第七章 傅里叶（Fourier） 变换

§7.1 傅里叶积分与积分定理

§7.2 傅里叶变换与逆变换

§7.3 单位脉冲函数

§7.4 广义傅里叶变换

§7.5 傅里叶变换的性质

§7.6 卷积

傅里叶变换是积分变换中常见的一种变换，它既能够简化运算（如求解微分方程、化卷积为乘积等等），又具有非常特殊的物理意义。

因此，傅里叶变换不仅在数学的许多分支中具有重要的地位，而且在各种工程技术中都有着广泛的应用。

傅里叶变换是在周期函数的傅里叶级数的基础上发展起来的。

在微积分课程中已经学习了傅里叶级数的有关内容，因此我们将先简单地回顾一下 傅里叶 级数展开。

7.1.1. 周期函数的傅里叶级数

1. 傅里叶级数的物理含义

回顾: 简谐波 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

$$= a \cdot \cos\omega_0 t + b \cdot \sin\omega_0 t$$

其中，A 称为振幅，ω_0 称为角频率，θ 称为相位。

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为基本周期；（单位：秒）

$F = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ 为频率。（单位：赫兹 Hz）

7.1.1. 周期函数的傅里叶级数

1. 傅里叶级数的物理含义

$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

含义　周期信号可以分解为一系列固定频率的简谐波之和，这些简谐波的(角)频率分别为一个基频 ω_0 的倍数。

意义　认为“一个周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 并不包含所有的频率成份，其频率是以基频 ω_0 为间隔离散取值的。”

- 这是周期信号的一个非常重要的特点。
- 振幅 A_n 和相位 θ_n 两个指标完全定量地刻画了信号的频率特性。

7.1.1. 周期函数的傅里叶级数

2. 傅里叶级数的三角形式

定理 （Dirichlet定理）设 $f_T(t)$是以 T 为周期的实值函数，且在区间 $[-T/2, T/2]$ 上满足如下条件（称为 Dirichlet 条件）：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点.

则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t),$$

在 $f_T(t)$ 的间断处，上式左端为 $\frac{1}{2}\left[f_T(t+0) + f_T(t-0)\right]$.

7.1.1. 周期函数的傅里叶 级数

2. 傅里叶级数的三角形式

定理 （Dirichlet定理）

$$\boxed{f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),} \qquad \text{(A)}$$

其中，$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，称之为基频。

定义 称 (A) 式为傅里叶级数的三角形式。

7.1.1. 周期函数的傅里叶 级数

3. 傅里叶级数的指数形式

推导 已知 $f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$, (A)

根据 Euler 公式 $e^{jn\omega_0 t}=\cos n\omega_0 t+j\sin n\omega_0 t$, $(j=\sqrt{-1})$

可得 $\cos n\omega_0 t=\frac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2}$, $\sin n\omega_0 t=\frac{-je^{jn\omega_0 t}+je^{-jn\omega_0 t}}{2}$

代入 (A) 式并整理得

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right).$$

7.1.1. 周期函数的傅里叶级数

3. 傅里叶级数的指数形式

推导 $$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\right).$$

令 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$， $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$， $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$， 则有

$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{jn\omega_0 t},}\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t,\qquad \text{(B)}$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

定义 称 (B) 式为傅里叶级数的指数形式。

定义* 称 $|c_n|$ 为振幅谱，称 $\arg c_n$ 为相位谱；

称 c_n 为频谱，记为 $F(n\omega_0)=c_n$.

7.1.1. 周期函数的傅里叶 级数

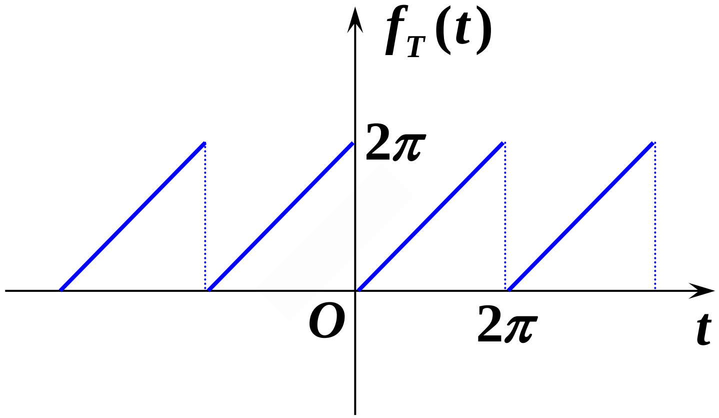
3. 傅里叶级数的指数形式

注意 (1) 分解式是惟一的。

(2) 计算系数 c_n 时，其中的积分可以在任意一个长度为 T 的区间上进行。

(3) 采用周期延拓技术，可以将结论应用到仅仅定义在某个有限区间上的函数。

例：设函数$f_T(t)$以$T=2\pi$为周期，在$[0,2\pi]$上$f_T(t)=t$，求它的Fourier级数的指数形式。



解 代入公式 $c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$,

(1) 当 $n=0$ 时,

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T} f_T(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t=\pi.$$

