傅里叶变换

习 题 六

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

1 求下列函数的傅里叶变换.

(1) $f(t)=\begin{cases}E, & 0\leqslant t\leqslant \tau \\ 0, & \text{其他}\end{cases}, E,\tau>0.$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1 \\ -1, & -1\leqslant t<0 \\ 1, & 0\leqslant t<1 \\ 0, & 1\leqslant t<\infty\end{cases}.$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

2 求下列函数的傅里叶变换,并推证下列积分结果.

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$,证明:

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$$

(2) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$,证明:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$$

(3) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\leqslant 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$,求积分

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

3 计算下列积分.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$.

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-3)(t^2+1)\,\mathrm{d}t$.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4 已知某函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\frac{\sin\omega}{\omega}$,求该函数 $f(t)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

5 证明:若 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}]=F(\omega)$,其中 $\varphi(t)$ 为实函数,则

$$\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}]$$

$$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}]$$

其中$\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(-\omega)$ 的复共轭函数.

年 月 日

6 (1) 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,证明:

$$\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{\mathrm{i}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

(2) 设 $f(t)=\dfrac{\cos^2 t-\sin^2 t}{1+t^2}$,求 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$.

(3) 已知 $\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4}}+\mathrm{e}^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4}}\right]$,求 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ 和 $G(\omega)=\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

7 求下列函数的傅里叶变换.

(1) $f(t)=\begin{cases}E, & |t|<2\\ 0, & |t|\geqslant 2\end{cases}, E>0.$

(2) $g(t)=\begin{cases}-E, & |t|<1\\ 0, & |t|\geqslant 1\end{cases}, E>0.$

(3) $h(t)=3f(t)-4g(t).$

(4) $f(t)=\cos t\sin t.$

8 利用乘积定理,计算积分:$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

9 求函数 $f(t)=\sin\left(5t+\dfrac{2}{3}\right)$ 的傅里叶变换.(注:分别利用线性性质、先坐标放缩再位移、先位移再坐标放缩三种方法求解.)

10 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,证明:

$$F(-\omega)=\mathscr{F}[f(-t)]$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

11 利用对称性质求函数 $F(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$ 所对应的傅里叶逆变换 $f(t)$.

12 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,若 $f'(t)$ 满足傅里叶积分定理条件,则:

(1)$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{i}\omega F(\omega)$,$\mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)]=-\mathrm{i}t\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$(微分性质).

(2)$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)$,$\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} F(\omega)\mathrm{d}\omega\right]=-\frac{1}{\mathrm{i}t}\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$(积分性质).

年 月 日

13 $F(\omega)=F[f(t)]$，$a\in\mathbf{R}-\{0\}$，$t_0\in\mathbf{R}$，证明：

(1) $\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t_0}{a}\omega}$.

(2) $\mathscr{F}[f(t_0-at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(-\dfrac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t_0}{a}\omega}$.

并说明其意义.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

14 求下列函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积.

(1) $f_1(t)=u(t), f_2(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t), a>0$.

(2) $f_1(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}, f_2(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(3) $f_1(t)=\sin bt, f_2(t)=\mathrm{e}^{-a|t|}u(t)(b\in\mathbf{R}, a>0)$.

年 月 日

15 证明卷积的如下性质.

(1)$\delta(t) * f(t) = f(t)$.

(2)$\delta'(t) * f(t) = f'(t)$.

(3)$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) \mathrm{d}\tau$.

(4) $[f(t) * g(t)]' = f'(t) * g(t) = f(t) * g'(t)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

16 求下列函数的傅里叶变换.

(1) $f(t)=\sin\omega_0 t\cdot u(t)$.

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\cdot t\cdot u(t)$.

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t), a>0$.

(4) $f(t)=\dfrac{a^2}{a^2+(4\pi t)^2}, a\neq 0$.

年　月　日

17 求下列函数的傅里叶逆变换.

(1) $F(\omega)=\dfrac{\mathrm{i}\omega}{\beta+\mathrm{i}\omega},\beta>0$.

(2) $F(\omega)=\omega\sin\omega t_0$.

(3) $F(\omega)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

18 解下列积分方程.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{t^2+a^2}, a>0.$

(2) $y(t) = f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau$,其中 $f(t), g(t)$ 为已知函数.

19 解积分方程

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{t^2+b^2}, 0<a<b$$

年　月　日

20 求积分微分方程

$$x'(t)-9\int_{-\infty}^{t}x(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-|t|}$$

的解，其中 $t\in\mathbf{R}$，且 $\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{d}\tau=0$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日