

函数

李修成 lixicheng@hit.edu.cn

计算机科学与技术学院

函数的定义与性质

函数的运算

双射函数与集合基数（选学）

作业

函数的定义与性质

函数定义

定义 1.1. 令 A, B 为非空集合, 一个从集合 A 到 B 上的函数 f 为一种赋值 (assignment), 对于 A 中每一个元素 a , f 都为其赋予 B 中唯一元素 b . 若 f 将 $a \in A$ 赋值为 b , 则记为 $f(a) = b$. 通常记函数为 $f: A \mapsto B$.

- A 称为 f 的**定义域** (domain), B 称为 f 的**陪域** (codomain) .
- f 的**值域** (range) 为 A 中所有元素像的集合, 即¹ $\text{range}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$.
- $\text{range}(f) \subseteq \text{codomain}(f) = B$, $\text{range}(f)$ 通常也被记为 $\text{image}(f)$.
- 若 $f(a) = b$, 则称 b 为 a 的**像** (image), 称 a 为 b 的**原像** (preimage) ².
- 若 $f(a) = b$, 那么 b 的原像是否唯一?

¹注意: 指定教材将 $\text{range}(f)$ 简记为 $\text{ran}(f)$, $\text{domain}(f)$ 简记为 $\text{dom}(f)$, 两种简记不是数学惯用符号.

²注意: 指定教材将像与原像的定义限定于集合, 这种限定并没有带来任何额外好处, 亦不符合数学惯用定义.

定义 1.2 (函数相等). 令 f, g 为函数, f 与 g 相等当且仅当如下两个条件同时成立,

1. $\text{domain}(f) = \text{domain}(g)$;
2. $\forall x \in \text{domain}(f)$, 有 $f(x) = g(x)$.

例子 1.1 (函数相等). 判断如下函数是否相等,

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $g(x) = x - 1$.
- $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = 1 + x + x^2 + \dots$, $\text{domain}(f) = \text{domain}(g) = (0, 1)$.

定义 1.3. 令 A, B 为非空集合, 所有从 A 到 B 的函数集合记为 B^A ,

$$B^A \triangleq \{f \mid f: A \mapsto B\}.$$

1. 若 $|A| = m, |B| = n$, 则 $|B^A| = n^m$;
2. 教材中讨论了 A 或 B 为空集的情形, 这种极端情形对建立数学理论并没有帮助.

例子 1.2. 令 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求 B^A .

我们用有序对 $\langle a, b \rangle$ 来表示有穷集合之间的函数, 其中 $a \in A, b \in B$.

$$f_0 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_7 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}.$$

思考: 上述函数表示与二进制表示有何关联?

函数的像

定义 1.4. 令 f 为从 A 到 B 的函数, $S \subseteq A$, $T \subseteq B$.

1. S 在函数 f 下的**像** (image) 被定义为 $f(S) \triangleq \{f(s) \mid s \in S\}$.
2. T 在函数 f 下的**原像** (preimage) 被定义为 $f^{-1}(T) = \{a \mid a \in A \wedge f(a) \in T\}$.
 - 在我们的定义中, 像与原像同时适用于元素 $a \in A$ 和集合 $S \subseteq A$.
 - 一般情况下, 对 $S \subseteq A$, 我们有 $S \subseteq f^{-1}(f(S))$, 为什么?

例子 1.3 (像与原像). 设 $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, 且

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{if } n \text{ is even} \\ x+1, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

令 $S = \{0, 1\}$, $T = \{2\}$, 那么有

- $f(S) = f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 2\}$, $f^{-1}(T) = f^{-1}(\{2\}) = \{4, 1\}$.
- $f^{-1}(f(S)) = ?$

定义 1.5. 设 $f: A \mapsto B$,

1. 若对任意 $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$ 仅当 $x_1 = x_2$, 则称 f 是单射函数 (injection) ³;
 2. 若 $\text{range}(f) = B$, 则称 f 是满射函数 (surjection) ⁴;
 3. 若 f 既是单射也是满射函数, 则称 f 是双射函数 (bijection) ⁵.
- *injective, surjective, and bijective.*
 - *injectif, surjectif, and bijectif* are creations of Bourbaki.

³英文又称为 one-to-one.

⁴英文又称为 onto.

⁵英文又称为 one-to-one correspondence.

