第二章 解析函数

2.1.1 复变函数的导数

1. 导数

定义 2.1.1 设函数$w=f(z)$为定义在区域D内的单值函数，$z_0 \in D$

且$w_0=f(z_0)$, 并记 $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$,

如 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在有限的极限值 A,

则称 $f(z)$在 z_0 可导，称 A为 $f(z)$ 在 z_0 处的导数，记作 $f'(z_0)$.

- 如果函数 $f(z)$在区域D内的每一点都可导，则称 $f(z)$ 在D内可导，此时即得 $f(z)$的导(函)数 $f'(z)$.

2.1.1 复变函数的导数

2. 微分

定义 设函数$w = f(z)$为定义在区域D内的单值函数，$z + \Delta z \in D$

如果存在A，使得

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|),$$

则称 $f(z)$在 z 处可微，$A\Delta z$ 为微分，记作 $\mathrm{d}w = A\Delta z$且$A = f'(z)$.

特别地，有 $\mathrm{d}z = \Delta z$.（考虑函数$w = f(z) = z$即可）

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}w = A\mathrm{d}z.}$$

- 若$f(z)$在区域D内处处可微，则称$f(z)$在D内可微。

- 导数反映的是“变化率”；而微分更能体现“逼近”的思想。

例 求下列函数的的导数。

(1) $f(z)=z^2$; (2) $f(z)=\dfrac{1}{z}$.

解 (1) 由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z,$$

得 $f'(z)=(z^2)'=2z$.

同理可得 $(z^n)'=nz^{n-1}$，(n为正整数);

$(C)'=0$，(C为复常数)。

例 求下列函数的的导数。

(1) $f(z)=z^2$; (2) $f(z)=\dfrac{1}{z}$.

解 (2) 由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{z(z+\Delta z)}=-\frac{1}{z^2}.$$

得 $f'(z)=\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}.\quad (z\neq 0)$

2.1.1 复变函数的导数

3. 可导与可微以及连续之间的关系

(1) 可导 $\rightleftharpoons$ 可微

例2.1.2 问 $f(z) = \bar{z}$ 是否可导？

(2) 可导 $\substack{\longrightarrow \\ \not\longleftarrow}$ 连续

- 由此可见，上述结论与一元实函数是一样的。

2.1.1 复变函数的导数

4. 求导法则

(1) 四则运算法则

$$[f(z)\pm g(z)]' = f'(z)\pm g'(z);$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2},\quad (g(z)\neq 0).$$

2.1.1 复变函数的导数

4. 求导法则

(1) 四则运算法则

(2) 复合函数的求导法则

$$[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z).$$

(3) 反函数的求导法则

$$\varphi'(w) = \left.\frac{1}{f'(z)}\right|_{z=\varphi(w)} = \frac{1}{f'[\varphi(w)]}.$$

其中，$z=\varphi(w)$ 与 $w=f(z)$ 是两个互为反函数的单值函数，且 $f'(z)\neq 0$.

2.1.2 复变函数解析的概念

1. 解析

定义 2.1.2 (1) 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点以及 z_0 点的邻域内处处可导，

则称 $f(z)$在 z_0 点解析；

(2) 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点解析，

在区域 D 内解析，或者称 $f(z)$ 是 D 内的解析函数。

关系 (1) 点可导 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 点解析；

(2) 区域可导 $\rightleftarrows$ 区域解析。

奇点 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。

2.1.2 复变函数解析的概念

2. 运算法则

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析。

(2) 如果函数 $\xi = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w = f(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析，且对 D 内的每一点 z，函数 $g(z)$ 的值都属于 G，则复合函数 $w = f[g(\xi)]$ 在 D 内解析。

推论： （1）复多项式函数在复平面上解析

（2）有理分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$在分母不为零处解析。

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z+3}{4z^2-1}$ 的解析区域及在该区域上的导数。

