复变函数

与积分变换

主讲人：张茜

理学院 数学学科

邮 箱：zhang.qian@hit.edu.cn

二、教学内容

复变函数与积分变换课程是工科各专业必修的重要基础理论课，是工程数学的主要课程之一。复变函数与积分变换在科学研究、工程技术等各行各业中有着广泛的应用。

本课程由复变函数与积分变换两个部分组成。

复变函数的内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数及其应用、以及解析函数在平面场的应用。

积分变换的内容包括：傅里叶变换和拉普拉斯变换。

其中，带“*”号的内容本课堂不需要掌握。

第一章 复数与复变函数

复数的产生最早可以追溯到十六世纪中期。但直到十八世纪末期，经过了卡尔丹、笛卡尔、欧拉以及高斯等许多人的长期努力，复数的地位才被确立下来。

复变函数理论产生于十八世纪，在十九世纪得到了全面发展。为复变函数理论的创建做了早期工作的是欧拉、达朗贝尔、拉普拉斯等。为这门学科的发展作了大量奠基工作的则是柯西、黎曼和维尔斯特拉斯等。

复变函数理论中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域的推广和发展 。

第一章 复数与复变函数

§ 1.1 复数运算及几何表示

§ 1.2 复平面上的点集

§ 1.3 复变函数

1.1.1 复数概念及其四则运算

1. 复数的基本概念

定义 (1) 设 x 和 y 是任意两个实数，将形如

$$z = x + iy \text{（或者 } z = x + yi \text{）}$$

的数称为复数。其中 i 称为虚数单位，即 $i^2 = -1$

(2) x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，并分别表示为：

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(3) 当 $x = 0$ 时，$z = 0 + iy = iy$ 称为纯虚数；

当 $y = 0$ 时，$z = x + i0 = x$ 就是实数。

因此，实数可以看作是复数的特殊情形。

1.1.1 复数概念及其四则运算

1. 复数的基本概念

相等 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数

如果 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，则称 z_1 与 z_2 相等。

特别地，$z = x + iy = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$.

1.1.1 复数概念及其四则运算

2. 复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

(1) 复数的加减法

加法 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$;

减法 $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

(2) 复数的乘除法

乘法 $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

除法 如果存在复数 z，使得 $z_1 = z_2 \cdot z$，则 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

例 1.1.1 化简 $i^3, \frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.

例 1.1.3 已知 $x+yi=(2x-1)+y^2i$，求$z=x+iy$.

1.1.1 复数概念及其四则运算

2. 复数的四则运算

(3) 运算法则

交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

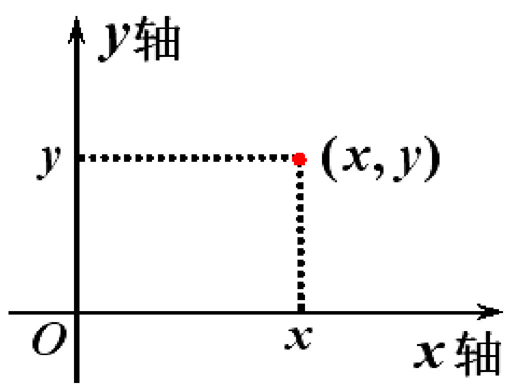
分配律 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

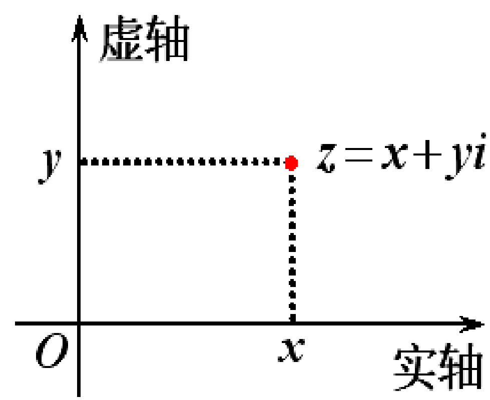
1.1.2 复数的几何表示

1. 复平面

定义 在平面上建立一个直角坐标系，用坐标为 (x, y) 的点来表示复数 $z = x + iy$，从而将全体复数和平面上的全部点一一对应起来，此时，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。

这样表示复数 z 的平面称为复平面或者 z 平面。



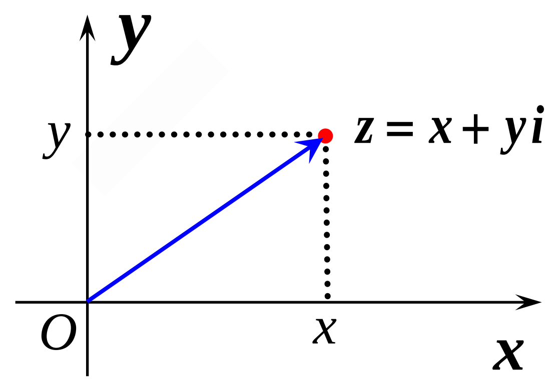


注 复数与实数不同，两个复数(虚部不为零)不能比较大小，它们之间只有相等与不相等的关系。

1.1.2 复数的几何表示

1. 复平面

- 在复平面上，从原点到点 $z = x + iy$ 所引的向量与该复数 z 也构成一一对应关系（复数零对应零向量）。



- 引进复平面后，复数 z 与点 z 以及向量 z 视为同一个概念。

因此，我们可以通过分析向量来给出复数的一些性质。

定义 设 z 的是一个不为 0 的复数，

(1) 向量 z 的长度 r 称为复数 z 的模，记为 $|z|$.

(2) 向量 z 的“方向角”θ 称为复数 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}\, z$.