解 (2) 当 $n \neq 0$ 时， $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 1.$

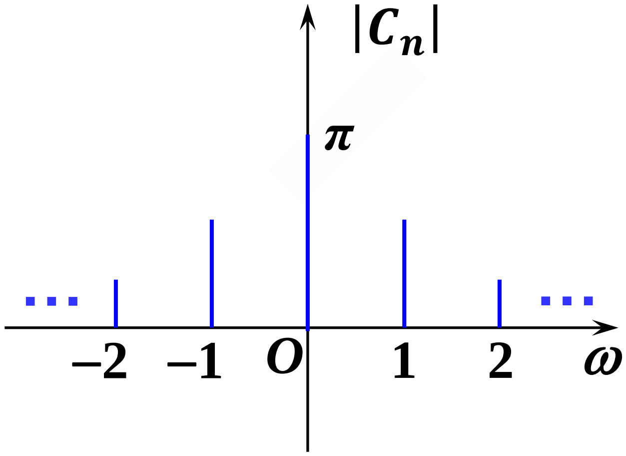
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{e}^{-jnt}\mathrm{d}t = \frac{1}{-2n\pi j}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-jnt}$$

$$= \frac{1}{-2n\pi j} t\,\mathrm{e}^{-jnt}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi j}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-jnt}\mathrm{d}t = \frac{j}{n}.$$

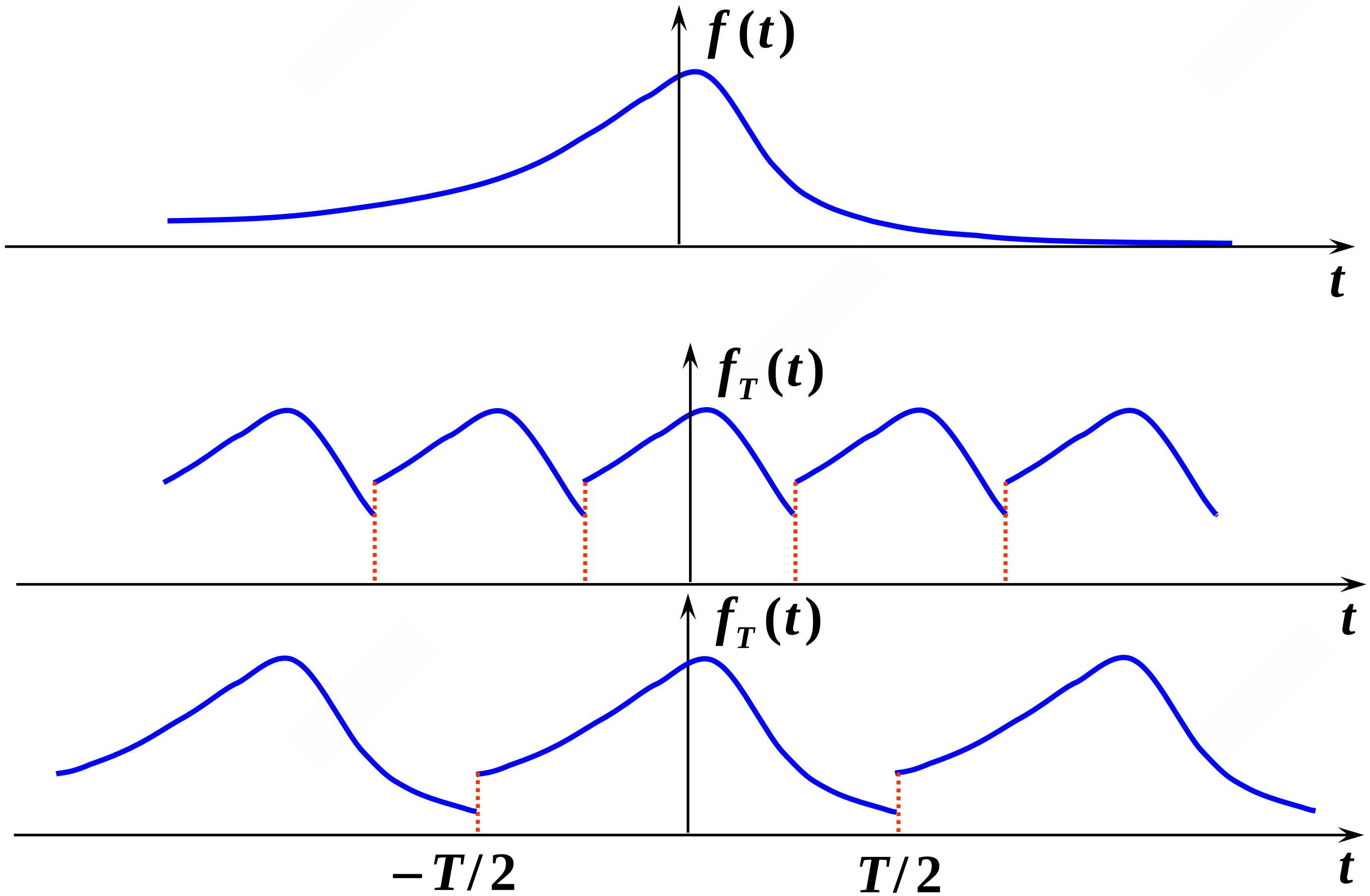
因此， $f_T(t)$ 的傅里叶级数为

$$f_T(t) = \pi + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{j}{n}\mathrm{e}^{jnt}.$$



