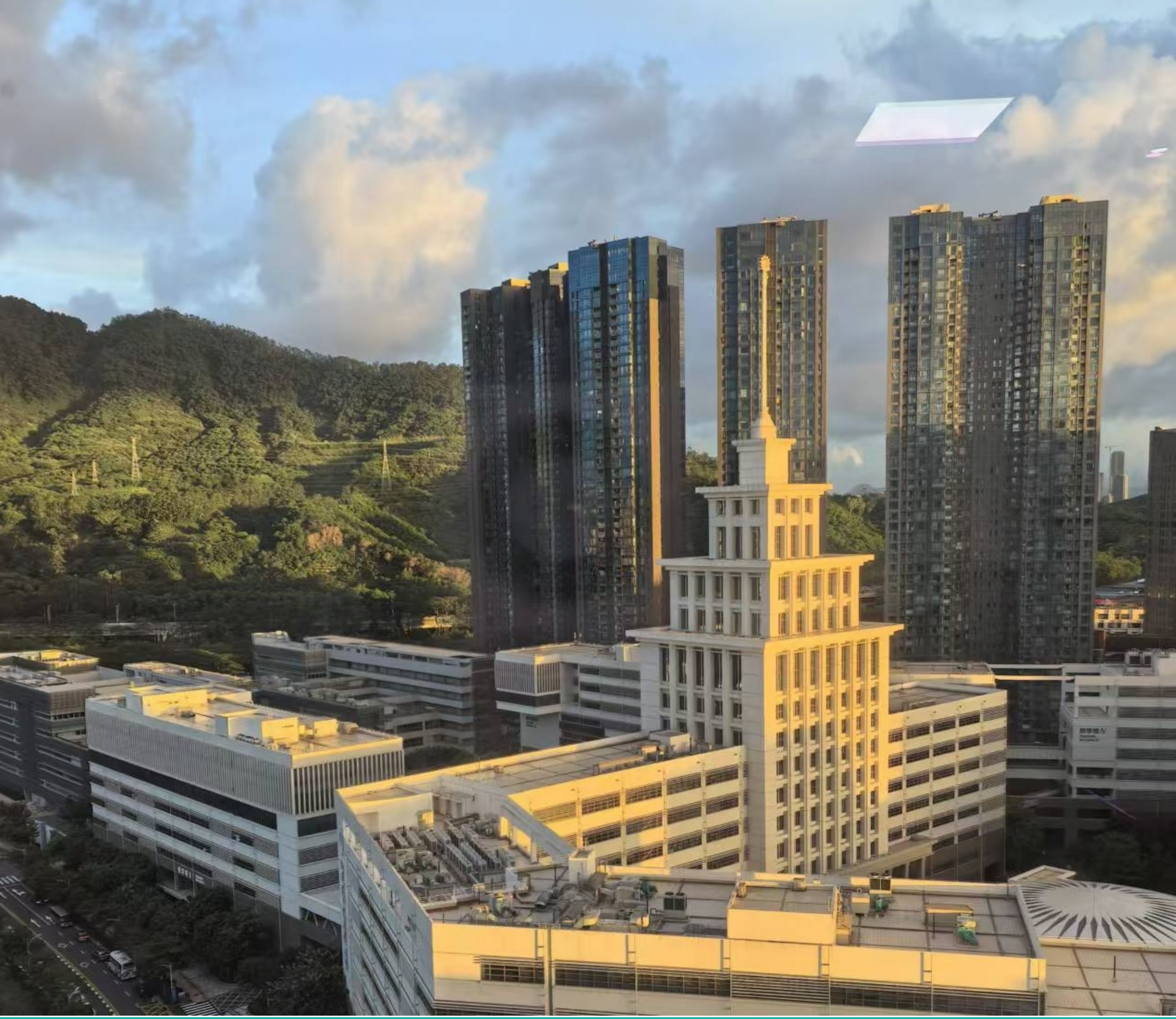

离散数学：补充阅读

作者：李修成 lixiucheng@hit.edu.cn

单位：计算机科学与技术学院

时间：2024/09/08

版本：0.1

目录

第一章 二元关系

内容提要

❏

1.1 笛卡尔积

命题 1.1 (笛卡尔积对并交满足分配律)