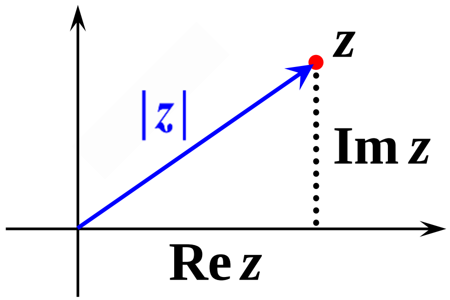
(?)

（向量与x轴正向的夹角）

1.1.2 复数的几何表示

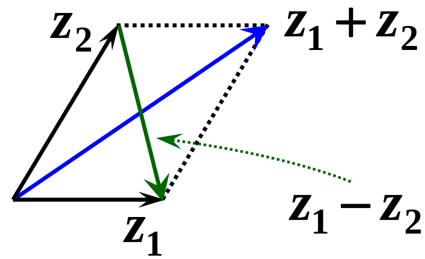
2. 复数的模与辐角

(1) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \le |z|$.



(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

(3) $|z_1 + z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$



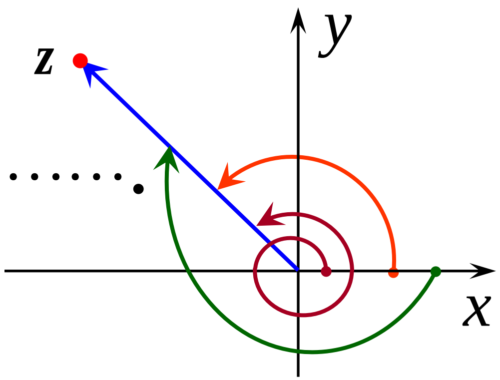
1.1.2 复数的几何表示

2. 复数的模与辐角

注：辐角是多值的，相互之间可相差 $2k\pi$, 其中 k 为整数。

例　对于复数 $z=-1+i$, 则有 $|z|=\sqrt{2}$,

$$\operatorname{Arg} z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots.$$



注 复数 0 的模为 0，辐角无意义。

1.1.2 复数的几何表示

2. 复数的模与辐角

定义　对于给定的复数 $z \neq 0$，设有 α 满足：

$$\alpha \in \mathrm{Arg}\, z \text{ 且 } -\pi < \alpha \leq \pi,$$

则称 α 为复数 z 的主辐角，记作 $\arg z$.

- 由此就有如下关系：

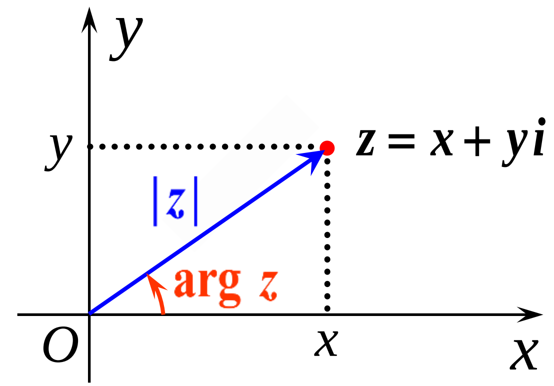
$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots.$$

1.1.2 复数的几何表示

3. 相互转换关系

(1) 已知实部与虚部，求模与辐角。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$



$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x>0,\ y\text{任意}, \\ \arctan(y/x)+\pi, & x<0,\ y\ge 0, \\ \arctan(y/x)-\pi, & x<0,\ y<0, \\ \pi/2, & x=0,\ y>0, \\ -\pi/2, & x=0,\ y<0. \end{cases}$$

例 1.1.4 求下列各复数的模及辐角.

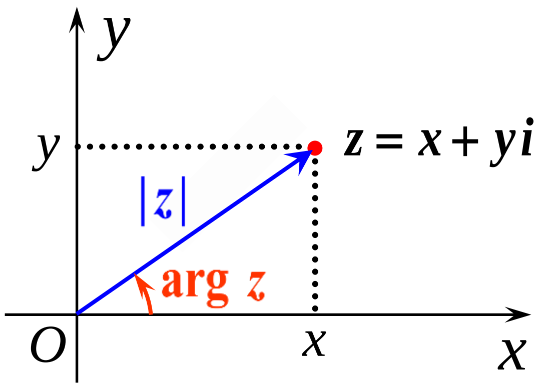
(1) -2，(2) $-i$，(3) $1+i$.

1.1.2 复数的几何表示

3. 相互转换关系

(1) 已知实部与虚部，求模与辐角。

(2) 已知模与辐角，求实部与虚部。



$$x = |z|\cos(\arg z) = |z|\cos(\operatorname{Arg} z);$$

$$y = |z|\sin(\arg z) = |z|\sin(\operatorname{Arg} z).$$

- 由此引出复数的三角表示式。

定义 设复数 $z \neq 0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，称 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 为复数 z 的三角表示式。

1.1.2 复数的几何表示

4. 复数的指数表示

- 利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 得

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}.$$

定义 设复数 $z\neq 0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，

称 $z=re^{i\theta}$ 为复数 z 的指数表示式。

注 在复数的三角表示式与指数表示式中，辐角不是唯一的，

但习惯上一般取为主辐角。

思考：两复数相等，它们的辐角和模长之间的关系？

反之？

例 1.1.5 将复数 $z=-1-\sqrt{3}i$ 分别化成三角表示式和指数表示式.

1.1.3 共轭复数

1. 共轭复数的定义

定义 设 $z=x+iy$ 是一个复数，

称 $z=x-iy$ 为 z 的共轭复数，记作 $\overline{z}$。

性质 (1) $\overline{\overline{z}}=z$;

(2) $\overline{z_1\circ z_2}=\overline{z_1}\circ\overline{z_2}$，其中，"$\circ$" 可以是 $+,-,\times,\div$;

(3) $z\cdot\overline{z}=[\mathrm{Re}\,z]^2+[\mathrm{Im}\,z]^2=x^2+y^2$;

(4) $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\mathrm{Re}\,z=x$,

$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\mathrm{Im}\,z=y$.

