

# 数字逻辑设计

高翠芸

School of Computer Science  
gaocuiyun@hit.edu.cn

# Unit 4 卡诺图 Karnaugh Maps

---

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

# 函数的最简形式

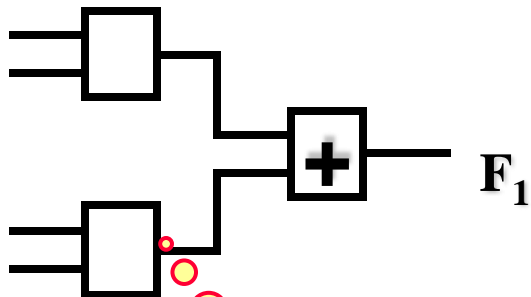
When a function is realized using **AND** and **OR** gates, the cost of realizing the function is directly related to **the number of gates and gate inputs** used.

$$\begin{aligned} F &= AB + \bar{A}C \\ &= AB + \bar{A}C + BC \\ &= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \end{aligned}$$

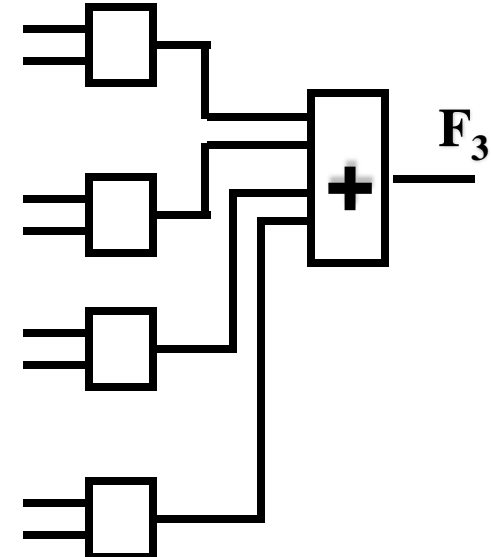
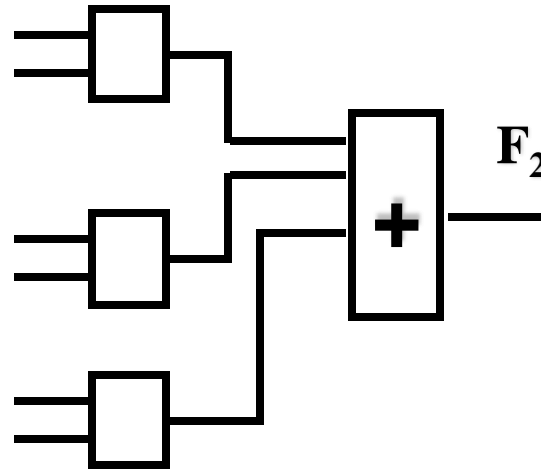
.....①F<sub>1</sub>

.....②F<sub>2</sub>

.....③F<sub>3</sub>



Minimum Cost !

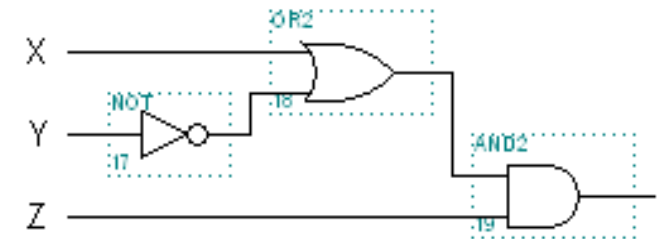
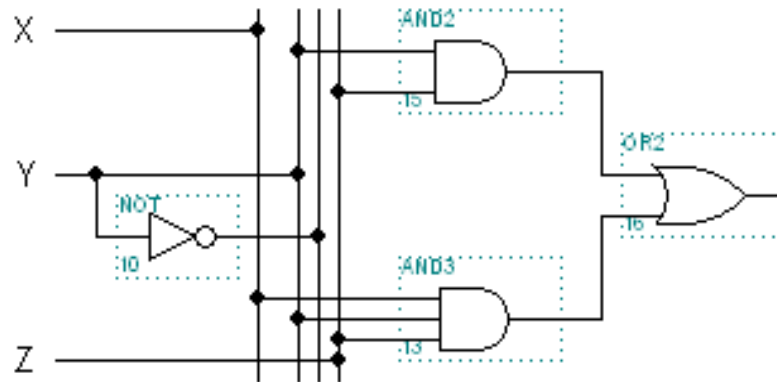
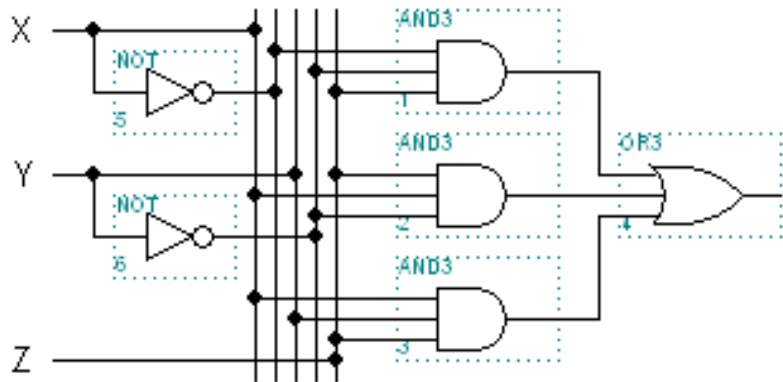


