二元关系

李修成 lixiucheng@hit.edu.cn

计算机科学与技术学院

Outline

有序对与笛卡尔积

有序对与笛卡尔积

定义 *1.1 (*有序对*)*. 由两个元素 a, b，按照顺序组成的二元组称为有序对，记作 $\langle a, b\rangle$.

有序对的性质：

- 有序性 $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$ (当 $a \neq b$).
- $\langle a, b\rangle = \langle u, v\rangle \iff a = u \wedge b = v$.

定义 *1.2 (*笛卡尔积*)*. 设 A, B 为集合，A 与 B 的笛卡尔积（Cartesian product）记作 $A \times B$，$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$.

例子 *1.1*. 给定 $A = \{1, 2\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$，有

$$A \times B = \{\langle 1, b_1\rangle, \langle 1, b_2\rangle, \langle 1, b_3\rangle, \langle 2, b_1\rangle, \langle 2, b_2\rangle, \langle 2, b_3\rangle\},$$
$$B \times A = \{\langle b_1, 1\rangle, \langle b_1, 2\rangle, \langle b_2, 1\rangle, \langle b_2, 2\rangle, \langle b_3, 1\rangle, \langle b_3, 2\rangle\}.$$

思考：计算上例，如果 $B = \emptyset$；若 $C = \{d\}$，计算 $(A \times B) \times C$ 与 $A \times (B \times C)$.

笛卡尔积的性质

1. 不满足交换律，一般情况下 $A \times B \neq B \times A$.
2. 不满足结合律，一般情况下 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.
3. 若 A 为空集或 B 为空集，则 $A \times B$ 为空集.
4. 对于并、交运算满足分配律

$$
\begin{aligned}
A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A), \\
A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C), \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A).
\end{aligned}
$$

5. 若 $A \subseteq C \wedge B \subseteq D$，则 $A \times B \subseteq C \times D$.
6. 若 $|A| = m, |B| = n$，则 $|A \times B| = mn$.

笛卡尔积的性质

例子 *1.2.*

1. 若 $A = B$, $C = D$ 证明 $A \times C = B \times D$.
2. 若 $A \times C = B \times D$，是否能推出 $A = B$, $C = D$?

二元关系的定义与表示

定义 *2.1.* 如果一个集合满足以下条件之一：

1. 集合为空集.
2. 集合非空且元素均为有序对.

则称该集合为一个二元关系，简称关系，记作 R. 若 $\langle a,b\rangle \in R$ 可记为 aRb，$\langle a,b\rangle \notin R$ 可记为 $a\not R b$.

例子 *2.1.* 给定：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$，$S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$.

R 为二元关系；若 a,b 不是有序对，则 S 不是二元关系. 且有，$1R2$, aRb, $a\not R c$.

A 到 B 的关系

定义 2.2. 设 A, B 为集合，$A \times B$ 的任意子集所定义的二元关系叫作从 A 到 B 的二元关系，当 $A = B$ 时则称为A 上的二元关系.

例子 2.2. 给定 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$，则

- $R_1 = \{\langle 0, 2\rangle\}$, $R_2 = A \times B$, $R_3 = \emptyset$, $R_4 = \{\langle 0, 1\rangle\}$ 均为从 A 到 B 的二元关系.
- R_3, R_4 也是 A 上的二元关系.

思考：若 $|A| = n, |B| = m$,

- 那么 A 上有多少个不同的二元关系?
- 有多少个从 A 到 B 的二元关系?
- $|A \times A| = n^2$, $|A \times B| = mn$，其子集个数分别为 2^{n^2}, 2^{mn}.

A 上重要的二元关系

定义 *2.3.* 设 A 为集合，$\mathcal{A}$ 是集合族（其元素为集合）.

- 空关系 $\emptyset$.
- 全域关系 $A \times A$.
- 恒等关系 $I_A \triangleq \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$.
- 小于等于关系 $L_A \triangleq \{\langle a_1, a_2\rangle \mid a_1, a_2 \in A \land a_1 \le a_2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.
- 整除关系 $D_A \triangleq \{\langle a_1, a_2\rangle \mid a_1, a_2 \in A \land a_2 \equiv 0 \pmod{a_1}\}$.
- 包含关系 $R_{\subseteq} \triangleq \{\langle A_1, A_2\rangle \mid A_1, A_2 \in \mathcal{A} \land A_1 \subseteq A_2\}$.

