第四章 解析函数的级数表示

4.1.1 复数序列

1. 基本概念

设 z_n 为复数，称 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为复数序列。

定义 4.1.1 设 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为一复数序列，a 为一确定的复数，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，相应地存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，总有 $|z_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称 $\{z_n\}$ 收敛于 a，且称 a 为 $\{z_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty} z_n=a,\quad \text{或}\quad z_n\to a,(n\to+\infty).$$

- 如果复数序列 $\{z_n\}$ 不收敛，则称 $\{z_n\}$ 发散。

4.1.1 复数序列

2. 复数序列极限存在的充要条件

定理 4.1.1 设 $z_n = x_n + i y_n$, $a = \alpha + i\beta$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta.$$

因此，我们可以把有关实数序列极限的运算理论转移到复数序列上。

3. 运算法则 复数序列的加、减、乘、除运算均满足

定理 4.1.2 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$， $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = z'$，则有

（1）和差： $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm z'_n) = z \pm z'$

（2）乘积： $\lim\limits_{n\to\infty} z_n z'_n = zz'$

（3）商： $\lim\limits_{n\to\infty} z_n / z'_n = z/z'$， $z'_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$， $z' \neq 0$

例 设 $z_n = i^n + \frac{i}{n}$，讨论序列 $\{z_n\}$ 的收敛性。

解 $z_n = i^n + \frac{i}{n} = e^{\frac{\pi}{2}in} + \frac{i}{n} = \cos\frac{n\pi}{2} + i\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\right).$

由于 $\{\cos\frac{n\pi}{2}\}$ 或 $\{\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\}$ 发散，故 $\{z_n\}$ 也发散。

附 试考察实序列 $\{|z_n|\}$ 的收敛性。(其中 z_n 见上例)

已知 $|z_n| = \left|i^n + \frac{i}{n}\right|$，根据复数模的三角不等式有

$$1 - \frac{1}{n} \le |z_n| \le 1 + \frac{1}{n}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 1,$$

故实序列 $\{|z_n|\}$ 收敛。

注 序列 $\{|z_n|\}$ 收敛 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ 序列 $\{z_n\}$ 收敛（但极限为零时等价）；

4.1.2 复数项级数

1. 基本概念

定义 4.1.2&4.2.3　设 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为一复数序列，

(1) 称 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$ 为复数项级数.

(2) 称 $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为级数的部分和;

(3) 如果部分和序列$\{s_n\}$收敛，即 $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$，

则称级数收敛且极限值 s 称为级数的和;

(4) 如果部分和序列$\{s_n\}$不收敛，则称级数发散。

例4.1.1(1) 考察复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-1}$ 的敛散性.

4.1.2 复数项级数

2. 复数项级数收敛的充要条件

定理 4.1.3 设 $z_n = x_n + iy_n$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ 都收敛。

因此，我们可以把有关实数项级数的性质转移到复数序列上。

3. 复数项级数收敛的必要条件

定理 4.1.4 复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$

例 设 $z_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{2^n}$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ 的收敛性。

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛，　　几何级数：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$，当 $0<a<1$ 时收敛。

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，　　p 级数：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$，当 $p \le 1$ 时发散。

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ 发散。

例4.1.3 考察复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1}$ 的敛散性.

解 级数的部分和为 $s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$，$(z \neq 1)$，

(1) 当 $|z| < 1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty} |z|^{n+1} = 0$，$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$，

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-z}，\text{级数收敛；}$$

(2) 当 $|z| \geq 1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} \neq 0$，级数发散。

4.1.2 复数项级数

4. 复数项级数的绝对收敛与条件收敛

定义 4.1.4 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛。

定理 4.1.5 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 必收敛。

实，正项级数

例 设 $z_n=\dfrac{i^n}{n!}$，讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ 的收敛性。

解 由 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|z_n|=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}=\mathrm{e}$,

可知 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛，故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ 收敛。

注： 对级数本身，也可展开成实交错级数形式，证明收敛性。见例4.1.2.

4.1.3 复变函数项级数

1. 基本概念

定义 设复变函数 $f_n(z)$ 在区域 G 内有定义，

(1) 称 $\{f_n(z)\}_{n=1,2,\cdots}$ 为区域 G 内的复变函数序列。

(2) 称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$ 为区域 G 内的复变函数项级数，简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

4.1.3 复变函数项级数

1. 基本概念

定义 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 为区域 G 内的复变函数项级数，

(1) 称 $s_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的部分和。

(2) 如果对 G 内的某一点 z_0，有 $\lim_{n\to+\infty} s_n(z_0)=s(z_0)$，

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 点收敛，记 $s(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

(3) 如果存在区域 $D\subseteq G, \forall z\in D$，有 $\lim_{n\to+\infty} s_n(z)=s(z)$，

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 D 内收敛，称区域 D 为收敛域。

此时，称 $s(z)$ 为和函数，记作 $s(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

第四章 解析函数的级数表示

4.2.1 幂级数的概念

定义 称由下式给出的复变函数项级数为幂级数：

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \quad (4.2.1)$$

其中，a_n，z_0 为复常数。特别地，当 $a=0$ 时有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots. \quad (4.2.2)$$

