第五章 留数

5.1.1 解析函数的孤立奇点及分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，且存在 $\delta > 0$，使得 $f(z)$ 在去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 孤立奇点。

例 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$，$z = 0$ 为孤立奇点。

例 $f(z) = \ln z$，原点及负实轴上的点均为奇点，但不是孤立奇点。

例 $f(z) = \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$，

(1) 令 $\sin\dfrac{1}{z} = 0$，$\Rightarrow$ $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ 为孤立奇点；$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，

(2) $z = 0$ 也是奇点，但不是孤立奇点。

5.1.1 解析函数的孤立奇点及分类

- 根据函数在其孤立奇点的去心邻域的洛朗级数对奇点分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内展开为洛朗级数：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$，

(1) 若洛朗级数不含负幂次项，称 z_0 为 $f(z)$ 的<u>可去奇点</u>。

(2) 若洛朗级数含有限个负幂次项，称 z_0 为 $f(z)$ 的<u>极点</u>。

若最高负幂次为N，则称 z_0 为 $f(z)$ 的<u>N阶极点</u>；

-- 判断极点阶数的方法一

(3) 若洛朗级数含无限个负幂次项，称 z_0 为 $f(z)$ 的<u>本性奇点</u>。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的奇点的类型。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，写出 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

$$=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$

(不含负幂次项)

- 如果约定 $f(z)$在 $z=0$ 点的值为1，则 $f(z)$在 $z=0$ 点就解析了，因此称 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点。

求极限判别法：

由 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$，可知，$z=0$是 $f(z)$的可去奇点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{2}}$ 的奇点的类型。

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，写出 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{e\cdot e^{z-1}}{(z-1)^{2}}=\frac{e}{(z-1)^{2}}\left(1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^{2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{e}{(z-1)^{2}}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}(z-1)+\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$

（含有限个负幂次项，且最高负幂次为2）

可见， $z=1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

求极限判别法：

由 $\lim\limits_{z\to 1}f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{2}}=\infty$，可知，$z=0$是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点的类型。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，写出 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

（含无穷多个负幂次项）

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

求极限判别法：

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=0$,

可知，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在且不为∞. $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

5.1.2 解析函数在有限孤立奇点的性质

$$f(z)=\underbrace{\cdots\ \cdots+}_{\text{本性奇点}}\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}+}_{N\text{阶极点}}\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}},$$

判断孤立奇点类型的方法

(1) 可去奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$（常数）；

(2) N 阶极点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$； （该条件只能判断是极点）

(3) 本性奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且不为∞.

注 在求 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 时，可使用洛必达法则。

5.1.2 解析函数在有限孤立奇点的性质

➢ 判断极点阶数的方法二：

定理 5.1.1 若$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内解析，则z_0是$f(z)$的N阶极点的充要条件是 函数$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内可以表示为

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^N}g(z),$$

的形式，其中函数$g(z)$在z_0点的邻域内解析，且$g(z_0)\neq 0$.

注 $$f(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^N}[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots]=\frac{1}{(z-z_0)^N}g(z)$$

即$a_{-N}\neq 0$.

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ 的奇点的类型。

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，写出 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{e\cdot e^{z-1}}{(z-1)^2}=\frac{e}{(z-1)^2}\left(1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}(z-1)+\cdots,\quad(0<|z|<+\infty).$$

（含有限个负幂次项，且最高负幂次为2）

可见，$z=1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

求极限判别法：

由 $\lim\limits_{z\to1}f(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{e^z}{(z-1)^2}=\infty$，可知，$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数$f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$的奇点类型。

解 $z=0, z=-2$是函数$f(z)$的两个孤立奇点。

(1) 考虑$z=0$的类型

由 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\dfrac{3z+2}{z+2}$，

$g(z)=\dfrac{3z+2}{z+2}$在$z=0$的邻域内解析，且$g(0)=1\neq 0$

得到$z=0$为二阶极点。

(2) 考虑$z=-2$的类型

由 $f(z)=\dfrac{1}{z+2}\dfrac{3z+2}{z^2}$，

$g(z)=\dfrac{3z+2}{z^2}$在$z=-2$的邻域内解析，且$g(-2)=-1\neq 0$

得到$z=-2$为一阶极点。

5.1.3 解析函数的零点与极点的关系

- 所谓函数 $f(z)$ 的零点就是方程 $f(z)=0$ 的根。

定义 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，

(1) 若 $f(z_0)=0$，则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的零点；

(2) 若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$，

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

结论 对于不恒为零的解析函数，其零点是孤立的。

即在零点的一个小邻域内，函数无其它零点。

例5.1.2 $z=0$与$z=1$均为函数$f(z)=z(z-1)^3$的零点，判断阶数？

例 $$f(z)=\frac{(2z+3)^3}{1+e^z}=[z-(-\frac{3}{2})]^3\frac{8}{1+e^z}.$$

故 $z=-\dfrac{3}{2}$ 为 $f(z)$ 的三阶零点。

5.1.3 解析函数的零点与极点的关系

- 充要条件 (如何判断零点的阶数?)