例子 1.4. 判断如下函数是否为单射，满射，双射：

1. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1.$
2. $f: \mathbb{Z}^+ \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \ln x.$
3. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor.$
4. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1.$
5. $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x.$

例子 1.5. 对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f: A \mapsto B$

1. $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), B = \{a, b\}^{\{1, 2, 3\}}$.
2. $A = [0, 1], B = [1/4, 1/2]$.
3. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$.
4. $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], B = [-1, 1]$.

函数的性质

1. $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), B = \{a, b\}^{\{1, 2, 3\}}.$

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

$$B = \{f_0, f_1, \dots, f_7\}, \text{ 其中}$$

$$f_0 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_7 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}.$$

故，可建立如下双射函数 $f: A \mapsto B$:

$$f(\emptyset) = f_0, f(\{1\}) = f_1, f(\{2\}) = f_2, f(\{3\}) = f_3,$$

$$f(\{1, 2\}) = f_4, f(\{1, 3\}) = f_5, f(\{2, 3\}) = f_6, f(\{1, 2, 3\}) = f_7.$$

函数的性质

2. $A = [0, 1], B = [1/4, 1/2]$.

令 $f: A \mapsto B, f(x) = x/4 + 1/4$. The two steps correspond to Scale and Shift.

3. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$.

$$f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0, \\ -2x - 1 & x < 0. \end{cases}$$

4. $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], B = [-1, 1]$.

$$f: [\pi/2, 3\pi/2] \mapsto [-1, 1], \quad f(x) = -\sin(x).$$

满射函数的计数

例子 1.6. 令集合 $A = \{1, 2, \dots, m\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$, $m \geq n$, $S = B^A$. S 中有多少满射函数?

分析: 满射意味着 B 中的所有元素都要出现在 $\text{range}(f)$, 这一约束条件使计数变的困难. 如果能消除约束, 则计数从 A 到 B 的函数会很容易, 即 $|B|^{|A|}$. 比如, 从 A 到集合 $B - \{1\}$ 的全部函数个数为 $(n-1)^m$, 从 A 到集合 $B - \{1, 2\}$ 的全部函数个数为 $(n-2)^m$. 这启发我们使用容斥原理.

求解: 令 P_i 表示元素 $i \in B$ 不出现在 $\text{range}(f)$ 这一性质, A_i 表示从 A 到 B 满足 P_i 函数的集合. 则所求满射函数的个数为 $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_n|$.

根据函数计数规则有, $|A_i| = (n-1)^m$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$, \dots , $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 0$, 其中 $1 \leq i \leq j \leq n$. 根据容斥原理有,

$$\begin{aligned} |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_n| &= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0 \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \end{aligned}$$

线性函数的单射与满射

回忆线性代数中介绍的线性函数,

- 令 V, W 为向量空间, 对给定函数 $f: V \mapsto W$, 如果对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ 有,

$$f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v}),$$

则称函数 f 为从向量空间 V 到 W 的线性函数.

- 证明 V 上的线性函数为单射函数当且仅当 $f(\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0$.
- 考虑特殊的向量空间 $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, 此时 V 上的线性函数 f 等价于 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- 此时, 矩阵 \mathbf{A} 满足何种条件时 f 分别是单射、满射和双射的?
- 在线性代数中, 为什么我们只对方阵定义逆矩阵?

单射与满射

定理 1.1. 令 A, B 为有穷集合,

1. 若从 A 到 B 存在单射函数则 $|A| \leq |B|$;
2. 若从 A 到 B 存在满射函数则 $|A| \geq |B|$;
3. 若 $|A| = |B|$ 则 f 为单射 $\iff f$ 为满射 $\iff f$ 为双射.

证明. (1) 假设 $f: A \mapsto B$ 为单射函数, 则 $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ 有 $f(a_1) \neq f(a_2)$. 由于 $f(a_1), f(a_2) \in B$, 故 B 至少包含与 A 一样多的元素, 即 $|A| \leq |B|$.

证明. (2) 假设 $f: A \mapsto B$ 为满射函数, 则 $\forall b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ 有 $f^{-1}(\{b_1\}), f^{-1}(\{b_2\})$ 非空. 由函数定义可知 $f^{-1}(\{b_1\}) \cap f^{-1}(\{b_2\}) = \emptyset$. 由于 $A = \cup_{b \in B} f^{-1}(\{b\})$, 故 $|A| \geq |B|$.

推论 1.1. 令 A, B 为有穷集合, $f: A \mapsto B$ 为从 A 到 B 的函数. 若从 A 到 B 存在双射函数则 $|A| = |B|$.