解 设 $P(z)=z+3$，$Q(z)=4z^2-1$，由函数 z^n 的解析性以及求导法则可知：

当 $Q(z)\neq 0$ 时，$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 解析，

又方程 $Q(z)=4z^2-1=0$ 的根是 $z=\pm\dfrac{1}{2}$，

因此在全平面除去点 $z=\pm\dfrac{1}{2}$ 的区域内，$f(z)$ 解析。

$$f'(z)=\frac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{[Q(z)]^2}=\frac{4z^2-1-8z(z+3)}{(4z^2-1)^2}.$$

例 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的解析性。

解 由 $w=f(z)=|z|^2=z\bar{z}$, $(=x^2+y^2)$ 有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\bar{z}+z\boxed{\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}}+\overline{\Delta z}\right).$$

极限不存在
（见 § 1.3 PPT P31）

当 $z=0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=0$，即 $f'(0)=0$;

当 $z\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 不存在。

因此，$w=f(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 点可导，处处不解析。

例 讨论函数 $w = f(z) = x + i2y$ 的解析性。

解
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(x+\Delta x)+i2(y+\Delta y)-(x+i2y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x+i2\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = 2,$

当 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = 1,$

因此，$w = f(z) = x + i2y$ 处处不可导，处处不解析。

第二章 解析函数

§ 2.1 解析函数的概念

§ 2.2 解析函数的充要条件

§ 2.3 解析函数和调和函数

§ 2.4 初等函数

- 极限

定理 1.3.1 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, $A=u_0+i\,v_0$, $z_0=x_0+i\,y_0$,

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x,y)=v_0$.

- 连续

定理 1.3.4 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+i\,y_0$ 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续。

问题 考虑对于可导以及解析的条件，是否可以转换成 $u(x,y),v(x,y)$可导（偏导）？

反例： 例2.1.2 问$f(z)=\bar{z}$是否可导？

$u(x,y),v(x,y)$可偏导但$f(z)$不可导。

1. 点可导的充要条件

定理 2.2.1 函数 $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ 在点 $z = x + i\,y$ 处可导的充要条件是：$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，且满足柯西–黎曼（Cauchy-Riemann）方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

（简称 $C-R$ 方程）

附 实二元函数 $u(x, y)$ 可微的含义：

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \boxed{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}.$$

$$\boxed{o(|\Delta z|)}$$

- 对二元实函数：偏导数存在 $\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ 可微 $\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ 偏导数连续。

1. 点可导的充要条件

证明 必要性 “$\Rightarrow$”若 $w=f(z)=u+iv$ 在 $z=x+iy$ 处可导，

则必可微，即 $\Delta w=f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|)$,

记 $f'(z)=a+ib$，由 $\Delta w=\Delta u+i\Delta v$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 有

$$\Delta u+i\Delta v=(a+bi)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|), \\ \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|), \end{cases}$$

故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且

$$a=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad -b=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1. 点可导的充要条件

证明 充分性 "$\Leftarrow$ "若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微, 则

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

又由 u 和 v 满足 $C-R$ 方程: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, 得

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta w = \Delta u + i\Delta v = (u'_x + i{v'}_x)\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + o(|\Delta z|),$$

即 $f(z)$ 在 $z = x + iy$ 处可微(可导), 且 $f'(z) = u'_x + iv'_x$.

1. 点可导的充要条件

推论： 若 $f(z)$ 在 $z=x+iy$ 处可导，则求导公式

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. 区域解析的充要条件

定理 2.2.2 函数 $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是：$\boxed{u(x,y)\text{ 和 }v(x,y)\text{ 在区域 }D\text{ 内可微，}}$ 且满足 $C-R$ 方程。

推论 若函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的四个偏导数 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y 在区域 D 内存在且连续，并满足 $C-R$ 方程，则函数 $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析。

- 对二元实函数：偏导数存在 $\underset{\leftarrow}{\not\rightarrow}$ 可微 $\underset{\leftarrow}{\not\rightarrow}$ 偏导数连续。

例 讨论函数 $w=\overline{z}$ 的可导性与解析性。

解 由 $w=\overline{z}=x-iy$，有 $u=x, v=-y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