设 A, B 为集合

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),\quad (B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A),$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),\quad (B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A).$$

证明 (1) 任取 $\langle a,b\rangle\in A\times(B\cup C)$,

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\in A\times(B\cup C) &\iff a\in A\wedge b\in B\cup C\\ &\iff a\in A\wedge(b\in B\vee b\in C)\\ &\iff (a\in A\wedge b\in B)\vee(a\in A\wedge b\in C)\\ &\iff \langle a,b\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C).\end{aligned}\tag{1.1}$$

(3) 任取 $\langle a,b\rangle\in A\times(B\cap C)$,

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\in A\times(B\cap C) &\iff a\in A\wedge b\in B\cap C\\ &\iff a\in A\wedge(b\in B\wedge b\in C)\\ &\iff (a\in A\wedge b\in B)\wedge(a\in A\wedge b\in C)\\ &\iff \langle a,b\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C).\end{aligned}\tag{1.2}$$

命题 1.2

设 A, B 为集合. 若 $A\subseteq C\wedge B\subseteq D$，则 $A\times B\subseteq C\times D$.

证明 任取 $\langle a,b\rangle\in A\times B$. 由笛卡尔积定义可知 $a\in A\subseteq C, b\in B\subseteq D$, 故 $\langle a,b\rangle\in C\times D$.

例题 1.1

1. 若 $A=B, C=D$, 则 $A\times C=B\times D$.
2. 若 $A\times C=B\times D$，是否能推出 $A=B, C=D$?

解 (1) 任取 $\langle a,c\rangle\in A\times C$,

$$\begin{aligned}\langle a,c\rangle\in A\times C &\iff a\in A\wedge c\in C\\ &\iff a\in B\wedge c\in D\\ &\iff \langle a,c\rangle\in B\times D.\end{aligned}\tag{1.3}$$

(2) 考虑 $A=\emptyset, D=\emptyset$ 或 $B=\emptyset, C=\emptyset$.

1.2 关系的定义与表示

定义 1.1 (关系矩阵)

假设 R 是一个从集合 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ 到集合 $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ 的关系，则关系 R 可以使用矩阵 $\mathbf{M}_R=[m_{ij}]$ 表示，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } (a_i,b_j)\in R,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

♣

例题 1.2 假设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$. R 为从 A 到 B 的关系，其包含的有序对 $\langle a,b\rangle$, $a\in A$, $b\in B$ 满足 $a>b$. R 的关系矩阵

$$\mathbf{M}_R=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

1.3 关系的运算

定理 1.1

设 R 是任意二元关系，则

1. $(R^{-1})^{-1}=R$,
2. $\operatorname{domain}(R^{-1})=\operatorname{range}(R)$, $\operatorname{range}(R^{-1})=\operatorname{domain}(R)$.

♡

证明 (1) 任取 $\langle a,b\rangle\in(R^{-1})^{-1}\iff\langle b,a\rangle\in R^{-1}\iff\langle a,b\rangle\in R$.

(2) $b\in\operatorname{range}(R)\iff\exists a(\langle a,b\rangle\in R)\iff\exists a(\langle b,a\rangle\in R^{-1})\iff b\in\operatorname{domain}(R^{-1})$.

$a\in\operatorname{domain}(R)\iff\exists b(\langle a,b\rangle\in R)\iff\exists b(\langle b,a\rangle\in R^{-1})\iff a\in\operatorname{range}(R^{-1})$.

定义 1.2

给定关系 R，其逆运算 $R^{-1}=\{\langle b,a\rangle\mid\langle a,b\rangle\in R\}$.

♣

定义 1.3

给定关系 R_1,R_2，其复合运算定义为

$$R_1\circ R_2=\{\langle a,b\rangle\mid\langle a,t\rangle\in R_1\wedge\langle t,b\rangle\in R_2\}.$$

♣

笔记 若将有序对第一、第二个元素 a,b 分别视为矩阵的行、列，则根据定义 1.2，R^{-1} 所对应的关系矩阵应为 $\mathbf{M}_R^{\top}$; 关系复合 $R_1\circ R_2$ 所对应的关系矩阵可以视为 R_1 和 R_2 的关系矩阵 $\mathbf{M}^{(1)},\mathbf{M}^{(2)}$ 做乘法 $\sum\limits_t m_{at}^{(1)}m_{tb}^{(2)}$，其中的加法运算为布尔加法.