注 下面主要是对 (4.2.2) 进行讨论，所得到的结论只需将 z 换成 $(z-z_0)$ 即可应用到 (4.2.1) 上。

4.2.2 幂级数的收敛圆与收敛半径

阿贝尔 (Abel) 定理

定理 4.2.1 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，有

(1) 如果级数在 z_0 点收敛，则它在 $|z|<|z_0|$ 上绝对收敛；

(2) 如果级数在 z_1 点发散，则它在 $|z|>|z_1|$ 上发散。

注：

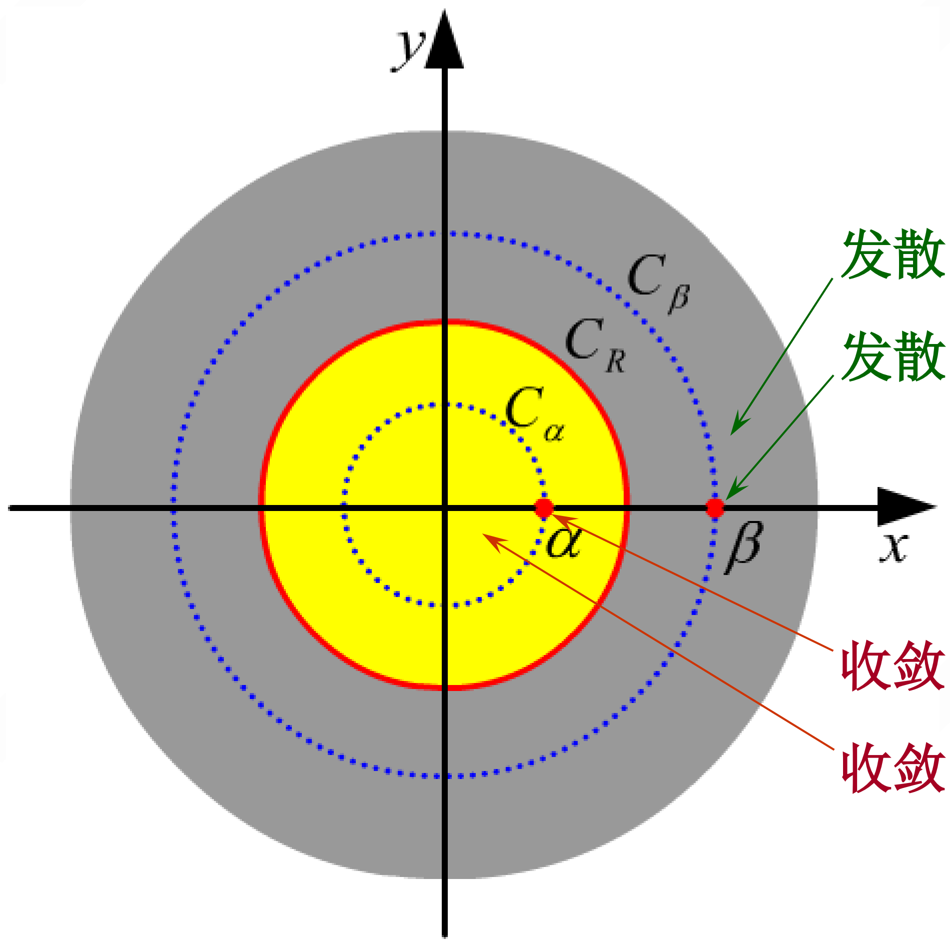
$$\text{当} z = 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots = a_0$$

和函数为常数，因此幂级数至少有一个收敛点 $z = 0$.

同理对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$， 至少有收敛点 $z = z_0$.

4.2.2 幂级数的收敛圆与收敛半径

分析

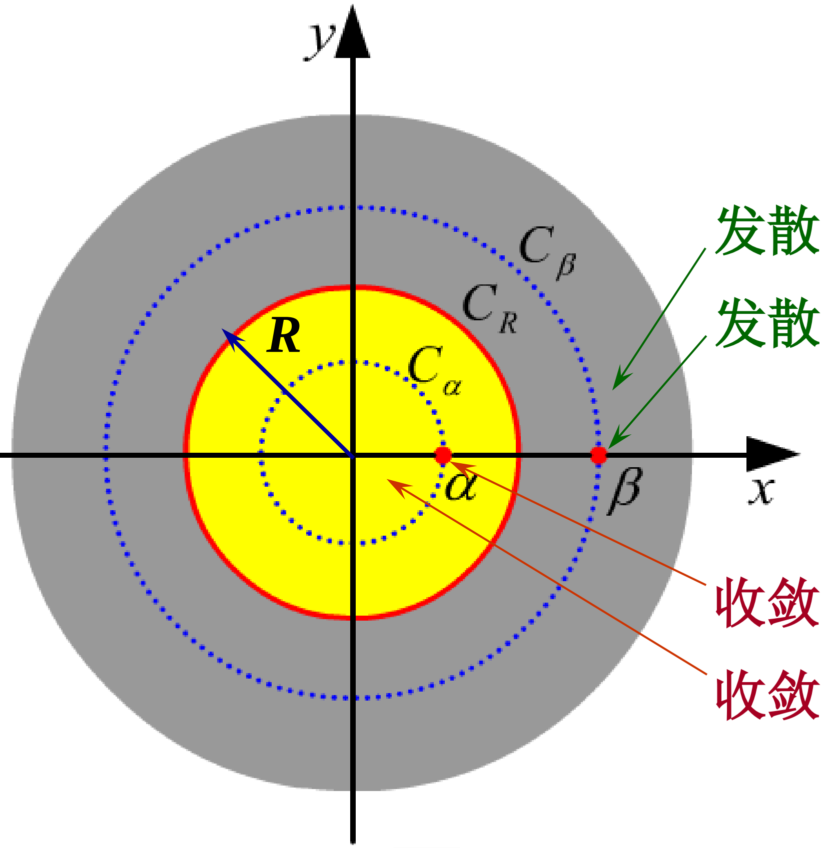


4.2.2 幂级数的收敛圆与收敛半径

定义 如图设 C_R 的半径为 R，

(1) 称圆域 $|z|<R$ 为收敛圆。

(2) 称 R 为收敛半径。



注： (1) 级数在收敛圆内部收敛，外部发散，在边界上各点的收敛情况是不一定的。

(2) 级数的收敛半径有三种情况：

$R=0$ 表示级数仅在 $z=0$ 点收敛；

$R=+\infty$ 表示级数在整个复平面上 收敛；

$0<R<+\infty$ 表示级数在半径为 R 的收敛圆内收敛。

例4.1.3 考察复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1}$ 的敛散性.