可知不满足 $C-R$ 方程，

所以 $w=\overline{z}$ 在复平面内处处不可导， 处处不解析。

例 讨论函数 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)$ 的可导性与解析性。

解 由 $u=\mathrm{e}^{x}\cos y,\ v=\mathrm{e}^{x}\sin y$，有

$$\left.\begin{aligned} &u'_x=\mathrm{e}^{x}\cos y, \quad u'_y=-\mathrm{e}^{x}\sin y,\\ &v'_y=\mathrm{e}^{x}\cos y, \quad v'_x=\mathrm{e}^{x}\sin y, \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\text{四个偏导数连续,}\\ &\text{且满足}\ C-R\ \text{方程,}\end{aligned}$$

故 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)$ 在全平面上处处可导，

处处解析，且 $f'(z)=u'_x+iv'_x=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)$.

注 函数 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)=\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{iy}\ \overset{\text{记为}}{=\!=}\ \mathrm{e}^{z}$,

本例结果表明：$(\mathrm{e}^{z})'=\mathrm{e}^{z}$.

例 讨论函数 $w=\overline{z}\,z^2$ 的可导性与解析性。

解 由 $w=\overline{z}\,z^2=|z|^2 z=(x^3+xy^2)+i(x^2y+y^3)$,

有 $u=x^3+xy^2,\ v=x^2y+y^3$,

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2, & \dfrac{\partial v}{\partial x}=2xy,\end{array}\right\}$$

由 $C-R$ 方程,

$\Rightarrow\ x=y=0,$

所以 $w=\overline{z}\,z^2$ 仅在 $(0,0)$ 点可导， 处处不解析。

例 2.2.4 设函数$f(z) = u + iv$在区域D内解析，且$v = u^2$，试证$f(z)$在D内为一常数.

例 2.2.5 证明函数$f(z)=\sqrt{|xy|}$在点$z=0$处满足**C-R**方程，但并不可导.

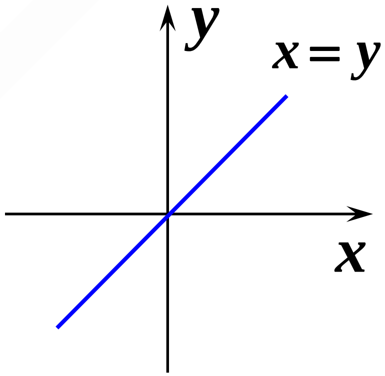
例 讨论函数 $f(z)=x^2+iy^2$ 的可导性与解析性。

解 由 $u=x^2, v=y^2$，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial v}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{aligned}\right\}$$

由 $C-R$ 方程，

$\Rightarrow \quad x=y,$



所以 $f(z)=x^2+iy^2$ 仅在直线 $x=y$ 上可导，处处不解析。

例 设函数 $f(z)=u+iv_1$ 和 $g(z)=u+iv_2$ 均在某区域 D 内解析，证明：$v_1(x,y)=v_2(x,y)+c$，其中 c 为常数。

解 令 $h(z)=f(z)-g(z)=0+i(v_1-v_2)\overset{\text{记为}}{=\!=}\tilde{u}+i\tilde{v}$，

由 $f(z)$ 和 $g(z)$ 解析，得 $h(z)$ 也解析，

由 $C-R$ 方程有 $\tilde{u}'_x=\tilde{v}'_y, \quad \Rightarrow \quad (v_1-v_2)'_y=0,$

$$\tilde{u}'_y=-\tilde{v}'_x, \quad \Rightarrow \quad (v_1-v_2)'_x=0,$$

即得 $v_1(x,y)-v_2(x,y)=c$ (常数)。

意义 解析函数的实部一旦给定，则虚部只能相差一个常数。

(虚部) (实部)

第二章 解析函数

1. 调和函数

定义 若二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内有连续二阶偏导数，

且满足拉普拉斯(Laplace)方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0,$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数。

注 泊松(Poisson)方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=f(x,y).$$

1. 调和函数

定理 2.3.1 若函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析，则 $u(x,y)$, $v(u,y)$ 在区域 D 内都是调和函数。

