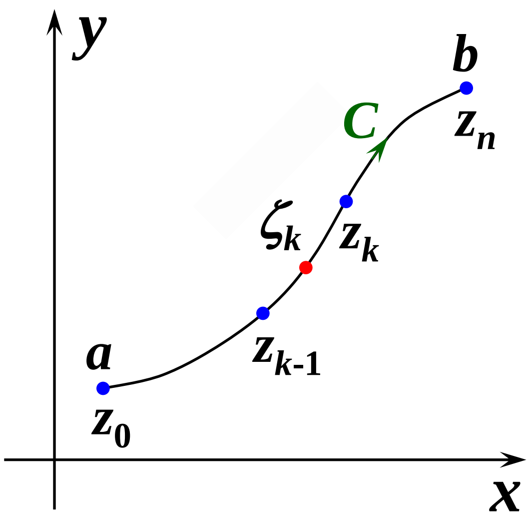
第三章 复变函数的积分

3.1.1 积分的定义



定义 如图设 C 为从 a 到 b 的简单光滑的有向曲线，函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，

(1) 将曲线 C **任意划分**:

$$z_0 = a,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n = b,$$

令 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，$\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k|$，

(2) 在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$ 上**任取一点** $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$，

若 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ 存在(不依赖 C 的划分和 ζ_k 的选取)，

则称之为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

3.1.2 积分的性质

(1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$.

(2) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$,

其中，$C = C_1 + C_2$.

(3) $\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\mathrm{d}z = \alpha\int_C f(z)\mathrm{d}z + \beta\int_C g(z)\mathrm{d}z$.

(4) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \le \boxed{\int_C |f(z)|\mathrm{d}s} \le ML$,

其中，$M = \max\limits_{z\in C}|f(z)|$,

第一类曲线积分

L为曲线C的弧长。

3.1.3 积分的存在性条件与计算

由二元实函数的第二型曲线积分存在的条件得:

定理: 若函数 $f(z)$ 在光滑（或按段光滑）的曲线C上连续，则$f(z)$在C上可积; 且得到计算积分的方法:

方法一 **化为第二类曲线积分**

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

- **进一步可化为定积分或者二重积分。**

3.1.3 积分的存在性条件与计算

方法二 线积分直接化为定积分

设曲线 $C: z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$，$t: a \to b$，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t,$$

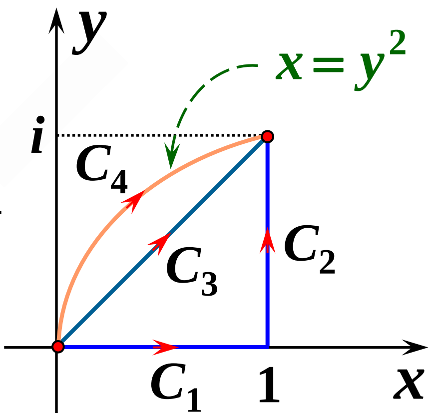
其中，$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

附 其它方法(后面的章节介绍)

- 利用原函数计算，即 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$.
- 利用柯西积分公式、高阶导公式计算。
- **利用留数计算**。

例 计算 $I=\int_C z\,dz$，其中 C 为(如图)：

(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$； (3) $C=C_4$.



解 (1) 曲线 C_1 的方程为 $x=t, y=0, 0\le t\le 1$

曲线 C_2 的方程为 $x=1, y=t, 0\le t\le 1$

注： 过两点 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 的直线

$z=z_1+t(z_2-z_1)$ 或参数形式 $\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1) \\ y=y_1+t(y_2-y_1) \end{cases}$

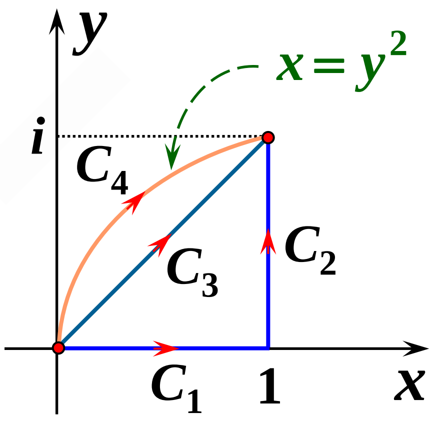
$$I=\int_C z dz=\int_{C_1} z\,dz+\int_{C_2} z\,dz,$$

$$=\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 (1+ti)i\,dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1+it-\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=i$$

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)：

(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$； (3) $C=C_4$.