解 级数的部分和为 $s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, $(z \neq 1)$,

(1) 当 $|z| < 1$时, $\lim\limits_{n\to+\infty} |z|^{n+1} = 0$, $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$,

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-z},$$ 级数收敛;

(2) 当 $|z| \geq 1$时, $\lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} \neq 0$, 级数发散。

故级数收敛半径为 $R = 1$, 和函数为 $s(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, \quad (|z| < 1).}$$

4.2.2 幂级数的收敛圆与收敛半径

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，有

(1) 比值法　如果 $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lambda$，则收敛半径为 $R=\frac{1}{\lambda}$.

-- 定理4.2.2 达朗贝尔法则

(2) 根值法　如果 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$，则收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$.

-- 定理4.2.3 柯西法则

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径与收敛圆。

解 由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$，得

收敛半径为 $R=+\infty$，收敛圆为 $|z|<+\infty$.

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径与收敛圆。

解 由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)}=1$，得

收敛半径为 $R=1$，收敛圆为 $|z-1|<1$.

注： 考虑边界上的点：$z=0$, 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为交错级数，收敛。

$z=2$, 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数，发散。

4.2.3 幂级数的性质

1. 幂级数的运算性质 注：前提是收敛

性质 设$s_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n, |z|<r_1, s_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n, |z|<r_2$

令 $r=\min(r_1,r_2)$，则在 $|z|<r$ 内有

$$s_1(z)\pm s_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\pm b_n)z^n$$

$$s_1(z)s_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)z^n.$$

注：第n项的系数中a_i,b_j有$i+j=n.$

4.2.3 幂级数的性质

2. 幂级数的分析性质 注：前提是收敛

性质 设 $S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$，$|z-z_0|<R$，则

(1) 函数 $S(z)$ 在收敛圆 $|z-z_0|<R$ 内解析，即和函数解析。

(2) 函数 $S(z)$ 的导数可由其幂函数逐项求导得到，即

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

或 $S^{(k)}(z)=k!\,a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(z-z_0)+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}(z-z_0)^2\cdots$

(3) 在收敛圆内可以逐项积分，即

$$\int_C S(z)dz=\int_C\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n\,dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_C a_n(z-z_0)^n dz$$

例 把函数 $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 表示成形如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的幂级数。

解 方法一 **利用乘法运算性质**

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z}=(1+z+z^2+\cdots)(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots,\quad |z|<1.$$

方法二 **利用逐项求导性质**

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=(1+z+z^2+\cdots)'$$

$$=1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots,\quad |z|<1.$$

例 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表示成形如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 a 与 b 是不相等的复常数。

解
$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

$$=-\frac{1}{b-a}-\frac{(z-a)}{(b-a)^2}-\frac{(z-a)^2}{(b-a)^3}-\cdots-\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}-\cdots,$$

其收敛半径为 $R=|b-a|$， 收敛圆为 $|z-a|<|b-a|$.

例4.2.4： 将函数$f(z)=\ln(1-z)$表示成形如$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$的幂级数。

第四章 解析函数的级数表示

问题分析

由幂级数性质可知，幂级数收敛对应的和函数解析。

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

反过来？ 解析函数能否表示为幂级数展开的形式？

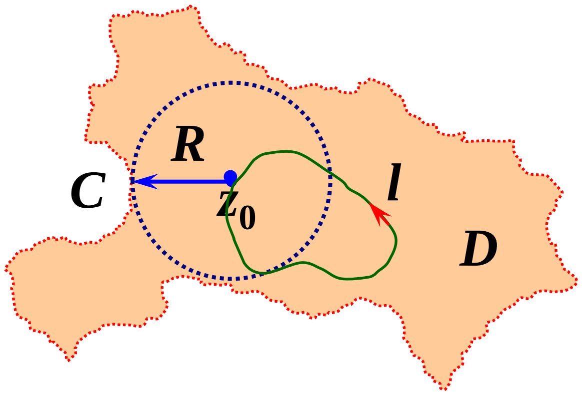
类比： 实函数的泰勒展开。

4.3.1 泰勒(Taylor)展开定理

定理 4.3.1 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 的边界，$z_0 \in D$，

$R = \min\limits_{z \in C} |z - z_0|$，则当 $|z - z_0| < R$ 时，有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

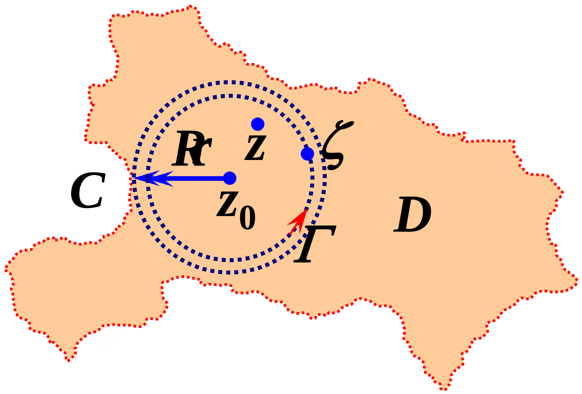


其中，$a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z .$$

（l 为 D 内包围 z_0 点的任意一条闭曲线。）

泰勒展开定理（定理4. 3. 1）的证明



证明 如图以 z_0 为圆心，$r\,(r<R)$ 为半径作圆 Γ，设 z 为 Γ 内任意一点。

由柯西积分公式有 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{\Gamma}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,$