定理 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则下列条件是等价的：

(1) z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

(2) $f^{(k)}(z_0)=0$, $k=0,1,2,\cdots,m-1$; $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

(3) $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内的泰勒展开式为

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,$$

其中，$a_m\neq 0$.

$$=(z-z_0)^m\underline{[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]}$$

$$=(z-z_0)^m\varphi(z).$$

收敛且解析

例 $f(z)=z-\sin z$. 判断零点$z=0$的阶数。

方法一 $f(0)=0$, $f'(0)=1-\cos z\big|_{z=0}=0$,

$f''(0)=\sin z\big|_{z=0}=0$, $f'''(0)=\cos z\big|_{z=0}=1\neq 0$,

$z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶零点。

方法二 $f(z)=z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots)$

$$=z^3(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\cdots)$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶零点。

5.1.3 解析函数的零点与极点的关系

➤ 判断极点阶数的方法三：

定理 5.1.6 z_0是$f(z)$的N阶极点的充要条件是：

$$z_0\text{是}\frac{1}{f(z)}\text{的}N\text{阶零点。}$$

➤ 判断极点阶数的方法四：

定理 设函数$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, 其中$P(z)$和$Q(z)$是区域D上的解析函数。设点z_0分别是$P(z)$和$Q(z)$的m阶和n阶零点，则

1. 若$m<n$, 则z_0是$f(z)$的$m-n$阶极点。
2. 若$m\geq n$, 则z_0是$f(z)$的可去奇点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ 的奇点的类型。

解 由于 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)^2(z+i)^2}$，故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，

$z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ 的奇点的类型。

解 令 $z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

由于 z_k 是 $\cos z$ 的一阶零点， 故 z_k 是 $f(z)$ 的一阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点的类型。

解 由于 $f(z)=\dfrac{(z+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)^2}$，故 $z=-1$是 $f(z)$ 的可去奇点，

$z=1$是 $f(z)$ 的一阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的奇点的类型。

解 $z=0$为函数$f(z)$的孤立奇点。

$z=0$ 为分母的二阶零点，为分子的1阶零点（导数法）。

故$z=0$ 为$f(z)$的一阶极点。

- 什么情况下会出现本性奇点呢？

例 判断下列函数的奇点的类型。

(1) $f(z)=\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$， $z=1$ 为本性奇点。

(2) $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$， $z=1$ 为本性奇点。

(3) $f(z)=\sin(e^{\frac{1}{z}})$， $z=0$ 为本性奇点。

(4) $f(z)=\cos\left(\dfrac{e^z-1}{z}\right)$， $z=0$ 为可去奇点。

(5) $f(z)=e^{\frac{\sin z}{z}}$， $z=0$ 为可去奇点。

- 上述函数都有一个共同点： $f(z)=g\left(\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$.

小结 考虑下面两类函数：

(1) $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ —— 比较分子分母的零点的阶数 ——

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$ 可去奇点，
- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ N 阶极点。

(2) $f(z)=g\left(\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$ —— 函数 $g(z)$ 连续 ——

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=g(c)$ 可去奇点，
- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=g(\infty)$ 本性奇点

  N 阶极点

5.1.4 解析函数在无穷孤立奇点的性质

定义 如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 ∞ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内解析，则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

手段 令 $z = \dfrac{1}{\xi}$， 则点 $z = \infty$ 对应于点 $\xi = 0$，

相应地，$f(z) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right) \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} \varphi(\xi)$，

因此，

> 函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z = \infty$ 的性态可由函数 $\varphi(\xi)$ 在原点 $\xi = 0$ 的性态来刻画。

注： ∞是假想的点，是所有函数的奇点，我们需要判断的是孤立与否。

例 设 $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$， 则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\xi}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\xi^2}}$

$$=\frac{\xi^2}{\xi(1+\xi^2)}\ \overset{\text{记为}}{=\!=}\ \varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的可去奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

例 设 $f(z)=\mathrm{e}^{z}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\xi}} \xlongequal{\text{记为}} \varphi(\xi)$，

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的本性奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

例 设 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1+z}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$， 则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1+\dfrac{1}{\xi^2}}{1+\dfrac{1}{\xi}}$

$$=\frac{1+\xi^2}{\xi(1+\xi)} \overset{\text{记为}}{=\!=} \varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的一阶极点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的一阶极点。