例子 2.3. 令 $A=\{1,2\}$，计算 $A\times A$, I_A.

- $A\times A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$.
- $I_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$.

例子 2.4. 令 $B=\{b_1,b_2\}$，$\mathcal{A}=\mathcal{P}(B)$. 计算 $\mathcal{A}$ 上的包含关系 $R_{\subseteq}$.

- $\mathcal{A}=\{\emptyset,\{b_1\},\{b_2\},\{b_1,b_2\}\}$.
- $$\begin{aligned}R_{\subseteq}=\{&\langle\emptyset,\emptyset\rangle,\langle\emptyset,\{b_1\}\rangle,\langle\{b_1\},\{b_1\}\rangle,\langle\emptyset,\{b_2\}\rangle,\langle\{b_2\},\{b_2\}\rangle,\\&\langle\emptyset,\{b_1,b_2\}\rangle,\langle\{b_1\},\{b_1,b_2\}\rangle,\langle\{b_2\},\{b_1,b_2\}\rangle,\langle\{b_1,b_2\},\{b_1,b_2\}\rangle\}\end{aligned}$$

关系的表示

有穷集合上（间）的关系可以使用关系矩阵和关系图来表示.

关系矩阵. 假设 R 是一个从集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ 到集合 $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ 的关系，则关系 R 可以使用矩阵 $\mathbf{M}_R=[m_{ij}]$ 表示，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } (a_i,b_j)\in R,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

例子 *2.5.* 假设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$. R 为从 A 到 B 的关系，其包含的有序对 $\langle a,b\rangle$, $a\in A$, $b\in B$ 满足 $a>b$. R 的关系矩阵

$$\mathbf{M}_R=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

关系的表示（关系矩阵）

关系矩阵和关系具有一一对应关系.

例子 ***2.6.*** 假设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. R 为从 A 到 B 的关系，R 的关系矩阵为

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

那么 $R = \{\langle a_1, b_2\rangle, \langle a_2, b_1\rangle, \langle a_2, b_3\rangle, \langle a_1, b_4\rangle, \langle a_3, b_1\rangle, \langle a_3, b_3\rangle, \langle a_3, b_5\rangle\}$.

例子 ***2.7.*** 给定集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$A$ 上的恒等关系对应的关系矩阵是？全域关系呢？

关系的表示（关系图）

关系图是使用有向图（directed graphs）来表示关系.

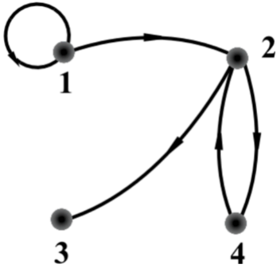
定义 2.4 (有向图). 一个有向图 $G = (V, E)$，由顶点集 V（vertices）和边集 E（edges）构成，其中 E 是一个顶点的有序对 $\langle a, b\rangle$ 集合，$a, b \in V$, 每个有序对 $\langle a, b\rangle$ 称为一条边，a 被称为始点（initial vertex），b 被称为终点（terminal vertex）.

定义 2.5 (关系图). 若 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$R$ 是 A 上的关系，R 的关系图 $G_R = (A, R)$，即顶点集为 A，边集为 R.

关系的表示（关系图）

例子 2.8. 假设 $A = \{1\ 2\ 3\ 4\}$, $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$. R 为从 A 到 B 的关系，R 的关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



关系的运算

定义 *3.1.* 关系的定义域、值域分别定义为[1]

$$\begin{aligned}\operatorname{domain}(R) &= \{a \mid \exists b(\langle a, b\rangle \in R)\},\\ \operatorname{range}(R) &= \{b \mid \exists a(\langle a, b\rangle \in R)\}.\end{aligned}$$

例子 *3.1.* 给定 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{domain}(R) &= \{1,2,4\},\\ \operatorname{range}(R) &= \{2,3,4\}.\end{aligned}$$

[1]指定教材还定义了域的概念，即定义域和值域的并集，但这一定义用处不大，且容易与代数系统中域的概念冲突.

逆与复合

定义 3.2. 给定关系 R，其逆运算 $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$.