解

(2) 曲线 C_3 的方程为 $z=t+it$，$t:0\to 1$，

$$I=\int_{C_3} z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 (t+it)\,\mathrm{d}(t+it)$$

$$=(1+i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \;=i.$$

(3) 曲线 C_4 的方程为 $z=t^2+it$，$t:0\to 1$，

$$I=\int_{C_4} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 (t^2+it)\,\mathrm{d}(t^2+it)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+it)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1+i)^2\;=i.$$

例 3.1.2 计算积分$\int_C Rez\,dz$，其中曲线C是:(1)连接0到1+i的直线段；(2)从0到1的直线段C_1与从1到1+i的直线段C_2所连接成的折线；

解: (1)C的参数方程可以写作

$$x = t, \qquad y = t\ (0 \le t \le 1)$$

表达成复数形式则为

$$z = (1+i)t, z'(t) = 1+i$$

这样便有

$$\int_C Rezdz = \int_0^1 Re[(1+i)t](1+i)dt$$

$$= (1+i)\int_0^1 tdt = \frac{(1+i)t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}$$

(2)C_1的参数方程可以写作

$$x = t, \qquad y = 0\ (0 \le t \le 1)$$

C_2的参数方程为

$$x = 1, \qquad y = t\ (0 \le t \le 1)$$

于是由复积分的性质可得

$$\int_C Rez dz = \int_{C_1} Rez\, dz + \int_{C_2} Rez\, dz$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 i dt = \frac{1}{2} + i$$

由此两例可以看出：有时积分与路径无关，有时又相关 ?

其实这与函数$f(z)$的性质有关。

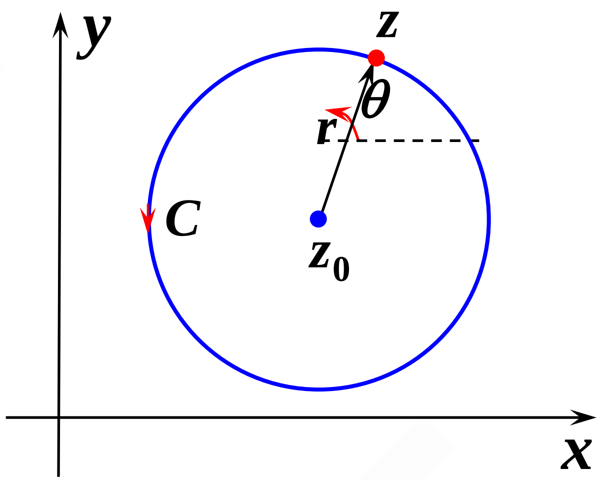
例 计算 $I=\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中，$C$ 为 $|z-z_0|=r$，n 为整数。

圆周C取逆时针方向。

解 曲线C的参数方程为 $z=z_0+re^{i\theta}$，$\theta:0\to 2\pi$，

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}i}{(re^{i\theta})^n}d\theta$$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}d\theta,$$



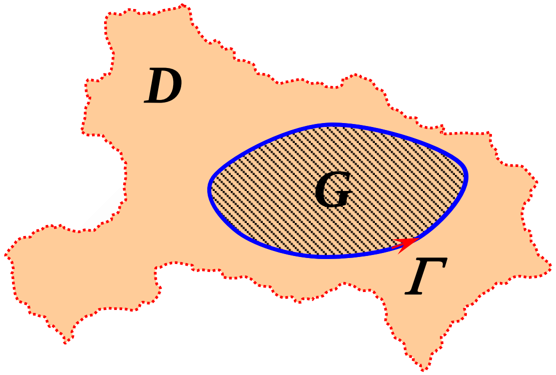
当 $n=1$ 时，$I=2\pi i$；

当 $n\neq 1$ 时，$I=\frac{i}{i(1-n)r^{n-1}}e^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0$.

注：结果与r无关。**此例的结果很重要!**

第三章 复变函数的积分

3.2.1 柯西积分定理



定理 3.2.2 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，

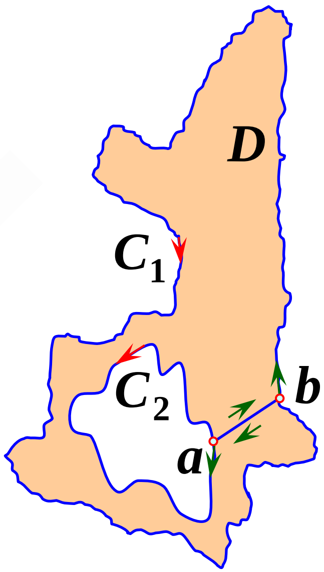
Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，

则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

- 上述定理又称为柯西-古萨(Cauchy-Goursat)基本定理。

3.2.3 复合闭路定理

- 将柯西积分定理推广到二连域



定理 设二连域 D 的边界为 $C=C_1+C_2^-$（如图），函数 $f(z)$ 在边界 C 上以及 D 内解析，则

$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0} \text{ 或 } \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