- 函数 $f(z)$在无穷远点的邻域内的洛朗展式?

$$f(z) = \cdots + a_N z^N + \cdots a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + \cdots,$$

$$\phi(\xi) = \cdots + a_N \xi^{-N} + \cdots a_1 \xi^{-1} + a_0 + a_{-1} \xi + \cdots,$$

- 无穷远点的奇点类型的划分

(1) 可去奇点：不含正幂项； $\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)=c$ (常数)；

(2) N 阶极点：含有限多的正幂项, 且最高幂次为 N，

此时，$f(z)=z^N\psi(z)$； $\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)=\infty$；

(3) 本性奇点：含有无穷多的正幂项;

$\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)$ 不存在且不为∞.

例：设 $f(z)=\dfrac{e^z \sin z}{z^2}$，判断奇点$z=\infty$的类型。

解：$f(z)=\dfrac{1}{z^2}\left(1+z+\dfrac{z}{2!}+\cdots\right)\left(z-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$

$$=\frac{1}{z}+1+\frac{1}{3}z\cdots$$

含有无穷多的正幂项，本性奇点。

例：设 $f(z)=\dfrac{1}{1+e^z}$，判断奇点$z=\infty$的类型。

解：$z=(2k+1)\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 为 $f(z)$的孤立奇点。

由 $\lim\limits_{k\to\infty}(2k+1)\pi i=\infty$， $z=\infty$不是孤立奇点。

第五章 留数

问题分析： 怎么计算积分$I=\oint_C f(z)\,dz$？

➢ 如函数$f(z)$在积分曲线C内以及边界上是解析的

由柯西积分定理：$I=0$

➢ 如函数$f(z)$在积分曲线C内包含奇点z_0？

回顾： $f(z)$表示为$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$, $g(z)$ 在积分曲线C内

以及边界上是解析的, 那么

$$I=\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}g^{(n)}(z_0)$$

如$f(z)$不方便表示为上面的分式情况？

问题分析： 怎么计算积分$I = \oint_C f(z)\,dz$?

➢ 如函数$f(z)$在积分曲线C内包含奇点z_0？

从洛朗级数出发（洛朗级数可以在奇点处展开）$0 < |z - z_0| < \delta$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

两边积分

$$I = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \boxed{a_{-1}}$$

洛朗展开中，-1次幂的系数a_{-1}很重要！

这就是留数！

5.2.1 留数的定义及其计算规则

1. 有限孤立奇点处的留数定义

定义 设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域

$0<|z-z_0|<\delta$ 内展开成洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

称 a_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，记作：

奇点!

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中，C 是 z_0 的去心邻域内绕 z_0 的一条正向简单闭曲线。

例： 写出$f(z)=z\,e^{\frac{1}{z}}$的留数。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，写出 $f(z)$在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

本性奇点

$$f(z)=z\,e^{\frac{1}{z}}=z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\,z^n}+\cdots\right),\quad (0<|z|<+\infty).$$

$$=z+1+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\cdots$$

因此，$Res[f(z),0]=a_{-1}=\frac{1}{2}.$

例： 写出$f(z)=\frac{\sin z}{z}$的留数。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，并且为可去奇点，不含负幂次项。

因此，$Res[f(z),0]=a_{-1}=0.$

5.2.1 留数的定义及其计算规则

2.有限孤立奇点处的留数计算

- 可去奇点 若 z_0为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0.$
- 本性奇点

将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内展开成洛朗级数，得到a_{-1}。

注 (1) 在具体展开的时候，并不需要写出“完整”的洛朗级数，只需将其中负一次幂的系数 a_{-1} 求出来就可以了。

(2) 对于不是本性奇点的情况，该方法有时也是很有效的，而且在使用该方法时，并不需要知道奇点的类型。

5.2.1 留数的定义及其计算规则

2.有限孤立奇点处的留数计算

对于一阶极点：

推论 5.2.1 若 z_0为 $f(z)$的一阶极点， 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z).$$

推论 5.2.2 若 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$， $Q(z_0) = 0,\ Q'(z_0) \neq 0,\ P(z_0) \neq 0,$

且 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 点解析，则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$

例： 写出下列函数在奇点处的留数

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$， (2) $f(z)=\dfrac{z-1}{\sin z}$

解 (1) $z=0,\ z=1$是 $f(z)$ 的一阶极点，

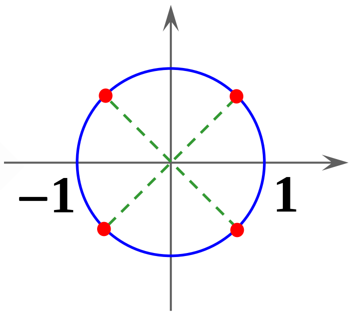
$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}[zf(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}[(z-1)f(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z}=1.$$