共轭复数的应用： 除法计算中的分母实数化

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

例 已知 $z_1=5-5i$，$z_2=-3+4i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$，$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

解 (1) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{5-5i}{-3+4i}=\dfrac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$

$$=\frac{-35-5i}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i.$$

(2) $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}i.$

例 1.1.8 证明等式$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

1.1.4 乘除、乘方与开方

1. 乘除 注： 利用指数表示进行复数的乘除法运算

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$， $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，

乘法 $$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

除法 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

- 两个复数相乘，模相乘，辐角相加
- 两个复数相除，模相除，辐角相减

例 1.1.10 化简 $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}$.

1.1.4 乘除、乘方与开方

2. 复数的乘方

注：乘方运算是单值的。

定义 设 z 是给定的复数，n 为正整数，n 个 z 相乘的积称为复数 z 的乘幂，记为 z^n，即 $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n\text{个}}$.

- 利用复数的指数表示式可以很快得到乘幂法则。

法则 设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $z^n = (r\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{in\theta}$.

由 复数的三角表示式可得

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

在上式中令 $r = 1$，则得到棣莫弗(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

例 1.1.12 设n为正整数，试证明

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1}=-1.$$

1.1.4 乘除、乘方与开方

3. 复数的方根

- 复数求方根是复数乘幂的逆运算。

定义 设 z 是给定的复数，n 是正整数，求所有满足 $w^n = z$ 的复数 w ，称为把复数 z 开 n 次方，或者称为求复数 z 的 n 次方根，记作 $w = \sqrt[n]{z}$ 或 $w = z^{1/n}$.

1.1.4 乘除、乘方与开方

3. 复数的方根 注：方根运算是多值的。

- 利用复数的指数表示式可以很快得到开方法则。

推导 设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$，$w = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$， 由 $w^n = z$ 有 $\rho^n \mathrm{e}^{in\varphi} = r\mathrm{e}^{i\theta}$，

即 $\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，

得 $\rho^n = r$， $\Rightarrow$ $\rho = \sqrt[n]{r}$； —— 正实数的算术根。

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad (k = 0,1,\cdots,n-1).$$

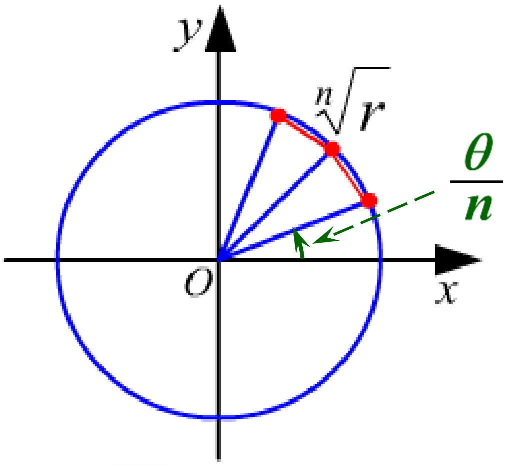
法则 设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$， 则 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$， $(k = 0,1,\cdots,n-1)$.

1.1.4 乘除、乘方与开方

3. 复数的方根

$$w_{\boxed{k}} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

描述 在复平面上，这 n 个根均匀地分布在一个以原点为中心、以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上。其中一个根的辐角是 (θ/n).



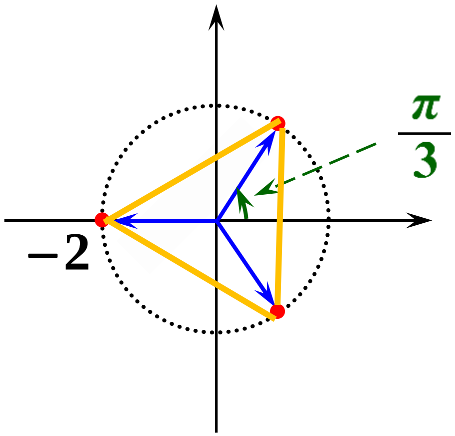
方法

- 直接利用公式求根；
- 先找到一个特定的根，再确定出其余的根。

例 求 $\sqrt[3]{-8}$.

解 $\sqrt[3]{-8}=2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$, $(k=0,1,2)$.

具体为: -2, $2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.



例1.1.13 求解方程 $z^4=1+i$.

1.1.5 复球面与无穷大

1. 无穷大的概念

定义 一个特殊的复数∞，称为无穷大，满足 $\infty=\dfrac{1}{0}$.

法则 (1) $z\pm\infty=\infty\pm z=\infty$, $(z\neq\infty)$;

(2) $z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty$, $(z\neq 0)$;

(3) $\dfrac{z}{\infty}=0$, $\dfrac{\infty}{z}=\infty$, $(z\neq\infty)$.

问题

- 实部虚部是多少? $\mathrm{Re}\,\infty$, $\mathrm{Im}\,\infty$ 无意义。
- 模与辐角是多少? $|\infty|=+\infty$, $\mathrm{Arg}\,\infty$ 无意义。
- 在复平面上对应到哪一点?