定义 3.3. 给定关系 R_1, R_2，其复合运算[2]

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle a, b\rangle \mid \langle a, t\rangle \in R_1 \wedge \langle t, b\rangle \in R_2\}.$$

例子 3.2. 给定 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, $S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}, \\ R \circ S &= \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}, \\ S \circ R &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}. \end{aligned}$$

[2]指定教材称其为 R_2 对 R_1 的右复合.

限制与像

定义 ***3.4.*** 令 R 为二元关系，A 为集合，

1. R 在 A 上的限制（restriction）记作[3] $R|_A$，其中 $R|_A = \{\langle a, b\rangle \mid aRb \wedge a \in A\}$.
2. A 在 R 下的像（image）记作 $R[A]$，定义为 $R[A] = \mathrm{range}(R|_A)$.

- $R|_A$ 是 R 的子集.
- $R[A]$ 是 $\mathrm{range}(R)$ 的子集.

[3]教材上使用符号 $R\restriction_A$.

限制与像

令 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$，则

- $R|_{\{1\}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$,
- $R|_{\emptyset} = \emptyset$,
- $R|_{\{2,3\}} = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$,
- $R[\{1\}] = \{2,3\}$,
- $R[\emptyset] = \emptyset$,
- $R[\{3\}] = \{2\}$.

关系运算的性质

定理 ***3.1.*** 设 R 是任意二元关系，则

1. $(R^{-1})^{-1} = R$,
2. $\mathrm{domain}(R^{-1}) = \mathrm{range}(R)$, $\mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{domain}(R)$.

定理 *3.2.* 设 R 为 A 上二元关系，则 $R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

关系运算的性质

定理 ***3.3.*** 设 R_1, R_2, R_3 是任意二元关系，则

1. $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$,
2. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

关系运算的性质

定理 *3.4.* 设 R_1, R_2, R 为任意二元关系，

1. $R \circ (R_1 \cup R_2) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2$,
2. $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$,
3. $R \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2$,
4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R$.

关系运算的性质

推论 *3.1.* 设 $R_1, R_2, \ldots, R_n, R$ 为任意二元关系，

1. $R \circ (R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2 \cup \ldots \cup R \circ R_n$,
2. $(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R \cup \ldots \cup R_n \circ R$,
3. $R \circ (R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2 \cap \ldots \cap R \circ R_n$,
4. $(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R \cap \ldots \cap R_n \circ R$.

关系运算的性质

定理 *3.5.* 设 R 为二元关系，A, B 为集合，则

1. $R|_{A\cup B} = R|_A \cup R|_B$,
2. $R|_{A\cap B} = R|_A \cap R|_B$,
3. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$,
4. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.

关系的幂运算

定义 ***3.5.*** 令 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为:

1. $R^0 = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\} = I_A$.
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$.

例子 3.3. 令 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$. 计算 R 的个次幂，分别用关系矩阵和关系图表示.

根据关系幂运算的定义 $\mathbf{M}^0=\mathbf{I}_4$.

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{M}^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{M}^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{M}^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

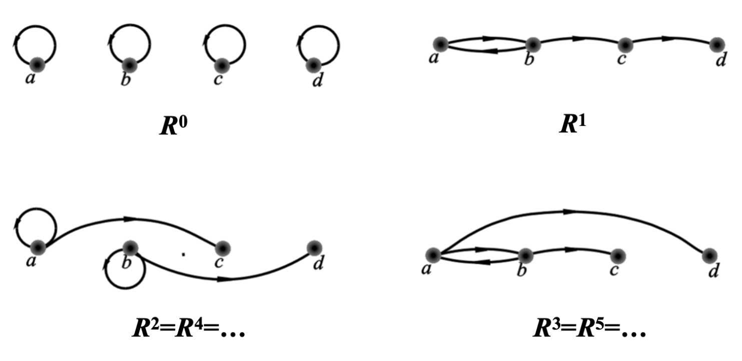
即 $\mathbf{M}^2=\mathbf{M}^4$，$\mathbf{M}^3=\mathbf{M}^5$, $R^2=R^4$, $R^3=R^5$. 因此有,

$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

R^n 可以划分为 $R^0,R^1,R^2=R^4=R^6=\ldots,R^3=R^5=R^7=\ldots$ 四组.