7.1.2. 非周期函数的傅里叶变换

非周期函数可以看成是一个周期为无穷大的“周期函数”。



即 $f(t) = \lim\limits_{T \to +\infty} f_T(t)$

7.1.2. 非周期函数的傅里叶变换

当 $T \to +\infty$时，频率特性发生了什么变化?

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

分析　傅里叶级数表明周期函数仅包含离散的频率成份，

其频谱是以 $\omega_0 = 2\pi/T$ 为间隔离散取值的。

当 T 越来越大时，取值间隔越来越小；

当 T 趋于无穷时，取值间隔趋向于零，

即频谱将连续取值。

因此，一个非周期函数将包含所有的频率成份。

7.1.2. 非周期函数的傅里叶变换

当 $T\to+\infty$ 时，级数求和发生了什么变化?

分析 $$f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]e^{jn\omega_0 t}$$

将间隔 ω_0 记为 $\Delta\omega$，节点 $n\omega_0$ 记为 ω_n，

并由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$ 得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underline{\left[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)e^{-j\omega_n t}dt\right]e^{j\omega_n t}}\Delta\omega \qquad \text{(C)}$$

7.1.2. 非周期函数的傅里叶变换

分析 记 $g_T(\omega)=[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)e^{-j\omega t}dt]e^{j\omega t}$, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_T(\omega_n)\Delta\omega$$

按照积分定义，在一定条件下，(C) 式可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt]e^{j\omega t}d\omega$$

7.1.2. 非周期函数的傅里叶变换

定理 7.1.1 (傅里叶积分公式) 设函数 $f(t)$ 满足

(1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件;

(2) 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty$.

则在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}\right]e^{j\omega t}d\omega \qquad \text{(D)}$$

在 $f(t)$ 的间断处，公式的左端应为 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

定义 称 (D) 式为傅里叶积分公式。

第七章 傅里叶（Fourier） 变换

1. 傅里叶变换（逆变换）

傅里叶积分公式 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt]}e^{j\omega t}d\omega$

定义 7.2.1 (1) 傅里叶正变换(简称傅氏正变换)

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\mathscr{F}[f(t)]$$

(2) 傅里叶逆变换(简称傅氏逆变换)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

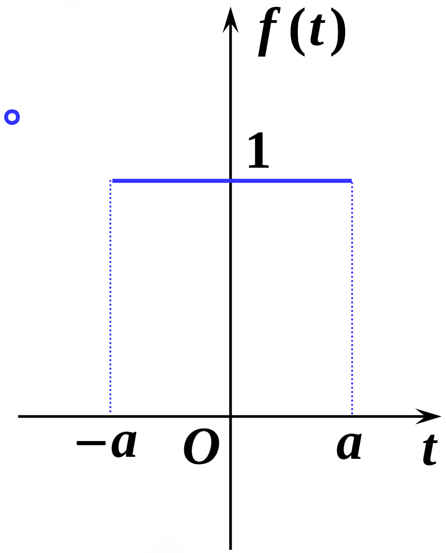
其中，$F(\omega)$ 称为象函数，$f(t)$ 称为象原函数.

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 称为傅氏变换对，记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

定义* 称 $|F(\omega)|$ 为振幅谱； 称 $\arg F(\omega)$ 为相位谱。

称 $F(\omega)$ 为连续频谱或者频谱；

例　求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的 Fourier 变换及 Fourier 积分表达式。数学上称特征函数用 $\chi_{[-a,a]}$ 表示。



解　验证 $f(t)$ 满足Dirichlet条件且绝对可积。

(1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{-j\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}(\mathrm{e}^{-ja\omega}-\mathrm{e}^{ja\omega})$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{(\mathrm{e}^{-ja\omega}-\mathrm{e}^{ja\omega})}{-2j}=2a\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$

解 (2) 求傅里叶逆变换，即可得到的傅里叶积分表达式。

连续情况下 $f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2\sin a\omega}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin a\omega}{\omega} \cos\omega t \, d\omega + \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin a\omega}{\omega} \sin\omega t \, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos\omega t \, d\omega$$