1.1.5 复球面与无穷大

2. 无穷远点的概念

- 事实上，在通常的复平面上并不存在这样的点，因此只能说它是一个“理想”点。

定义 在“复平面”上一个与复数∞对应的“理想”点，

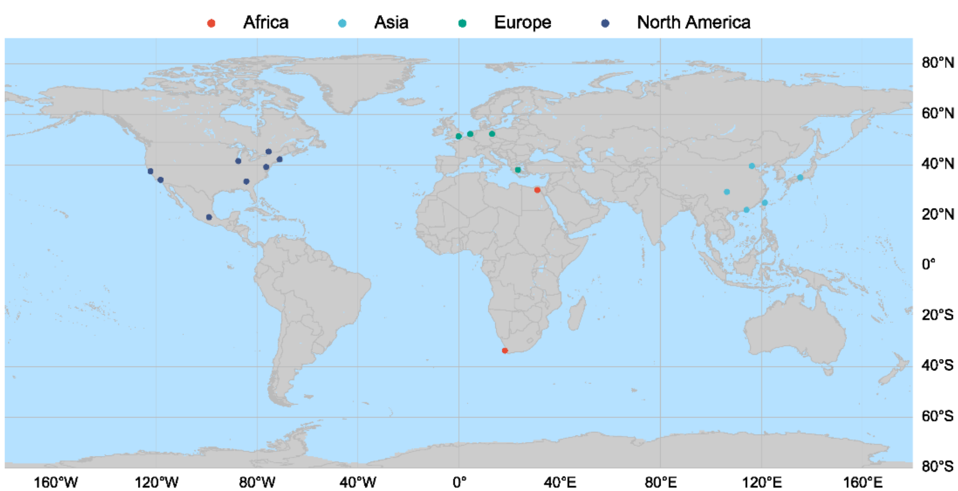
（？） 称为无穷远点。

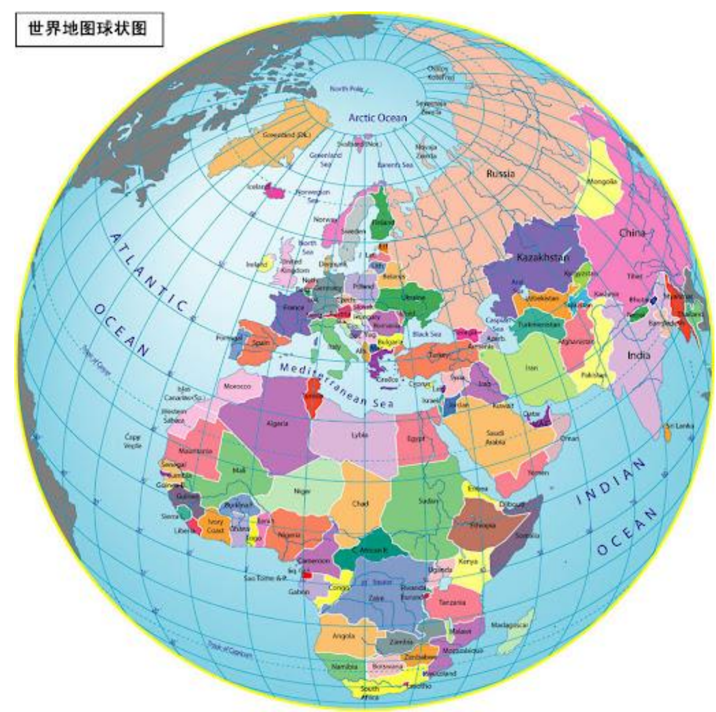
- 那么，这个“理想”点到底在哪里呢？

下面就来看看黎曼(Riemnann)给出的解释。

1.1.5 复球面与无穷大

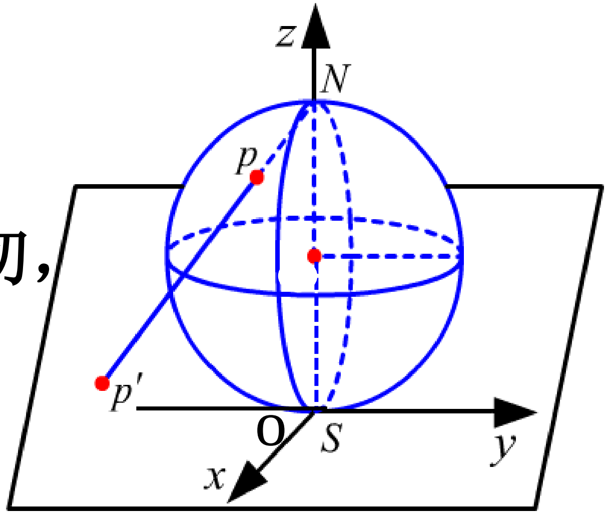
3. 复球面





1.1.5 复球面与无穷大

3. 复球面



- 如图，某球面与复平面在原点相切，其中，N 为北极，S 为南极。
- 对复平面上的任一点 p'，用直线将 p' 点与 N 点相连，与球面相交于 p 点。
- 球面上除 N 点外的所有点和复平面上的所有点一一对应，这样的球面称作复球面。
- 球面上的 N 点本身则对应到了"复平面"上的无穷远点。

注 显然，复数 ∞ 不能写成 $+\infty$ 或者 $-\infty$。

1.1.5 复球面与无穷大

4. 扩充复平面

定义 (1) 包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面;