定理 1.2

设 R 为 A 上二元关系，则 $R\circ I_A=I_A\circ R=R$.

♡

证明 任取 $\langle a,b\rangle\in R\circ I_A$,

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\in R\circ I_A&\iff\exists t\,(\langle a,t\rangle\in R\wedge\langle t,b\rangle\in I_A)\\&\iff\exists t\,(\langle a,t\rangle\in R\wedge t=b)\\&\iff\langle a,b\rangle\in R.\end{aligned}$$

故 $R \circ I_A = R$. 同理可证 $I_A \circ R = R$.

定理 1.3 (关系复合的结合律)

设 R_1, R_2, R_3 是任意二元关系，则

1. $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$,
2. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

证明 (1) 任取 $\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$,

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 &\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R_1 \circ R_2 \wedge \langle t, b\rangle \in R_3) \\
&\iff \exists t(\exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \langle s, t\rangle \in R_2) \wedge \langle t, b\rangle \in R_3) \\
&\iff \exists t \exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \langle s, t\rangle \in R_2 \wedge \langle t, b\rangle \in R_3) \\
&\iff \exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \exists t(\langle s, t\rangle \in R_2 \wedge \langle t, b\rangle \in R_3)) \\
&\iff \exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \langle s, b\rangle \in R_2 \circ R_3) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3).
\end{aligned}$$

(2) 任取 $\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2)^{-1}$,

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2)^{-1} &\iff \langle b, a\rangle \in R_1 \circ R_2 \\
&\iff \exists t(\langle b, t\rangle \in R_1 \wedge \langle t, a\rangle \in R_2) \\
&\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R_2^{-1} \wedge \langle t, b\rangle \in R_1^{-1}) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}.
\end{aligned}$$

定理 1.4 (关系的逆与并交可交换)

设 R_1, R_2 为 A 上的关系，则

1. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
2. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

证明 (1)

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2 \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \vee \langle y, x\rangle \in R_2 \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y\rangle \in R_2^{-1} \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (R_1 \cap R_2)^{-1} &\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \cap R_2 \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, x\rangle \in R_2 \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle x, y\rangle \in R_2^{-1} \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}.
\end{aligned}$$

定理 1.5 (关系复合的分配律)

设 R_1, R_2, R 为任意二元关系，

1. $R \circ (R_1 \cup R_2) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2$,
2. $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$,
3. $R \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2$,

4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R$.

证明 (1) 任取 $\langle a,b\rangle \in R \circ (R_1 \cup R_2)$,

$$\begin{aligned}
\langle a,b\rangle \in R \circ (R_1 \cup R_2) &\iff \exists t(\langle a,t\rangle \in R \wedge \langle t,b\rangle \in R_1 \cup R_2)\\
&\iff \exists t(\langle a,t\rangle \in R \wedge (\langle t,b\rangle \in R_1 \vee \langle t,b\rangle \in R_2))\\
&\iff \exists t((\langle a,t\rangle \in R \wedge \langle t,b\rangle \in R_1) \vee (\langle a,t\rangle \in R \wedge \langle t,b\rangle \in R_2))\\
&\iff \langle a,b\rangle \in R \circ R_1 \vee \langle a,b\rangle \in R \circ R_2\\
&\iff \langle a,b\rangle \in R \circ R_1 \cup R \circ R_2.
\end{aligned}$$

故 $R \circ (R_1 \cup R_2) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2$.