由 $|z-z_0|<|\zeta-z_0|$ 有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

$$\Rightarrow\ f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

泰勒展开定理（定理4.3.1）的证明

证明 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+R_N(z)$$

交换次序 $$=\sum_{n=0}^{N-1}\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta}\,(z-z_0)^n+R_N(z)$$

$$\boxed{a_n}$$

其中，$$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

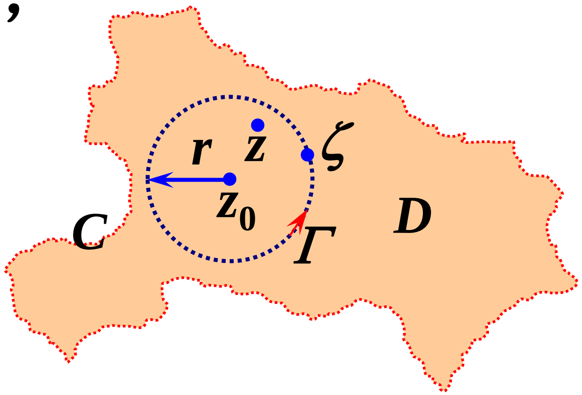
- **下面需证明** $\lim\limits_{N\to+\infty}R_N(z)=0.$

泰勒展开定理（定理4. 3. 1）的证明

证明 $R_N(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=N}^{+\infty}\dfrac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$

由 $f(z)$在 D 内解析，$\Rightarrow$ $f(z)$ 连续，

$\Rightarrow$ $f(z)$ 有界，即 $|f(z)|<M$，



又 $\dfrac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}=\dfrac{|z-z_0|}{r}=q<1$，有

$$|R_N(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{|z-z_0|^n}{|\zeta-z_0|^{n+1}}|f(\zeta)|\mathrm{d}s.$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{r}q^n\cdot M\cdot 2\pi r=\frac{Mq^N}{1-q}\xrightarrow{N\to+\infty}0.$$

4.3.1 泰勒(Taylor)展开定理

- 泰勒展开在圆域内展开（幂级数的收敛域必是圆域）。

- 如$f(z)$在D中有奇点，则收敛域的半径为
  展开点z_0到D中距离最近的奇点之间的距离。

- 对给定函数，展开为幂级数的形式唯一（定理4.3.3），
即为泰勒展开形式。

定理 4.3.2 函数$f(z)$在点z_0解析当且仅当$f(z)$在点z_0附近可用幂级数表示（即展开成泰勒级数的形式）。

4.3.2 几个初等函数的幂级数展开式

1. 直接展开法

- 利用泰勒定理，直接计算展开系数 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \cdots$$

例 将函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在 $z = 0$ 点展开为幂级数。

解 $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z\big|_{z=0} = 1$, $\Rightarrow a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$,

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

4.3.2 几个初等函数的幂级数展开式

1. 直接展开法

- 利用泰勒定理，直接计算展开系数 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

- 同理可得

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

4.3.2 几个初等函数的幂级数展开式

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 常用的已知展开式　不要忘记收敛半径！

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=1+z+z^2+z^3\cdots,\ |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\ |z|<+\infty.$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots,\ |z|<+\infty.$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,\ |z|<+\infty.$$

例 将函数 $f(z)=\sin^2 z$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数。

解 $$\sin^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\frac{(2z)^6}{6!}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{(2z)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2z)^4}{2\cdot 4!}+\frac{(2z)^6}{2\cdot 6!}-\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

例 将函数 $f(z)=\sin z$ 在 $z=1$ 点展开为幂级数。

解 $$\sin z=\sin[1+(z-1)]=\sin 1\cos(z-1)+\cos 1\sin(z-1)$$

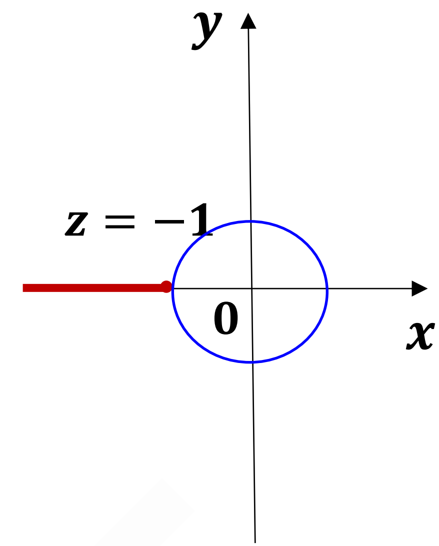
$$=\sin 1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{(2n)!}+$$

$$\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |z-1|<+\infty.$$

例 将函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 分别在 $z=0$, $z=1$ 点展开为幂级数。

解 (1) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{1-(-z)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1.$

展开区域 $|z|<1.$



$$\int_0^z f'(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z\right],$$

$$f(z)-f(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},$$

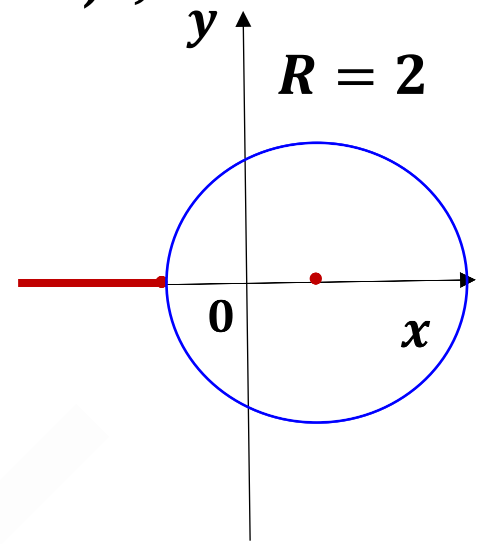
$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<1.$$

例 将函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 分别在 $z=0$, $z=1$ 点展开为幂级数。

解 (2) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{2+(z-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+(z-1)/2}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n,$$

展开区域 $|z-1|<2.$



$$\int_1^z f'(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int_1^z(z-1)^n\mathrm{d}z\right],$$

$$f(z)-f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1},$$

$$f(z)=\ln 2+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1},\quad |z-1|<2.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 在 $z=i$ 点展开为幂级数。

解 函数 $f(z)$ 有奇点 $z=1$，故收敛半径 $R=|1-i|=\sqrt{2}$.

