# 习题七 拉普拉斯变换

1. 求下列函数的拉氏变换。

(1) $f(t)=\sin\frac{t}{3}$；

**解：** $F(s)=\frac{3}{1+9s^2}$，$\mathrm{Re}(s)>0$。

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}$；

**解：** $F(s)=\frac{1}{s+2}$，$\mathrm{Re}(s)>-2$。

(3) $f(t)=t^2$；

**解：** $F(s)=\frac{2}{s^3}$，$\mathrm{Re}(s)>0$。

(4) $f(t)=\cos^2 t$。

**解：** $F(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$，$\mathrm{Re}(s)>0$。

2. 求下列函数的拉氏变换。

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<2\\ -1, & 2\le t<4\\ 0, & t\ge 4\end{cases}$；

**解：** $F(s)=\frac{1}{s}\left(3-4\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-4s}\right)$。

(2) $f(t)=\begin{cases}t+1, & 0\le t<3\\ 0, & t\ge 3\end{cases}$；

**解：** $F(s)=\dfrac{1}{s^2}\left(1+s-(1+4s)\mathrm{e}^{-3s}\right)$。

(3) $f(t)=\delta(t)\cos t-u(t)\sin t$。

**解：** $F(s)=1-\dfrac{1}{s^2+1}$。

3. 设 $f(t)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\le\pi\\ 0, & \pi<t\le 2\pi\end{cases},$$

求 $\mathcal{L}[f(t)]$。

**解：** 
$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{2\pi}^{4\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{4\pi}^{6\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\cdots\\
&=\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-2\pi s}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-4\pi s}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\cdots\\
&=\left[1+\mathrm{e}^{-2\pi s}+\mathrm{e}^{-4\pi s}+\mathrm{e}^{-6\pi s}+\cdots\right]\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t\ \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\left(1-\mathrm{e}^{-\pi s}\right)\left(1+s^2\right)}。\end{aligned}$$

4. 求下列函数的拉氏变换。

(1) $f(t)=3t^4-2t^{\frac{3}{2}}+6$；

**解：** $F(s)=3\dfrac{\Gamma(5)}{s^5}-2\dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}+\dfrac{6}{s}$。

(2) $f(t)=1-t\mathrm{e}^{t}$；

**解：** $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$。

(3) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at, a>0$；

**解：** $F(s)=\frac{1}{2a}L[t\sin at]=\frac{1}{2a}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L[\sin at]\right)=\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}$。

(4) $f(t)=\frac{\sin at}{t}, a>0$；

**解：** $F(s)=\int_s^{\infty}L[\sin at]\,\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{a}$。

(5) $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}\cos 4t$。

**解：** $F(s)=\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}$。

8. 求 $f_1(t)=\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)$ 与 $f_2(t)=u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)$ 的拉氏变换。对比两者的结果，你可以得到什么启示？

**解：** $F_1(s)=L\left[\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)\right]$

$$=\cos\frac{2}{3}L[\sin t]-\sin\frac{2}{3}L[\cos t]$$

$$=\mathrm{os}\frac{2}{3}\frac{1}{s^2+1}-\sin\frac{2}{3}\frac{s}{s^2+1}。$$

$$
\begin{aligned}
F_2(s) &= L\left[u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)\right] \\
&= \int_0^{\infty} u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} u\left(t-\frac{2}{3}\right)\sin\left(t-\frac{2}{3}\right)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&\overset{x=t-\frac{2}{3}}{=} \int_0^{\infty} u(x)\sin x\,\mathrm{e}^{-s\left(x+\frac{2}{3}\right)}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}s}\int_0^{\infty} u(x)\sin x\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}s}L[\sin t] \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}s}\frac{1}{s^2+1}。
\end{aligned}
$$

对比两者结果，我们可以看到单位阶跃函数的作用。$f_1(t)$是将 sin$t$ 的图像做了位移，但信号响应还是零时刻，$f_2(t)$是将 sin$t$ 的图像做了位移，同时信号响应时刻延迟到$\frac{2}{3}$。

11. 求下列函数的拉氏逆变换。

(1) $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$；

**解：** $f(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$。

(2) $F(s)=\frac{1}{(s+1)^4}$；

**解：** $f(t)=\frac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{-t}$。

(3) $F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}$；

**解：** $f(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t}$。

(4) $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$。

**解：** $f(t)=2\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t$。

15. 试求下列函数的拉氏逆变换。

(1) $F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+2^2\right)^2}$；

**解：** $f(t)=\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$。

(2) $F(s)=\dfrac{(s+1)\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+s+1}$。

**解：** $L^{-1}\left(\dfrac{s+1}{s^2+s+1}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$。

$$\therefore f(t)=L^{-1}\left[\frac{(s+1)\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{t-\pi}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right)。$$

16. 求下列函数的拉氏逆变换。

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s+4)^2}$；

**解：** $f(t)=t\mathrm{e}^{-4t}$。

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$；

**解：** $f(t)=\dfrac{1}{3}\left(\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$。

(3) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$；

**解：** $f(t)=\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}$。

(4) $F(s)=\arctan\frac{1}{s}$；

**解：** $F'(s)=\frac{-1}{s^2+1}$。

$$-t\,f(t)=L^{-1}\left[F'(s)\right]=-L\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=-\sin t$$

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}\text{。}$$

(5) $F(s)=\ln\frac{s^2-1}{s^2}$；

**解：** $F'(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}-2\frac{1}{s}$。

$$-t\,f(t)=L^{-1}\left[F'(s)\right]=L\left[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}-2\frac{1}{s}\right]=\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}-2u(t)\text{。}$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}-2\right)\text{。}$$

(6) $F(s)=\frac{1+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$；

**解：** $f(t)=t+(t-2)u(t-2)$。

(7) $F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$

**解：** $f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}$。

18. 试求下列微分方程或微分方程组初值问题的解。

(1) $x''+4x'+3x=\mathrm{e}^{-t},\ x(0)=x'(0)=1$；

**解：** $x(t)=\frac{1}{4}(2t+7)\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t}$。

(2) $x''-x'=4\sin t+5\cos 2t,\ x(0)=-1, x'(0)=-2$；

**解：** $x(t)=1-2\mathrm{e}^{t}-4+2\mathrm{e}^{t}+(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$

$$+\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{4}(2-\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}-\frac{1}{4}(2+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}$$

$$=-3+2\cos t-2\sin t-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\text{。}$$

(3) $\begin{cases} x'+x-y=\mathrm{e}^{t} \\ 3x+y'-2y=2\mathrm{e}^{t} \end{cases}$, $x(0)=y(0)=1$。

**解：** $x(t)=\mathrm{e}^{t},\ y(t)=\mathrm{e}^{t}$。