(2) $z_k=k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 是$f(z)$的一阶极点

$$\operatorname{Res}[f(z),z_k]=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=\frac{k\pi-1}{\cos(k\pi)}=(-1)^k(k\pi-1).$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ 在奇点处的留数。



解 函数 $f(z)$ 有四个一阶极点，

$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},\quad z_2=e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_3=e^{\frac{3\pi}{4}i},\quad z_4=e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_1}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

同理 $\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\left.\dfrac{1}{4z}\right|_{z=z_2}=\dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}i},$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_3]=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i},\quad \mathrm{Res}[f(z),z_4]=\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

5.2.1 留数的定义及其计算规则

2. 有限孤立奇点处的留数计算

定理 5.2.1 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，

则 $$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

理由 $$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}\cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \cdots,$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + (z-z_0)\varphi(z),$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

例 求下列函数在奇点处的留数。

(1) $f_1(z)=\dfrac{\cos z}{4z^3}$, (2) $f_2(z)=\dfrac{\sin z}{4z^3}$.

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的三阶极点,

$$\text{Res}[f_1(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot\frac{\cos z}{4z^3}\right)''=-\frac{\cos z}{8}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{8}.$$

(2) $z=0$ 为 $f_2(z)$ 的二阶极点,

$$\text{Res}[f_2(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{\sin z}{4z^3}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{4z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{4z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{8}=0.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法一 利用洛朗展式求留数

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域展开，得

$$f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\left[z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3!\,z^3}-\frac{1}{5!\,z}+\frac{1}{7!}z-\cdots,$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Res}[\,f(z),0\,]=-\frac{1}{5!}.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法二 利用极点的留数计算法则求解

由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 三阶极点，因此有

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}[z^3 f(z)]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{(z^2-12)\sin z+6z\cos z+6z}{z^5}$$

（洛必达法则）$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{z^2\cos z+4z\sin z-2\cos z}{5!}=-\frac{1}{5!}.$$

（好麻烦！）

例 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}$ 在奇点处的留数。

解 (1) $z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}=e.$

(2) $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，⇨ (证明是本性奇点?)

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot(1+z+z^2+\cdots)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right),$$

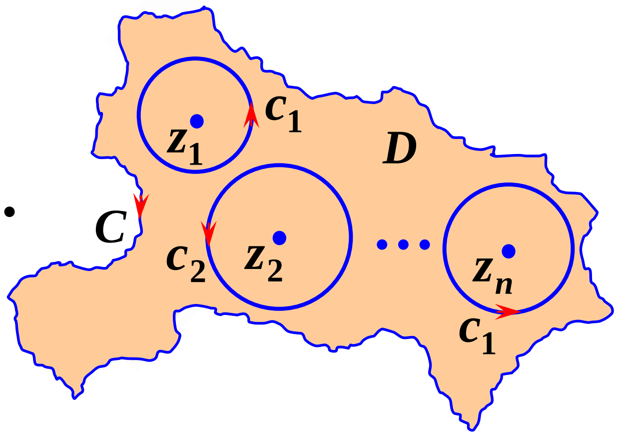
$$\Rightarrow\quad \operatorname{Res}[f(z),0]=-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=-e.$$

5.2.2 留数基本定理

定理 5.2.2 设 $f(z)$ 在区域 D 内以及边界 C 上除有限个孤立奇点

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$



证明 如图，将孤立奇点用含于 D 内且

互不重叠的圆圈包围起来，根据复合闭路定理有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{c_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

注意 只需计算积分曲线 C 所围成的有限区域内奇点的留数。

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个奇点:

可去奇点 $z=0$，一阶极点 $z=1$，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=0.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{\sin^2 z}{z^2}=\sin^2 1.$$

$$I=2\pi i\big(\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\big)=2\pi i\sin^2 1.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z}{\cos \pi z}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 被积函数 $f(z)$ 的奇点为 $z_k=k-\dfrac{1}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，

但在 $|z|<1$ 内只有两个一阶级点：$z_0=-\dfrac{1}{2}$，$z_1=\dfrac{1}{2}$，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{e^z}{-\pi\sin \pi z}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{-\pi\sin \pi z}\right|_{z=z_1}=-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}},$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}}\right)=-4i\,\mathrm{sh}\frac{1}{2}.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{z^{101}(1-z^2)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=0.5$.