证明 由 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 解析，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \underset{(?)}{\Rightarrow}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},$$

高阶导数定理：解析函数的导数也解析

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \underset{(?)}{\Rightarrow}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

$$\underset{(?)}{\Rightarrow}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

偏导连续，可交换次序

同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

2. 共轭调和函数

定义 设函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 均为区域 D 内的调和函数，

且满足 $C-R$ 方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

则称 v 是 u 的共轭调和函数。

定理 2.3.2 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是：**在区域 D 内，v 是 u 的共轭调和函数**。

注意 v 是 u 的共轭调和函数 $\not\Rightarrow$ u 是 v 的共轭调和函数。

$\Rightarrow$ $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

注：

- 定理给出了解析函数实部虚部的关系
- 反之，如有两个函数有共轭调和关系，则它们可以构成一个解析函数。

3. 构造解析函数

问题 已知实部 u，求虚部 v（或者已知虚部 v，求实部 u），

使 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，且满足指定的条件。

依据 构造解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的依据：

(1) u 和 v 本身必须都是调和函数；

(2) u 和 v 之间必须满足 $C-R$ 方程。

即v是u的共轭函数

方法

- 偏积分法
- 全微分法

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数

1. 连续二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=0$$

2. 拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

故 $u(x,y)$ 是调和函数。

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$

方法一：偏积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$$\Rightarrow\ v=\int(3x^2-3y^2)\,\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+\varphi(x),$$

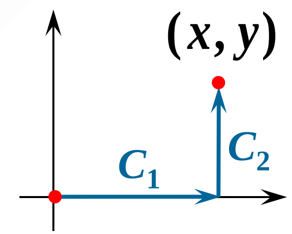
由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy$, $\Rightarrow\ \varphi'(x)=0$,

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=c,\ \Rightarrow\ v(x,y)=3x^2y-y^3+c.$$

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解

方法二：全微分法



由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy$,

$$\Rightarrow \mathrm{d}v=v'_x\mathrm{d}x+v'_y\mathrm{d}y=6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$

$$=3x^2y-y^3+c.$$

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (3) 求确定常数 c

$$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c),$$

根据条件 $f(i)=-i$，将 $x=0$，$y=1$ 代入得

$$i(-1+c)=-i, \quad \Rightarrow \quad c=0,$$

即得 $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=z^3.$

3. 构造解析函数

方法 • 偏积分法（不妨仅考虑已知实部 u 的情形）

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的两个偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行（偏）积分得：

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\tilde{v}(x,y)+\varphi(x), \quad (C)$$

其中，$\tilde{v}(x,y)$ 已知，而 $\varphi(x)$ 待定。

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式，求解即可得到函数 $\varphi(x)$.

3. 构造解析函数

方法 ● 全微分法（不妨仅考虑已知实部 u 的情形）

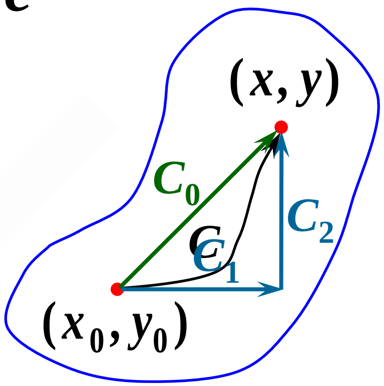
(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的全微分：

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

(2) 利用第二类曲线积分（与路径无关）得到原函数：

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_C-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c.$$



其中，$C=C_0$ 或 C_1+C_2.

第二章 解析函数

§ 2.4 初等函数

- 复变函数中的初等函数是实数域中初等函数的推广，它们的定义方式尽可能保持一致。特别是当自变量取实值时，两者是一样的。

- 本节主要从下面几个方面来讨论复变函数中的初等函数：定义、定义域、运算法则、连续性、解析性、单值性以及映射关系等等。特别要注意与实初等函数的区别。

2.4.1 指数函数

定义 对于复数 $z = x + iy$，称 $w = e^x(\cos y + i\sin y)$ 为指数函数，

记为 $w = \exp z$ 或 $w = e^z$.