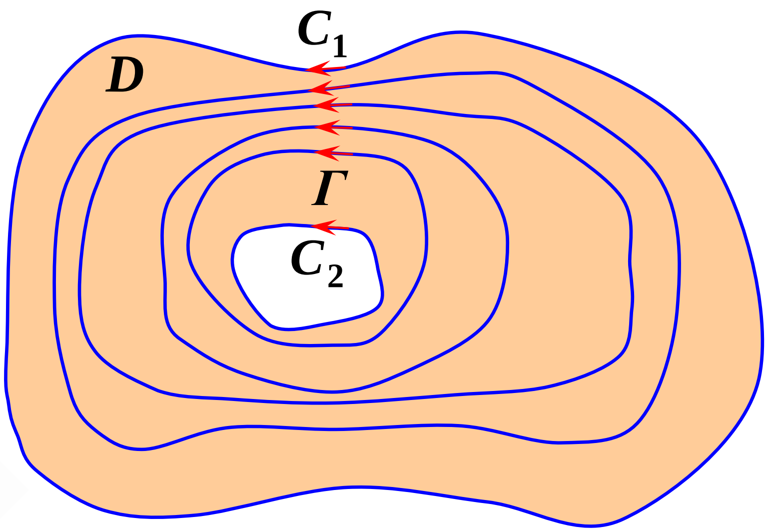
证明 如图，作线段 $\overline{ab}$，则二连域 D 变为单连域，从而有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

由 $\int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\mathrm{d}z=0$，$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z=0$，

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=0 \text{ 或 } \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

3.2.3 复合闭路定理



- 闭路变形原理

如图，设 $f(z)$ 在 D 内解析，

在边界 $C=C_1+C_2^-$ 上也解析，

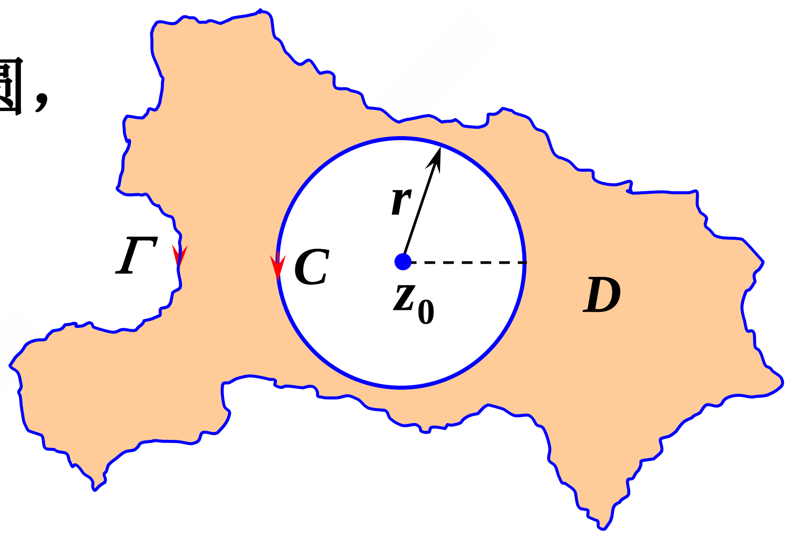
Γ 为 D 内的一条“闭曲线”，

则 $\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z.$

- 在区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值，称此为闭路变形原理。

例 计算 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中，$\Gamma$ 为包含 z_0 的一条闭曲线。

解 如图以 z_0 为圆心 r 为半径作圆，



则函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ 在

$\overline{D}=D+\Gamma+C^-$ 上解析，

因此有 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$

$$=\oint_{C}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}。\end{cases}$$

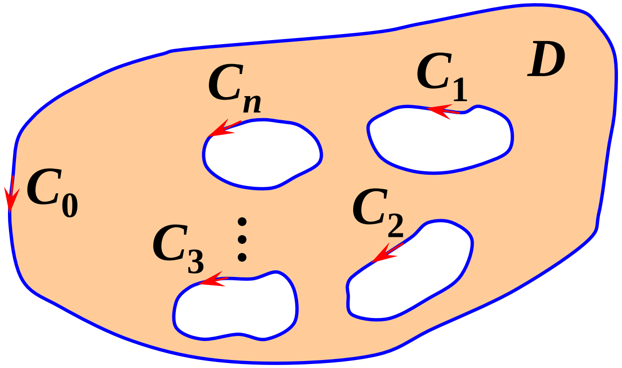
3.2.3 复合闭路定理

- 将柯西积分定理推广到多连域

定理 3.2.6 设多连域 D 的边界为 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$（如图），函数 $f(z)$ 在 D 内及 C 上解析，

则

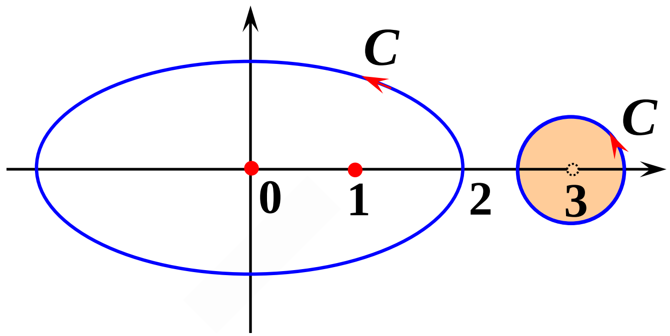
$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0}$$



或 $\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

(1) $|z-3|=\dfrac{1}{2}$； (2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1.$



