解析函数

习 题 二

班级：____________________

学号：____________________

姓名：____________________

成绩：____________________

心得 体会 拓广 疑问

❶ 下列函数在何处可导？何处解析？

(1) $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$. (2) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$. (3) $f(z)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$. (4) $f(z)=\mathrm{Im}\, z$.

❷ 定义

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^2y(x+\mathrm{i}y)}{x^4+y^2}, & z=x+\mathrm{i}y\neq 0\\ 0, & z=x+\mathrm{i}y=0\end{cases}$$

证明：$f(z)$在 z 平面上处处连续，但在 $z=0$ 处不可导.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 证明：下列函数在 z 平面上处处不解析.

(1) $f(z)=x+y$. (2) $f(z)=\mathrm{Re}\,z$. (3) $f(z)=\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4 设 $f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}(x^3-3xy^2)$ 为解析函数，试确定 m,n 的值.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

5 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 证明:如果对每一点 $z\in D$,有 $f'(z)=0$,那么 $f(z)$ 在 D 内是常数.

6 试判断下列命题的真假,并举例说明.

(1)如果 $f'(z_0)$ 存在,那么 $f(z)$ 在点 z_0 解析.

(2)如果 $f(z)$ 在点 z_0 连续,那么 $f'(z_0)$ 存在.

(3)实部与虚部满足柯西一黎曼方程的复变函数是解析函数.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

7 证明:如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析,并满足下列条件之一,那么 $f(z)$ 是常数.

(1) $f(z)$ 恒取实值.

(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析.

(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数.

(4) $\mathrm{Re}\, f(z)$ 在 D 内是一个常数.

8 验证下列函数是调和函数,并求出以 $z=x+iy$ 为自变量的解析函数 $w=f(z)=u+iv$.

(1) $v=\arctan\dfrac{y}{x}, x>0$.

(2) $u=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y, f(0)=i$.

(3) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$.

(4) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

9 设 $u=u(x,y)$ 为调和函数，则实函数 $w=f(u)$ 满足什么条件，可以使复合函数 $w=f[u(x,y)]$ 为一个调和函数.

10 设 f 和 g 均在点 z_0 处可导，$g(z)$ 在 z_0 的某个邻域内不为 0，且

$$f(z_0)=g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$$

证明：$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

11 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，证明：

(1) $\mathrm{i}\,\overline{f(z)}$ 也是解析函数.

(2) $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

12 如果 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 为调和函数，那么下列函数是否为调和函数？

(1) $u[v(x,y),y]$. (2) $u[x,v(x,y)]$. (3) $u(x,y)v(x,y)$. (4) $u(x,y)+v(x,y)$.

心得 体会 拓广 疑问

13 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，则其实、虚部 u 和 v 是 D 内的调和函数. 其逆命题是否成立？肯定请给出严格证明，否定请举一反例.

14* 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明：

(1) $\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$.

(2) $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=|f'(z)|^2$.

(3) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4\,|f'(z)|^2$.

(4) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^\rho=\rho^2\,|f(z)|^{\rho-2}|f'(z)|^2$.

(5) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|u|^\rho=\rho(\rho-1)|u|^{\rho-2}|f'(z)|^2\,(u\neq 0)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

15 将下列函数值写成 $x+iy$ 的形式.

(1) $e^{1+\pi i}+\cos i$.

(2) $\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}i$.

(3) $\cos(i\ln 5)$.

(4) $\operatorname{Ln}(-3+4i)$.

(5) $(-3+i4)^{1+i}$.

16 求方程 $\cos z=5$ 在复平面上的全部解.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

17 证明：$f(z)=\mathrm{e}^{\bar{z}}$不是 z 的解析函数.

18 由 $z=\sin w$ 及 $z=\cos w$ 所定义的函数 w 分别称为 z 的反正弦函数及反余弦函数，求出它们的解析表达式.

年 月 日

19 证明:下列恒等式成立.

(1) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$.

(2) $e^{\bar{z}}=\overline{e^z}$.

(3) $\sin \bar{z}=\overline{\sin z}$.

(4) $\cos \bar{z}=\overline{\cos z}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

20 说明下列等式是否正确.

(1)$\ln z^2=2\ln z$.

(2)$\ln\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln z$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日