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{z^{101}(1-z^2)}$， $z=0$ 为 $f(z)$ 的101阶极点。

将 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内展开为洛朗级数:

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \frac{1}{z^{101}}+\frac{1}{z^{99}}+\cdots+\frac{1}{z}+z+z^3+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}[f(z),0]=1,$$

$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法一 利用极点的留数计算法则求解

$z=0$ 为被积函数 $f(z)$ 的二阶极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to0}\left(z^2\cdot\frac{e^z-1}{z^3}\right)'=\lim_{z\to0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{e^z}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$I=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

方法二 利用高阶导数公式求解

$$I=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}(e^z-1)''|_{z=0}=\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \frac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法三 利用洛朗展式求解

将被积函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域展开，

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

例5.2.6 计算积分 $I=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^2(1-e^z)}dz$

解 由于$f(z)=\frac{\sin z}{z^2(1-e^z)}$有孤立奇点$z=0$.

根据留数定义，知$I=2\pi i Res[f(z),0]$, 做洛朗展开

$$1-e^z=-\left(z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\right),\qquad |z|<+\infty$$

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

故 $$\frac{\sin z}{z^2(1-e^z)}=\frac{z(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots)}{-z^3(1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots)}=\frac{1}{z^2}\varphi(z)$$

这里 $$\varphi(z)=-\frac{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots}{1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots}$$

在$z=0$点解析，且$\varphi(0)=-1\neq 0$.

根据定理5.1.1(判别法二）知$z=0$为$f(z)$的二阶极点。

$$Res[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}z^2 f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\varphi(z)= \qquad (*)$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{-(-\frac{2}{3!}z+\frac{4}{5!}z^3-\cdots)(1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots)}{(1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots)^2}$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots)(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}z+\cdots)}{(1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots)^2}=\frac{1}{2}$$

于是$I=2\pi i Res[f(z),0]=\pi i$

注： 导数法则求出二阶极点，直接代入留数公式（*）也可。

5.2.1 留数的定义及其计算规则

3. 无穷孤立奇点处的留数定义

定义 设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，

则 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数定义为：

$$\operatorname{Res}\ [f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz=-a_{-1}$$ 其中，C 为 $|z|=\rho>R.$

留数为包含奇点积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z$，在洛朗级数中留下来的数。

其中，C 为 $|z|=\rho>R$. 这里沿曲线负向 C^- 积分包含∞点。

将 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内做洛朗展开

$$f(z)=\cdots+a_N z^N+\cdots a_1 z+a_0+a_{-1}z^{-1}+\cdots,$$

这时 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z\ \boxed{=-a_{-1}},$

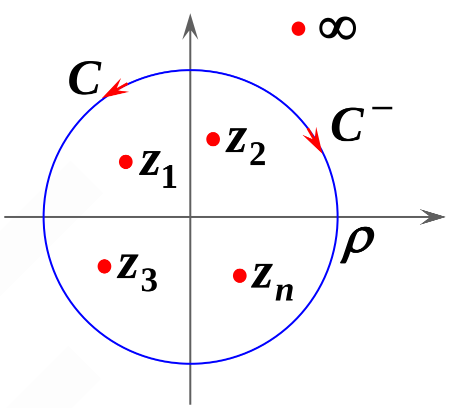
5.2.2 留数基本定理

定理 5.2.3 设 $f(z)$ 在扩充平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外处处解析，则 $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0.$

证明 如图，令 ρ 充分大，即 $\rho > \max_k |z_k|$，则

$$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z$$

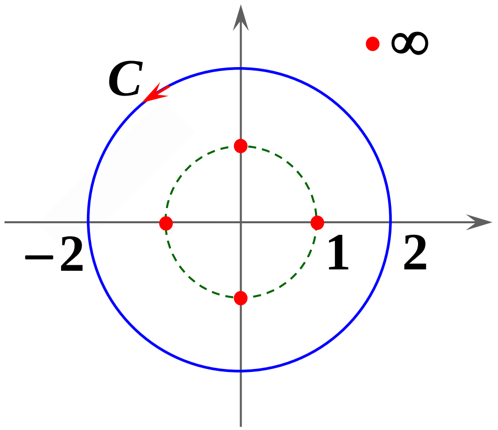
$$= -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k],$$ 即证。



- 如何计算在无穷远点的留数?

定理 5.2.4 $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2}, 0].$

例 计算 $I=\oint_C \frac{z^3}{z^4-1}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.