关系的幂运算

R^n 的关系图如下，



定理 *3.6.* 设 A 为集合，R 为 A 上的二元关系，$m, n \in \mathbb{N}$，则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$,
2. $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理 ***3.7.*** 设 A 为集合且 $|A| = n$，R 为 A 上的二元关系，则存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$.

幂运算的性质

定理 *3.8.* 设 A 为集合，R 为 A 上的二元关系，若存在 $s, t \in \mathbb{N}$ 且 $s < t$ 使得 $R^s = R^t$，则

1. 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$.
2. 对任意 $k, r \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k(t-s)+r} = R^{s+r}$.
3. 令 $S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $R^n \in S$.

关系的性质

关系的性质

定义 *4.1.* 设 R 为 A 上的关系，

1. 若 $\forall a(a \in A \to \langle a, a\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是自反的（reflexive）.
2. 若 $\forall a(a \in A \to \langle a, a\rangle \notin R)$，则称 R 在 A 上是反自反的（anti-reflexive）.

例子 *4.1.* 令 $A = \{1, 2, 3\}$，R_1，R_2，R_3 为 A 上的关系，其中

- $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$,
- $R_2 = \{\langle 1, 3\rangle\}$,
- $R_3 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$,

哪些是自反的，哪些是反自反的?

常见的自反与反自反关系:

- 自反：全域关系 $A \times A$，恒等关系 I_A，小于等于关系，整除关系;
- 反自反：实数集上的小于关系，幂集上的真包含关系.

关系的性质

定义 4.2. 设 R 为 A 上的关系，

1. 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是对称的 symmetric.
2. 若 $\forall x \forall y (x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \rightarrow x = y)$，则称 R 在 A 上是反对称的 anti-symmetric.

例子 4.2. 令 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1，R_2，R_3，R_4 为 A 上的关系，其中

- $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, $R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$,
- $R_3 = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$, $R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$

哪些是对称的，哪些是反对称的?

常见的对称与反对称关系：

- 自反：全域关系 $A \times A$，恒等关系 I_A，空关系 $\emptyset$;
- 反自反：恒等关系 I_A，空关系 $\emptyset$.

关系的性质

定义 *4.3.* 设 R 为 A 上的关系，若 $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是传递的（transitive）.

例子 *4.3.* 令 $A = \{1, 2, 3\}$，R_1，R_2，R_3 为 A 上的关系，其中

- $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$,
- $R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$,
- $R_3 = \{\langle 1, 3\rangle\}$

哪些关系具有传递性?

常见的传递关系：全域关系 $A \times A$，恒等关系 I_A，空关系 $\emptyset$，实数上的小于等于关系，整除关系，包含和真包含关系.

关系的性质

定理 *4.1.* 设 R 为 A 上的关系，则

1. R 在 A 上自反 $\iff I_A \subseteq R$.
2. R 在 A 上反自反 $\iff R \cap I_A = \emptyset$.
3. R 在 A 上对称 $\iff R = R^{-1}$.
4. R 在 A 上反对称 $\iff R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
5. R 在 A 上传递 $\iff R \cap R \circ R \subseteq R$.

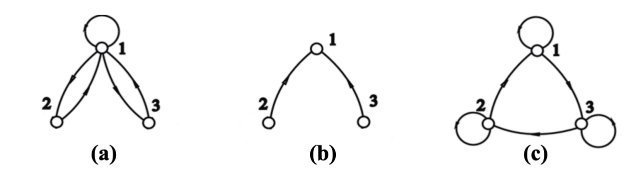
例子 *4.4.* 设 R 为 A 上的关系，则

1. 若 R_1, R_2 是自反和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反和对称的.
2. 若 R_1, R_2 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

关系性质、矩阵与图

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
矩阵	主对角线全 1	主对角线全 0	对称矩阵	$\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^\top$ 为对角阵	$\mathbf{M} - \mathbf{M}^2$ 逐项非负
图	每个顶点均有环	每个顶点均无环	无向图	两点之间至多一条边	若 a_i 到 a_k 有边，a_k 到 a_j 有边，则 a_i 到 a_j 有边

例子 *4.5.* 判断下列个图的性质（自反、对称等）



- (a) 对称.
- (b) 反自反、反对称、传递.
- (c) 自反、反对称.