# 开关函数的最简形式

$$F = \sum_{XYZ} (1,5,7) = x' y' z + x y' z + x y z$$

$$F = (x' y' z + x y' z) + x y z = y' z + x y z$$

$$F = (y' + x y) z = (y' + x) z$$



# 开关函数的最简形式

## 一个最简表达式中

- ① 逻辑门的数量最少
- ② 逻辑门的输入个数最少

## 与最小项（最大项）表达式不同

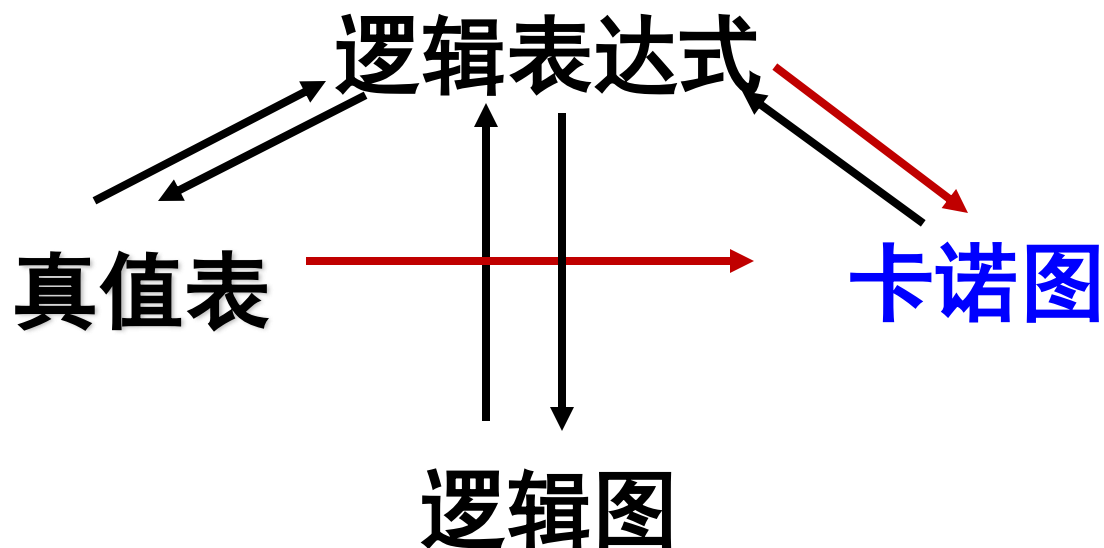
- 最简表达式**不一定是唯一的**.
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

# 卡诺图 Karnaugh Maps

---

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

# 逻辑函数的表达方式之一



- 化简三变量或者四变量的逻辑函数时，卡诺图特别有用！

# 卡诺图的性质

- 卡诺图通常为正方形或矩形均匀分成 $2^n$ 个小格，每个小格代表一个最小项。
- 单元格对应的最小项按格雷码摆放
- 任何两个相邻单元格对应的最小项只有一个变量取值不同

## 1. 两变量 K. Map

$$F=f(AB)$$

	$\bar{B}$	$B$
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
$A$	$A\bar{B}$	$AB$

(a)

	$B$	0	1
$A$	0	0 0 0	0 1 1
	1	1 0 2	1 1 3

(b)