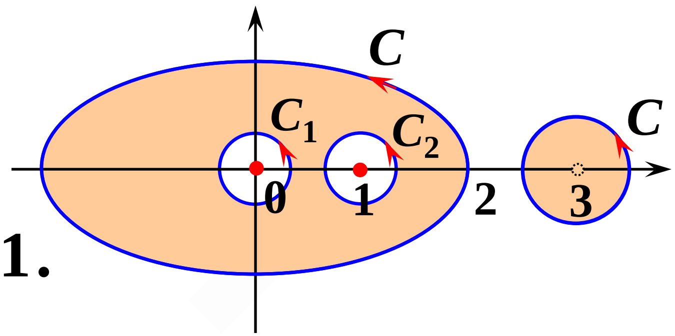
解 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$， 奇点为 $z=0,1.$

(1) 当 C 为 $|z-3|=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(z)$在 $|z-3|\le\frac{1}{2}$内处处解析

由柯西-古萨定理：$I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=0.$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

(1) $|z-3|=\dfrac{1}{2}$； (2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1.$



解 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$， 奇点为 $z=0,1.$

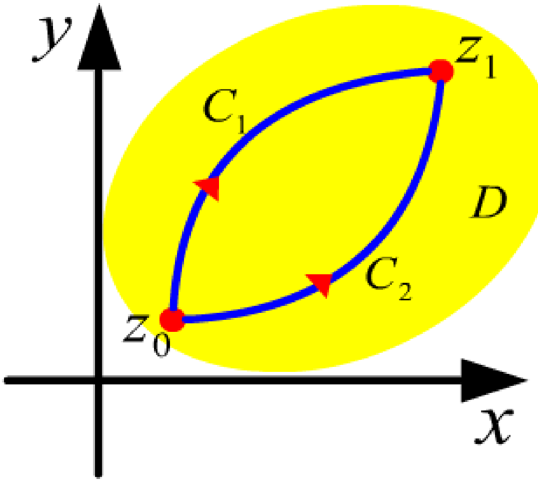
(2) 当 C 为 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 时，令 C_1: $|z|=\dfrac{1}{3}$， C_2: $|z-1|=\dfrac{1}{3}$，

$$\text{则 } I=\oint_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i+0+0+2\pi i=4\pi i.$$

3.2.2 不定积分

1. 路径无关性



定理 3.2.2 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C_1, C_2 为 D 内的任意两条从 z_0 到 z_1 的简单曲线，则有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

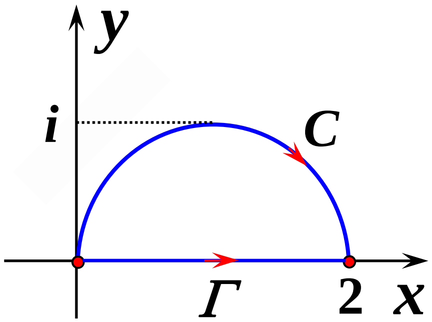
证明 由 $\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$,

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

- 可见，解析函数在单连域内的积分只与起点和终点有关，

因此，$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \overset{\text{可记为}}{=\!=\!=} \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z.$

例 计算 $I=\int_C \sin z\,dz$，其中 C 为如图所示的一个半圆。



解 设 Γ 如图所示，由于 $\sin z$ 在复平面上处处解析，因此有

$$I=\int_C \sin z\,dz=\int_\Gamma \sin z\,dz$$

$$=\int_0^2 \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^2=1-\cos 2.$$

问 是否可以直接计算？

即 $I=\int_C \sin z\,dz=\int_0^2 \sin z\,dz=-\cos z\Big|_0^2=1-\cos 2.$

3.2.2 不定积分

2. 原函数

定理 3.2.4 若 $f(z)$在单连域D内解析，则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$，$z, z_0 \in D$，在$D$内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

Newton-Leibniz公式

定理 3.2.5 若 $f(z)$在单连域D内解析，$G(z)$为$f(z)$ 的一个原函数，则 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1)-G(z_0)$，其中 $z, z_0 \in D$.

注：$G(Z)=F(Z)+C$

例 求 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z$.

解 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3$.

例 求 $\int_a^b \cos z \, \mathrm{d}z$.

解 $\int_a^b \cos z \, \mathrm{d}z = \sin z \Big|_a^b = \sin b - \sin a$.

例 求 $\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z$.

解 $\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z = \int_0^i z \, \mathrm{d}\sin z = z \sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z \, \mathrm{d}z$

$$= (z \sin z + \cos z)\Big|_0^i = i \sin i + \cos i - 1.$$

第三章 复变函数的积分

函数$g(z)$在单连通区域D中处处解析，

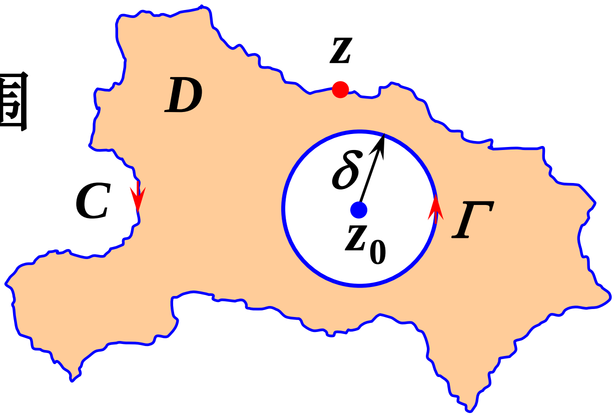
则$g(z)$在D内任意的闭路上积分为0，即 $\oint_C g(z)\mathrm{d}z = 0$