因此展开区域为 $|z-i|<\sqrt{2}$.

(1) $$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-i}{1-i}}$$

$$|z-i|<\sqrt{2}.\ =\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}},$$

(2) $$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}}$$

$$|z-i|<\sqrt{2}.\quad =\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{(1-i)^{n+2}}(z-i)^n,$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{2z^2-3}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数。

解 $$f(z)=\frac{A}{z-2}+\frac{Bz+C}{z^2+1}=\frac{1}{z-2}+\frac{z+2}{z^2+1},$$

$$(1)\ \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\quad |z|<2.$$

$$(2)\ \frac{z+2}{z^2+1}=\frac{z+2}{1-(-z^2)}=(z+2)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^n z^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1},\quad |z|<1.$$

例4.3.4 求函数$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$在$z_0 = 0$处的泰勒展开式。

解: 函数有奇点$z = 1$，故可在$|z| < 1$内展开为泰勒级数.

法一: 间接法，参考例题4.3.3.

法二: 直接法，求 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

两端求导得$f'(z) = e^{\frac{1}{1-z}} \frac{1}{(1-z)^2}$, 从而有 $(1-z)^2 f'(z) - f(z) = 0$.

由$f(0) = e$，得$f'(0) = e$. 类似逐次求导可得如下方程:

$$(1-z)^2 f''(z) + (2z-3) f'(z) = 0$$

$$(1-z)^2 f'''(z) + (4z-5) f''(z) + 2f'(z) = 0, \ldots\ldots$$

从而有 $f''(0) = 3e$，$f'''(0) = 13e$， ...

$$f(z) = e\left(1 + z + \frac{3}{2!} z^2 + \frac{13}{3!} z^3 + \cdots\right), \quad |z| < 1$$

例4.3.5 设函数$f(z)=\frac{z-a}{z+a}$, $a\neq 0$. 求$\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$, 其中C为任一条包含原点且落在圆周在$|z|=|a|$内的简单闭曲线。

解: $f(z)=\frac{z-a}{z+a}$以$z=-a$为奇点，故在$|z|<|a|$内解析，积分曲线C落在圆周$|z|=|a|$内，由高阶导数公式及泰勒展开

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(0)=2\pi i\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=2\pi i\alpha_n$$

其中α_n为函数$f(z)$在解析区域$|z|<|a|$内的泰勒系数.

将函数$f(z)=\frac{z-a}{z+a}$在$|z|<|a|$内展开为泰勒级数

$$f(z)=\frac{z-a}{z+a}=1-\frac{2a}{z+a}=1-2\frac{1}{1+z/a}=1-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{a}\right)^n$$

$$=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a^n}(-1)^{n-1}z^n, \quad |z|<|a|$$

由展开式可得泰勒系数α_n

$$\alpha_n = \begin{cases} -1, & n = 0 \\ (-1)^{n-1}\dfrac{2}{a^n}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

进而可知所求积分为

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \begin{cases} -2\pi i, & n = 0 \\ (-1)^{n-1}\dfrac{4\pi i}{a^n}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

第四章 解析函数的级数表示

问题分析

引例 根据前面的讨论已知，函数 $\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 点的幂级数展开式为 $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$，$(|z|<1)$.

- 事实上，该函数在整个复平面上仅有 $z=1$ 一个奇点，但正是这样一个奇点，使得函数只能在 $|z|<1$ 内展开为 z 的幂级数， 而在 $|z|>1$ 如此广大的解析区域内不能展开为 z 的幂级数。

- 有没有其它办法呢?

问题分析

设想 由 $|z|>1$，有 $\dfrac{1}{|z|}<1$，从而可得

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots.$$

- 这样一来，在整个复平面上就有

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots,\quad (|z|<1);$$

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots,\quad (|z|>1).$$

4.4.1 洛朗级数的概念及性质

启示 如果不限制一定要展开为只含正幂次项的幂级数的话，即如果引入负幂次项，那么就有可能将一个函数在整个复平面上展开(除了奇点所在的圆周上)。

定义 4.4.1 称下列形式的级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.$$

为洛朗级数，其中$z_0, a_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$均为复常数。

- 在引入了负幂次项以后，“幂级数”的收敛特性如何呢？

4.4.1 洛朗级数的概念及性质

将洛朗级数分为两部分：正幂次项部分与负幂次项部分。

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots; \quad \text{(A)}$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n = a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + \cdots. \quad \text{(B)}$$

根据上一节的讨论可知：

(1) 对于 (A) 式，其收敛域的形式为 $|z-z_0| < R_2$；

(2) 对于 (B) 式，其收敛域的形式为 $|z-z_0| > R_1$；

4.4.1 洛朗级数的概念及性质

结论 (1) 如果级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ 收敛，

则其收敛域“一定”为环域：$R_1<|z-z_0|<R_2$.

- 下列两类收敛域被看作是一种特殊的环域。

收敛域：$0\le|z-z_0|<R$ 或 $R<|z-z_0|<+\infty$.