思考:

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 可视为从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 上的线性函数;
- 若 \mathbf{A} 为单射, 则定理1.1要求 $n \leq m$, 即矩阵的列数要足够小, 保证列线性无关;
- 若 \mathbf{A} 为满射, 则定理1.1要求 $n \geq m$, 即矩阵的行数要足够小, 保证行线性无关;

重要函数举例

1. 常函数 (constant function) $f: A \mapsto B$, 对 $\forall x \in A$ 都有 $f(x) = c$, 其中 c 为常数.
2. 恒等函数 (identity function) $I: A \mapsto A$, 对 $\forall x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.
3. 特征函数 (indicator function) $\chi: U \mapsto \{0, 1\}$, 令 $A \subseteq U$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

4. 阶跃函数 (step function) $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x),$$

其中 A_i 为 \mathbb{R} 的一个划分 (partition), 满足 1) $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$, 2) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

阶跃函数为特征函数的线性组合, 在分析中有着重要应用, 如定义黎曼积分 (Riemann integral)、勒贝格积分 (Lebesgue integral) 以及离散随机变量的累积概率分布.

勒贝格积分初探（选学）

- 黎曼积分通过划分定义域来定义积分，比如划分成不相交的区间.
- Dirichlet 函数的定义域为 $[0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \quad \int_{[0,1]} f(x) dx = ?$$

- 勒贝格积分通过划分函数的值域来定义积分.
- $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ 对应的勒贝格积分为 $\int f dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell(A_i)$.
- 勒贝格积分比黎曼积分对应的可积函数要更广，且有更优良的性质，如积分与极限可交换顺序，是打开现代数学大门的一把钥匙.
- 感兴趣的同学可以参考 *Gerald B. Folland* 的经典教材⁶.

⁶Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.

与函数相关的重要集合等式

定理 1.2. 令 $f: A \mapsto B$, $X_1, X_2 \subseteq A$. 有

1. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.
3. $f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$.
4. 若 f 为单射, 则有 $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, $f(X_1) - f(X_2) = f(X_1 - X_2)$.

定理 1.3. 令 $f: A \mapsto B$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$. 有

1. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.

推论 1.2. 令 $f: A \mapsto B$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$. 有

1. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \cup \dots \cup f^{-1}(Y_n)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \cap \dots \cap f^{-1}(Y_n)$.

与函数相关的重要集合等式

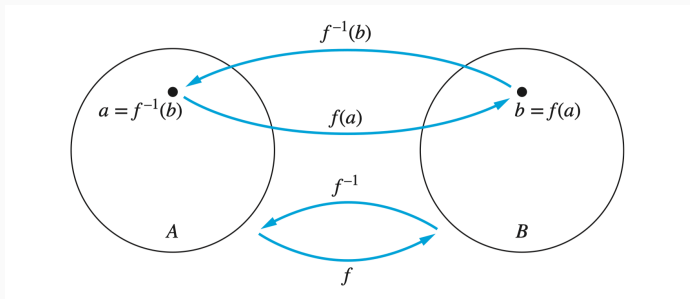
定理 1.4. 给定 $f: A \mapsto B$. 证明如下结论:

1. 对任意 $X \subseteq A$, $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
2. 对任意 $Y \subseteq B$, $Y \supseteq f(f^{-1}(Y))$.
3. 如果 f 是单射, 对任意 $X \subseteq A$, $X = f^{-1}(f(X))$.
4. 如果 f 是满射, 对任意 $Y \subseteq B$, $Y = f(f^{-1}(Y))$.

函数的运算

逆函数

定义 2.1. 令 f 为从集合 A 到 B 的双射函数. f 的逆函数 (inverse function) 是一个从 B 到 A 的映射, 其将 $b \in B$ 映射到 $a \in A$ 如果 $f(a) = b$. 函数 f 的逆函数被记为 f^{-1} . $f^{-1}(b) = a$ 当 $f(a) = b$.



- **思考 1:** 这个定义是否是良好定义 (well-defined) 的? 即 $f^{-1}(b)$ 是否唯一.
- **思考 2:** 可否将定义中的双射函数修改为单射函数?