	$B$	0	1
$A$	0	0	1
	1	2	3



# 三变量卡诺图

$$F=f(ABC)$$

BC		00	01	11	10
A	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6

# 四变量卡诺图

**$F=f(ABCD)$**

<b>AB \ CD</b>				
	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>11</b>	<b>10</b>
<b>00</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>
<b>01</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>6</b>
<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>14</b>
<b>10</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>10</b>

# 五变量卡诺图

$$F=f(ABCDE)$$

		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	0	1	3	2	6	7	5	4
	01	8	9	11	10	14	15	13	12
	11	24	25	27	26	30	31	29	28
	10	16	17	19	18	22	23	21	20

# 卡诺图的特征

---

- 卡诺图上几何相邻的最小项逻辑上也相邻。

- 几何相邻 { 相接  
行或列首尾相接

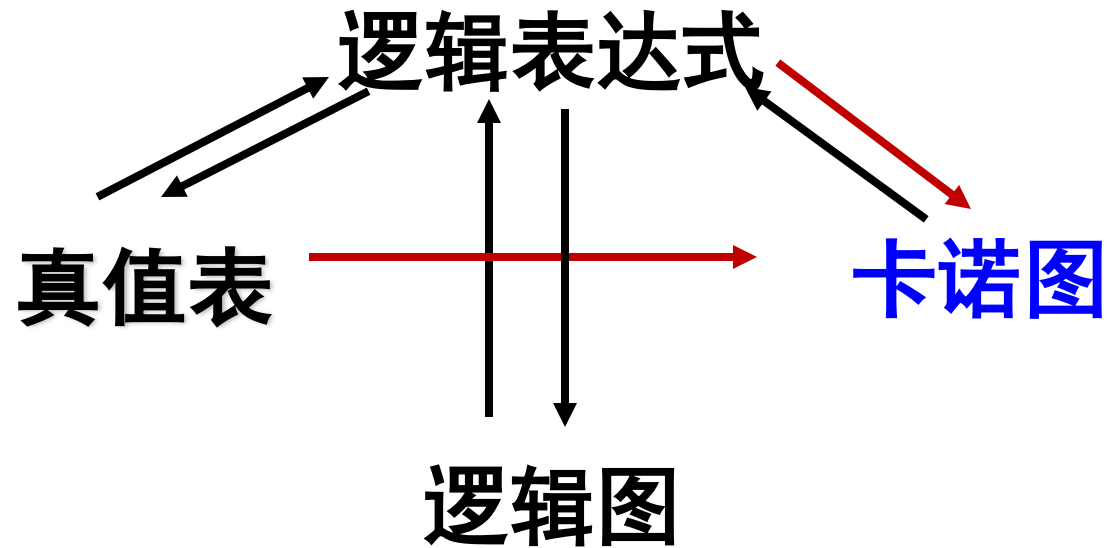
- 逻辑相邻—两个最小项中只有一个变量出现的形式不同

# 卡诺图 Karnaugh Maps

---

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

# 逻辑函数的表达方式之一



- 化简三变量或者四变量的逻辑函数时，卡诺图特别有用！

# 填写卡诺图

① 已知真值表

Truth Table

AB C	F
0 0 0	0 ✓
0 0 1	0 ✓
0 1 0	0 ✓
0 1 1	1 ✓
1 0 0	0 ✓
1 0 1	1 ✓
1 1 0	1 ✓
1 1 1	1 ✓

② 已知标准与或式:与项是最小项时,  
按最小项编号的位置直接填入。

③ 已知标准或与式

BC	00	01	11	10
A				
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F = \Sigma m(3, 5, 6, 7)$$

$$F = \Pi M(0, 1, 2, 4)$$

# 填写卡诺图

*Example 1.*  $F=AB+BC+AC$

$$= AB(C+\bar{C})+BC(A+\bar{A})+AC(B+\bar{B})$$

$$= \underset{7}{ABC} + \underset{6}{AB\bar{C}} + \underset{7}{ABC} + \underset{3}{\bar{A}BC} + \underset{7}{ABC} + \underset{5}{A\bar{B}C}$$