(2) 不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面,

或者简称为复平面。

复变函数

与积分变换

主讲人：张茜

理学院 数学学科

邮 箱：zhang.qian@hit.edu.cn

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数运算及几何表示

§1.2 复平面上的点集

§1.3 复变函数

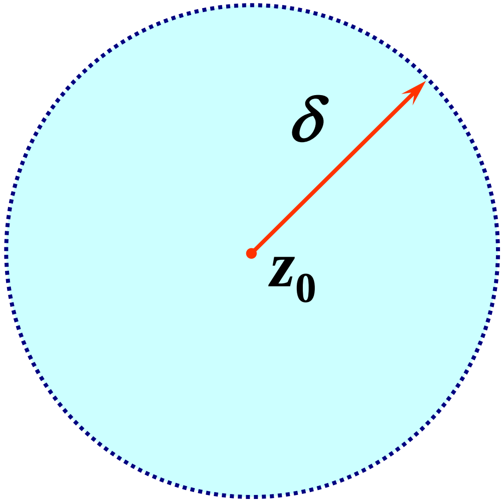
1.2.1 基本概念

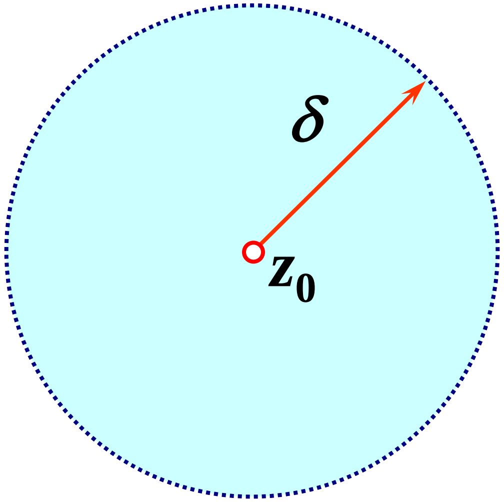
1. 邻域

定义 设 z_0 为复平面上的一点，$\delta > 0$，

(1) 称点集 $\{z : |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 点的 δ 邻域；

(2) 称点集 $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 点的 δ 去心邻域。



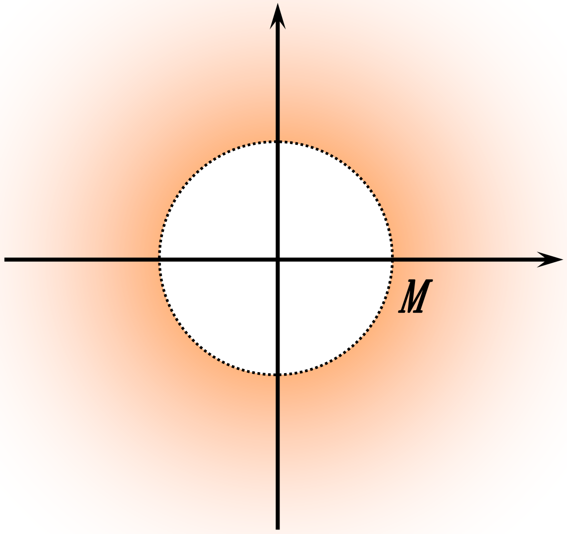


1.2.1 基本概念

1. 邻域(无穷远点)

定义 设实数 $M>0$,

(1) 包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的邻域。



(2) 不包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的去心邻域，也可记为 $M<|z|<+\infty$.

1.2.1 基本概念

2. 内点、外点与边界点

考虑某平面点集 G 以及某一点 z_0，

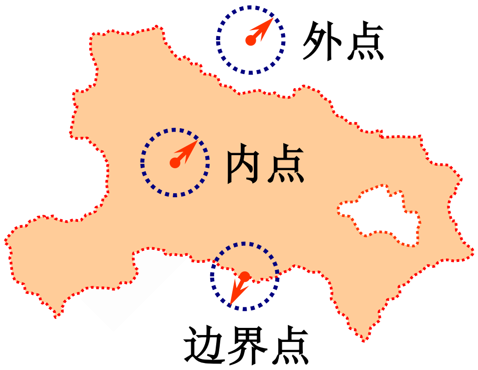
内点 (1) $z_0 \in G$; (2) $\exists \delta > 0$, $\forall z: |z - z_0| < \delta$, 有 $z \in G$.

外点 (1) $z_0 \notin G$; (2) $\exists \delta > 0$, $\forall z: |z - z_0| < \delta$, 有 $z \notin G$.

边界点 (1) z_0 不一定属于 G；

(2) $\forall \delta > 0$，在 $|z - z_0| < \delta$ 中，

既有 $z \in G$，又有 $z \notin G$.



边界 G 的边界点的全体称为 G 的边界。

1.2.1 基本概念

3. 开集与闭集

开集 如果 G 的每个点都是它的内点，则称 G 为开集。

闭集 如果 G 的边界点全部都属于 G，则称 G 为闭集。

4. 有界集与无界集

定义 若存在 $\delta>0$，使得点集 G 包含在原点的 δ 邻域内，则 G 称为有界集，否则称为非有界集或无界集。

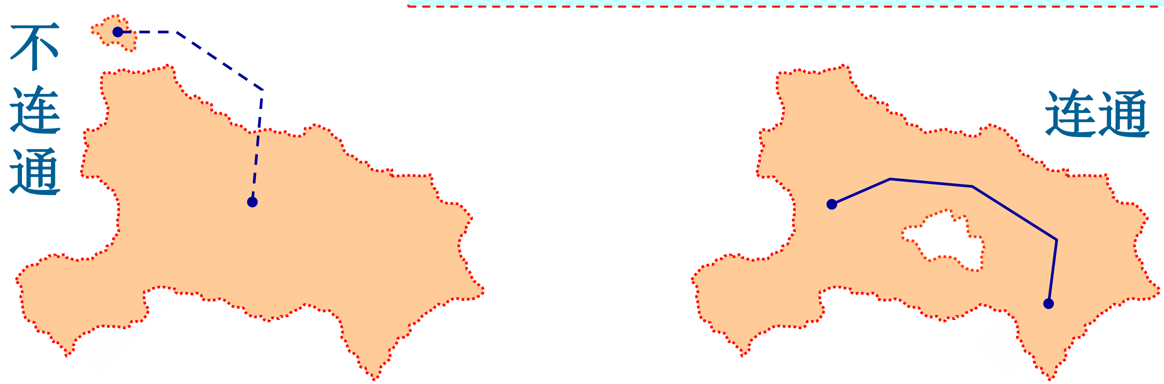
1.2.2 区域与曲线

1. 区域与闭区域

区域　平面点集 D 称为一个区域，如果它满足下列两个条件:

(1) D 是一个开集;