(3) 任取 $\langle a,b\rangle \in R \circ (R_1 \cap R_2)$,

$$\begin{aligned}
\langle a,b\rangle \in R \circ (R_1 \cap R_2) &\iff \exists t(\langle a,t\rangle \in R \wedge \langle t,b\rangle \in R_1 \cap R_2)\\
&\iff \exists t(\langle a,t\rangle \in R \wedge \langle t,b\rangle \in R_1 \wedge \langle t,b\rangle \in R_2) \quad (1.4)\\
&\implies \exists t(\langle a,t\rangle \in R \wedge \langle t,b\rangle \in R_1) \wedge \exists t(\langle a,t\rangle \in R \wedge \langle t,b\rangle \in R_2) \quad (1.5)\\
&\iff \langle a,b\rangle \in R \circ R_1 \wedge \langle a,b\rangle \in R \circ R_2\\
&\iff \langle a,b\rangle \in R \circ R_1 \cap R \circ R_2.
\end{aligned}$$

故 $R \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2$.

推论 1.1

设 $R_1, R_2, \ldots, R_n, R$ 为任意二元关系,

1. $R \circ (R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2 \cup \ldots \cup R \circ R_n$,
2. $(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R \cup \ldots \cup R_n \circ R$,
3. $R \circ (R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2 \cap \ldots \cap R \circ R_n$,
4. $(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R \cap \ldots \cap R_n \circ R$.

定理 1.6

设 R 为关系, A, B 为集合, 则

1. $R|_{A\cup B} = R|_A \cup R|_B$.
2. $R|_{A\cap B} = R|_A \cap R|_B$.
3. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
4. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.

证明 (1) 任取 $\langle a,b\rangle \in R|_{A\cup B}$,

$$\begin{aligned}
\langle a,b\rangle \in R|_{A\cup B} &\iff \langle a,b\rangle \in R \wedge a \in A \cup B\\
&\iff \langle a,b\rangle \in R \wedge (a \in A \vee a \in B)\\
&\iff (\langle a,b\rangle \in R \wedge a \in A) \vee (\langle a,b\rangle \in R \wedge a \in B)\\
&\iff \langle a,b\rangle \in R|_A \vee \langle a,b\rangle \in R|_B\\
&\iff \langle a,b\rangle \in R|_A \cup R|_B.
\end{aligned}$$

(2) 任取 $\langle a,b\rangle \in R|_{A\cap B}$,

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle \in R|_{A\cap B} &\iff \langle a,b\rangle \in R \wedge a \in A\cap B\\ &\iff \langle a,b\rangle \in R \wedge (a\in A \wedge a \in B)\\ &\iff (\langle a,b\rangle \in R \wedge a\in A)\wedge(\langle a,b\rangle \in R \wedge a\in B)\\ &\iff \langle a,b\rangle \in R|_A \wedge \langle a,b\rangle \in R|_B\\ &\iff \langle a,b\rangle \in R|_A \cap R|_B.\end{aligned}$$

(4) 任取 $b \in R[A\cap B]$,

$$\begin{aligned}b\in R[A\cap B] &\iff \exists a(\langle a,b\rangle \in R \wedge a\in A\cap B)\\ &\iff \exists a(\langle a,b\rangle \in R \wedge (a\in A\wedge a\in B))\\ &\iff \exists a((\langle a,b\rangle \in R \wedge a\in A)\wedge(\langle a,b\rangle \in R\wedge a\in B))\\ &\implies \exists a(\langle a,b\rangle \in R \wedge a\in A)\wedge \exists a(\langle a,b\rangle \in R\wedge a\in B)\\ &\iff b\in R[A]\wedge b\in R[B]\\ &\iff b\in R[A]\cap R[B].\end{aligned}$$

定义 1.4

令 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为:

1. $R^0 = \{\langle a,a\rangle \mid a\in A\} = I_A$.
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$.

笔记 根据定义 1.4和 1.3，使用归纳法容易验证 $\mathbf{M}_{R^n} = \mathbf{M}_R^n$.

定理 1.7

设 R 为集合 A 上的二元关系，$m,n\in\mathbb{N}$，则

1. $R^m\circ R^n = R^{m+n}$,
2. $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明 (1) 令 m 为任意自然数, $n=1$ 时，根据幂运算的定义（定义 1.4）有 $R^m\circ R = R^{m+1}$. 假设其对 $n-1$ $(n\geq 2)$ 成立，即 $R^m \circ R^{n-1} = R^{m+n-1}$，则有

$$R^m\circ R^n = R^m\circ(R^{n-1}\circ R) = (R^m\circ R^{n-1})\circ R = R^{m+n-1}\circ R = R^{m+n}.$$

(2) 直接应用 (1) 可的.