注 (1) 指数函数是初等函数中最重要的函数，其余的初等函数都通过指数函数来定义。

(2) 借助欧拉公式，指数函数可以这样来记忆：

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

性质 (1) e^z 是单值函数。

事实上，对于给定的复数 $z = x + iy$，

定义中的 e^x, $\cos y$, $\sin y$ 均为单值函数。

2.4.1 指数函数

性质 (2) e^z除无穷远点外，处处有定义。

事实上，在无穷远点有

当 $y=0, x\to+\infty$ 时，$e^z\to+\infty$;

当 $y=0, x\to-\infty$ 时，$e^z\to 0$.

(3) $e^z\neq 0$. 因为 $e^x>0, \cos y+i\sin y\neq 0$.

(4) e^z 在复平面上处处解析，且$(e^z)'=e^z$.

(5) $\forall z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$，有 $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

(6) e^z 是以 $2k\pi i$为周期的周期函数。

2.4.3 对数函数

- 对数函数定义为指数函数的反函数。

定义 满足方程 $e^w = z$ 的函数 $w = f(z)$ 称为对数函数，

记作 $w = \mathrm{Ln}\, z$.

计算 令 $z = |z| e^{i\,\mathrm{Arg}\, z} = r e^{i\theta}$，$w = u + iv$，

由 $e^w = z$，有 $e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\theta}$，

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \ln r = \ln|z|, \\ v = \theta = \mathrm{Arg}\, z. \end{cases}$$

—— 由 z 的模得到 w 的实部；

—— 由 z 的辐角得到 w 的虚部。

即 $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\, Arg\, z$

$$= \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

2.4.3 对数函数

$$\boxed{w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i\,,\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).}$$

- 显然对数函数为多值函数。

主值

称 $w = \ln|z| + i\arg z$ 为 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的主值,

记为 $w = \ln z$.

故有 $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

特别地，当 $z = x > 0$ 时,

$\mathrm{Ln}\, z$ 的主值 $\ln z = \ln x$ 就是实对数函数。

例 求下列对数以及它们的主值。

(1) $Ln(-1)$ (2) $\mathrm{Ln}(1+i)$.

解 (1) $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) + 2k\pi i$

$$= \ln 1 + \pi i + 2k\pi i = \pi i + 2k\pi i,$$

主值 $\ln(-1) = \pi i.$

(2) $\mathrm{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i$

$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi i,$$

主值 $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}\right).$

2.4.3 对数函数

性质 (1) $w = \mathrm{Ln}\, z$ 在原点无定义，故它的定义域为 $z \neq 0$.

注意到，函数 $\arg z$ 在原点无定义；或者指数函数 $e^{w} \neq 0$.

(2) $\mathrm{Ln}\, z$ 在除去原点及负实轴的复平面内连续；

特别地，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的复平面内连续。

注意到，函数 $\arg z$ 在原点及负实轴上不连续。

2.4.3 对数函数

性质 (3) $\operatorname{Ln} z$ 在除去原点及负实轴的复平面内解析；

特别地，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的平面内解析。

由反函数求导法则可得 $$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{(\mathrm{e}^{w})'_{w}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{w}}=\frac{1}{z}.$$

进一步有 $$\frac{\mathrm{d}\operatorname{Ln} z}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}(\ln z+2k\pi i)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{z}.$$

(4) $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$;

$$\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2.$$

(在集合意义下)

性质(4)：$Ln(z_1z_2)=Ln(z_1)+Ln(z_2)$ “集合意义下相等”

证明：
$$Ln(z_1z_2)=Ln|z_1z_2|+iArg(z_1z_2)$$

$$=Ln|z_1|+Ln|z_2|+iArg(z_1z_2)$$

$$Ln(z_1)+Ln(z_2)=Ln|z_1|+iArg(z_1)+Ln|z_2|+iArg(z_2)$$

问题归结为$Arg(z_1z_2)\overset{?}{=}Arg(z_1)+Arg(z_2)$

从$Arg(z_1)$和$Arg(z_2)$中分别取一个辐角进行指数表示复数z_1,z_2，根据相乘法则，两辐角和为$z_1\,z_2$的一个辐角，即$Arg(z_1z_2)$. ⟹ “集合意义下相等”