(2) D是连通的，即 D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来。



闭区域　区域 D 与它的边界一起构成闭区域或闭域, 记作 $\overline{D}$。

注:　闭区域 不是! 区域

1.2.2 区域与曲线

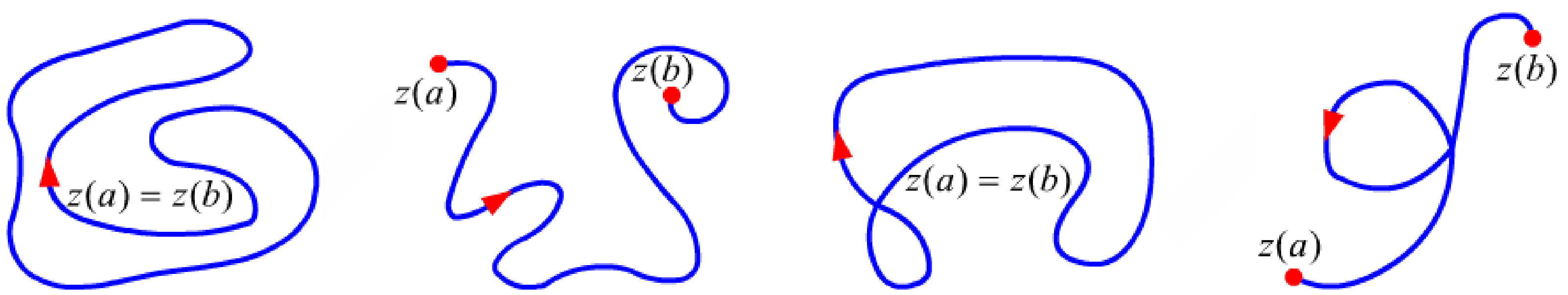
2. 曲线的分类

考虑曲线 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$.

简单曲线 $\forall t_1\in(\alpha,\beta)$, $t_2\in[\alpha,\beta]$, 当 $t_1\ne t_2$ 时，$z(t_1)\ne z(t_2)$.

简单闭曲线 简单曲线且 $z(\alpha)=z(\beta)$.

光滑曲线 在区间$[\alpha,\beta]$上，$x'(t)$和$y'(t)$连续且$z'(t)\ne 0$.



简单、闭　　简单、不闭　　不简单、闭　　不简单、不闭

1.2.2 区域与曲线

3. 有界区域与无界区域（顾名思义）

4. 内区域与外区域

定义 一条简单闭曲线把整个复平面分成两个区域，其中有界的一个称为该简单闭曲线的内部(内区域)，另一个称为该简单闭曲线的外部(外区域)。

5. 单连通域与多连通域

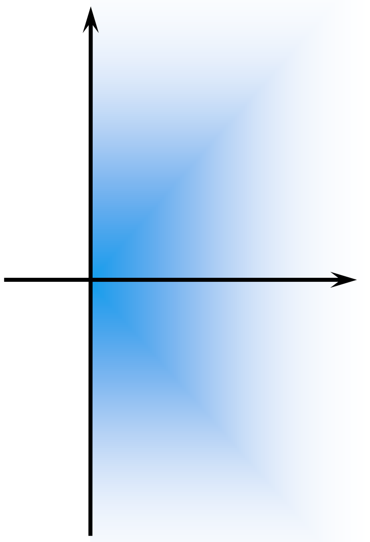
定义 设 D 为区域，如果 D 内的任何一条简单闭曲线的内部仍属于 D，则 D 称为单连通域，否则称为多连通域。

- 多连通域又可具体分为二连域、三连域、……。

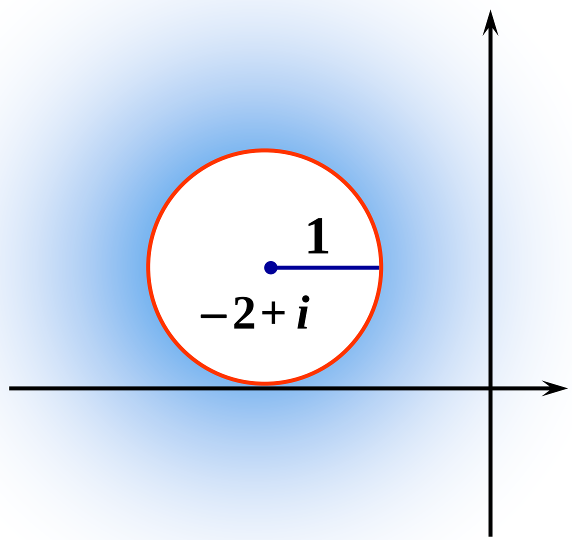
例 (1) $z+\bar{z}>0, \quad \Rightarrow \quad x>0;$

(2) $|z+2-i|\ge 1, \quad \Rightarrow \quad |z-(-2+i)|\ge 1;$

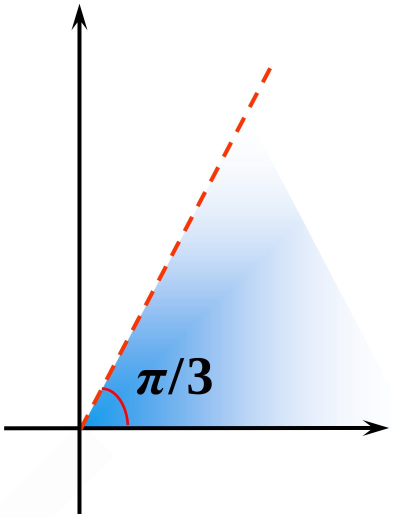
(3) $0<\arg z<\pi/3.$



区域



闭区域



(角形)区域

例 1.2.5 指出满足下列不等式的点z在怎样的点集内变动？这些点集是不是单连通区域？是否有界？

（1）$Rez > \frac{1}{2}$

（2）$|z+i| \leq |2+i|$

（3）$|z| < 1, Rez \leq \frac{1}{2}$

例 (1) $|z-i|=2$, $\Rightarrow$ $x^2+(y-1)^2=4$.