- 洛朗级数中的正幂次项和负幂次项分别称为洛朗级数的解析部分和主要部分。

(2) 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在收敛域内其和函数是解析的，

而且具有与幂级数同样的运算性质和分析性质：

逐项求导，逐项积分。

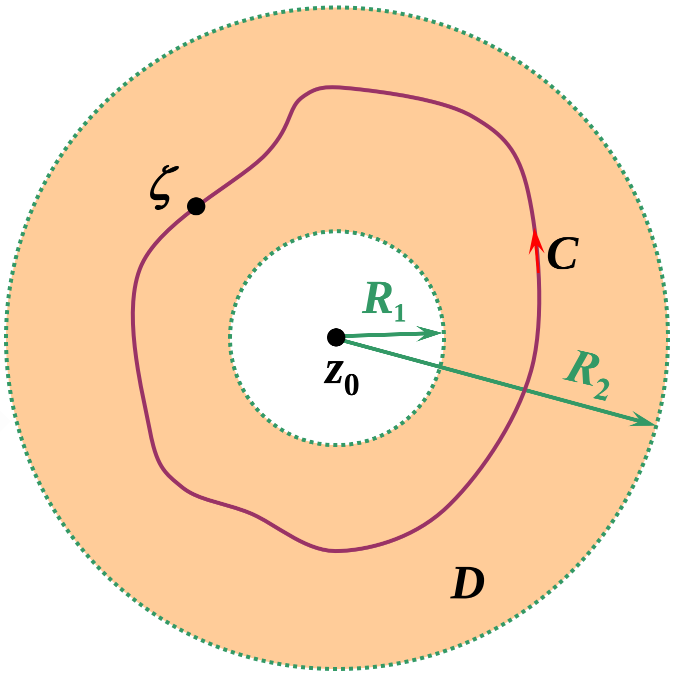
4.4.2 洛朗(Laurent)展开定理

定理 4.4.2 设函数 $f(z)$ 在圆环域

$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内

解析，则 $f(z)$ 一定能

在此圆环域中展开为



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中，$a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$

C 为在圆环域内绕 z_0 的任何一条简单闭曲线。

4.4.2 洛朗（Laurent）展开定理

注 (1) 一个在某圆环域内解析的函数展开为含有正负幂次项的级数是唯一的，即为洛朗展开形式。(定理4.4.1)

(2) 系数 $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \overset{?}{=} \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$

$f(z)$在z_0的解析性未知，不能应用高阶导数公式。

(3) 若函数 $f(z)$ 在圆环 $0 \le |z-z_0| < R$ 内解析，则 $f(z)$ 在此圆环内的洛朗展开式就是泰勒展开式。

(4) $f(z)$在z_0的解析性未知，也就是说洛朗展开对z_0的解析性无要求， z_0可以解析，也可以为奇点。

4.4.2 洛朗（Laurent）展开定理

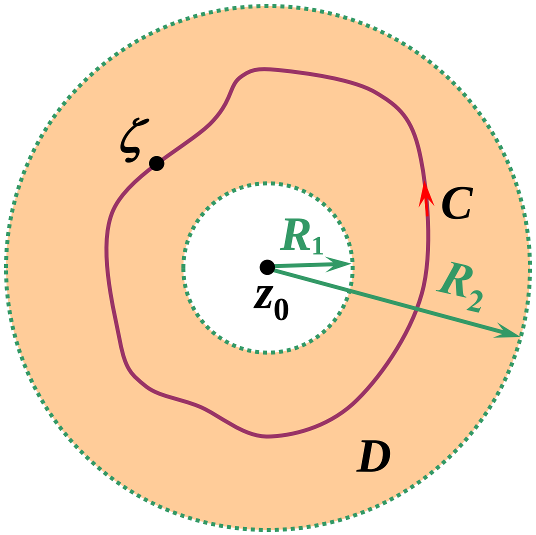
注 (5) 展开式中的系数 a_n 可以用下面得方法直接给出。

$$f(z)=\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+a_n(z-z_0)^n+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=\cdots+\frac{a_{n-1}}{(z-z_0)^2}+\boxed{\frac{a_n}{z-z_0}}+a_{n+1}+\cdots,$$

$$* \quad \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=0+2\pi i a_n+0,$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$



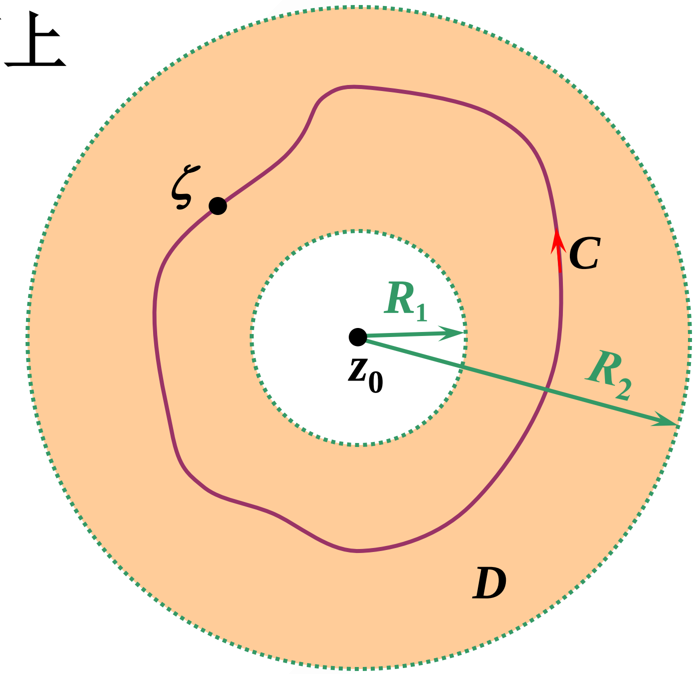
*这里需要积分与求和交换顺序，有定理保证。

4.4.3 将函数展开为洛朗级数的方法

1. 直接展开法

- 根据洛朗定理，在指定的解析环上直接计算展开系数：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$



- 有点繁！有点烦！

4.4.3 将函数展开为洛朗级数的方法

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 常用的已知展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3\cdots,\ |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\ |z|<+\infty.$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots,\ |z|<+\infty.$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,\ |z|<+\infty.$$