⟹ $Ln(z_1z_2)=Ln(z_1)+Ln(z_2)$ “集合相等”

! 注：等式 $Lnz^n = nLnz$，$Lnz^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}Lnz$ 不成立

例： $Lnz^2 = 2Lnz$？

解： $Lnz^2 = Lnz \cdot z = Lnz + Lnz$

但 $Lnz + Lnz \neq 2Lnz$

事实上，比如 $Ln(-1) = \{\pm\pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \cdots\}$

$$Ln(-1) + Ln(-1) = \{0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \cdots\}$$

而 $2Ln(-1) = \{\pm 2\pi i, \pm 6\pi i, \cdots\}$

思考：$Lne^z = z$ 是否成立？

2.4.4 幂函数

定义 函数 $w = z^{\alpha}$ 规定为 $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln} z}$（$\alpha$为复常数，$z \neq 0$）称为复变量 z 的幂函数。

还规定：当 α 为正实数，且 $z = 0$ 时，$z^{\alpha} = 0$.

2.4.4 幂函数

$$Lnz = lnz + i2k\pi$$

讨论 (1) 当α为正整数时, $z^n = e^{n\mathrm{Ln}z} = e^{n\ln z}$. (单值)

此时, z^α处处解析, 且 $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

(2) 当α为负整数时, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$. (单值)

此时, z^α除原点外处处解析, 且 $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

(3) 当$\alpha = 0$时, $z^0 = 1$.

2.4.4 幂函数

讨论 (4) 当 α 为有理数时, $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$. ($n$值)

其中，m 与 n 为互质的整数，且 $n \geq 1$.

此时，z^α 除原点与负实轴外处处解析，

且 $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

(5) 当 α 为无理数或复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$)时,

一般为无穷多值。

此时，z^α 除原点与负实轴外处处解析。

例 求 i^i 的值。

解 $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

- 可见，i^i 是正实数，它的主值是 $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 的值。

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{\sqrt{2}[0+i(0+2k\pi)]} = e^{2\sqrt{2}k\pi i}$

$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

- 可见，不要想当然地认为 $1^{\alpha}=1$.

2.4.2 三角函数与双曲函数

启示 由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，有 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$,

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}).$$

定义 余弦函数 $\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$;

正弦函数 $\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$.

其它三角函数 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$,

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

2.4.2 三角函数与双曲函数

定义 双曲正弦函数 $\operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z});$

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z});$

双曲正切函数 $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};$

双曲余切函数 $\operatorname{coth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$

2.4.2 三角函数与双曲函数

性质（略）

- 周期性、可导性、奇偶性、零点等与实函数一样；
- 各种三角公式以及求导公式可以照搬；
- 有界性(即 $|\sin z|\le 1, |\cos z|\le 1$)不成立。

例如：当y为实数时，有

$$\cos(iy)=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\to+\infty，\quad y\to+\infty$$

例 求 $\sin(1+2i)$.

解 根据定义，有

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}(\cos 1-i\sin 1)}{2i}$$

$$=\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}\sin 1+i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos 1.$$

2.4.5 反三角函数与反双曲函数

定义 如果 $\cos w = z$，则称 w 为复变量 z 的反余弦函数，

记为 $w = \mathrm{Arc}\cos z$.

计算 由 $z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$， $\Rightarrow (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$，

$$\Rightarrow e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \Rightarrow iw = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\Rightarrow w = \mathrm{Arc}\cos z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

- 同理可得 $\mathrm{Arc}\sin z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$;

$$\mathrm{Arc}\tan z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i + z}{i - z}.$$

2.4.5 反三角函数与反双曲函数

定义 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right);$

反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$

反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z};$

反双曲余切函数 $\operatorname{Arcoth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}.$