作业一

4

设 F 表示一年级大学生的集合, S 表示二年级大学生的集合, M 表示数学专业学生的集合, A 表示计算机专业学生的集合, T 表示听高数课的学生集合, G 表示星期一晚上参加音乐会的学生集合, H 表示周一晚上很想去却没去的学生集合。下面列出的句子所对应的集合表达式是什么，请从备选答案中选出。
(1) 所有计算机专业二年级的学生都旁听数学课。
(2) 这些且只有这些听高数课的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很想去但没能去。
(3) 听高数课的学生都没有参加星期一晚上的音乐会。
(4) 这个音乐会只有大学一年级和二年级的学生参加。
(5) 数学专业和计算机专业以外的二年级学生都参加了音乐会。
备选答案:

① $T \subseteq G \cup H$	④ $H = G \cup T$	⑦ $G \subseteq F \cup S$
② $G \cup H \subseteq T$	⑤ $T \cap G = \emptyset$	⑧ $S - (R \cup M) \subseteq G$
③ $S \cap R \subseteq T$	⑥ $F \cup S \subseteq G$	⑨ $G \subseteq S - (R \cup M)$

解答:
(1) ③ $S \cap R \subseteq T$ (2) ④ $H = G \cup T$ (3) ⑤ $T \cap G = \emptyset$
(4) ⑦ $G \subseteq F \cup S$ (5) ⑧ $S - (R \cup M) \subseteq G$

8-(4), 8-(5), 8-(6)

求下列集合的幂集
(4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
(5) $\{\{1,2\}, \{2,1,1\}, \{2,1,1,2\}\}$
(6) $\{\{\emptyset, 2\}, \{2\}\}$

解答:
(4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
(5) $\{\emptyset, \{\{1,2\}\}\}$
(6) $\{\emptyset, \{\{\emptyset, 2\}\}, \{\{2\}\}, \{\{2\}, \{\emptyset, 2\}\}\}$

9-(5)

9. 设 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，求下列集合：
$P(A)-P(B)$

解答:
1. 集合 A 的幂集，$P(A)$：

$$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}$$

2. 集合 B 的幂集，$P(B)$：

$$P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{1,2,5\}\}$$

3. 计算差集 $P(A)-P(B)$ 即 $P(A)$ 中减去 $P(B)$ 的元素：在 $P(A)$ 中但不在 $P(B)$ 中的元素是 $\{4\}$ 和 $\{1,4\}$。

$$P(A)-P(B)=\{\{4\},\{1,4\}\}$$

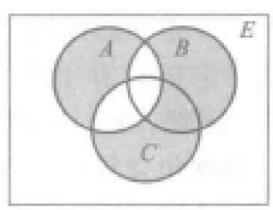
最终结果：

$$P(A)-P(B)=\{\{4\},\{1,4\}\}$$

15-(2)

画出集合的文氏图
$(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$

解答:



18-(4)

设集合 $A=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\emptyset\}\}$，计算表达式。$\cup\cap A$

解答:
1. 求交集：由于任意集合与空集 $\emptyset$ 的交集为 $\emptyset$，因此：

$$\cap A = \emptyset$$

2：计算 $\cup \cap A$（对交集求并集）
计算第 1 步结果的并集：

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

空集的并集仍然是空集，因此：

$$\cup \cap A = \emptyset$$

最终答案

$$\cup \cap A = \emptyset$$

21

某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这三种球。已知 6 个会打网球的人都会打篮球或排球。求不会打球的人数。
解答:
定义如下集合：
$U = \{全班学生\}$，$|U| = 25$；$B = \{会打篮球的学生\}$，$|B| = 14$；
$V = \{会打排球的学生\}$，$|V| = 12$；$T = \{会打网球的学生\}$，$|T| = 6$。
已知：
会打篮球和排球的学生数：$|B \cap V| = 6$；
会打篮球和网球的学生数：$|B \cap T| = 5$；
会打三种球的学生数：$|B \cap V \cap T| = 2$；
所有会打网球的学生都会打篮球或排球，即 $T \subseteq B \cup V$。
1：计算会打排球和网球的学生数 $|V \cap T|$ 根据已知条件，所有会打网球的学生都会打篮球或排球，因此：

$$|T| = |B \cap T| + |V \cap T| - |B \cap V \cap T|$$

$$6 = 5 + |V \cap T| - 2$$

所以：

$$|V \cap T| = 6 - 5 + 2 = 3$$

2：应用容斥原理计算会打球的学生总数 $|B \cup V \cup T|$ 容斥原理公式：

$$|B \cup V \cup T| = |B| + |V| + |T| - |B \cap V| - |B \cap T| - |V \cap T| + |B \cap V \cap T|$$

$$|B \cup V \cup T| = 14 + 12 + 6 - 6 - 5 - 3 + 2 = 20$$

3：计算不会打任何球的学生数

$$不会打球的学生数 = |U| - |B \cup V \cup T| = 25 - 20 = 5$$

不会打球的学生人数为 5 人。

30-(3), 30-(4)

设 A, B, C 代表任意集合，试判断下列命题的真假。如果为真，给出证明；如果为假，给出反例。
(3) $A \in B \land B \notin C \implies A \notin C$.
(4) $(A-B) \cup (B-C) = A - C$.

解答:
(3) 为假，反例如下：$A = \{1\}, B = \{1,2\}, C = \{1,3\}$.
(4) 为假，反例如下：$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$.

35

证明下列命题是等价的：

$$A \subseteq B, \quad \overline{B} \subseteq \overline{A}, \quad \overline{A} \cup B = E, \quad A - B \subseteq B$$

证明:

$$\begin{aligned} A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \to x \in B) \iff \forall x(x \notin B \to x \notin A) \\ \iff \forall x(x \in \overline{B} \to x \in \overline{A}) \iff \overline{B} \subseteq \overline{A} \end{aligned}$$

$$A \subseteq B \implies \overline{A} \cup A \subseteq \overline{A} \cup B \implies E \subseteq \overline{A} \cup B.$$

而 $\overline{A} \cup B \subseteq E$, 因此 $A \subseteq B \implies \overline{A} \cup B = E$. 反之，

$$\overline{A} \cup B = E \implies A \cap (\overline{A} \cup B) = A \implies A \cap B = A \implies A \subseteq B$$

综上所述 $A \subseteq B \iff \overline{A} \cup B = E$

$$A \subseteq B \implies A - B = \emptyset \implies A - B \subseteq B$$

反之，

$$A-B \subseteq B \implies (A-B) \cup B \subseteq B \implies A \cup B \subseteq B \implies A \cup B = B \implies A \subseteq B.$$

综上所述，$A \subseteq B \iff A - B \subseteq B$.