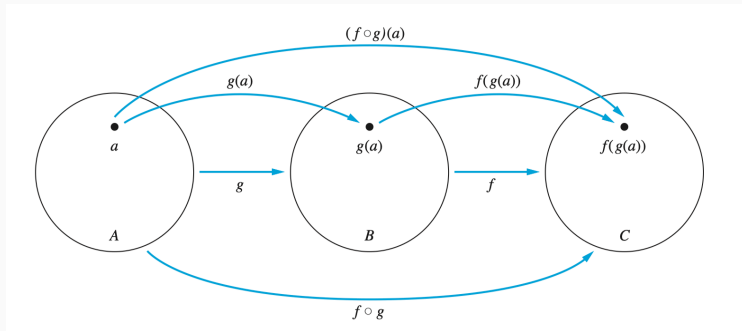
例子 2.1.

- 令 $f: \{a, b, c\} \mapsto \{1, 2, 3\}$, $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 1$. 问 $f(x)$ 是否可逆?
- 令 $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 3$. 问 $f(x)$ 是否可逆?
- 令 $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. 问 $f(x)$ 是否可逆?

复合函数

定义 2.2. 令 g 为从集合 A 到 B 的函数, f 为从集合 B 到 C 的函数. f 与 g 的复合 (composition) $f \circ g$ 是一个从 A 到 C 的函数,

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$



复合函数举例

例子 2.2. 令 f, g 为 \mathbb{Z} 到 \mathbb{Z} 的函数, $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x + 2$. 计算 $f \circ g$ 和 $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11.$$

- 一般情况下, $f \circ g \neq g \circ f$, 即函数复合运算不满足交换律.
- 令 $h: C \mapsto D$, $g: B \mapsto C$, $f: A \mapsto B$, 根据函数复合定义,

$$(f \circ g) \circ h = f(g(h(x))) = f \circ (g \circ h),$$

即函数复合运算满足结合律.

定理 2.1. 令 $f: A \mapsto B$, $g: B \mapsto C$.

1. 若 f, g 都是单射的, 则 $g \circ f: A \mapsto C$ 也是单射的.
2. 若 f, g 都是满射的, 则 $g \circ f: A \mapsto C$ 也是满射的.
3. 若 f, g 都是双射的, 则 $g \circ f: A \mapsto C$ 也是双射的.

定理 2.2. 令 $f: A \mapsto B$, $g: B \mapsto C$.

1. 若 $g \circ f: A \mapsto C$ 是单射的, 则 f 是单射的.
2. 若 $g \circ f: A \mapsto C$ 是满射的, 则 g 是满射的.
3. 若 $g \circ f: A \mapsto C$ 是双射的, 则 f 是单射的, g 是满射的.

定理 2.3. 令 $f: A \mapsto B, g: B \mapsto C$ 均为双射函数, 则

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

证明. 根据复合函数和逆函数的定义, $(g \circ f)^{-1}$ 与 $f^{-1} \circ g^{-1}$ 均为从 C 到 A 的函数, 故定义域相同.

任取 $a \in A$, 令 $b = f(a), c = g(b) = g(f(a))$. 根据逆函数定义,

$$(g \circ f)^{-1}(c) = a = f^{-1}(b) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1} \circ g^{-1}(c).$$

定理 2.4. 令 $f: A \mapsto B$ 为双射函数, 则

$$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

证明. 任取 $a \in A$, 令 $b = f(a)$, 则由逆函数定义可知 $f^{-1}(b) = a$. 故

$$f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a.$$

即 $f^{-1} \circ f = I_A$. 同时有,

$$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

即 $f \circ f^{-1} = I_B$.

双射函数与集合基数 (选学)

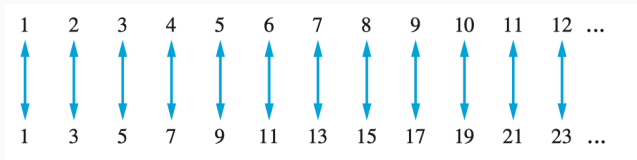
定义 3.1. 若存在一个从集合 A 到集合 B 的双射函数，则称 A 和 B 是**等势**，即具有相同的基（cardinality）. 记为 $|A| = |B|$.

定义 3.2. 如果存在一个从集合 A 到集合 B 的单射函数，则集合 A 的基小于等于集合 B 的基，记为 $|A| \leq |B|$. 若 $|A| \leq |B|$ 且二者的基不同，则有集合 A 的基小于集合 B 的基，记为 $|A| < |B|$.

定义 3.3. 若一个集合为有穷集合或与自然数 \mathbb{N} 有相同的基则称其为可数的（countable），否则称其为不可数的（uncountable）.

