主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2019/2020 学年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　　学号　　班号　　学院

密　封　线

一、　填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 复数 $-1+i\sqrt{3}$ 的主辐角是 $\underline{\dfrac{2\pi}{3}}$。

2. 设 C 是从 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线段，则

$$\int_C |z|\,dz = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}。$$

3. 设函数 $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+2)^n$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+2)^n$ 的收敛半经

$R=\underline{\quad 3\quad}$。

4. $\oint_{|z|=3}(1+z+z^2)\,e^{\frac{1}{z}}dz=\underline{\dfrac{10\pi i}{3}}$。

5. 设 $f(t)=\dfrac{1}{2}\left[\delta(t+2)+\delta(t-2)\right]$，则其傅氏变换

$F(\omega)=\underline{\cos 2\omega}$，　或 $\dfrac{1}{2}\left(e^{2\omega i}+e^{-2\omega i}\right)$。

二、 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(z)=2xy-\mathrm{i}x^2$，那么（ D ）。

A. $f(z)$处处可微；　　B. $f(z)$处处不可导；

C. $f(z)$仅在原点可导；　　D. $f(z)$仅在x轴上可导。

2. $\oint\limits_{|z|=1}\bar{z}\cos\frac{1}{\bar{z}}\mathrm{d}z=$（ A ）.

A. $2\pi\mathrm{i}$；　　B. $\pi\mathrm{i}$；　　C. $-2\pi\mathrm{i}$；　　D. 0。

3. 若$f(z)$在D内解析，且$\arg f(z)$在D内是常数，则（ C ）。

A. 这样的函数不存在；

B. $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\theta u(x,y)$，$u$是任意二阶可导函数，$\theta$是常数；

C. $f(z)$是不为零的常数；

D. $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}u(x,y)$，$u$是任意二阶可导函数。

4. $z=1$是函数 $\mathrm{e}^{\frac{z}{1-z}}$ 的（ A ）。

A. 本性奇点；　　B. 一阶极点；

C. 二阶极点；　　D. 可去奇点。

5. 若 $f(t)=e^{-t}\sin 2t$， 则 $f(t)$拉氏变换是（ B ）。

A. $\frac{4}{(s+1)^2+4}$；　　B. $\frac{2}{(s+1)^2+4}$；

C. $\frac{4}{(s-1)^2+4}$；　　D. $\frac{2}{(s-1)^2+4}$。

姓名 密 学号 封 班号 线 学院

三、 计算（每小题 5 分，共 20 分）

1. $I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{z}{e^z-1}\mathrm{d}z$；

解： 函数 $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$ 在 $|z|<1$ 内仅有一个奇点 $z=0$，且 $z=0$ 是它的可去奇点，故 $I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{z}{e^z-1}\mathrm{d}z=0$。

2. $I=\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}\mathrm{d}z$；

解： $I=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{z^2}\right)''=\pi\mathrm{i}\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}2(\mathrm{e}^{z^2}+2z^2\mathrm{e}^{z^2})$

$=-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-1}$。

3. $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z^{100}+1)(z-3)}\mathrm{d}z$；

解： $I=2\pi\mathrm{i}\left\{\sum\limits_{k=0}^{99}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^{100}+1)(z-3)},\ \mathrm{e}^{\frac{(2k\pi+\pi)i}{100}}\right]\right\}$

$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^{100}+1)(z-3)},3\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^{100}+1)(z-3)},\infty\right]\right\}$

$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{1}{3^{100}+1}-\mathrm{Res}\left[\frac{z^{99}}{(1+z^{100})(1-3z)},\ 0\right]\right\}$

$=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3^{100}+1}$。

4. $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解： $\because I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$

$$=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)},\ \mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)},\ 2\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}(-1+4)}+\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4\mathrm{i}(-4+1)}\right]=\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{6}\right)\text{。}$$

$$\therefore I=\mathrm{Re}(I_1)=\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{6}\right)\text{。}$$

四、（8分）求函数 $f(z)=\frac{z}{z^2-z-2}$ 在 $1<|z|<2$ 内的洛朗展开式.

解： $f(z)=\frac{z}{z^2-z-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+z}-\frac{2}{2-z}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n\right]\text{。}$$

五、（7 分）设函数 $g(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，在 $|z|\le 2$ 内连续，且当 $|z|=2$ 时，$g(z)\ne 0$，在圆 $|z|<2$ 内仅有 $g(1)=0$，$g'(1)\ne 0$，求积分 $$\oint_{|z|=2}\frac{1}{zg(z)}\mathrm{d}z$$ 。

解： 被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{zg(z)}$ 在 $|z|<2$ 内有二个一阶极点 $z=0$ 和 $z=1$。故

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{zg(z)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),1\right]\right\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[\lim_{z\to 0}\frac{1}{g(z)}+\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z\,g(z)}\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{g(0)}+\frac{1}{g'(1)}\right]\text{。}$$

六、（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题

$$\begin{cases} y''-2y'+y=1 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}\text{。}$$

解： $$s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$$

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{s(s-1)^2},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{s(s-1)^2},1\right]$$

$$=1+\lim_{s\to 1}\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s}\right)'=1+t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t\text{。}$$

七、　（5 分）设 $u(x,y)=x^2-y^2-2xy+x+y+2$，求二元实函数 $v(x,y)$ 满足 $f(x,y)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数且 $f(0)=2+3\mathrm{i}$。

解：　由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-(-2y-2x+1)=2x+2y-1$，

得 $v=\int(2x+2y-1)\,\mathrm{d}x=x^2+2xy-x+\varphi(y)$ 。

又由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-2y+1$ ，得

$$2x+\varphi'(y)=2x-2y+1,$$

$$\varphi'(y)=-2y+1,$$

$$\therefore\ \varphi(y)=\int(-2y+1)\,\mathrm{d}y=-y^2+y+c\text{。}$$

从而 $v=x^2-y^2+2xy-x+y+c$。

再由 $f(0)=2+3\mathrm{i}$，得 $c=3$。

因此，$v(x,y)=x^2-y^2+2xy-x+y+3$。