留数及其应用

习 题 五

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

1 下列各函数有哪些孤立奇点？各属于哪一类型？如果是极点，请指出它的阶.

(1) $\dfrac{1}{z^3\,(z^2+1)^2}$.

(2) $\dfrac{e^z\sin z}{z^2}$.

(3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$.

(4) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^z)}$.

(5) $\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z}$.

(6) $\dfrac{\ln\,(1+z)}{z}$.

2 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}$ 在 $z=2$ 处有一个 3 阶极点，这个函数又有如下的洛朗展开式

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}=\cdots+\frac{1}{(z-2)^6}+\frac{1}{(z-2)^5}+\frac{1}{(z-2)^4},1<|z-2|<\infty$$

所以 $z=2$ 是 $f(z)$ 的一个本性奇点；又因为上式不含有 $\dfrac{1}{z-2}$ 项，所以 $\text{Res}[f(z),2]=0$. 这些结论是否正确？

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别在点 $z=a$ 处有 m 阶和 n 阶零点，那么

$$f(z)+g(z),f(z)g(z),\frac{f(z)}{g(z)}$$

在点 $z=a$ 处各有什么性质？

4 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别在点 $z=a$ 处解析和有本性奇点，那么

$$f(z)+g(z),f(z)g(z),\frac{f(z)}{g(z)}$$

在点 $z=a$ 处各有什么性质？

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

5 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别在点 $z=a$ 处有 m 阶和 n 阶极点，那么

$$f(z)+g(z),\ f(z)g(z),\ \frac{f(z)}{g(z)}$$

在点 $z=a$ 处各有什么性质？

6 设点 $z=a$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$(z-a)^k f(z)$（k 为正整数）在点 a 的某个去心邻域有界. 证明：点 $z=a$ 是 $f(z)$ 的不高于 k 阶的极点或可去奇点.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

7 证明:若 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的本性奇点,且 $f(z)\neq 0$,则 z_0 也是$\dfrac{1}{f(z)}$的本性奇点.

8 判断 $z=\infty$是下列函数的什么奇点.

(1)$\dfrac{z}{5-z^4}$.

(2)$1+z+z^2$.

(3)$e^{\frac{1}{z}}+z^3-2$.

(4) $\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$.

(5)e^z.

年　月　日

9 求下列各函数 $f(z)$ 在孤立奇点(不考虑∞)的留数.

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$.

(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

(3) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$, $n=1,2,\cdots$.

(4) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$.

(5) $f(z)=\cot^2 z$.

(6) $f(z)=\dfrac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

10 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均在点 z_0 处解析，且

$$f(z_0)\neq 0,g(z_0)=g'(z_0)=0,g''(z_0)\neq 0$$

证明：点 z_0 是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的 2 阶极点，且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},z_0\right]=2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{f(z_0)g^{(3)}(z_0)}{[g''(z_0)]^2}$$

年 月 日

11 假设 $z=\infty$ 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点. 证明:

(1)若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点,则

$$\operatorname{Res}[f,\infty]=\lim_{z\to\infty} z^2 f'(z)$$

(2)若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点,则

$$\operatorname{Res}[f,\infty]=\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty} z^{m+2} f^{(m+1)}(z)$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

12 求下列函数在 $z=\infty$ 的留数.

(1) $z^2\sin\frac{1}{z}$.

(2) $e^{z+\frac{1}{z}}$.

(3) $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

(4) $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

13 举例说明若 $z=\infty$ 是解析函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 可能不等于零.

心得 体会 拓广 疑问

14 设多项式 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 有 n 个彼此相异的零点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$；$Q(z)=z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$. 证明：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q(z_k)}{P'(z_k)}=1$$

年 月 日

15 计算下列各积分.

(1) $\oint_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}, C:|z-2|=\frac{1}{2}$.

(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}, C:x^2+y^2=2x$.

(3) $\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\mathrm{d}z, C:|z|=4$.

(4) $\oint_C \frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z, C:|z|=\frac{3}{2}, m\in\mathbf{Z}$.

(5) $\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+2)(z^2-1)}\mathrm{d}z, C:|z|=3$.

(6) $\oint_C z^3\sin^5\frac{1}{z}\mathrm{d}z, C:|z|=1$.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

16 求下列各积分的值.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}, a>1.$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x, u>0, a>0.$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 3\theta)^2}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta, |a|<1.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

17 计算下列各积分.

(1)$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$，$C$：$|z|=r>1$，$n$为自然数.

(2)$\oint_C \frac{z^9}{z^{10}-1}dz$，$C$：$|z|=4$.

年　月　日

18 若函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及所围成的有界区域内除去点 z_0 外处处解析，且 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，记

$$g(z)=(z-z_0)^n f(z)$$

证明：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

19 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均在点 z_0 处解析且 $f(z_0)\neq 0$.

(1)若 z_0 是 $g(z)$ 的 1 阶零点,求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{g^2(z)},z_0\right]$.

(2)若 z_0 是 $g(z)$ 的 2 阶零点,求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)},z_0\right]$.

年　月　日

20 设函数 $\varphi(z)$ 在点 z_0 处解析，$\varphi'(z_0)\neq 0$，函数 $f(\zeta)$ 在点 $\zeta_0=\varphi(z_0)$ 处有一阶极点，证明：

$$\mathrm{Res}[f[\varphi(z)],z_0]=\frac{1}{\varphi'(z_0)}\mathrm{Res}[f(\zeta),\zeta_0]$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日