解 函数 $f(z)=\frac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|=2$ 内

有四个一阶极点 $z_k=e^{\frac{2k\pi}{4}i}$，$k=0,1,2,3$,

由留数定理有

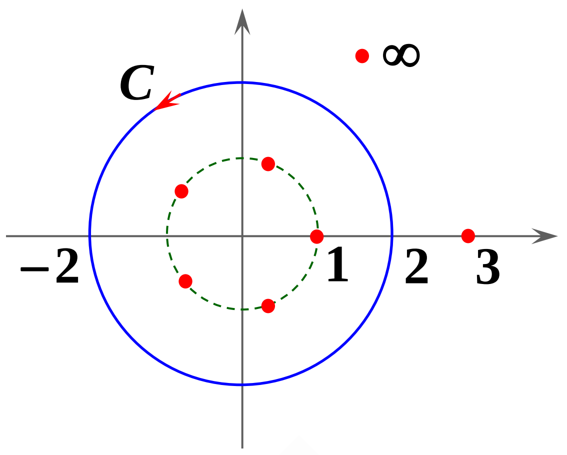
$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{z(1-z^4)},0]=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \frac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 (1) 函数 $f(z)=\frac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}$ 在 $|z|=2$ 内有五个三阶极点

$$z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}i},\quad k=0,1,2,3,4,$$



由留数定理有

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{4}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\right).$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 (2) $\operatorname{Res}[f(z),3]=\lim\limits_{z\to 3}(z-3)f(z)=\dfrac{1}{(3^5-1)^3}$,

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-2\pi i\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z^{14}}{(1-z^5)^3(1-3z)},0\right]=0.$$

$$I=-2\pi i\left(\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]\right)$$

$$=-\frac{2\pi i}{(3^5-1)^3}$$

例5.2.7 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}e^{imz}, m\neq 0$是实常数，求奇点处的留数。

解: $f(z)$有奇点$z=\pm i, z=\infty$. $z=\pm i$为一阶极点。

$$\text{Res}\ [f(z),i]=\lim_{z\to i}\ (z-i)f(z)$$

$$=\lim_{z\to i}\ \frac{1}{z+i}e^{imz}=\frac{-ie^{-m}}{2}$$

$$\text{Res}\ [f(z),-i]=\lim_{z\to -i}\ (z+i)f(z)$$

$$=\lim_{z\to -i}\ \frac{1}{z-i}e^{imz}=\frac{ie^{m}}{2}$$

由推广的留数基本定理:

$$\text{Res}\ [f(z),\infty]=-\text{Res}\ [f(z),-i]-\text{Res}\ [f(z),i]=\frac{i(e^{-m}-e^{m})}{2}$$

例 计算积分

$$\oint_{|z|=3}(1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$$

解 我们有

$$\oint_{|z|=3}(1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$$
$$=\oint_{|z|=3}(f(z)+g(z)+h(z))dz$$

其中

$$f(z)=(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z}}$$
$$g(z)=(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-1}}$$
$$h(z)=(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-2}}$$

由留数基本定理我们有

$$\oint_{|z|=3} f(z)dz = 2\pi i Res[f(z),0],$$

$$\oint_{|z|=3} g(z)dz = 2\pi i Res[g(z),1],$$

$$\oint_{|z|=3} h(z)dz = 2\pi i Res[h(z),2].$$

(1) 函数$f(z)$在孤立奇点$z=0$处的洛朗展开为

$$f(z) = (1+z+z^2)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots\right),$$

我们计算展开中$\frac{1}{z}$项系数为

$$\frac{1}{z}+z\cdot\frac{1}{2z^2}+z^2\cdot\frac{1}{6z^3}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{z},$$

$$Res[f(z),0]=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$$

(2) 函数$g(z)$在孤立奇点$z=1$处的洛朗展开为

$$g(z)=\left(3+3(z-1)+(z-1)^2\right)\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2(z-1)^2}+\frac{1}{6(z-1)^3}+\cdots\right),$$

我们计算展开中$\frac{1}{z-1}$项系数为

$$3\cdot\frac{1}{z-1}+3(z-1)\cdot\frac{1}{2(z-1)^2}+(z-1)^2\cdot\frac{1}{6(z-1)^3},$$

$$Res[g(z),1]=3+\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=\frac{14}{3}$$

(3) 函数$h(z)$在孤立奇点$z=2$处的洛朗展开为

$$h(z)=\left(7+5(z-2)+(z-2)^2\right)\left(1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2(z-2)^2}+\frac{1}{6(z-2)^3}+\cdots\right),$$

$$Res[h(z),2]=7+\frac{5}{2}+\frac{1}{6}=\frac{29}{3}$$

因此

$$\oint_{|z|=3}\left(f(z)+g(z)+h(z)\right)dz=2\pi i\left(\frac{5}{3}+\frac{14}{3}+\frac{29}{3}\right)=32\pi i$$

附：关于 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点

- 只需考察 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}$ 即 $\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi e^{\xi}$ 不存在且不等于 ∞.

