拉普拉斯变换

习 题 七

班级：

学号：

姓名：

成绩：

心得 体会 拓广 疑问

1 求下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t)=\sin\dfrac{t}{3}$.

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}$.

(3) $f(t)=t^2$.

(4) $f(t)=\cos^2 t$.

2 求下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2\\ -1, & 2\leqslant t<4.\\ 0, & t\geqslant 4\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}t+1, & 0\leqslant t<3\\ 0, & t\geqslant 3\end{cases}$.

(3) $f(t)=\delta(t)\cos t-u(t)\sin t$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 设 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数，且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\leqslant\pi\\ 0, & \pi<t\leqslant 2\pi\end{cases}$$

求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

4 求下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t)=3t^4-2t^{\frac{3}{2}}+6$.

(2) $f(t)=1-te^t$.

(3) $f(t)=\dfrac{t}{2a}\sin at, a>0$.

(4) $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}, a>0$.

(5) $f(t)=e^{-3t}\cos 4t$.

年　月　日

5 利用象函数的导数公式计算下列各式.

(1) $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}$,求 $f(t)=\mathscr{L}[F(s)]$.

(2) $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$,求 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$.

6 利用象函数的积分公式计算下列各式.

(1) $F(s)=\frac{s}{(s^2-1)^2}$,求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

(2) $f(t)=\int_0^t \frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$,求 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

7 利用拉普拉斯变换的性质求下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t)=\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$.

(2) $f(t)=t^2\sin 2t$.

(3) $f(t)=t\int_0^t e^{-at}\sin bt\,dt, a, b\in\mathbf{R}$.

8 求 $f_1(t)=\sin\left(t-\dfrac{2}{3}\right)$ 与 $f_2(t)=u\left(t-\dfrac{2}{3}\right)\sin\left(t-\dfrac{2}{3}\right)$ 的拉普拉斯变换. 对比两者的结果,请说明你得到的启示.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

9 计算下列积分.

(1) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-t} dt$.

(2) $\int_0^{\infty} e^{-3t} \cos 2t dt$.

(3) $\int_0^{\infty} t e^{-3t} \sin 2t dt$.

10 (1) 设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, $b>0$, 证明:

$$\mathscr{L}[f(t-b)u(t-b)]=e^{-bs}F(s)$$

(2) 设 $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ 0, & t>2\pi\end{cases}$, 求 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

11 求下列函数的拉普拉斯逆变换.

(1)$F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$.

(2)$F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$.

(3)$F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}$.

(4)$F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$.

12 (1) 设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)],c>0,d\in\mathbf{R}$. 证明:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(cs+d)]=\frac{1}{c}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{d}{c}\right)t}f\left(\frac{t}{c}\right)$$

(2) 求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+1}{2s^2+2s+1}\right]$.

(3) 求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{7s+3}{9s^2+12s+8}\right]$.

年　月　日

13 求下列函数的拉普拉斯逆变换的初值与终值.

(1) $F(s)=\dfrac{s+6}{(s+2)(s+5)}$.

(2) $F(s)=\dfrac{10(s+2)}{s(s+5)}$.

14 利用卷积定理证明：

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{t}{2a}\sin at, a>0$$

15 求下列函数的拉普拉斯逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2^2)^2}$.

(2) $F(s)=\dfrac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

16 求下列函数的拉普拉斯逆变换.

心得 体会 拓广 疑问

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s+4)^2}$.

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$.

(3) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$.

(4) $F(s)=\arctan\dfrac{1}{s}$.

(5) $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$.

(6) $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$.

(7) $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$.

年　月　日

17 利用公式

$$\mathscr{L}\left[\int_b^a f(t,x)\mathrm{d}x\right]=\int_b^a \mathscr{L}[f(t,x)]\mathrm{d}x$$

计算下列积分.

(1) $g(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

(2) $h(t)=\int_0^{\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\mathrm{d}x, a,t>0$.

(3) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x, \int_0^{\infty}\frac{x\sin 2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

18 求下列微分方程或微分方程组初值问题的解.

(1) $x''+4x'+3x=\mathrm{e}^{-t}, x(0)=x'(0)=1$.

(2) $x''-x'=4\sin t+5\cos 2t, x(0)=-1, x'(0)=-2$.

(3) $\begin{cases} x'+x-y=\mathrm{e}^{t} \\ 3x+y'-2y=2\mathrm{e}^{t} \end{cases}, x(0)=y(0)=1$.

19 求下列积分方程的解.

(1) $1-2\sin t=y(t)+\int_0^t \mathrm{e}^{2(t-\tau)}y(\tau)\mathrm{d}\tau$.

(2) $y(t)=a\sin bt+c\int_0^t y(\tau)\sin b(t-\tau)\mathrm{d}\tau, a\in\mathbf{R}, b>c>0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

20 求下列微分、积分方程的解.

(1) $y'(t)-4y(t)+4\int_0^t y(t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}, y(0)=0.$

(2) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(t)\mathrm{d}t=2[u(t-1)-u(t-2)], y(0)=1.$

年 月 日