定理 1.8

设 A 为集合且 $|A|=n$，R 为 A 上的二元关系，则存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$.

证明 对任意 $k\in\mathbb{N}$, R^k 均为 $A\times A$ 的子集，而 $A\times A$ 的不同子集共有 $|\mathcal{P}(A\times A)| = 2^{n^2}$ 个. 根据鸽笼原理 Pigeonhole Principle, 将 $R^0, R^1, R^2, \ldots$ 放入 2^{n^2} 个位置，必然存在 $s,t\in\mathbb{N}$ 落入同一个位置（对应同一个子集），即 $R^s = R^t$.

定理 1.9

设 A 为集合，R 为 A 上的二元关系，若存在 $s,t\in\mathbb{N}$ 且 $s<t$ 使得 $R^s=R^t$，则

1. 对任意 $k\in\mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$.
2. 对任意 $k,r\in\mathbb{N}$ 有 $R^{s+k(t-s)} = R^s$ 或 $R^{s+k(t-s)+r} = R^{s+r}$.
3. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R^k = \bigcup\limits_{k=1}^{t-1} R^k$.

证明 (1) 根据定理 1.7，$R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$.

(2) 使用归纳法证明. 对 $k = 0$，$R^{s+0} = R^s$, 结论成立. 假设对 $k = n$ 有 $R^{s+n(t-s)} = R^s$, 则

$$R^{s+(n+1)(t-s)} = R^{s+n(t-s)+t-s} = R^{s+n(t-s)} \circ R^{t-s} = R^s \circ R^{t-s} = R^{s+t-s} = R^t = R^s.$$

其中第 2、4 个等式根据定理 1.7，第 3 个等式根据归纳假设.

$$R^{s+k(t-s)} = R^s \Longrightarrow R^{s+k(t-s)} \circ R^r = R^s \circ R^r \Longrightarrow R^{s+k(t-s)+r} = R^{s+r}.$$

(3) 对任意 $n \in \mathbb{N}, n \geq t$ 有 $n = s + k(t-s) + r$, 其中 $k = \lfloor (n-s)/(t-s) \rfloor, 0 \leq r < t - s$. 故

$$R^n = R^{s+k(t-s)+r} = R^{s+r} \in \bigcup_{k=1}^{t-1} R^k,$$

其中，最后一步成立由于 $s \leq s + r < s + t - s = t$.

1.4 关系的性质

定义 1.5

设 R 为 A 上的关系，

1. 若 $\forall a(a \in A \to \langle a, a \rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是自反的 reflexive.
2. 若 $\forall a(a \in A \to \langle a, a \rangle \notin R)$，则称 R 在 A 上是反自反的 anti-reflexive.

♣

定义 1.6

设 R 为 A 上的关系，

1. 若 $\forall x \forall y(x, y \in A \land \langle x, y \rangle \in R \to \langle y, x \rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是对称的 symmetric.
2. 若 $\forall x \forall y(x \in A \land \langle x, y \rangle \in R \land \langle y, x \rangle \to x = y)$，则称 R 在 A 上是反对称的 anti-symmetric.

♣

定义 1.7

设 R 为 A 上的关系，若 $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \land \langle x, y \rangle \in R \land \langle y, z \rangle \in R \to \langle x, z \rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是传递的 transitive.

♣

笔记 自反与反自反只在对角线上施加约束，全部出现或全部不出现；对称、反对称与传递只在非对角线上施加约束. 因此，一个关系 R 如果只涉及对角线元素，它一定同时是对称、反对称和传递的，是否为自反与反自反则要看对角线是全部出现还是全部不出现.

定理 1.10

设 R 为 A 上的关系，则

1. R 在 A 上自反 $\Longleftrightarrow$ $I_A \subseteq R$.
2. R 在 A 上反自反 $\Longleftrightarrow$ $R \cap I_A = \emptyset$.
3. R 在 A 上对称 $\Longleftrightarrow$ $R = R^{-1}$.
4. R 在 A 上反对称 $\Longleftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
5. R 在 A 上传递 $\Longleftrightarrow$ $R \circ R \subseteq R$.