但被积函数不总解析，如z_0为D内的一点为$g(z)$的奇点，

则可将$g(z)$表示为$g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$，那么$\oint_C g(z)\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = ?$

3.3.1 柯西积分公式

定理 3.3.1 如果函数 $f(z)$ 在闭路 C 上及其围成的区域 D 内解析，$z_0 \in D$，则



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

证明 (思路) 如图，以 z_0 为圆心，δ 为半径作圆 Γ，则

$$\text{左边} = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz,$$

$$\text{右边} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

$$|\text{右边}-\text{左边}| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,ds,$$

3.3.1 柯西积分公式

证明 $|右边-左边| \leq \dfrac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\mathrm{d}s,$

(思路)

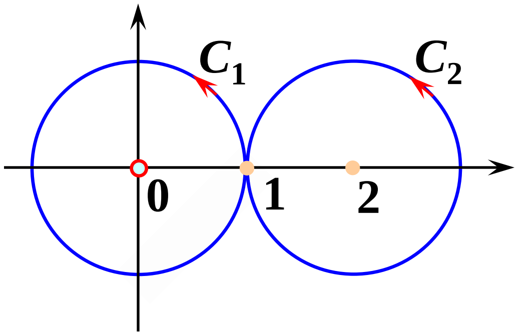
$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta = \varepsilon,$$ (当δ充分小时)

即只要δ足够小，所证等式两边的差的模可以任意小，

由于左边与右边均为常数，与δ无关，故等式成立。

例 计算 $I = \oint_C \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z$， 其中 C 为:

(1) $C_1: |z|=1$; (2) $C_2: |z-2|=1$.



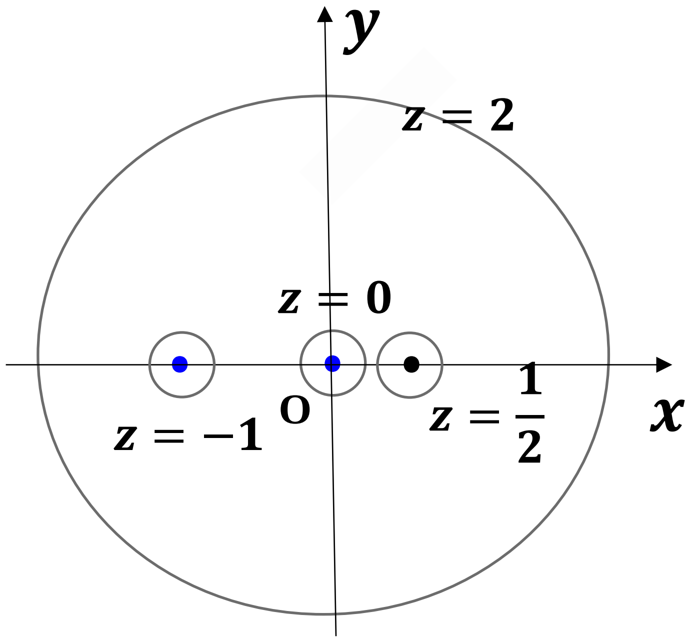
解 (1) $I = \oint_{C_1} \frac{\boxed{\cos z}}{z} \mathrm{d}z$ 　在 $|z| \le 1$ 上解析

$\underline{\underline{\text{(柯西积分公式)}}}\ 2\pi i \cdot \cos z \Big|_{z=0} = 2\pi i$.

(2) $I = \oint_{C_2} \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z$ 　(函数 $\frac{\cos z}{z}$ 在 $|z-2| \le 1$ 上解析)

$\underline{\underline{\text{(柯西积分定理)}}}\ 0$.

例3.3.3 计算积分$I=\oint_C \frac{e^{2z}}{z^2+z}dz$，其中C为圆周, 如图



(1) $|z|=\frac{1}{5}$

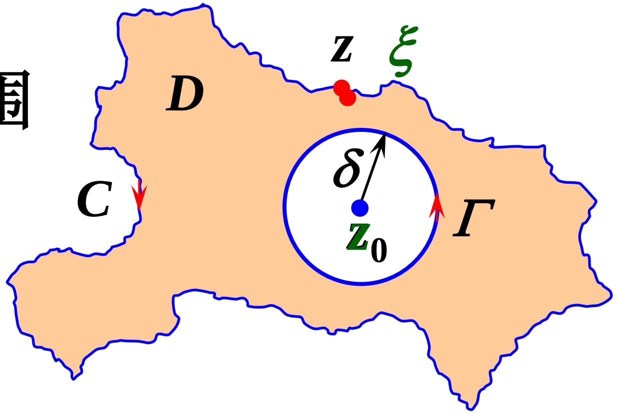
(2) $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{5}$

