

课程导论

李修成

计算机科学与技术学院

课程简介

- 课程名称：离散数学 (Discrete Mathematics)
- 授课教师：李修成，信息楼 1906
- 课程 QQ 群：814691064
- 助教：尹昊，李楚阳，吴华龙，陈弘毅
- 学时：64 (理论) + 0 (实验)
- 成绩：30% 作业 + 70% 考试



- 指定教材：《离散数学》第二版，屈婉玲，耿素云，张立昂.
- 推荐参考：《离散数学及其应用》，肯尼思·罗森¹.

¹*Discrete Mathematics and Its Applications*, Kenneth H. Rosen.

- 数理逻辑
- 集合论 (set theory)
 - 集合的基本概念
 - 函数
 - 二元关系
- 图论 (graph theory)
 - 图的基本概念
 - 有向图、无向图、平面图、树
 - 图的着色、匹配

- 集合论是始于 19 世纪末康托（Cantor）与戴德金（Dedekind）的研究.
- 集合论是现代数学的基础语言，催生了一大批数学理论.
- 戴德金基于集合论定义了实数，为数学分析奠定了基础.
- 基于集合论发展出的测度论成为了勒贝格积分的基础；
- 科莫戈洛夫（Kolomogorov）使用测度论和勒贝格积分公理化了概率论.
- 基于集合论发展出的点集拓扑理论，开辟了更宽广的数学空间.
- 布尔巴基学派（Bourbaki）使用集合论和公理化体系重建了现代数学.

对计算机科学而言，集合论是进行抽象化和形式化描述的基础语言，是我们后续学习

- 图论
- 算法与数据结构
- 形式语言、编译原理
- 数据库的基础.

- 图是我们描述和建模非欧式结构化数据（non-Euclidean structured data）的标准工具.
- 图论既是数学的分支也是理论计算机的主要研究对象，图上的算法应用极其宽广.
- 从传统的道路网络、社交网络、流量网络、最优匹配到推荐算法、知识图谱，
- 与深度学习融合产生的图神经网络，是 AI4Science，如
 - 气象预测
 - 蛋白质结构推断
 - 分子性质预测
 - 新药物（靶向药物、抗体）研发等的基础工具.

命题与逻辑

命题与其表示

- **命题** (proposition) 是一个可以判断真伪的声明式语句 (declarative sentence),
- 其要么为真, 要么为假, 不能既真也假.

例子 2.1 (命题).

- 北京是中国的首都.
- $1 + 1 = 2$.
- $2 + 2 = 3$.

例子 2.2 (非命题).

- 现在是几点?
- 请把门打开.
- $x + 1 = 2$.

命题与其表示

- 我们通常用字母 p, q, r, s, \dots 来表示命题.
- 如果一个命题为真命题, 我们称其真值 (truth value) 为真, 记为 T (True).
- 如果一个命题为假命题, 我们称其真值 (truth value) 为假, 记为 F (False).

定义 2.1. 令 p 为命题, 命题的否定式 (negation), “not p ”, 记作 $\neg p$. $\neg p$ 的真值为命题 p 真值的取反.

- p : Tom's PC runs Linux; $\neg p$: Tom's PC does not run Linux.
- p : $1 + 1 = 2$; $\neg p$: $1 + 1 \neq 2$.

命题与其表示

定义 2.2. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的**合取式** (conjunction) 为命题 “ p and q ”, 记作 $p \wedge q$.
 $p \wedge q$ 为真当 p, q 同时为真, 否则为假.

定义 2.3. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的**析取式** (disjunction) 为命题 “ p or q ”, 记作 $p \vee q$.
 $p \vee q$ 为假当 p, q 同时为假, 否则为真.

我们可以用一个表来枚举命题真值的各种可能, 该表被称为**真值表** (truth table) .

合取式真值表		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

析取式真值表		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

命题与其表示

定义 2.4. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的**异或命题** (exclusive or) 为真当且仅当 p, q 其中一个为真另一个为假, 否则命题为假, 记作 $p \oplus q$.

定义 2.5. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的**蕴含式** (conditional statement) 定义为 “if p , then q ”, 记为 $p \rightarrow q$. p 称为蕴含式的前件, q 称为蕴含式后件. 条件语句 $p \rightarrow q$ 只有当 p 为真 q 为假时为假, 其他情况都为真.

异或真值表		
p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

蕴含式真值表		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

命题与其表示

- 条件语句 $p \rightarrow q$ 在英文中有多种表达,
- “if p , q ”, “ q if p ”, “ q when p ”
- “ p is sufficient for q ”
- “ q is a necessary condition for p ”
- “ q unless $\neg p$ ”

例子 2.3.

- “If I am elected, then I will lower taxes.”
- “I will lower taxes when I am elected.”
- “I will lower taxes unless I am not elected.”

定义 2.6. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的**等价式** (biconditional statement) 定义为 “ p if and only if q ”, 记作 $p \leftrightarrow q$. 当 p 与 q 有相同的真值时, 命题 $p \leftrightarrow q$ 为真, 否则为假.

- $p \leftrightarrow q$ 在英文中的常见表达,
- “ p is necessary and sufficient for q ”
- “if p then q , and conversely”
- “ p iff q ”, “ p exactly when q ”

等价式真值表		
p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命题与其表示

给定命题 $p \rightarrow q$, 其

- 逆命题 (converse) 为 $q \rightarrow p$,
- 否命题 (inverse) 为 $\neg p \rightarrow \neg q$,
- 逆否命题 (contrapositive) 为 $\neg q \rightarrow \neg p$.