♡

证明 (1) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle a, a \rangle \in I_A$, 由 R 为 A 上自反关系可知 $\forall x \in A$ 有 $\langle x, x \rangle \in R$. 故 $\langle a, a \rangle \in R$, 即 $I_A \subseteq R$.

($\Longleftarrow$) $I_A \subseteq R$, 故 $\forall x \in A$ 有 $\langle x, x \rangle \in I_A \subseteq R \Longrightarrow \langle x, x \rangle \in R$. 故 R 在 A 上自反.

(2) ($\Longrightarrow$) 假设 $R \cap I_A \neq \emptyset$, 则 $\exists \langle x, y \rangle \in R \cap I_A \Rightarrow x = y \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$, 与 R 在 A 上反自反矛盾.

($\Longleftarrow$) 由 $R \cap I_A = \emptyset$ 可知 $\forall x \in A$ 有 $\langle x, x \rangle \notin R$. 故 R 在 A 上是反自反的.

(3) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R &\iff \langle y, x\rangle \in R \quad (R \text{ is symmetric})\\ &\iff \langle x, y\rangle \in R^{-1}.\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R &\iff \langle y, x\rangle \in R^{-1}\\ &\iff \langle y, x\rangle \in R \qquad (R = R^{-1})\end{aligned}$$

故 R 在 A 上对称.

(4) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1} &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R^{-1}\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R\\ &\Longrightarrow x = y \qquad (R \text{ is antisymmetric})\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle \in I_A.\end{aligned}$$

故 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

($\Longleftarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle$ 若有 $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R^{-1}\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in I_A \qquad \left(R \cap R^{-1} \subseteq I_A\right)\end{aligned}$$

故 R 在 A 上是反对称的.

(5) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R \circ R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \circ R &\Longrightarrow \exists t\, (\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in R)\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \qquad (R \text{ is transitive})\end{aligned}$$

故 $R \circ R \subseteq R$.

($\Longleftarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R &\Longrightarrow \langle x, z\rangle \in R \circ R\\ &\Longrightarrow \langle x, z\rangle \in R \qquad (R \circ R \subseteq R)\end{aligned}$$

故 R 在 A 上是传递的.

例题 1.3 设 R 为 A 上的关系，则

1. 若 R_1, R_2 是自反和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反和对称的.
2. 若 R_1, R_2 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

解 (1) 由 R_1, R_2 是 A 上的自反关系及定理 1.10可知，

$$I_A \subseteq R_1, I_A \subseteq R_2.$$

故 $I_A \subseteq R_1 \cup R_2$. 由定理 1.10可知 $R_1 \cup R_2$ 在 A 上是自反的.

由 R_1, R_2 是 A 上的对称关系及定理 1.10可知，

$$R_1 = R_1^{-1}, R_2 = R_2^{-1}.$$

由定理 1.4可知，

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2.$$

再次应用定理 1.10可知，$R_1 \cup R_2$ 是 A 上的对称关系.

(2) 由 R_1, R_2 是 A 上的传递关系及定理 1.10可知，

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1, R_2 \circ R_2 \subseteq R_2. \tag{1.6}$$

由于，

$$\begin{aligned}
(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2) &\subseteq (R_1 \circ R_1) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) \cap (R_2 \circ R_2) && \text{(Theorem 1.5)} \\
&\subseteq R_1 \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) \cap R_2 && \text{(Eq. 1.6)} \\
&\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) && (\cap \text{ is commutative}) \\
&\subseteq R_1 \cap R_2.
\end{aligned}$$

从而 $R_1 \cap R_2$ 为 A 上的传递关系.

定理 1.11

若 R 是对称的，则 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 有 R^n 为对称关系.

证明 $n = 1$ 时 $R^1 = R$ 成立.

现假设结论对 R^n 成立，即 R^n 为对称关系. 则任取 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R^{n+1} &\iff \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R) \\
&\iff \exists t\,(\langle t, x\rangle \in R^n \wedge \langle y, t\rangle \in R) && \text{(Induction assumption)} \\
&\iff \exists t\,(\langle y, t\rangle \in R \wedge \langle t, x\rangle \in R^n) \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R^{n+1}.
\end{aligned}$$

故 R^{n+1} 满足对称性.