(3) $|z+1|=\frac{1}{5}$

(4) $|z|=2$

3.3.1 柯西积分公式

定理 3.3.1 如果函数 $f(z)$ 在闭路 C 上及其围成的区域 D 内解析，$z_0 \in D$，则



$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

意义 将 z_0 换成 z，积分变量 z 换成 ξ，则上式变为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,\quad (z\in D).$$

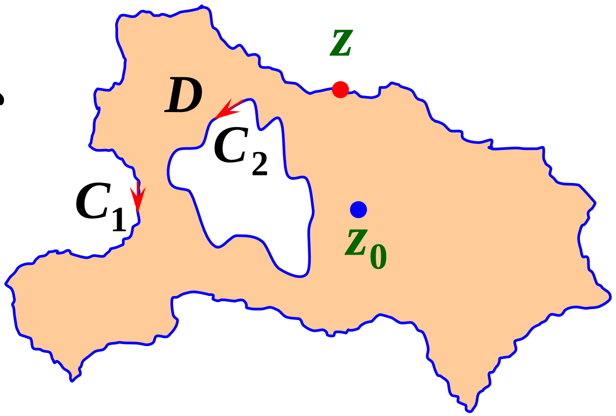
- <u>解析函数在其解析区域内的值完全由边界上的值确定</u>。
- 换句话说，解析函数可用其解析区域边界上的值以一种特定的积分形式表达出来。

例3.3.2 设函数$f(z)=\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$, 其中$C$为圆周：$|\xi|=3$, 求

$f'(1+i)$.

3.3.1 柯西积分公式

注意 柯西积分公式中的区域 D 可以是多连域。比如对于二连域 D，其边界为 $C=C_1+C_2^-$，则



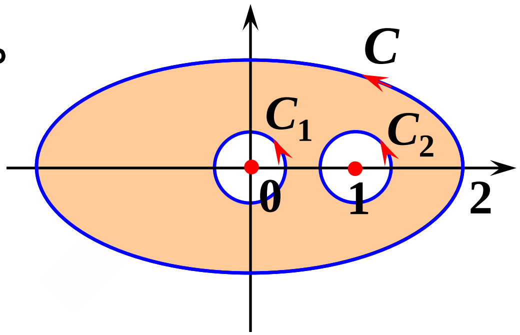
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z,\ (z_0\in D).$$

应用

- 反过来计算积分 $\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i f(z_0).$
- 推出一些理论结果，从而进一步认识解析函数。

例 计算 $I=\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 如图所示。



解 令 $f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z}$，则 $f(z)=\frac{2z-1}{z(z-1)}$，

令 C_1: $|z|=\frac{1}{3}$，C_2: $|z-1|=\frac{1}{3}$，

则 $I=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ （复合闭路定理）

$$=\oint_{C_1}\frac{\boxed{\left(\frac{2z-1}{z-1}\right)}}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\boxed{\left(\frac{2z-1}{z}\right)}}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{(柯西积分公式)}}{=\!=} 2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0}+2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1}=4\pi i.$$

3.3.2 高阶导数定理

定理 3.3.2 如函数 $f(z)$ 在闭路C上及其围成的单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$的各阶导数均在 D上解析，且对任一点$z_0 \in D$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}$$

意义 解析函数的导数仍解析。

应用

- 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$
- 对应有函数$f(z)$的高阶导数公式

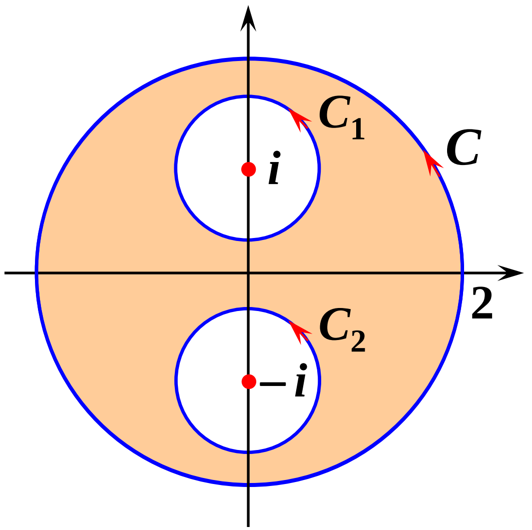
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

- 高阶导数公式对多连域也适用。

例 计算 $\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^{100}} dz$.

解 $$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{100}} dz = \frac{2\pi i}{99!} (e^z)^{(99)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{99!}.$$

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$.



解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}=\dfrac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}$.