关系的闭包

闭包的定义

定义 *5.1.* 设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的自反（对称或传递）闭包是 A 上的关系 R'，满足一下条件:

1. R' 是自反（对称或传递）的;
2. $R \subseteq R'$;
3. 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 均有 $R' \subseteq R''$.

R 的自反闭包，对称闭包，传递闭包分别记为 $r(R), s(R), t(R)$.

定理 *5.1.* 设 R 是 A 上的关系，则有

1. $r(R) = R \cup R^0$
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$，若 $|A| = n$，则可在 R^n 处截断.

闭包的矩阵表示和图表示

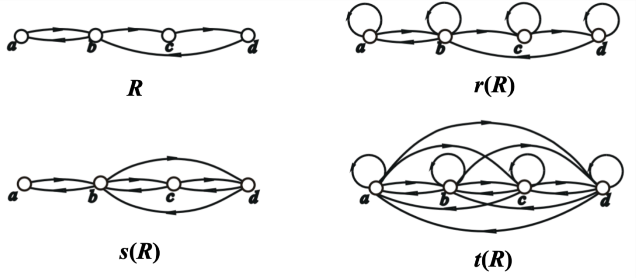
- 令关系 R 的关系矩阵为 $\mathbf{M}$，其 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别记为 $\mathbf{M}_r$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_t$，则

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{M} \vee \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{M} \vee \mathbf{M}^\top, \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{M} \vee \mathbf{M}^2 \wedge \mathbf{M}^3 \vee \ldots,$$

  其中 $\vee$ 表示矩阵逐项进行逻辑或运算，$\mathbf{I}$ 为与 $\mathbf{M}$ 大小兼容的单位矩阵.

- 令关系 R 的关系图为 G，其 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 G_r, G_s, G_t. 使用 G 对 G_r, G_s, G_t 进行初始化，然后
  - G_r: 对 G 的每个顶点，若无环则添加一个环.
  - G_s: 对 G 的每条边，若存在从 v_i 至 v_j 的单向边且 $i \neq j$，则添加从 v_j 至 v_i 的边.
  - H_t: 对 G 的每个顶点 v_i，寻找 v_i 可达的所有顶点 v_j，若不存在从 v_i 至 v_j 的边，则添加该边.

例子 5.1. 令 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R 和 $r(R),s(R),t(R)$ 的关系图分别如下所示.



Warshall 算法计算传递闭包

Algorithm 1: Warshall algorithm

Input: The matrix $\mathbf{M}$ of R.

Output: The matrix $\mathbf{W}$ of transitive closure.

$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{M}$;
for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
      $w_{ij} \leftarrow w_{ij} \vee (w_{ik} \wedge w_{kj})$;
return $\mathbf{W}$;

定理 *5.2.* 设 R 是非空集合 A 上的关系，则

1. R 是自反的 $\iff r(R) = R$;
2. R 是对称的 $\iff s(R) = R$;
3. R 是传递的 $\iff t(R) = R$; .

定理 *5.3.* 令 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$,
2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$,
3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

闭包的性质

定理 ***5.4.*** 设 R 是非空集合 A 上的关系，

1. 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的；
2. 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的；
3. 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的.

等价关系与划分

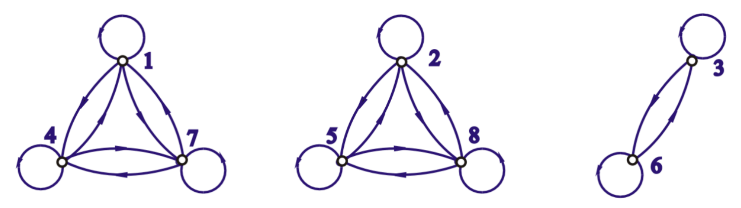
定义 6.1. 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 是 A 上的等价关系. 若 R 是等价关系且 $\langle x, y\rangle \in R$，则称 x 等价于 y，记作 $x \sim y$.

例子 6.1. 令 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$，定义如下等价关系 R:

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}.$$

容易验证，

- $\forall x \in A$，有 $x \equiv x \ (\mathrm{mod}\ 3)$.
- $\forall x, y \in A$，有 $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ 3) \implies y \equiv x \ (\mathrm{mod}\ 3)$.
- $\forall x, y, z \in A$，有 $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ 3), y \equiv z \ (\mathrm{mod}\ 3) \implies x \equiv z \ (\mathrm{mod}\ 3)$.