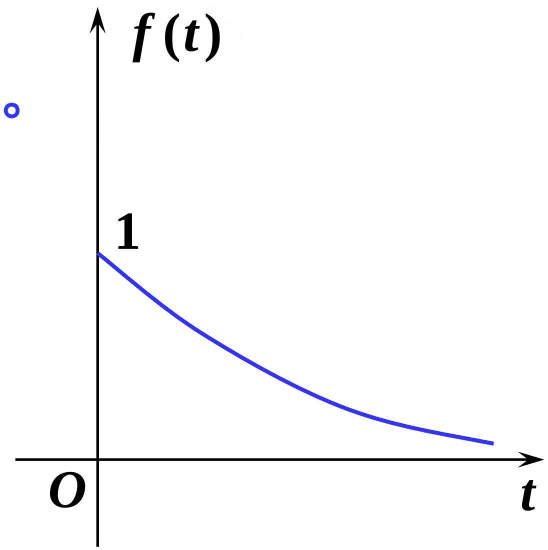
注 • 可得重要积分公式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos\omega t \, d\omega = \begin{cases} 1, & |t| < a, \\ 1/2, & |t| = a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\pi, & a < 0. \end{cases}$$

例 求单位衰减指数函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $(\alpha>0)$ 的傅里叶变换。

解 验证 $f(t)$ 满足Dirichlet条件且绝对可积。

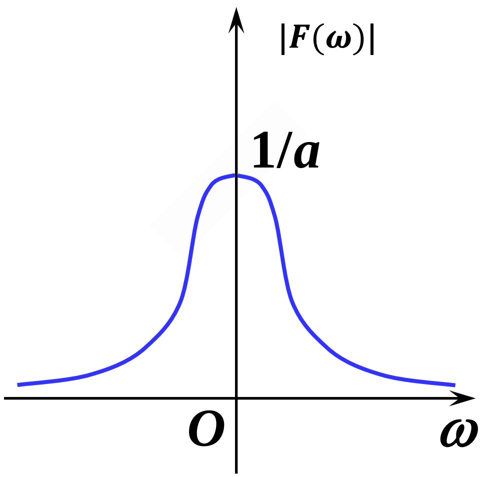


$$(1)\ F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}\,dt$$

$$=\frac{1}{-(\alpha+j\omega)}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{\alpha-j\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$



例 由$f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$的Fourier积分，求$\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\,dx$

解 验证$f(t)$满足Dirichlet条件且绝对可积。

$$F(\omega)=\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,e^{-j\omega t}\,dt=2\int_0^1(1-t^2)\cos\omega t\;dt$$

$$=\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}$$

故

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\sin\omega-\omega\cos\omega)\cos\omega t}{\omega^3}d\omega,|t|\le 1$$

令$t=\frac{1}{2}$，有 $\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\,dx=-\frac{3\pi}{16}$

第七章 傅里叶（Fourier）变换

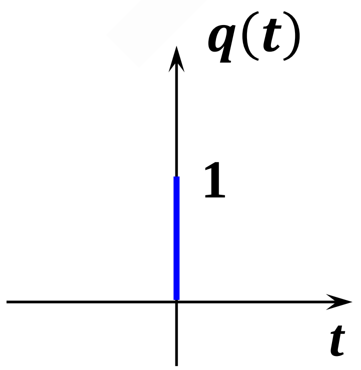
问题引入： 为什么要引入单位脉冲函数

理由 (1) 在数学、物理学以及工程技术中，一些常用的重要函数，如常数函数、线性函数、符号函数以及单位阶跃函数等等，都不能进行傅里叶变换。

(2) 在工程实际问题中，有许多瞬时物理量不能用通常的函数形式来描述，如冲击力、脉冲电压、质点的质量等等。

例 7.3.1 在原来电流为零的电路中，在时间$t=0$的时刻进入一单位电量的脉冲，现在要确定电路上的电流强度$i=i(t)$

解 以$q(t)$表示电路中的电荷函数，则



$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

电流强度$i(t)$为电荷函数$q(t)$关于时间t的导数，即

$$i(t)=q'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

于是当$t \neq 0$时，有

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0}{\Delta t} = 0$$

当$t = 0$时（函数不连续，导数不存在），形式的写出

$$i(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(0+\Delta t) - q(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(-\frac{1}{\Delta t}\right) = \infty$$

因此电流函数表示为

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

广义函数！

7.3.1 单位脉冲函数的概念

定义 7.3.1 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 满足：

$$(1)\ \delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

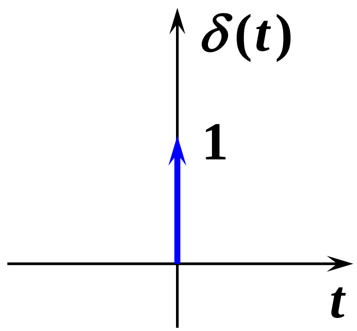
$$(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1.$$

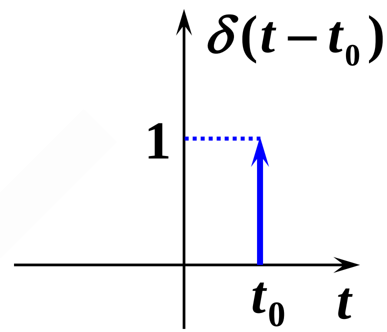
单位脉冲函数 $\delta(t)$ 又称为 Dirac 函数或者 δ 函数。

注 (1) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 并不是经典意义下的函数，而是一个广义函数(或者奇异函数)，它不能用通常意义下的"值的对应关系"来理解和使用，而总是通过它的性质来利用积分使用它。