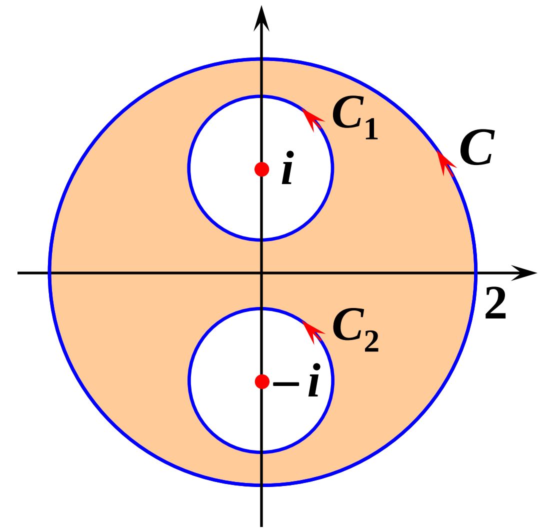
如图，作 C_1, C_2两个小圆，

则 $I=\oint_{C_1}f(z)dz+\oint_{C_2}f(z)dz$ (复合闭路定理)

$$=\oint_{C_1}\boxed{\frac{e^z}{(z+i)^2}}\cdot\frac{dz}{(z-i)^2}+\oint_{C_2}\boxed{\frac{e^z}{(z-i)^2}}\cdot\frac{dz}{(z+i)^2}$$

$$\overset{\text{记为}}{=\!=}\ I_1+I_2.$$

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$



解 (2) $I_1=\oint_{C_1}\boxed{\frac{\mathrm{e}^z}{(z+i)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^2}$

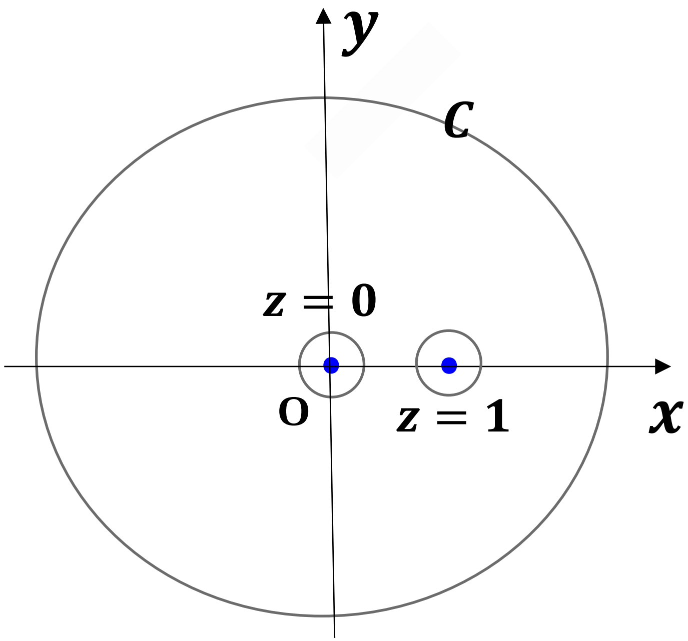
$$\underline{\underline{\text{(高阶导数公式)}}}\ \frac{2\pi i}{1!}\cdot\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)\mathrm{e}^i.$$

同样可求得 $I_2=-\frac{\pi}{2}(1+i)\mathrm{e}^{-i}.$

(3) $I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}[(1-i)\mathrm{e}^i-(1+i)\mathrm{e}^{-i}]=\sqrt{2}\pi i\sin(1-\frac{\pi}{4}).$

例 3.3.7(2) 计算积分 $\oint_C \frac{\cos\pi z}{z^3(z-1)^2}dz$, C为圆周$|z|=2$



例 如果在$|z|<1$内$f(z)$解析并且$|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$，证明：

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!\,(n=1,2,\ldots)$$

证： 由柯西积分公式

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\text{，其中}0<r<1.$$

于是利用积分不等式

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\,|dz|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{(1-|z|)|z|^{n+1}}=\frac{n!}{(1-r)r^n},$$

与要证明的结论做比较，我们可取$r=\frac{n}{n+1}$，这样便有

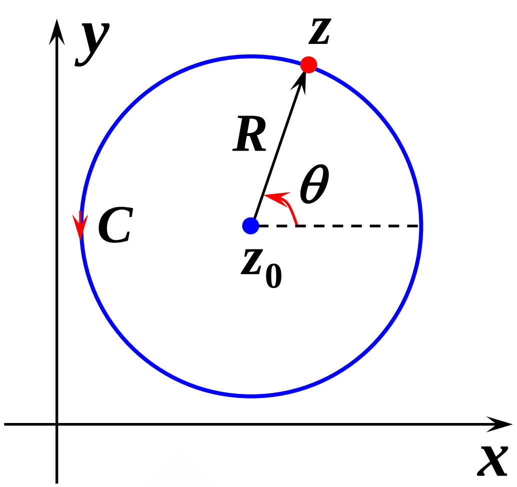
$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!\ \ (n=1,2,\ldots)$$

3.3.3 几个重要的推论

1. 平均值公式

定理 （平均值公式）如果函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R$ 解析，

则有 $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta.$$



证明 由柯西积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}Re^{i\theta}i\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta.$$

3.3.3 几个重要的推论

2. 柯西不等式

定理 设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $|f(z)|<M$，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!M}{R^n},\quad (n=1,2,\cdots).$$ (柯西不等式)

证明* $\forall R_1: 0<R_1<R$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R_1$ 上解析，