4.4.3 将函数展开为洛朗级数的方法

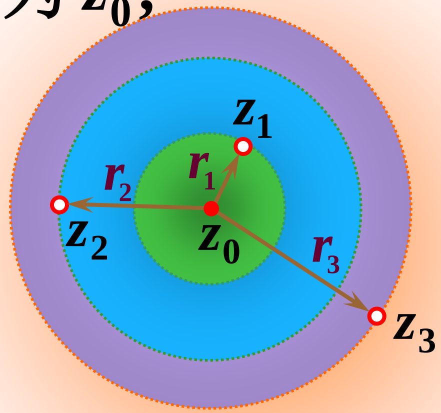
注：洛朗级数定义在圆环域上，圆环域不同，洛朗级数不同。因此，无论直接法间接法，首先要确定圆环域。

题型一：题目给出圆环域。

题型二：题目给出展开区域，根据奇点自行确定。

方法：设函数的奇点为 z_1, z_2, z_3, 展开点为 z_0,

则复平面被分为四个解析环：



?$\boxed{0 \le |} z - z_0| < r_1$;

$r_1 < |z - z_0| < r_2$;

$r_2 < |z - z_0| < r_3$;

$r_3 < |z - z_0| < +\infty$.

注：$f(z)$在z_0的解析性未知，在划分圆环域时需单独判断。

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

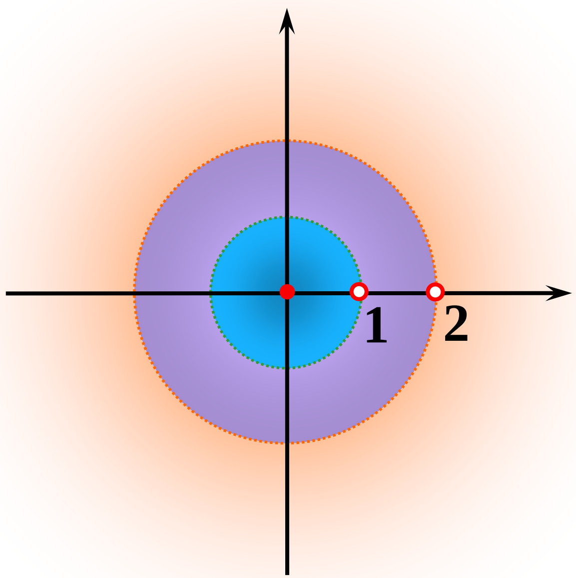
解 (1) 将复平面分为若干个解析环

函数 $f(z)$ 有两个奇点：

$$z=1,\ \ z=2,$$

以展开点 $z=0$ 为中心，

将复平面分为三个解析环：



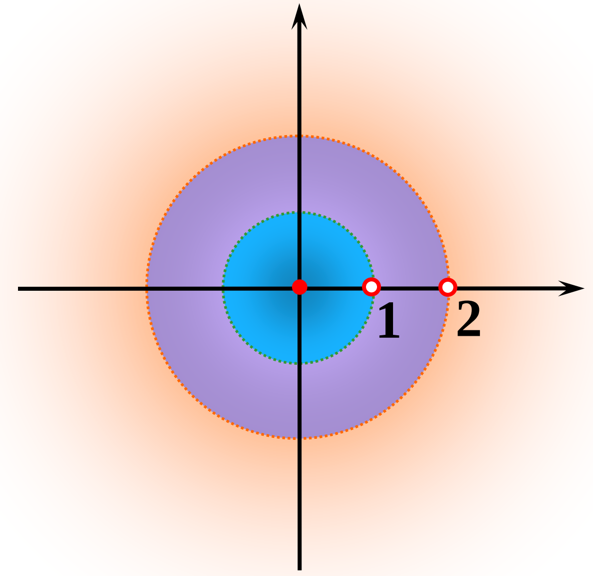
① $0\le|z|<1$; ② $1<|z|<2$; ③ $2<|z|<+\infty$.

(2) 将函数进行部分分式分解

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开



① 当 $0\le|z|<1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

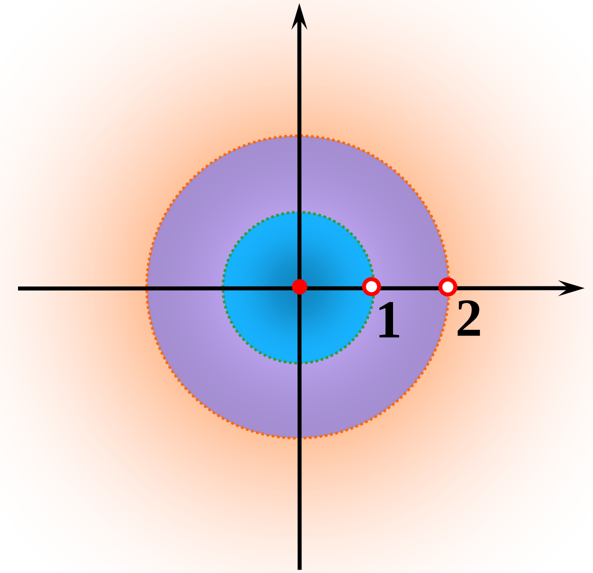
$$=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开