7.3.1 单位脉冲函数的概念

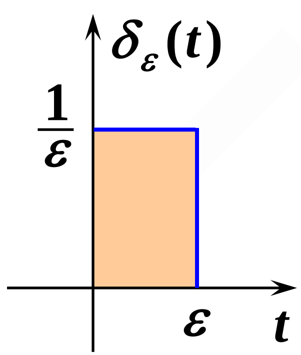
- δ 函数的图形表示与通常的函数不同，采用从原点出发长度为1的有向线段来表示，代表 δ 函数的积分值，称为脉冲强度。





- 通过极限理解单位脉冲函数的定义

令 $\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}1/\varepsilon, & 0\le t\le\varepsilon,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$



则 $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$.

7.3.2 单位脉冲函数的性质

性质 7.3.1 筛选性质

设$f(t)$是任意的连续函数，则$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,dt=f(0)$.

若 $f(t)$ 在 $t=t_0$点连续，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0)$.

性质7.3.2 缩放性质 设$a\in R, a\neq 0$, 则 $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$.

性质7.3.3 导数性质

设$n\in N$, 则 $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$

其中$\delta^{(n)}(-t)$表示将函数$\delta(-t)$关于$-t$求n阶导数.

注： $\delta(t)$为偶函数

第七章 傅里叶（Fourier）变换

§7.1 傅里叶积分与积分定理

§7.2 傅里叶变换与逆变换

§7.3 单位脉冲函数

§7.4 广义傅里叶变换

§7.5 傅里叶变换的性质

§7.6 卷积

问题引入：7.2 节定义的傅里叶变换要求函数绝对可积，很多常用函数不满足条件，因而无法给出其傅里叶变换。

因此引入广义傅里叶变换：δ函数及其相关函数的傅里叶变换。

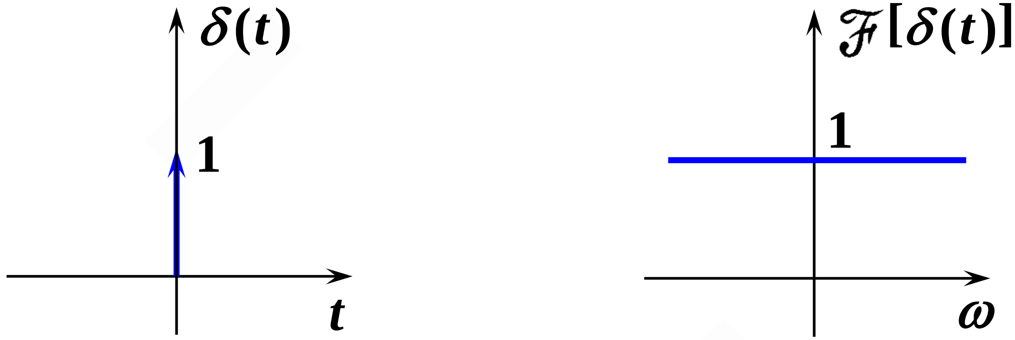
- 利用筛选性质，可得出 δ 函数的傅里叶(逆) 变换：

$$\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=1.$$

$$*\ \mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\delta(t).$$

注：在 δ 函数的 Fourier 变换中，其广义积分是根据 δ 函数的性质直接给出的，而不是通过通常的积分方式得出来的，称这种方式的 Fourier 变换是一种广义傅里叶变换。

即 $\delta(t)$ 与 1 构成傅里叶变换对 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 。



- 按照傅里叶逆变换公式得到重要公式

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = 2\pi\,\delta(t).}$$

- 同理得到

$$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}, \quad \mathscr{F}^{-1}[e^{-j\omega t_0}] = \delta(t-t_0)$$

即 $\delta(t-t_0)$ 与 $e^{-j\omega t_0}$ 也构成傅里叶变换对 $\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$ 。

- 计算傅里叶变换，从而得到傅里叶变换对。

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

正向计算（左至右）

- 计算傅里叶逆变换，从而得到傅里叶变换对。

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

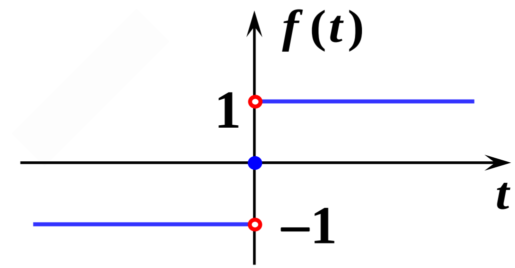
反向计算（右至左）

正向过程得到两重要等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = 2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

例 7.4.1 证明符号函数 $\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$ 的傅里叶变换为$\dfrac{2}{j\omega}$.