令 $\xi=x+iy$，则

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y=0}}\xi e^{\xi}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{x}=+\infty$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y=0}}\xi e^{\xi}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}(-t)e^{-t}$

$$=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t}}=0.$$

故 $\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi e^{\xi}$ 不存在且不等于 ∞.

(返回)

第五章 留数

5.3.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

要求 $R(u,v)$ 是 u,v 的有理函数，即 $R(u,v)$ 是以 u,v 为变量的二元多项式或者分式函数，且 $R(u,v)$ 在 $u^2+v^2=1$ 上无奇点。

方法 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,

则 $\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=iz\,\mathrm{d}\theta$, $\Rightarrow$ $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz},$$

5.3.1 形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

方法

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta} = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z \qquad f(z)$$

$$\boxed{= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k].}$$

其中， z_k 是 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的孤立奇点。

这里$f(z)$是z的有理函数，且在积分路径上分母不为0.

即奇点不在$|z| = 1$上。

例 计算 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$ 的值。

解 由 $1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$ 及 $0<p<1$,

可知被积函数的分母不为零，因而积分是有意义的。

令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, $\cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$,

$$\cos 2\theta=\frac{\mathrm{e}^{i2\theta}+\mathrm{e}^{-i2\theta}}{2}=\frac{z^2+z^{-2}}{2},$$

因此 $I=\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z.$$

在 $|z|<1$ 内，函数 $f(z)$ 有两个孤立奇点：

二阶极点 $z_1=0$，一阶极点 $z_2=p$.

（注意：一阶极点 $z_3=1/p$ 不在 $|z|<1$ 内）

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]=-\frac{1+p^2}{2ip^2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),p]=\lim_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)},$$

$$I=2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),p]+\mathrm{Res}[f(z),p]\right)=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}.$$

例 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解 由于 $\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ 为偶函数，记 $I_1=2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$

令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$，$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，

$$I_1=\oint_{|z|=1}\frac{z+z^{-1}}{2}\cdot\frac{1}{5+4\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\boxed{\frac{1+z^2}{4iz(z+1/2)(z+2)}}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

例 计算 $I=\int_0^{\pi}\dfrac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解 在 $|z|<1$ 内，$f(z)$ 有两个一阶极点：$z_1=0$，$z_2=-\dfrac{1}{2}$.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z f(z)=\left.\frac{1+z^2}{4i(z+1/2)(z+2)}\right|_{z=0}=\frac{1}{4i};$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z),-\frac{1}{2}\right]=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)f(z)=\left.\frac{1+z^2}{4iz(z+2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{5}{12i}.$$

$$I=\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\frac{1}{4i}-\frac{5}{12i}\right]=-\frac{\pi}{6}.\quad \text{(实数)}$$

5.3.2 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高二次；

(3) $R(x)$ 无实奇点（分母 $Q(x)$ 无实零点）。

方法 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}[R(z), z_k].$

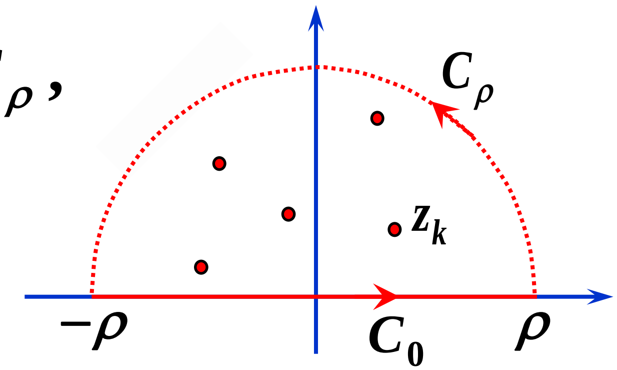
其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 型积分的公式推导

推导（思路）

(1) 如图，取积分路径为 $C = C_0 + C_\rho$，

其中 C_ρ 的半径为 $\rho > \max\limits_k |z_k|$.



