复变函数的积分

习 题 三

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

1 沿下列路径计算积分$\int_0^{3+i} z^2 dz$.

(1) 自原点到 3+i 的直线段.

(2) 自原点沿实轴至 3,再由 3 垂直向上至 3+i.

(3) 自原点沿虚轴至 i,再由 i 水平向右至 3+i.

2 分别沿 $y=x$ 与 $y=x^2$ 算出积分$\int_0^{1+i} (x^2+iy) dz$ 的值.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 计算下列积分.

(1)$\oint_C |z|\bar{z}\mathrm{d}z$,其中 C 是一条闭曲线,由直线段:$-1\leqslant x\leqslant 1,y=0$ 与上半单位圆周组成,取逆时针方向.

(2) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$;$\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}z}{|z|}$;$\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}s}{z}$;$\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}s}{|z|}$.

(3)$\int_{1-\mathrm{i}}^{3+2\mathrm{i}}(2z^2-5z+1)\mathrm{d}z$,积分曲线是由 $1-\mathrm{i}$ 到 $3+2\mathrm{i}$ 的直线段.

(4)$\int_{-1}^{\mathrm{i}}\dfrac{1}{z^2+z-2}\mathrm{d}z$,积分曲线是由 -1 到 i 的直线段.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

4 是否有等式 $\mathrm{Re}\left(\int_C f(z)\mathrm{d}z\right)=\int_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z$?

5 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内除 z_0 外处处解析，且

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=M(M\in\mathbf{C})$$

则对于任一属于 D 且围绕 z_0 的简单光滑闭曲线 C，恒有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=M$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

6 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=3}\dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+\mathrm{i})$，$f(3(1+\mathrm{i}))$.

7 直接写出下列积分的结果，并说明理由.

(1) $\oint_{|z|=1}\dfrac{3z+5}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z$.

(2) $\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{e}^z}{\cos z}\mathrm{d}z$.

8 沿指定闭曲线的正向计算下列各积分.

(1)$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz$,$C$:$|z-2|=1$.

(2)$\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$,$C$:$|z|=2$.

(3)$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$,$C$:$|z|=\frac{3}{2}$.

(4)$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz$,其中 a 为 $|a|\neq 1$ 的任何复数,C:$|z|=1$.

(5)$\oint_C \frac{3z+2}{z^4-1}dz$,$C$:$|z-(1+i)|=\sqrt{2}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

9 计算积分$\oint_C \frac{dz}{z+2}$,其中 C 是圆周 $|z|=1$ 正向,并由此证明:

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0$$

10 如果多项式 $Q(z)$ 比多项式 $P(z)$ 的次数至少高 2 次,证明:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

11 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内一条正向的简单光滑闭曲线，它的内部含于 D. 如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有点处都成立. 证明在 C 的内部所有点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

12 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去点 z_0 外处处解析，又设

$$g(z)=(z-z_0)^n f(z)(z\neq z_0),n=1,2,\cdots$$

若函数 $g(z)$ 在区域 D 内解析. 对于 D 内任一条围绕 z_0 的正向的简单光滑闭曲线 C，证明：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

13 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内处处解析，且不为零，C 为 D 内任意一条正向简单光滑闭曲线. 问：积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 是否为零？为什么？

14 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任意圆周 $|z|=r$，$0<r<1$ 的积分为零，那么 $f(z)$ 是否必须在 $z=0$ 处解析？肯定请给出证明，否定请举出反例.

15 若函数 $f(z)$ 在 z 平面上解析，且有界，则 $f(z)$ 一定恒为常数.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

16 设函数 $f(z)$ 在正向简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析，$z_0 \in D$，证明：

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

17 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，并且 $|f(z)|\leqslant \frac{1}{1-|z|}$，证明：

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant \frac{n!\ (n+1)^{n+1}}{n^n},n=1,2,\cdots$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

18 称 $P_n(z)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2-1)^n$ 是勒让德多项式. 证明：勒让德多项式有如下的积分表示

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

其中 C 是任意内部包含点 z 的简单闭曲线.

19 设 C 为内部包含实轴上线段 $[a,b]$ 的简单光滑闭曲线. 函数 $f(z)$ 在 C 内及其上解析，且在 $[a,b]$ 上取实值. 证明：对于任意两点 z_1，$z_2\in[a,b]$，总有点 $z_0\in[a,b]$ 使

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

20 设函数 $f(z)$ 在圆周 $C:|z|=R(R>0)$ 上及内部 D 处处解析，对于任意的 $z\in D$，证明：

(1) 函数 $g(\zeta)=\dfrac{R^2-z\bar{z}}{R^2-\zeta\bar{z}}f(\zeta)$ 在 C 上及内部解析.

(2) $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{R^2-z\bar{z}}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\bar{z})}f(\zeta)d\zeta$.

21 设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析且不为常数，n 为正整数.

(1) 对于任意的 $z\in D$，证明：$[f(z)]^n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta$.

(2) 设 $M=\max\limits_{\zeta\in C}\{|f(\zeta)|\}$，$l$ 为 C 的长度，$d=\min\limits_{\zeta\in C}\{|\zeta-z|\}$. 证明：不等式 $|f(z)|\leqslant M\left(\dfrac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$. 并进一步证明：$|f(z)|\leqslant M$，$z\in D$.

年 月 日