一个命题与其逆否命题等价.

复合命题 (compound proposition) 的真值表

例子 2.4 (复合命题). 构造 $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ 的真值表.

思路: 这是一个条件命题, 条件和结论分别是合取式和析取式, 合取式里面又带有否定命题. 因此, 我们可以从 p, q 出发, 从里向外, 先构造否定命题, 然后构造析取式和合取式, 最后是条件命题.

$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ 的真值表.					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

逻辑运算符的优先级

- 通过例子2.4，我们可以总结出如下逻辑运算符优先级 (precedence)，
- “否定” 优先于 “与或” 优先于 “条件” 。

逻辑运算符优先级.	
Operator	Precedence
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5

命题的逻辑等价性

定义 2.7. 复合命题 p 与 q 被称为逻辑等价 (logically equivalent) 如果二者有相同的真值, 记为 $p \equiv q$.

例子 2.5. 使用真值表验证 $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

命题的逻辑等价性

定理 2.1 (*De Morgan Laws*).

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

证明. 使用真值表验证 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

命题的逻辑等价性

Equivalence	Name
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws 同一律
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws 支配律
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws 幂等律
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law 双重否定

逻辑等价性

Equivalence	Name
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws 交换律
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws 结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws 分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws 吸收律
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws 否定律

谓词 (predicate) 是用来刻画个体词性质及个体词之间关系的词. 考虑如下陈述句:

1. $\sqrt{2}$ 是无理数.
 2. x 是有理数.
- 在 (1) 中, $\sqrt{2}$ 是个体常项, “是无理数” 为谓词, 整个陈述句可以表示为 $P(\sqrt{2})$;
 - 在 (2) 中, x 是个体变项, 整个陈述句可以表示为 $P(x)$;
 - 更一般的, $P(x)$ 表示 x 具有性质 P ;
 - n 元谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 满足性质 P .

例子 2.6. 令 $P(x)$ 表示语句 “ $x > 3$ ”. 那么 $P(4)$ 和 $P(2)$ 的真值是什么?

$P(4)$ 和 $P(2)$ 的分别代表陈述 $4 > 3$ 和 $2 > 3$, 故 $P(4)$ 为真, $P(2)$ 为假.

例子 2.7. 令 $P(x, y)$ 表示语句 “ $x = y + 3$ ”. 那么 $P(1, 2)$ 和 $P(3, 0)$ 的真值是什么?

$P(1, 2)$ 和 $P(3, 0)$ 的分别代表陈述 $1 = 2 + 3$ 和 $3 = 0 + 3$, 故 $P(1, 2)$ 为假, $P(3, 0)$ 为真.

定义 2.8 (全称量词). 全称量词 (universal quantification) $P(x)$ 为语句, “ $P(x)$ for all values of x in the domain.” 记作 $\forall xP(x)$, 读作 “for all $xP(x)$ ”.

例子 2.8. 令 $P(x)$ 表示语句 “ $x < x + 1$ ”, x 的定义域为实数. 那么全称量词 $\forall xP(x)$ 的真值为?

定义 2.9 (存在量词). 存在量词 (existential quantification) $P(x)$ 为语句, “There exists an element x in the domain such that $P(x)$.” 记作 $\exists xP(x)$.

例子 2.9. 令 $P(x)$ 表示语句 “ $x > 3$ ”, x 的定义域为实数. 那么量词 $\exists xP(x)$ 的真值为?

- \forall, \exists 比逻辑运算符有更高的优先级.
- 因此 $\forall xP(x) \vee Q(x)$ 表示 $(\forall xP(x)) \vee Q(x)$ 而不是 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

- 考虑陈述“每个离散数学课堂上的同学都上过微积分”。
- 令 $P(x)$ 表示“ x 上过微积分”，定义域为离散课堂上的学生， $\forall xP(x)$
- 上述陈述的否定 $\neg\forall xP(x)$ 表示什么？
- “存在离散数学课堂上的同学没有上过微积分”。
- 更一般的，我们有

$$\neg\forall xP(x) \equiv \exists x\neg P(x).$$

- 考虑陈述“离散数学课堂上有同学自学过数学分析”。
- 令 $P(x)$ 表示“ x 自学过数学分析”，定义域为离散课堂上的学生， $\exists xP(x)$ 。
- 上述陈述的否定 $\neg\exists xP(x)$ 表示什么？
- “离散数学课堂上的同学都没自学过数学分析”。
- 更一般的，我们有

$$\neg\exists xP(x) \equiv \forall x\neg P(x).$$

例子 2.10. 陈述句 $\forall x (x^2 > x)$ 和 $\exists x (x^2 = 2)$ 的逻辑否定是什么?

- $\neg \forall x (x^2 > x) = \exists x \neg (x^2 > x) = \exists x (x^2 \leq x).$
- $\neg \exists x (x^2 = 2) = \forall x \neg (x^2 = 2) = \forall x (x^2 \neq 2).$

例子 2.11. 证明 $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$ 是逻辑等价的.

$$\begin{aligned}\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) &\equiv \exists x (\neg (P(x) \rightarrow Q(x))) \\ &\equiv \exists x (\neg (\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{log. equiv. between } \rightarrow \text{ and } \vee \\ &\equiv \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{De Morgan Laws.}\end{aligned}$$

小结

The minimal material that is sufficient for our subsequent study in set and graph theory.