（思路）

$$\Rightarrow\ f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,\quad (n=1,2,\cdots).$$

$$\Rightarrow\ |f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\mathrm{d}s\quad\le\frac{n!M}{R_1^n},$$

令 $R_1\to R$，即得 $|f^{(n)}(z_0)|\le\dfrac{n!M}{R^n},\quad (n=1,2,\cdots).$

3.3.3 几个重要的推论

3. 刘维尔定理

定理 3.3.3 设函数 $f(z)$ 在全平面上解析且有界，则 $f(z)$ 为一常数。

证明*（思路） 设 z_0 为平面上任意一点，

$\forall R>0$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 上解析，且 $|f(z)|<M$，

根据柯西不等式有 $|f'(z_0)|\le \dfrac{M}{R}$，

令 $R\to+\infty$，即得 $f'(z_0)=0$，

由 z_0 的任意性，知在全平面上有 $f'(z)\equiv 0$，

则 $f(z)$ 为一常数。

3.3.3 几个重要的推论

4. 代数基本定理

设函数 $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$, 其中 $a_n\neq 0$,

n为正整数，证明方程 $f(z)=0$ 在全平面上至少有一个根。

证 (反证法) 假设 $f(z)=0$ 在全平面上无根，即 $f(z)\neq 0\ (\forall z)$,

则函数 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在全平面上解析,

又 $\lim\limits_{z\to\infty}\phi(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}=0$,

故 $\varphi(z)$ 在全平面上有界，根据刘维尔定理有

$\varphi(z)=C$ (常数)， $\Rightarrow$ $f(z)=C_1$(常数)， 与题设矛盾。

注: n次多项式函数 $f(z)$在复数域中有n个根.

3.3.3 几个重要的推论

5. 莫累拉（Morrera）定理

注： 看作是柯西积分定理的逆定理

回顾：

定理 3.2.2 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，

Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，

则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

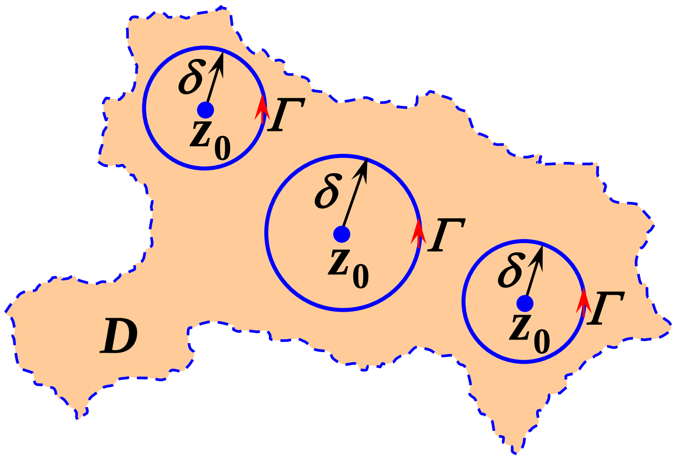
定理 3.3.4 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数，并且对于D内任一条其内部属于 D 的简单光滑闭曲线 Γ 都有 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

则 $f(z)$ 是 D 内的解析函数。

三、最大模原理

定理 （最大模原理）如果函数 $f(z)$ 在 D 内解析且不为常数，则在 D 内 $|f(z)|$ 没有最大值。

证明 （略）



理解 如图，函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内任意一点 z_0 的函数值是以该点为圆心的圆周上所有点的函数值的平均值，因此，$|f(z_0)|$ 不可能达到最大，除非 $f(z)$ 为常数。

三、最大模原理

推论 1 在区域 D 内解析的函数，如果其模在 D 内达到最大值，则此函数必恒为常数。

推论 2 若 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则 $|f(z)|$ 在 D 的边界上必能达到最大值。

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且 $|f(z)-z|\leq\dfrac{1}{|2-z|}$，证明 $|f'(0)|\leq 2$.

证 (1) 任取正数 $r<2$，(注意 $f(z)$在 $|z|=2$ 上的性态不知道)

则函数 $f(z)$ 在 $|z|\leq r$ 内解析，由高阶导数公式有

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)-z+z}{z^2}\mathrm{d}z\right|,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\mathrm{d}s,$$

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且 $|f(z)-z|\le\dfrac{1}{|2-z|}$，

证明 $|f'(0)|\le 2$.

证

$$|f'(0)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\mathrm{d}s,$$

由 $|f(z)-z|\le\dfrac{1}{|2-z|}$，有

$$|f'(0)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{1}{|z|^2\cdot|2-z|}\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{1}{|z|}\mathrm{d}s$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{1}{|z|^2\cdot(2-|z|)}\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi r}\cdot 2\pi r,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|\le\frac{1}{2\pi r^2(2-r)}\cdot 2\pi r+1,$$

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且 $|f(z)-z|\le\dfrac{1}{|2-z|}$，证明 $|f'(0)|\le 2$.

证

$$|f'(0)|\le\frac{1}{2\pi r^2(2-r)}\cdot 2\pi r+1=\frac{1}{r(2-r)}+1,$$

令 $r=1$ 得 $|f'(0)|\le 2$.