② 当 $1<|z|<2$ 时,



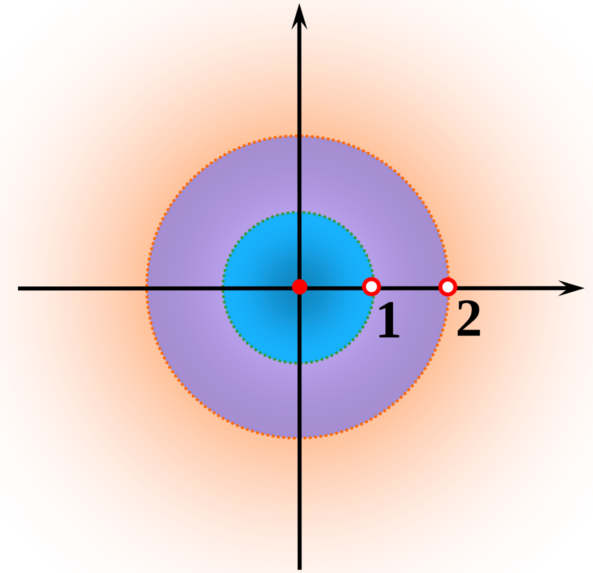
$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开



③ 当 $2<|z|<+\infty$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}.$$

例 把函数 $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

解 函数$f(z)$有唯一奇点$z=0$，在$0<|z|<+\infty$内解析，且有

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots\right)$$

$$= z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots,\quad 0<|z|<+\infty.$$

例4.4.4 把函数$f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$在$0<|z-1|<+\infty$内展开成洛朗级数。

解 函数$f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$有唯一奇点$z=1$，在$0<|z-1|<+\infty$内解析，且有

$$\cos\frac{z}{z-1}=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos 1\cos\frac{1}{z-1}-\sin 1\sin\frac{1}{z-1}$$

由正弦函数和余弦函数的幂级数展开式可得结果。

例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (1) 将复平面分为若干个解析环

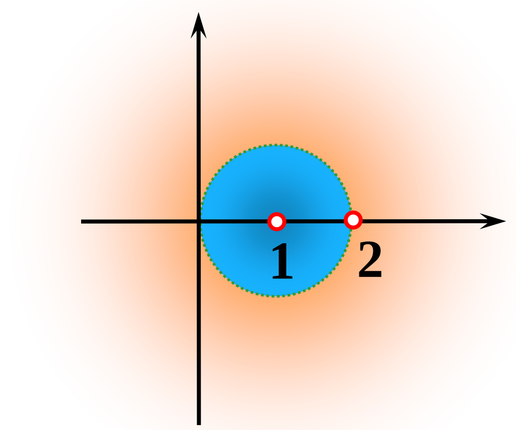
函数 $f(z)$ 有两个奇点：$z=1$，$z=2$，

以展开点 $z=1$ 为中心，

将复平面分为两个解析环：

① $0<|z-1|<1$;

② $1<|z-1|<+\infty$.



注意：不需要将函数进行部分分式分解。

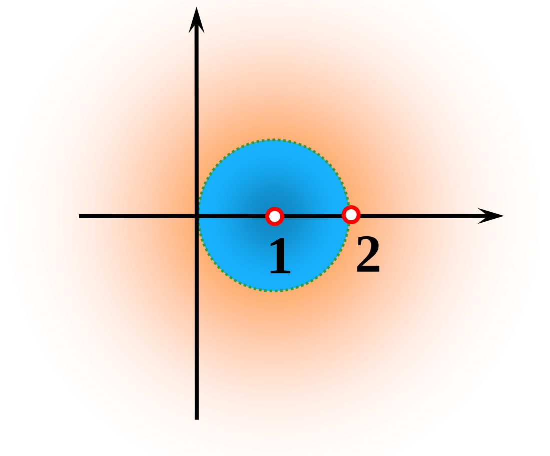
例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

$$f(z)=\frac{z-1+1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2-z}=\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}.$$

① 当 $0<|z-1|<1$ 时，

$$\frac{1}{1-(z-1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n,$$



$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-2}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}.$$

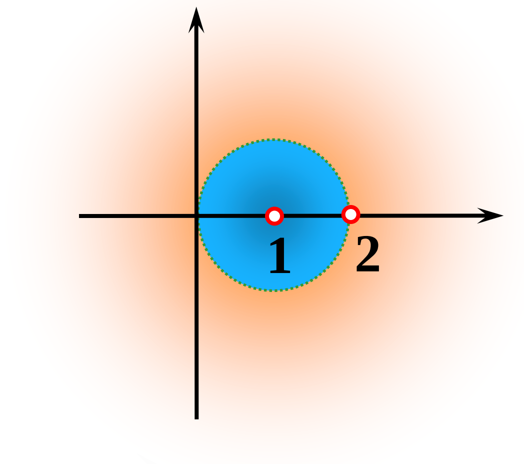
例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

$$f(z)=\frac{z-1+1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2-z}=\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}.$$

② 当 $1<|z-1|<+\infty$ 时，

$$\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n},$$



$$f(z)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

$$=-\frac{1}{(z-1)^2}-2\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

例4.4.5 设函数$f(z)=\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)$在$z=0$的洛朗展开式为$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n z^n$.

证明展开系数$\alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta, n\in\mathbb{Z}$.

证明： $f(z)$有唯一奇点$z=0$，在$0<|z|<+\infty$解析。

应用洛朗系数公式

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz,$$ 取C: $|z|=1$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)(\cos n\theta-i\sin n\theta)d\theta$$

由$\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta\underset{\uparrow}{=}(-1)^n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\cos\omega)\sin n\omega d\omega\underset{\uparrow}{=}0$

令$\omega=\theta-\pi$ 奇偶性

即得到$\alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta, n\in\mathbb{Z}$.

例： 若函数$f(z)$在$r<|z|<R(\mathrm{r}<1<\mathrm{R})$内解析，且

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n, r<|z|<R$$

证明：$2-a_n-a_{-n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{n}{2}\theta\right)\mathrm{d}\theta\,, n=1,2,\cdots$

思路： 应用洛朗系数公式

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\,,$$ 取C: $|z|=1$

提示：$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=1$$