集合 A 上的模 3 等价关系的关系图

等价类的定义

定义 6.2. 设 R 是非空集合 A 上的关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\},$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类（equivalence class），简称为 x 的等价类，简记为 $[x]$.

例子 6.2. 令 $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$，则 A 上模 3 等价关系的等价类为：

$$\begin{aligned}
[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}, \\
[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}, \\
[3] = [6] = \{3, 6\}.
\end{aligned}$$

- 如果 $y \in [x]$，则称 y 为该等价类的代表元（representative）.
- 代表元可以为等价类中任意元素.

定理 *6.1.* 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

1. $\forall x \in A$，$[x]$ 为 A 的非空子集.
2. $\forall x, y \in A$，若 xRy 则 $[x] = [y]$.
3. $\forall x, y \in A$，若 $x \not R y$ 则 $[x] \cap [y] = \emptyset$.
4. $\bigcup\limits_{x \in A} [x] = A$.

即等价类构成了集合 A 的一个划分（partition）.

定义 *6.3.* 设 A 为非空集合，若 A 的子集族 π $(\pi \subseteq \mathcal{P}(A))$ 满足：

1. $\emptyset \notin \pi$,
2. $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$,
3. $\cup \pi = A$,

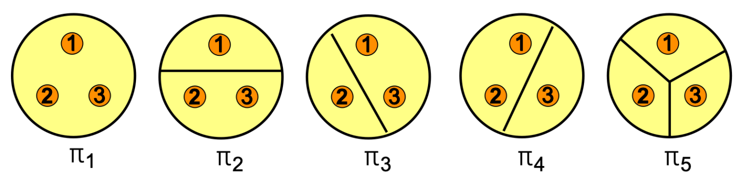
则称 π 是 A 的一个划分（partition），称 π 中元素为 A 的划分块.

例子 6.3. 令 $A = \{a, b, c, d\}$，下列哪些集合为 A 的划分?

$$\pi_1 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$$
$$\pi_2 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$$
$$\pi_3 = \{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$$
$$\pi_4 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$
$$\pi_5 = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$
$$\pi_6 = \{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$$

例子 6.4. 给出 $A = \{1, 2, 3\}$ 上所有等价关系.

思路：先给出 A 的所有直观划分，然后分别构造相应等价类.



- π_1 对应全域关系，π_5 对应 I_A，对于 π_2, π_3, π_4 其等价类构造如下.
- $R_2 = \{\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\} \cup I_A$.
- $R_3 = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\} \cup I_A$.
- $R_4 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \cup I_A$.

商集与划分

定义 *6.4.* 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，以 R 所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集（quotient set），记作 A/R，

$$A/R = \{[x] \in R \mid x \in A\}.$$

例子 *6.5.* 设 $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$，

- A 关于模 3 的等价关系 R 的商集 $A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$.
- $A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}$.
- $A/(A \times A) = \{\{1, 2, \ldots, 8\}\}$.

偏序关系

定义 *7.1.* 非空集合 A 上的关系若满足自反、反对称和传递性，则称为偏序关系（partial order），记作 $\preccurlyeq$. $\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$，通常记作 $x \preccurlyeq y$，读作 x 小于或等于 y.

- x 小于 y 可以定义为 $x \prec y \iff x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$.
- 集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.
- 整数集上的整除关系是整数上的，幂集上的包含关系是幂集上的偏序关系.
- 实数集上的小于或等于关系 $\leq$[4].

[4]偏序关系可以视为我们熟知的 $\leq$ 在一般集合上的推广.

偏序关系

定义 *7.2.* 令 $\preccurlyeq$ 为非空集合 A 上的偏序关系，$\forall x, y \in A$，存在以下两种情况

1. $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$, 即 x 与 y 可比（comparable），
2. $\langle x, y\rangle \notin \preccurlyeq$，即 x 与 y 不可比.

定义 *7.3.* 令 $\preccurlyeq$ 为非空集合 A 上的偏序关系，若 $\forall x, y \in A$，x 与 y 可比，则称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的全序关系（total order）或线序关系（linear order）.

- 实数集上的小于或等于关系是全序关系.
- 整数集上的整除关系不是全序关系.