BC		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1



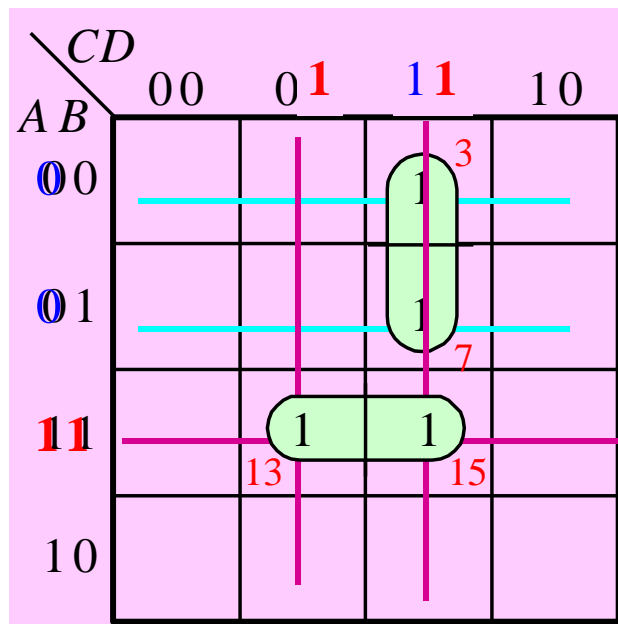
***Example 2.***  $\mathbf{F} = ( \overline{A \oplus B} ) (C + D)$

***Example 3.*** 
$$\mathbf{F} = \overline{A \oplus C \cdot \overline{B} (A\overline{C}\overline{D} + \overline{A}C\overline{D})}$$