解 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{2}{j\omega}e^{j\omega t}\,d\omega$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{j\sin\omega t}{j\omega}\,d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{j\omega}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

（Dirichlet积分）

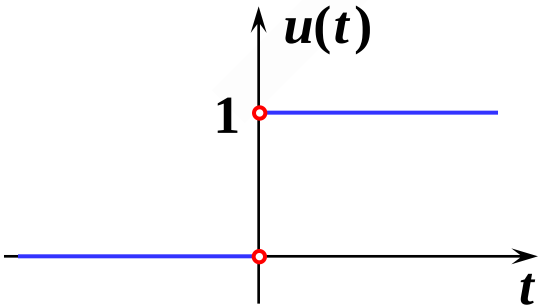
$$\boxed{\operatorname{sgn} t\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}.}$$

注： 试一下正向计算?

例 求函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的 Fourier 变换 $U(\omega)$。

解 已知 $\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\dfrac{2}{j\omega}$,

$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),$$



又 $u(t)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sgn} t+1)$,

得 $U(\omega)=\dfrac{1}{2}(\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]+\mathscr{F}[1])$

$$=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\boxed{u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)}$$

注 称 $u(t)$ 为单位阶跃函数，也称为 Heaviside 函数，它是工程技术中最常用的函数之一。

例7.4.3 求余弦函数$f(t) = \cos\omega_0 t$的傅里叶变换.

由 $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$,

有 $F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$

$$= \frac{1}{2}(\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] + \mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}])$$

$$= \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

同理，由 $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$

$$F(\omega) = j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

常用傅里叶变换对汇总

时间域$(f(t))$ $\leftrightarrow$ 频率域$(F(\omega))$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\chi_{[-a,a]} \leftrightarrow 2\frac{\sin a\omega}{\omega}, a>0$$

$$\operatorname{sgn} t \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}.$$

$$u(t)e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{\alpha+j\omega}, \alpha>0$$

第七章 傅里叶（Fourier）变换

时间域($f(t)$) $\leftrightarrow$ 频率域(F(ω))

常用傅里叶变换对汇总

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\chi_{[-a,a]} \leftrightarrow 2\frac{\sin a\omega}{\omega}, a > 0$$

$$\operatorname{sgn} t \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}.$$

$$u(t)e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}, \alpha > 0$$

在下面给出的基本性质中，所涉及到的函数的傅里叶变换均存在，且 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，$G(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]$.

- 性质7.5.1 线性性质

设 a,b 为常数，则 $\mathcal{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega)$.

逆变换同理 $\mathcal{F}^{-1}[aF(\omega)+bG(\omega)]=af(t)+bg(t)$.

- 性质（补充）缩放平移性质

$$(1)\quad \mathcal{F}[f(at+b)](\omega)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{jb\omega}{a}}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$(2)\quad \mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}f(t)\right]=F(\omega-\omega_0)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t).$$

例 求 $\mathscr{F}[\chi_{[a,b]}(t)]$.

解

回顾： $\mathscr{F}[\chi_{[-a,a]}(t)] = 2\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$.

利用对称区间特征函数的平移，即

$$\chi_{[a,b]}(t) = \chi_{\left[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right]}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)$$

由傅里叶变换的平移性质 $\mathscr{F}[f(at+b)](\omega) = \dfrac{1}{|a|}e^{\frac{jb\omega}{a}}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

$$\mathscr{F}[\chi_{[a,b]}(t)](\omega) = e^{-j\frac{(a+b)}{2}\omega}\,\mathscr{F}[\chi_{\left[\frac{a-b}{2},\frac{b-a}{2}\right]}(t)](\omega)$$

$$=2e^{-j\frac{(a+b)}{2}\omega}\frac{\sin\frac{b-a}{2}\omega}{\omega}$$

例 设 $f(t)=u(t)\cdot 2\cos\omega_0 t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 已知 $\mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$,

又 $f(t)=u(t)\cdot(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$,

根据线性性质和平移性质有 $\mathscr{F}\left[e^{j\omega_0 t}f(t)\right]=F(\omega-\omega_0)$

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)+\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$=\frac{2j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

更一般地，

$$\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\mathscr{F}\left[f(t)\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0))$$

第七章 傅里叶（Fourier）变换

7.6.1 卷积的概念

定义 7.6.1 设函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 对任何实数 t 都收敛，则称此

$$g(t)=\boxed{f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.}$$

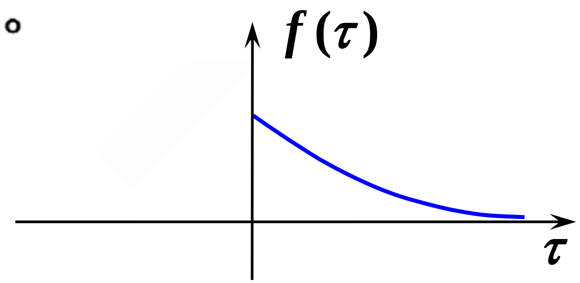
函数为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t)*f_2(t)$.