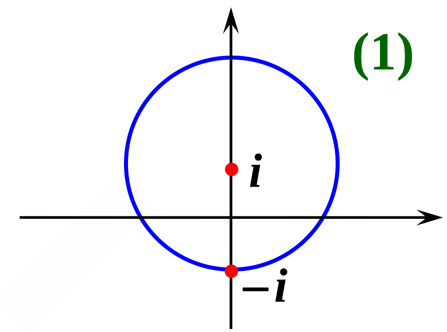
(2) $|z+i|=|z-i|$, $\Rightarrow$ $y=0$.

(3) $|z-2i|=|z+2|$, $\Rightarrow$ $y=-x$.

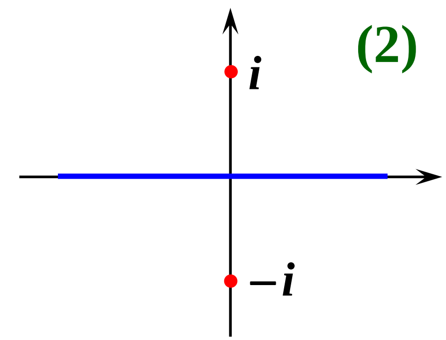
(4) $z=t+ti$ $\Rightarrow$ $y=x$.

(5) $z=t+\dfrac{1}{t}i,\ t>0$ $\Rightarrow$ $xy=1$.

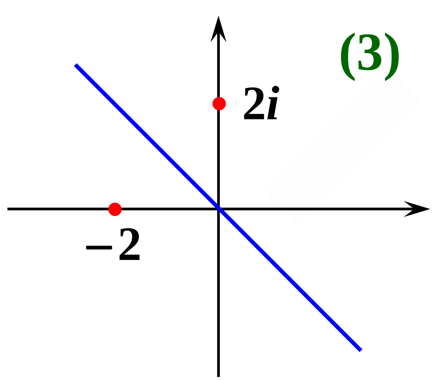
(1)



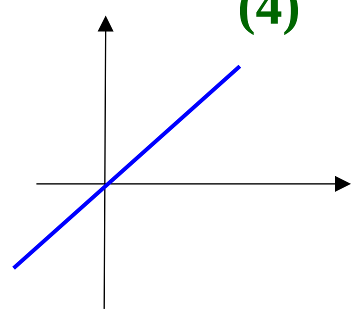
(2)



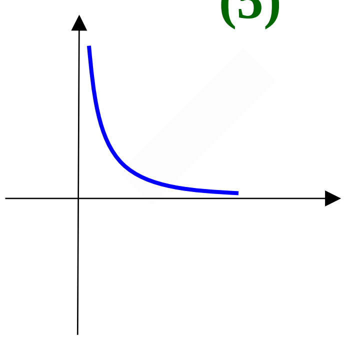
(3)



(4)



(5)



1.2.2 区域与曲线

6. 参数式

- 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$

- 在复平面上 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \ (\alpha \le t \le \beta).$

例如 考察以原点为圆心、以 R 为半径的圆周的方程。

(1) 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(\theta) = R\cos\theta, \\ y = y(\theta) = R\sin\theta, \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$

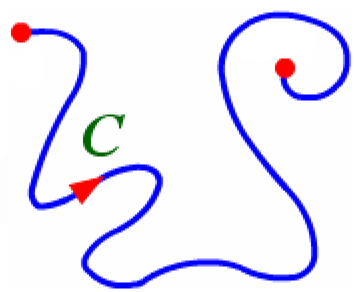
(2) 在复平面上 $z = z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta) = R(\cos\theta + i\sin\theta),$

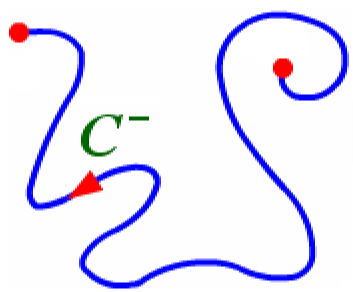
$$\Rightarrow \quad z = Re^{i\theta}, \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$$

1.2.2 区域与曲线

7. 有向曲线

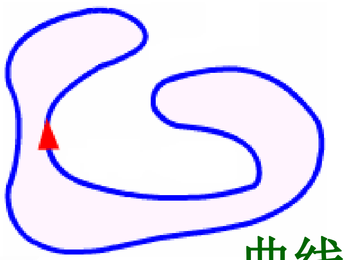
定义 设 C 为平面上一条给定的光滑(或分段光滑)曲线，如果指定 C 的两个可能方向中的一个作为正向，则 C 为带有方向的曲线，称为有向曲线，仍记为 C。相应地，C^{-} 则代表与 C 的方向相反(即 C 的负方向)的曲线。





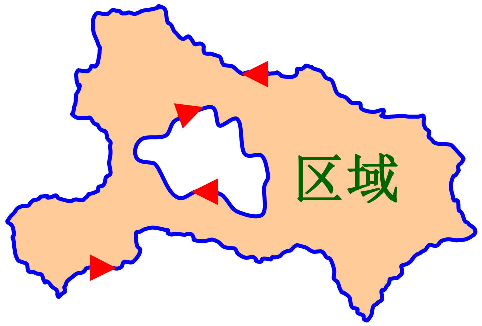
1.2.2 区域与曲线

7. 有向曲线



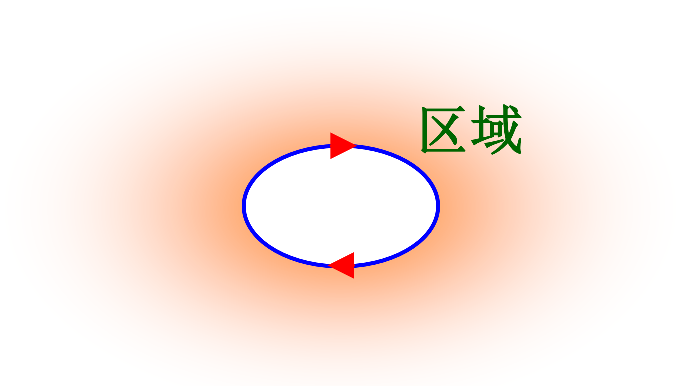
- 简单闭曲线的正向一般约定为:

