阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},2]=\frac{1}{(s-1)^2}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=2}=\mathrm{e}^{2t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},1]=\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s-2}\right)'\Big|_{s=1}=-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

(2) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},2]+\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},1]$

$$=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解： 方法三 利用卷积定理求解

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$=t\,\mathrm{e}^{t}*e^{2t}=\int_0^t \tau e^{\tau}\cdot e^{2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

例 已知$F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$，求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$

解 由于$\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$不存在，求此逆变换不适用留数逆变换定理，

由线性性质可知 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right]$

已知 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]=t$ ， 即 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]=tu(t)$

由平移性质有 $\mathscr{L}[(t-2)u(t-2)]=\dfrac{e^{-2s}}{s^2}$

由此我们可知

$$f(t)=t\cdot u(t)+(t-2)u(t-2)=\begin{cases}0, t<0\\ t, 0\le t<2\\ 2(t-1), t\ge 2\end{cases}$$

第八章 拉普拉斯（Laplace） 变换

求解常微分方程(组)

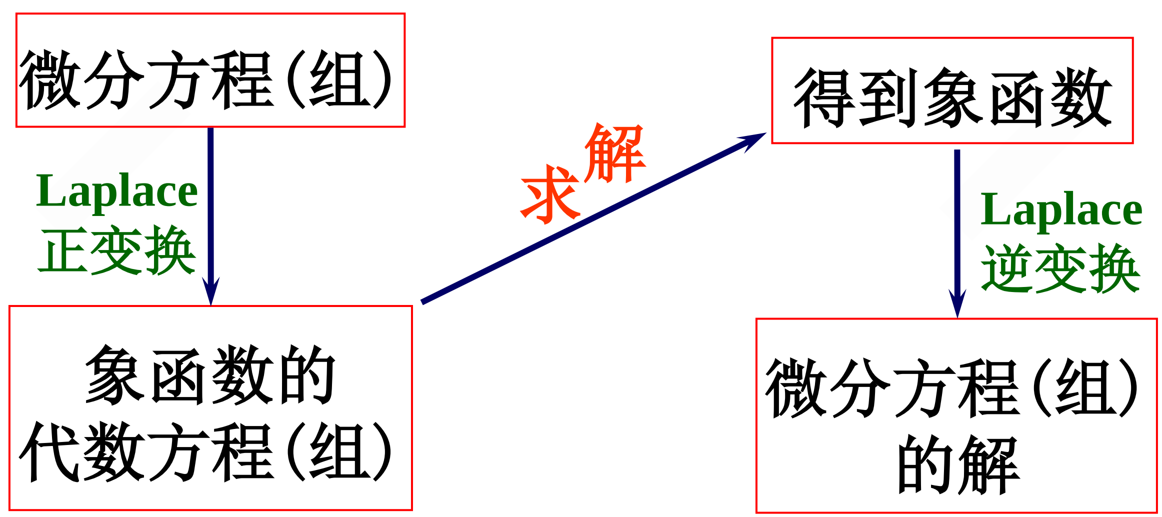
步骤 (1) 将微分方程(组)化为象函数的代数方程(组)；

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

(2) 求解代数方程得到象函数；

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解。

1. 留数法 2.查表法



例 利用 Laplace 变换求解微分方程

$$y''(t)+\omega^2 y(t)=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=\omega.$$

解 (1) 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=0,$$

代入初值即得 $s^2Y(s)-\omega+\omega^2Y(s)=0,$

$$\Rightarrow\ Y(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sin\omega t.$$

例 利用Laplace变换求解微分方程

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 6e^{-t}, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$s^3 X(s) + 3s^2 X(s) + 3sX(s) + X(s) = \frac{6}{s+1},$$

求解此方程得 $X(s) = \dfrac{3!}{(s+1)^4}$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = t^3 e^{-t}.$$

例 利用Laplace变换求解微分方程

$$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2\mathrm{e}^{t}\cos t,\quad x(0)=x'(0)=0.$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, 对方程两边取 Laplace 变换有

$$s^2X(s)-2sX(s)+2X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

$$\Rightarrow\ X(s)=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]\quad=\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s}{(s^2+1)^2}]$$

$$=\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}[(\frac{-1}{s^2+1})']=t\,\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=t\,\mathrm{e}^{t}\sin t.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=\mathrm{e}^t-2, & x(0)=x'(0)=0, \\ 2y''-x''-2y'+x=-t, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

整理得
$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}, \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}. \end{cases}$$

求解得 $X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$, $Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$.

整理得 $X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}=-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{(s-1)^2}$,

$$Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t)=-t+t\mathrm{e}^t,\quad y(t)=1-\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t.$$

例 利用Laplace变换求解微分方程

$$\begin{cases} x' + y'' = \delta(t-1), & x(0) = y(0) = 0, \\ 2x + y''' = 2u(t-1), & y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$\begin{cases} sX(s) + s^2Y(s) = \mathrm{e}^{-s}, \\ 2X(s) + s^3Y(s) = \dfrac{2}{s}\mathrm{e}^{-s}. \end{cases}$$

求解得 $X(s) = \dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}$，$Y(s) = 0$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得 $x(t) = u(t-1)$，$y(t) = 0$.

例 利用Laplace变换求解微分方程

$$\begin{cases} x''-x-2y'=\mathrm{e}^t, & x(0)=-3/2, \quad x'(0)=1/2, \\ x'-y''-2y=t^2, & y(0)=1, \quad y'(0)=-1/2. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$\begin{cases} s^2X(s)+\dfrac{3}{2}s-\dfrac{1}{2}-X(s)-2sY(s)+2=\dfrac{1}{s-1}, \\ sX(s)+\dfrac{3}{2}-s^2Y(s)+s-\dfrac{1}{2}-2Y(s)=\dfrac{2}{s^3}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; X(s)=-\frac{3}{2(s-1)}+\frac{2}{s^2}, \quad Y(s)=-\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s^3}+\frac{3}{2s},$$

$$\Rightarrow X(s) = -\frac{3}{2(s-1)} + \frac{2}{s^2}, \quad Y(s) = -\frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s^3} + \frac{3}{2s},$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^t + 2t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}.$$