笔记 现对关系的性质总结如下.

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
矩阵	主对角线全 1	主对角线全 0	对称矩阵	$\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^\top$ 为对角阵	$\mathbf{M} - \mathbf{M}^2$ 逐项非负
图	每个顶点均有环	每个顶点均无环	无向图	两点之间至多一条边	$(a_i \to a_k, a_k \to a_j) \Rightarrow a_i \to a_j$

1.5 关系的闭包

定义 1.8

设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的自反（对称或传递）闭包是 A 上的关系 R'，满足一下条件：

1. R' 是自反（对称或传递）的；
2. $R \subseteq R'$；
3. 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 均有 $R' \subseteq R''$.

R 的自反闭包，对称闭包，传递闭包分别记为 $r(R), s(R), t(R)$.

笔记 令关系 R 的关系矩阵为 $\mathbf{M}$，其 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别记为 $\mathbf{M}_r, \mathbf{M}_s, \mathbf{M}_t$，则

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{M} \vee \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{M} \vee \mathbf{M}^\top, \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{M} \vee \mathbf{M}^2 \vee \mathbf{M}^3 \vee \ldots,$$

其中 $\vee$ 表示矩阵逐项进行逻辑或运算，$\mathbf{I}$ 为与 $\mathbf{M}$ 大小兼容的单位矩阵.

定理 1.12

设 R 是 A 上的关系，则有

1. $r(R) = R \cup R^0$;
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$;
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$，若 $|A| = n$，则可在 R^n 处截断.

证明 (1) ① $R \subseteq R \cup R^0$.

② $R^0 = I_A \subseteq R \cup R^0$ 故 $R \cup R^0$ 是自反的.

③ 令 R' 为 A 上包含 R 的自反关系，则 $R \subseteq R', I_A \subseteq R'$. 故 $R \cup R^0 \subseteq R'$.

(2) ① $R \subseteq R \cup R^{-1}$.

② 任取 $\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1}$ 有，

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1} &\iff \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in R^{-1} \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R^{-1} \vee \langle y, x\rangle \in R \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R \cup R^{-1}
\end{aligned}$$

故 $R \cup R^{-1}$ 满足对称性.

③ 令 R' 为 A 上包含 R 的对称关系，任取 $\langle x, y\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R' \\
&\Longrightarrow \langle y, x\rangle \in R'
\end{aligned}$$

故 $R^{-1} \subseteq R'$. 因此 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$.

(3) ① $R \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} R^n$.

② 现证 $\cup_{n=1}^{\infty} R^n$ 满足传递性. $\forall \langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \cup_{n=1}^{\infty} R^n$ 有

$$\begin{aligned}
\exists t\left(\langle x, y\rangle \in R^t\right) \wedge \exists s\left(\langle y, z\rangle \in R^s\right) &\Longrightarrow \exists t \exists s\left(\langle x, z\rangle \in R^t \circ R^s\right) \\
&\Longrightarrow \exists t \exists s\left(\langle x, z\rangle \in R^{t+s}\right) \\
&\Longrightarrow \langle x, z\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.
\end{aligned}$$

③ 令 R' 为 A 上包含 R 的传递关系，现证 $\cup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R'$. 只需证明 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $R^n \subseteq R'$.

对 $n = 1$ 有 $R^1 \subseteq R'$ 成立.

现假设 $R^n \subseteq R'$. 任取 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$ 有

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R^{n+1} &\iff \langle x, y\rangle \in R^n \circ R \\
&\iff \exists t\,(x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R) \\
&\Longrightarrow \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R' \wedge \langle t, y\rangle \in R') && \text{(assumption)} \\
&\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R' && (R' \text{ is tansitive})
\end{aligned}$$

故 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $R^n \subseteq R'$.

定理 1.13

设 R 是非空集合 A 上的关系，则

1. R 是自反的 $\iff r(R) = R$;
2. R 是对称的 $\iff s(R) = R$;
3. R 是传递的 $\iff t(R) = R$.

证明 通过闭包的定义可以直接验证.