## ④与项不是最小项的形式

与项不是最小项的形式，按邻接关系直接填入卡诺图。

例如：  $P(A,B,C,D) = \bar{A}CD + ABD$



先填  $\bar{A}CD$ ，这是  $\bar{A}$ ，这是  $CD$ ；

$$\bar{A}CD = \bar{A}(B + \bar{B})CD$$

$$= \bar{A}BCD + \bar{A}\bar{B}CD$$

所以  $\bar{A}CD$  处于第一第二行和第三列的交点上（二行一列）。

再填  $ABD$ ，这是  $AB$ ，这是  $D$ 。

所以  $ABD$  处于第三行和第二、第三列的交点上（一行二列）。

# 将逻辑表达式填入卡诺图

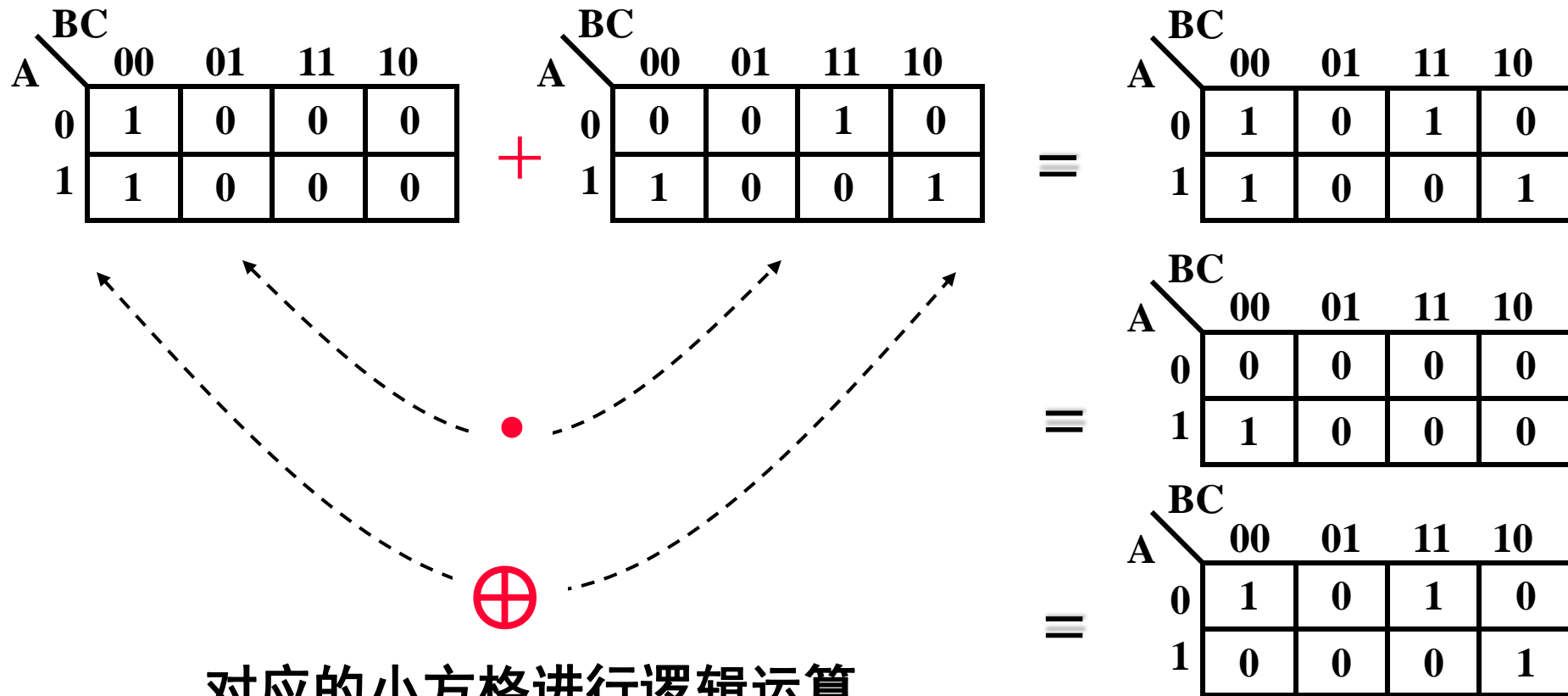
---

例：将逻辑式  $P = B\bar{C} + \bar{B}\bar{D}$  填入卡诺图

例：将逻辑式  $P = \overline{B}C + AB\overline{D}$  填入卡诺图

# Properties of K. maps

## ■ 基于卡诺图的逻辑运算



对应的小方格进行逻辑运算

# Properties of K. maps

		F			
		00	01	11	10
C	0		1	1	
	1	1	1		



		X·F			
		00	01	11	10
C	0		X	X	
	1	X	X		

		F			
		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	0	1	1	0



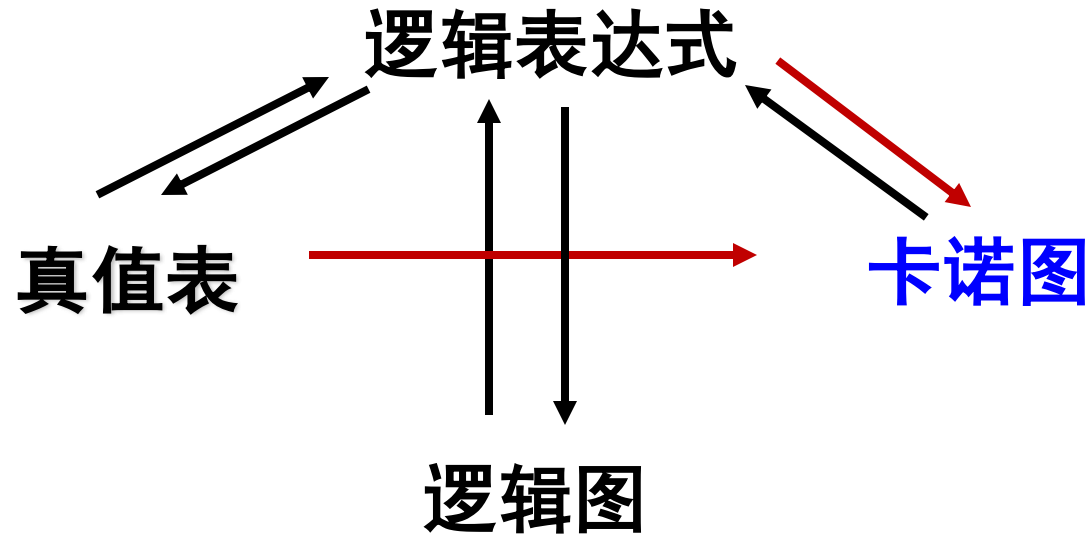
		$\bar{F}$			
		00	01	11	10
A	0	1	0	0	0
	1	1	0	0	1

**F**

**$\bar{F}$**

# Representation methods of logical function

---



- K. map is an especially useful tool for simplifying and manipulating switching functions of three or four variables.