例子 3.1 (正奇数可数). 证明正奇数为可数集.

证明. 考虑 $f(n) = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. f 为从 \mathbb{N} 到正奇数集的双射函数.



例子 3.2 (希尔伯特旅馆). 希尔伯特旅馆 (Hilbert's Grand Hotel) 为一个拥有可数无穷个 (countably infinite number) 房间的旅馆, 每个房间都住着一个神秘旅客. 夜幕降临, 旅馆新来了一个旅客, 我们需要为其安排房间.

例子 3.3 (整数集可数). 证明整数集为可数集.

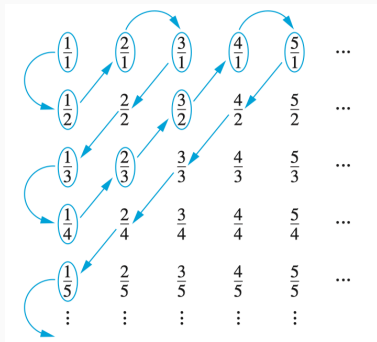
证明. 考虑 $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{if } n \text{ is even,} \\ -(n+1)/2, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

例子 3.4 (正有理数可数). 证明正有理数集为可数集.

证明. 每个正有理数都可以写成两个正整数的商 p/q . 我们可以这样排列正有理数, 分母 $q = 1$ 的放在第一行, $q = 2$ 的放在第二行, 以此类推.

然后以对角线的形式排列正有理数. 定义 $p + q$ 为 p/q 的高度, 先列出高度为 2 的有理数, 然后是高度 3 的有理数, 以此类推, 如果一个数之前出现过, 我们则跳过. 用这种方式, 我们给每个正有理数赋值了一个唯一的正整数, 即我们建立了从有理数到 \mathbb{N} 的双射函数.



例子 3.5 (有理数可数). 证明有理数集为可数集.

证明. 与例子3.4类似, 考虑有理数的分数表示 p/q , 不过此时我们令 $q > 0$. 并定义 $|p| + q$ 为有理数 p/q 的高.

$$\frac{0}{1} = 0$$

为仅有的高度为 1 的有理数,

$$\frac{-1}{1}, \quad \frac{1}{1}$$

为仅有的高度为 2 的有理数,

$$\frac{-2}{1}, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{2}$$

为仅有的高度为 3 的有理数, 以此类推. 按照对角线方向, 我们先列出所有高度为 1 的有理数, 然后是所有高度为 2 的, 以此类推. 这样我们就建立了从有理数 \mathbb{Q} 到自然数 \mathbb{N} 之间的双射函数.

例子 3.6. 任意两个闭区间 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 上的点集具有相同的基.

例子 3.7. 复平面 (complex plane) 与三维空间中的单位球 (unit sphere) 具有相同的基.

考虑立体投影 (stereographic projection), 即从北极点 (north pole) N 与复平面任意一点 z 连线与单位球的交点.

不可数无穷集合

定理 3.1 (实数不可数). 单位闭区间 $[0, 1]$ 内的实数集不可数.

证明. 假若 $[0, 1]$ 内的实数可数, 并被如下方式列出,

$$\alpha_1 = 0.\textcolor{red}{a}_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \cdots a_{1n} \cdots$$

$$\alpha_2 = 0.a_{21} \textcolor{red}{a}_{22} a_{23} a_{24} \cdots a_{2n} \cdots$$

$$\alpha_3 = 0.a_{31} a_{32} \textcolor{red}{a}_{33} a_{34} \cdots a_{3n} \cdots$$

$$\alpha_4 = 0.a_{41} a_{42} a_{43} \textcolor{red}{a}_{44} \cdots a_{4n} \cdots$$

$$\vdots$$

现考虑 $\beta = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{nn} \neq 1, \\ 2 & \text{if } a_{nn} = 1. \end{cases}$$

则 β 不会出现在 α_n 序列中.

定理 3.2 (Cantor-Bernstein theorem). 给定任意两个集合 A, B , 若存在 $A_1 \subseteq A$ 有 $|A_1| = |B|$, 同时存在 $B_1 \subseteq B$ 有 $|B_1| = |A|$. 则 $|A| = |B|$.

作业

指定教材习题 8:

- 8-7
- 8-10
- 8-12
- 8-21

- 证明定理1.1-(3).
- 证明定理1.2.
- 证明定理1.3.
- 证明定理1.4.