定理 1.14

令 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$,
2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$,
3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

证明 直接使用定理 1.12可证.

定理 1.15

设 R 是非空集合 A 上的关系，

1. 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的；
2. 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的；
3. 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的.

证明 (1) $s(R) = R \cup R^{-1}, t(R) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$. 由 R 是自反的可知 $I_A \subseteq R$. 从而 $I_A \subseteq s(R), I_A \subseteq t(R)$. 故 $s(R), t(R)$ 为自反的.

(2) $r(R) = R \cup I_A$, 从而

$$\begin{aligned} r(R)^{-1} &= (R \cup I_A)^{-1} \\ &= R^{-1} \cup I_A^{-1} \quad \text{(Theorem 1.4)} \\ &= R \cup I_A \qquad (R \text{ is symmetric}) \\ &= r(R). \end{aligned}$$

故 $r(R)$ 为对称的.

$t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. 任取 $\langle x, y\rangle \in t(R)$ 有

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle \in t(R) &\implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ (\langle x, y\rangle \in R^n) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{Z}^+ (\langle y, x\rangle \in R^n) \quad \text{(Theorem 1.11)} \\ &\implies \langle y, x\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = t(R) \end{aligned}$$

(3) $r(R) = R \cup R^0, \forall \langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R \cup R^0$ 有如下结论.

若 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R$ $(\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R^0 = I_A)$, 则 $\langle x, z\rangle \in R \subseteq r(R)$ $(\langle x, z\rangle \in R^0 \subseteq r(R))$.

若 $\langle x, y\rangle \in R, \langle y, z\rangle \in R^0$ 则 $y = z$, 从而 $\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle \in R \subseteq r(R)$.

若 $\langle x, y\rangle \in R^0, \langle y, z\rangle \in R^0$ 则 $x = y$, 从而 $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \in R \subseteq r(R)$.

即 $\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle \in R \subseteq r(R)$. 故 $r(R)$ 满足传递性.

1.6 等价关系与划分

定义 1.9

设 R 是非空集合 A 上的关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\},$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类（equivalence class），简称为 x 的等价类，简记为 $[x]$.

定义 1.10

设 A 为非空集合，若 A 的子集族 π ($\pi \subseteq \mathcal{P}(A)$) 满足:

1. $\emptyset \notin \pi$,
2. $\forall a \forall b(a, b \in \pi \wedge a \neq b \to a \cap b = \emptyset)$,
3. $\bigcup_{a \in \pi} a = A$,

则称 π 是 A 的一个划分（partition），称 π 中元素为 A 的划分块.

♣

定理 1.16

令 R 是非空集合 A 上的等价关系，则对于 $a, b \in A$ 如下陈述是等价的:

1. aRb.
2. $[a] = [b]$.
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

♡

证明 由 (1) 证明 (2), 假设 aRb. $\forall c \in [a]$, 有 aRc. 由 R 对称性可知有 bRa, 由传递性可知 $bRa, aRc \Longrightarrow bRc$. 故 $c \in [b]$, 从而 $[a] \subseteq [b]$. 同理可证 $[b] \subseteq [a]$. 因此，$[a] = [b]$.

由 (2) 证明 (3), 假设 $[a] = [b]$. 由于 $[a]$ 包含元素 a 因此集合非空，故 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

由 (3) 证明 (1), 假设 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. 由假设条件可知，至少存在元素 $c \in [a], c \in [b]$, 即 aRc, bRc. 由 R 对称性可知有 cRb. 由 R 传递性可知 $aRc, cRb \Longrightarrow aRb$.

注 定理 1.16告诉我们，等价类要么相等，要么相交为空. 因为 $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longrightarrow [a] = [b]$, 故 $[a] \neq [b] \Longrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.

推论 1.2

令 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 R 的等价类 $[a]_R$ 构成了集合 A 的一个划分.

♡

注 · 推论 1.2成立由于如下观察：1) $\bigcup_{a \in A} [a] = A$, 这是因为 $\forall a \in A, a \in [a]$; 2) 若 $[a] \neq [b]$, 则 $[a] \cap [b] = \emptyset$.