# 卡诺图 Karnaugh Maps

---

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

# 卡诺图化简法

Methods {  
■ 代数法  
■ 卡诺图法——  
■ 图形法化简逻辑函数

$$F(A, B, C) = \bar{A}BC + ABC = BC(\bar{A} + A) = BC$$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

# 卡诺图化简法

---

从一个卡诺图中可以读取：



- 最简与或式（**AND-OR**）
- 最简或与式（**OR-AND**）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）

# 如何从卡诺图读最简与或式

## Step ①: 画圈

- a). 将**相邻**为**1**的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 $2^m$ ,  $m=0,1,2,\dots$ )
- b). 圈**越大越好**
- c). 小方格可以**重复**使用



**Adjacent:** 紧靠在一起的、行列首尾的、对称的  
(本质上: 满足格雷码特点)

A \ BC	00 01 11 10			
	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

AB \ CD	00 01 11 10			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

AB \ CD	00 01 11 10			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

# 如何从卡诺图读最简与或式

**Step ②** : 每个圈代表一个与项

观察       $\left. \begin{array}{l} \text{Left} \\ \text{Top} \end{array} \right\}$  变量取值不同——消去

变量取值相同       $\left\{ \begin{array}{l} 1: \text{原变量} \\ 0: \text{反变量} \end{array} \right.$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	0	0	1

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	0
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	1	0

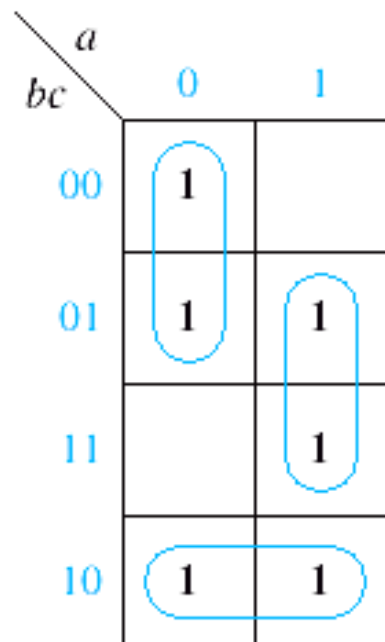
# 如何从卡诺图读最简与或式

Step ③: 将所有的与项相加

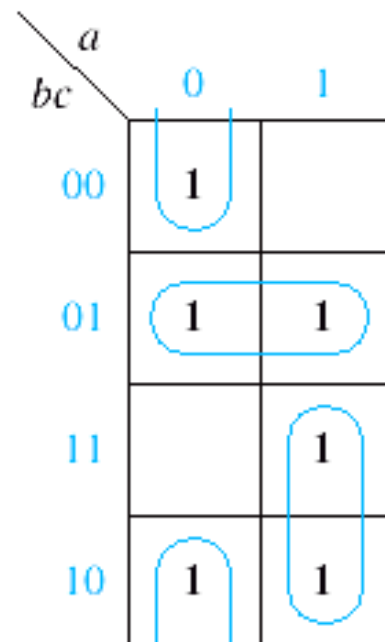
		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	1	1

$$F = \bar{A}\bar{C} + AC + \bar{B}\bar{D}$$

# 如何从卡诺图读最简与或式



$$F = a'b' + bc' + ac$$



$$F = a'c' + b'c + ab$$

**The two minimum solutions For  $F$**

与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式**不一定是唯一的**。
- 但最简表达式的**实现代价是相同的**（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

# 如何从卡诺图读最简与或式

---

从卡诺图中读取：



- 最简与或式（**AND-OR**）
- 最简或与式（**OR-AND**）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）



# 如何从卡诺图读最简或式

## Step ①: 画圈

- a). 将相邻为0的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为  $2^m$ ,  $m=0,1,2\dots$ )
- b). 圈越大越好
- c). 小方格可以重复使用



**Adjacent:** 紧靠在一起的、行列首尾的、对称的  
(本质上: 满足格雷码特点)

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	1	0	1
	1	1	0	0	0

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	0
	10	0	1	1	0

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	1	0	0	1

# 如何从卡诺图读最简或式

Step ②: 每个圈代表一个和项

观察  $\left. \begin{array}{l} \text{Left} \\ \text{Top} \end{array} \right\}$  变量取值不同——消去

变量取值相同  $\left\{ \begin{array}{l} 0: \text{原变量} \\ 1: \text{反变量} \end{array} \right.$

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

# 如何从卡诺图读最简或与式

Step ③: 将所有的和项相乘

$AB \backslash CD$		$CD$			
		00	01	11	10
$AB$	00	0	0	1	0
	01	0	0	1	1
	11	1	1	0	0
	10	0	1	0	0

$$F = (A + C) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) \cdot (B + D)$$