卷积由反褶、平移、相乘、积分四个部分组成。

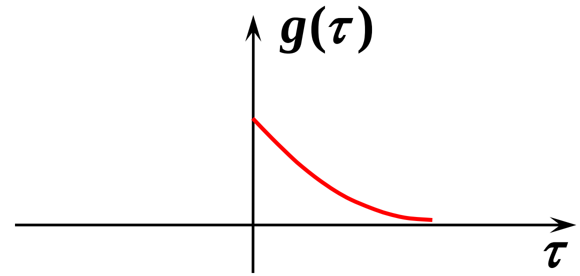
将函数 $f_2(\tau)$ 反褶并平移到 t，得到 $f_2(t-\tau)=f_2(-(\tau-t))$

再与函数 $f_1(\tau)$ 相乘后求积分，得到卷积 $f_1(t)*f_2(t)$.

例 设 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$，$g(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)$，其中，$\alpha>0$，$\beta>0$，且 $\alpha\neq\beta$，求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。



解 $$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$



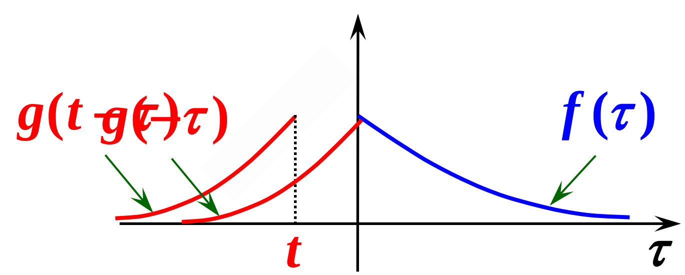
(1) 当 $t\leq 0$ 时，$f(t)*g(t)=0$.

(2) 当 $t>0$ 时，

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}.$$



7.6.2 卷积的性质

1. 基本性质

性质 7.6.1 交换性质

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

7.6.2 结合性质

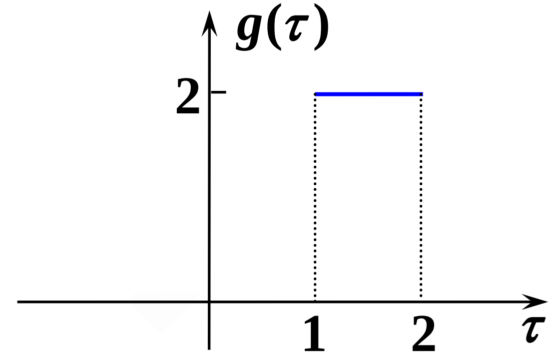
$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t).$$

7.6.3 线性性质

$$g(t) * [af_1(t) + bf_2(t)] = ag(t) * f_1(t) + bg(t) * f_2(t).$$

例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积，其中，

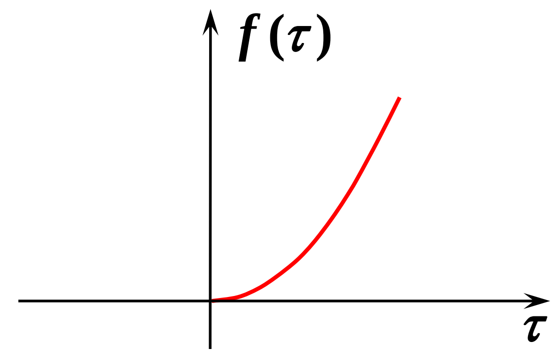
$$f(t)=t^2u(t),\quad g(t)=\begin{cases}2, & 1\le t\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



解 由卷积的定义及交换性质有

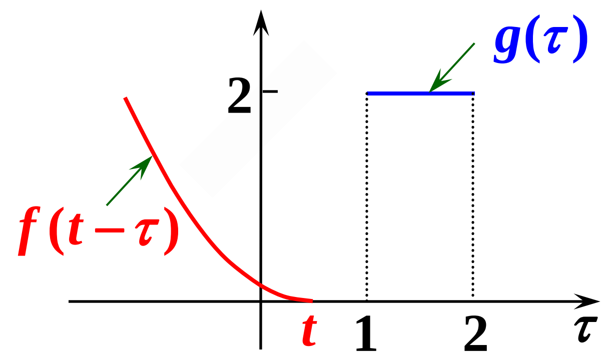
$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$