(2) 根据留数定理有

$$\oint_C R(z)\mathrm{d}z = \int_{C_0} R(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\rho} R(z)\,dz$$

$$= \int_{-\rho}^{\rho} R(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_{C_\rho} R(z)\,dz}$$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

则要证明 $\rho \to \infty, \int_{C_\rho} R(z)\,dz \to 0$

关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 型积分的公式推导

推导 (3) $|R(z)| \overset{\text{不妨设}}{=\!=} \dfrac{|z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n|}{|z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \cdots + b_m|}$

(思路)

$$= \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$\leq \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}||}$$

$$< \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{1+0.5}{1-0.5} = \frac{3}{|z|^2}.$$ （当 $|z|$ 足够大）

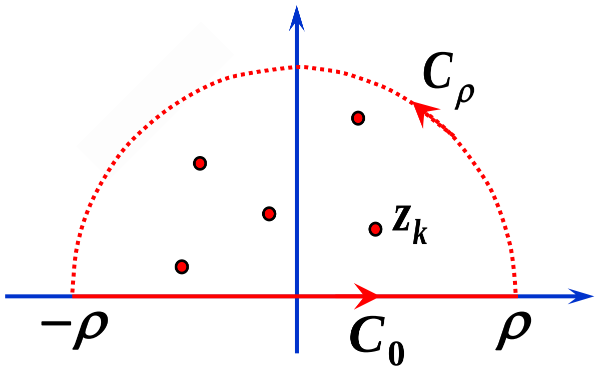
关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分的公式推导

推导 (4) $\left|\int_{C_\rho} R(z)\,dz\right| \le \int_{C_\rho} |R(z)||dz|$

(思路)

$$\le \int_{C_\rho} \frac{3}{|z|^2} \cdot |\mathrm{d}s|$$

$$\le \frac{3}{\rho^2} \cdot \pi\rho = \frac{3\pi}{\rho} \to 0,\ (\rho \to +\infty).$$



(5) 由 $\int_{-\rho}^{\rho} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_\rho} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k]$,

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

例 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x.$

解 (1) 令 $R(z)=\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}=\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}$

在上半平面内，i 与 $3i$ 为 $R(z)$ 一阶极点 。

(2) $\mathrm{Res}[R(z),i]=\left.\frac{z^2-z+2}{(z+i)(z^2+9)}\right|_{z=i}=-\frac{1+i}{16}$,

$\mathrm{Res}[R(z),3i]=\left.\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z+3i)}\right|_{z=3i}=\frac{3-7i}{48}.$

(3) $I=2\pi i\left(-\frac{1+i}{16}+\frac{3-7i}{48}\right)=\frac{5\pi}{12}.$

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

解 (1) 记 $I_1=2I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$，令 $R(z)=\frac{z^2}{z^4+1}$,

在上半平面内，$z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}$，$z_2=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}$ 为两个一阶极点。

$$\text{(2) } \mathrm{Res}[R(z),z_1]=\left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_1}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\mathrm{Res}[R(z),z_2]=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_2}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}.$$

$$\text{(3) } I_1=2\pi i\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,\quad\Rightarrow\quad I=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

5.3.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx\ (a>0)$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高一次；

(3) $R(x)$ 无实奇点（分母 $Q(x)$ 无实零点）。

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k] \overset{\text{记为}}{=\!=} A+iB.$

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

特别 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,dx = A$； $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,dx = B.$

例 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x.$

解 (1) 令 $f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z^2-2z+10}=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{(z-1-3i)(z-1+3i)},$

在上半平面内，$1+3i$ 为一阶极点。

$$\mathrm{Res}[f(z),1+3i]=\left.\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{2z-2}\right|_{z=1+3i}=\frac{1+3i}{6i}\mathrm{e}^{-3+i}.$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\frac{1+3i}{6i}\mathrm{e}^{-3+i}$

$$=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(1+3i)(\cos 1+i\sin 1).$$

例 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(1+3i)(\cos 1+i\sin 1).$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(\cos 1-3\sin 1);$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(3\cos 1+\sin 1).$

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2+1}\mathrm{d}x,\quad (a>0,\ b>0).$

解 (1) 令 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{iaz}}{z^2+1}$，在上半平面内，$i$ 为一阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\left.\frac{\mathrm{e}^{iaz}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2i}.$$

(2) $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{iax}}{x^2+1}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2i}=\pi\mathrm{e}^{-a},}$ ➡ 拉普拉斯积分

$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi\mathrm{e}^{-a}}{2}$； 同理 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi\mathrm{e}^{-b}}{2}$.

(3) $I=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-b}).$

关于第二、三型积分中 $R(z)$ 有实孤立奇点的情况

结论 若 $R(z)$ 在上半平面有孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots z_m$，在实轴上有孤立奇点 $x_1, x_2, \cdots x_n$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z), z_k] + \boxed{\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z), x_k].}$$

其中，$f(x)$ 为第二、三型积分中的被积函数。

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$ (狄利克雷积分)

解 (1) 令 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$, 在实轴上, $z=0$ 为一阶极点,

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\mathrm{e}^{iz}\Big|_{z=0}=1.$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x=\pi i\cdot\mathrm{Res}[f(z),0]=\pi i,$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{2}.$$