到目前哪里存在问题？

- ☐ A 卡诺图基本概念
- ☐ B 卡诺图化简
- ☐ C 之前的内容
- ☐ D 讲解速度快
- ☐ E 讲解速度慢

提交

# 卡诺图化简法

---

## 从卡诺图中读取

- 最简与或式 ( **AND-OR** )
- 最简或与式 ( **OR-AND** )
- 最简与或非式 ( **AND-OR-NOT** )



# 如何从卡诺图读最简与或非式

Step ①: 读  $\bar{F}$  的与或式

方法: 在  $F$  的卡诺图中圈 0 (或者在  $\bar{F}$  的卡诺图中圈 1)

Step ②: 对  $\bar{F}$  求反

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

$$F = (A+B)(B+C)(A+C)$$

Minimum OR-AND  
Expressions

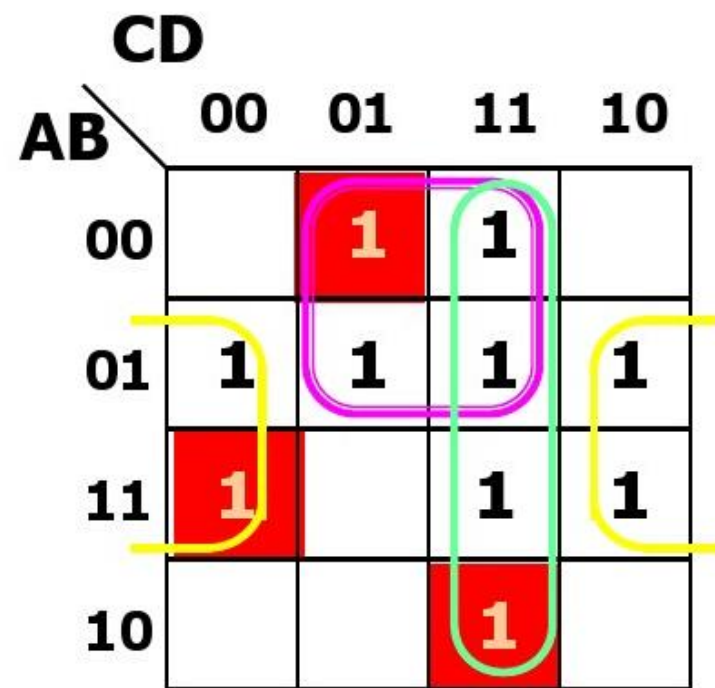
$$\bar{F} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$$



$$F = \overline{\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}}$$

# 卡诺图中的几个概念

- **蕴含项** (implicant) : 只包含1的矩形圈
- **主蕴含项/首要蕴含项** (prime implicant) : 扩展到最大的蕴含项
  - 函数所有的首要蕴含项都可以通过卡诺图求得
  - 完全由无关项组成的首要蕴含项不可能成为最简结果的一部分
  - 最简积之和由某些首要蕴含项组成
    - 若含有非首要蕴含项, 可能不是最简式