(1) 当 $t\le 1$ 时，

$$f(t)*g(t)=0.$$

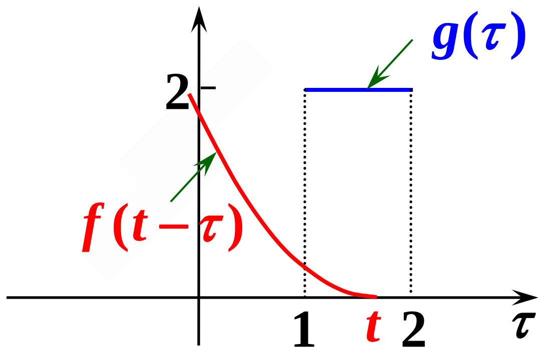


注：交换的目的是令作反褶和平移的函数 $f(t)$ 起点在原点。

(2) 当 $1 < t < 2$ 时，

$$f(t)*g(t) = \int_1^t 2\cdot(t-\tau)^2\,\mathrm{d}\tau$$

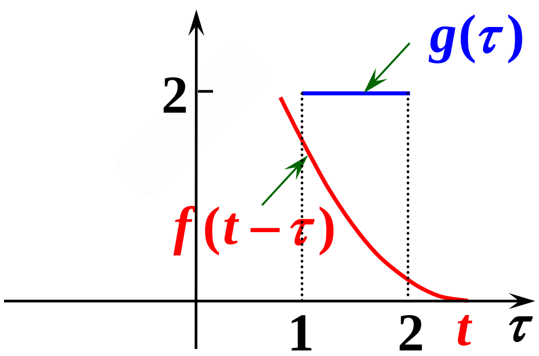
$$= \frac{2}{3}(t-1)^3.$$



(3) 当 $t \geq 2$ 时，

$$f(t)*g(t) = \int_1^2 2\cdot(t-\tau)^2\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{2}{3}[(t-1)^3-(t-2)^3].$$



综合得

$$f(t)*g(t)=\begin{cases}0, & t\le 1,\\ 2(t-1)^3/3, & 1<t<2,\\ 2[(t-1)^3-(t-2)^3]/3, & t\ge 2.\end{cases}$$

注：在计算一些分段函数的卷积时，如何确定积分限是解题的关键。如果采用图形方式则比较容易确定积分限。

另外，利用卷积满足交换律这一性质，适当地选择两个函数的卷积次序，还可以使积分限的确定更直观一些。

7.6.2 卷积的性质

2. 卷积定理

定理 设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则有

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega); \qquad (A)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi f_1(t)\cdot f_2(t). \qquad (B)$$

证明 $\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)*f_2(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\underline{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega(t-\tau)}\mathrm{d}t\right]}\mathrm{d}\tau=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$

同理可证 (*B*) 式。

例 求函数 $h(t)$ 和 $\delta(t)$ 的卷积。

解 方法一 $h(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=h(t).$

方法二 已知 $\delta(t)$ 的 Fourier 变换为 $D(\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=1,$

令 $H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]$，根据卷积定理有

$$h(t)*\delta(t)=\mathscr{F}^{-1}[H(\omega)\cdot D(\omega)]$$

$$=\mathscr{F}^{-1}[H(\omega)]=h(t).$$

注 一般地，有 $\boxed{h(t)*\delta(t-t_0)=h(t-t_0).}$

例 求 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)\cos bt\ (a>0)$ 的 Fourier 变换。

解 方法一 利用卷积定理求解

令 $g(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，$h(t)=\cos bt$,

则 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$,

$$H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]=\pi[\delta(\omega+b)+\delta(\omega-b)],$$

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[g(t)\cdot h(t)]=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*H(\omega)$$

$$=\frac{\pi}{2\pi}[G(\omega)*\delta(\omega+b)+G(\omega)*\delta(\omega-b)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$

例 求 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)\cos bt\ (a>0)$ 的 Fourier 变换。

解 方法二 利用频移性质求解

令 $g(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，则 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$,

又 $f(t)=\dfrac{1}{2}[g(t)\mathrm{e}^{-jbt}+g(t)\mathrm{e}^{jbt}]$,

根据平移性质有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{2}[G(\omega+b)+G(\omega-b)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$

7.6.3 卷积在傅氏积分中的应用

1. 傅里叶变换的其他性质

➢ 性质 微分性质 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0$, $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$,

则 $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega)$.

同理，可得到象函数的导数公式

$$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n f(t).$$

➢ 性质 帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

例 设 $f(t)=t^2\cos t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 令 $g(t)=\cos t$，则 $f(t)=t^2 g(t)$，

又已知 $G(\omega)=\mathscr{F}[\cos t]=\pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)$，

根据微分性质 $\mathscr{F}^{-1}[G''(\omega)]=(-jt)^2 g(t)$，有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[t^2 g(t)]=-G''(\omega)$$

$$=-\pi\delta''(\omega-1)-\pi\delta''(\omega+1).$$

例 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \mathrm{d}\,\omega$ 的值。

解 由 $\mathscr{F}\left[\chi_{[-1,1]}(t)\right] = 2\frac{\sin\omega}{\omega}.$

由 Parserval 等式有 $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\,\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}\,t.$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\sin^2\omega}{\omega^2} \mathrm{d}\,\omega = 2\pi\int_{-1}^{1} 1^2 \mathrm{d}\,t = 4\pi.$$

由于被积函数为偶函数，故有 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2} \mathrm{d}\,\omega = \frac{\pi}{2}.$