定义 *7.4.* $\forall x, y \in A$，如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 y 覆盖（covers）x.

- 考虑 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 上的整除关系，则谁覆盖 1，谁覆盖 2?

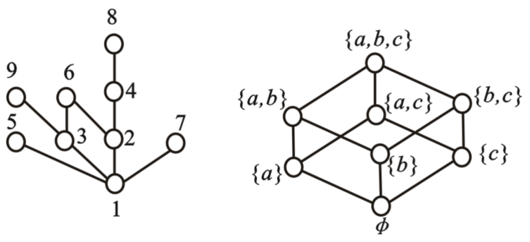
定义 *7.5.* 集合 A 与 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起叫作偏序集（partially ordered set or poset），记作 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$.

- $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$, $\langle \mathcal{P}(A), R_{\subseteq}\rangle$.

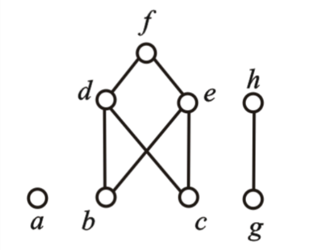
哈斯图（Hasse diagram）是一种利用偏序关系的自反、反对称、传递性简化的关系图. 具有如下特点

1. 每个结点均无环.
2. 两个连通结点的偏序关系通过结点在图中位置表示，若 $x \prec y$ 则 x 的位置较 y 更低.
3. 若 y 覆盖 x 则二者之间连边.

例子 7.1. 偏序集 $\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},|\rangle$，$|$ 表示整除关系和 $\langle\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subseteq\rangle$ 的哈斯图如下所示.



例子 7.2. 已知偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如下所示，试求集合 A 和关系 R.



- $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.
- $R = \{\langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle b, f\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle c, f\rangle, \langle d, f\rangle, \langle e, f\rangle, \langle g, h\rangle\} \cup I_A$.

偏序集中的特殊元素

定义 7.6. 令 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in B$

1. 若 $\forall x(x \in B \to x \preccurlyeq y)$，则称 y 为 B 的最大元（greatest element）.
2. 若 $\forall x(x \in B \to y \preccurlyeq x)$，则称 y 为 B 的最小元（least element）.
3. 若 $\forall x(x \in B \land y \preccurlyeq x \to x = y)$，则称 y 为 B 的极大元（minimal）.
4. 若 $\forall x(x \in B \land x \preccurlyeq y \to x = y)$，则称 y 为 B 的极小元（maximal）.

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，且可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元，最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元也是极大元.

偏序集中的特殊元素

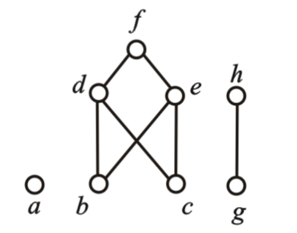
定义 *7.7.* 令 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in A$

1. 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$，则称 y 为 B 的上界（upper bound）.
2. 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$，则称 y 为 B 的下界（lower bound）.
3. 若 x 是 B 的上界且 $x \preccurlyeq z$ 对 B 的任意上界 z，则称 x 为 B 的最小上界（least-*）.
4. 若 x 是 B 的下界且 $z \preccurlyeq x$ 对 B 的任意下界 z，则称 x 为 B 的最大下界（greatest-*）.

- 最小上界和最大下界不一定存在.
- 最小上界和最大下界若存在，则唯一.
- 上界和下界存在但不一定惟一.
- 最小元一定是最大下界，最大元一定是最小上界；但反之不成立.

例子 7.3. 已知偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如下所示，$B = \{b, c, d\}$，求 A 的最大元、最小元、极小元、极大元，B 的上界、下界、最小上界、最大下界.

- 最大元和最小元不存在；
- 极小元：a, b, c, g；
- 极大元：a, f, h；
- B 的上界：d, f；
- B 的最小上界：d；
- B 的下界和最大下界不存在.



偏序集中的特殊元素

例子 *7.4.* 令 X 为非空集合，$A=\mathcal{P}(X)-\{\emptyset,X\}$. 若 $|X|=n\geq 2$.

1. 偏序集 $\langle A,\subseteq\rangle$ 是否存在最大元，最小元?
2. 偏序集 $\langle A,\subseteq\rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么?