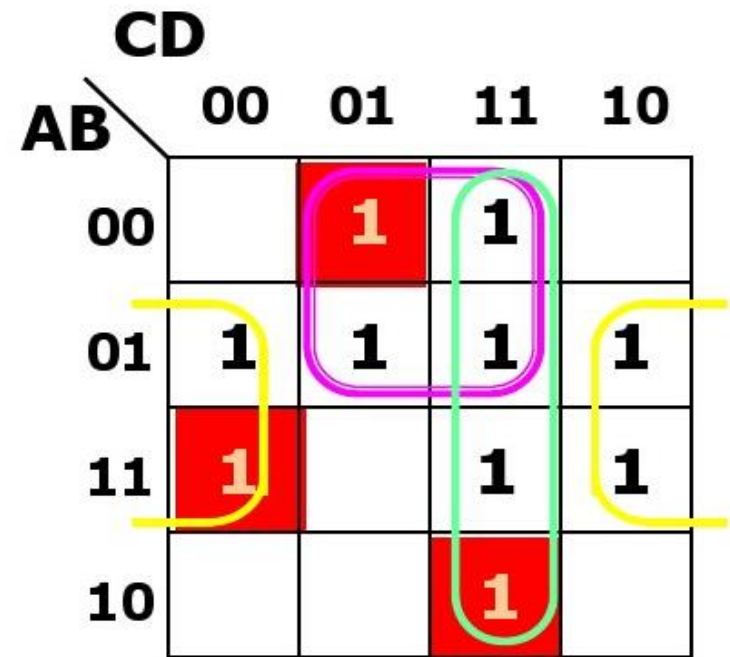


# 卡诺图中的几个概念——续

- 奇异“1”单元 (Distinguished 1-cell) : 仅被单一首要蕴含项覆盖的输入组合

技巧: 圈卡诺图时, 从合并奇异1单元开始

- 质主蕴含项 (Essential Prime implicant) / 基本首要蕴含项: 覆盖一个或者多个奇异“1”单元的主蕴含项



没有可能被重复  
“圈”过的1单元



# 如何使逻辑表达式最简？

---

- 卡诺图

具体步骤参见P111-112

- 首要蕴含项表（P136）

假设某逻辑函数的表达式如6-2所示。

经过化简后如6-3所示

用表6-2和6-3得到最简积之和表达式

# 进一步讨论——更多变量卡诺图

## \* 展开定理

一个n变量的逻辑函数可以对变量 $x_i$ 展开为两个n-1变量的逻辑函数

$$1. \quad f(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n)$$

$$= x_i \cdot f(x_1 x_2 \dots 1 \dots x_n) + \bar{x}_i \cdot f(x_1 x_2 \dots 0 \dots x_n)$$

.....对 $x_i$ 展开为与或式

$$2. \quad f(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n)$$

$$= [\bar{x}_i + f(x_1 x_2 \dots 1 \dots x_n)] \cdot [x_i + f(x_1 x_2 \dots 0 \dots x_n)]$$

.....对 $x_i$ 展开为或与式

# 进一步讨论——更多变量卡诺图

$$F=f(x_1x_2x_3x_4x_5)$$

$X_4X_5 \backslash X_2X_3$					
		00	01	11	10
00	0	1	3	2	
01	4	5	7	6	
11	12	13	15	14	
10	8	9	11	10	

$$x_1 = 0$$

$X_4X_5 \backslash X_2X_3$					
		00	01	11	10
$X_2X_3$	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$$x_1 = 1$$

$$F = \Sigma m(0, 1, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 16, 20, 22, 28, 30, 31)$$

$X_4 X_5 \backslash X_2 X_3$		$X_4 X_5$			
		00	01	11	10
$X_2 X_3$	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$x_1 = 0$

$X_4 X_5 \backslash X_2 X_3$		$X_4 X_5$			
		00	01	11	10
$X_2 X_3$	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$x_1 = 1$

$DE \backslash BC$		$BC$			
		00	01	11	10
$DE$	00	1	1	0	0
	01	1	1	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	1	0

$A = 0$

$DE \backslash BC$		$BC$			
		00	01	11	10
$DE$	00	1	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	1	1
	10	0	0	0	0

$A = 1$

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{B}\overline{D}\overline{E} + ABCD + \overline{A}B\overline{C}DE + C\overline{E}$$

*Example*

DEF \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001		1	1					
011				1				1
010	1			1	1			1
110	1			1	1		1	1
111		1	1					
101		1	1					
100	1			1	1			1

$$\begin{aligned}
 F = & C'F' + B'CD'F + ACD'F + A'BD'EF' \\
 & + A'BDE'F' + ABC'DE'
 \end{aligned}$$

# 卡诺图化简法

---

进一步讨论——



带无关项的卡诺图化简

# 带无关项的卡诺图化简

## Example

某单位三八节包场看电影，规定电影票只发给本单位的女职工，写出满足上述条件的逻辑表达式。

A=1: 本单位

B=1: 女职工

C=1: 有电影票

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	×
0	1	0	0
0	1	1	×
1	0	0	0
1	0	1	×
1	1	0	0
1	1	1	1

无关项——

不存在的或无意义的取值组合

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	×	×	0
	1	0	×	1	0

$$F = C$$

# 带无关项的卡诺图化简

---

*Example*

输入信号X为 8421BCD码, 设计组合逻辑电路,  
当 $X \geq 5$ , 输出  $F=1$ 。



# 带无关项的卡诺图化简

---

*Example*

设计一个能将4位 二进制数转换为余3码的电路

# Unit 4 卡诺图 Karnaugh Maps

---

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法