当曲线上的点 *P* 顺此方向沿曲线前进时，曲线所围成的有界区域始终位于 *P* 点的左边。



- 区域边界曲线的正向一般约定为:

当边界上的点 *P* 顺此方向沿边界前进时，所考察的区域始终位于 *P* 点的左边。



注意区域可以是多连通域。

第一章 复数与复变函数

1.3.1 定义与几何意义

1. 基本概念

定义 设 D 是复平面上的一个点集，对于 D 中任意的一点 z，按照一定法则，有确定的复数 $w \in G$ 与它对应，则称在 D 上定义一个复变函数，记作 $w = f(z)$.

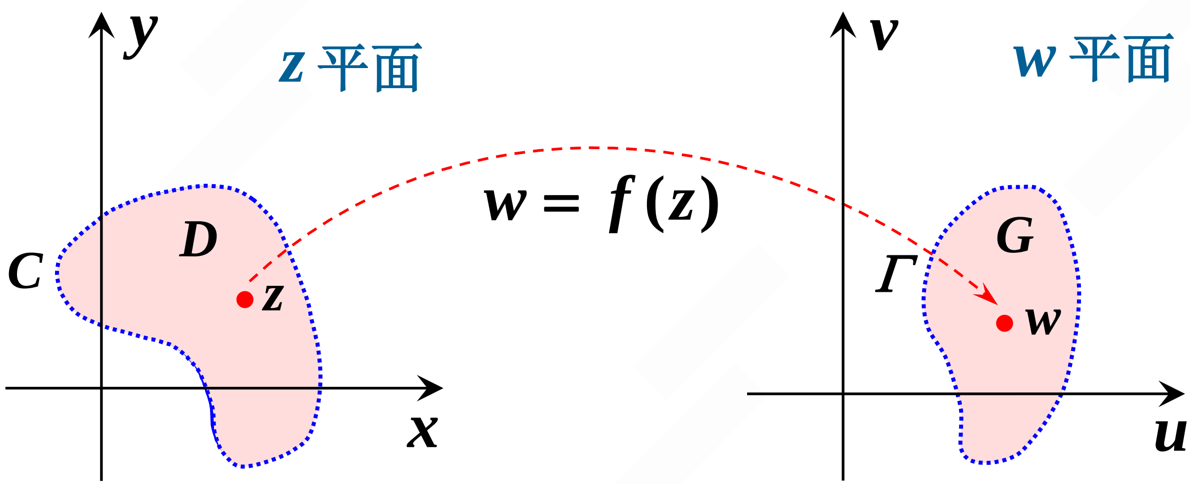
- 单值函数　对每个 $z \in D$，有唯一的 w 与它对应；
  比如 $w = f(z) = z^2$.
- 多值函数　对每个 $z \in D$，有多个 w 与它对应；
  比如 $w = \sqrt[3]{z}$，$w = \operatorname{Arg} z$.

一般情形下，所讨论的“函数”都是指单值函数。

- D 常常是一个平面区域，称之为定义域，G 称为值域。

1.3.1 定义与几何意义

2. 几何意义



映射　复变函数 $w = f(z)$ 在几何上被看作是把 z 平面上的一个点集 D 变到 w 平面上的一个点集 G 的映射(或者变换)。其中，点集 G 称为像，点集 D 称为原像。

- 函数、映射以及变换可视为同一个概念。
  (分析)　(几何)　(代数)

1.3.1 定义与几何意义

1. 基本概念

分析 设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则 $w = f(z)$ 可以写成

$$w = u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中，$u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 为实值二元函数。

分开上式的实部与虚部得到 $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$

- 一个复变函数对应于两个二元实变函数。

例 1.3.2 $\omega = \dfrac{1}{z}$是定义在除原点外的整个复平面上的.

1.3.1 定义与几何意义

2. 几何意义

反函数与逆映射

设函数 $w = f(z)$ 的定义域为 z 平面上的点集 D，值域为 w 平面上的点集 G，则 G 中的每个点 w 必将对应着 D 中的一个(或几个)点 z，按照函数的定义，在 G 上就确定了一个函数 $z = \tilde{f}(w)$，它称为函数 $w = f(z)$ 的反函数，也称为映射 $w = f(z)$ 的逆映射。

双方单值与一一映射

若映射 $w = f(z)$ 与它的逆映射 $z = \tilde{f}(w)$ 都是单值的，则称映射 $w = f(z)$ 是双方单值的或者一一映射。

例 已知函数 $w=z^2$，求下列点集的像。

(1) 点 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$； (2) 区域 $D=\{z:\mathrm{Im}\,z>0,\mathrm{Re}\,z>0,|z|<1\}$.

解 (1) 点 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ 对应的像(点)为 $w=\dfrac{1}{2}i$.

(2) 区域 D 可改写为:

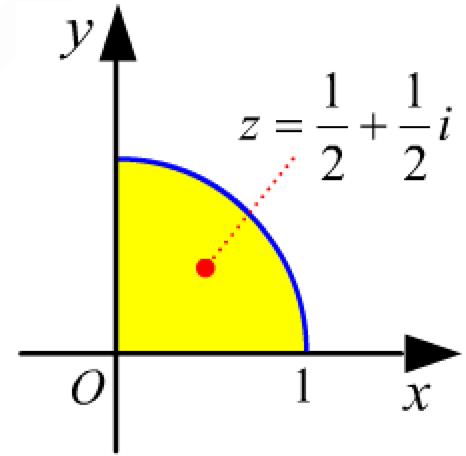
$$D=\{z:0<|z|<1,\ 0<\arg z<\pi/2\},$$

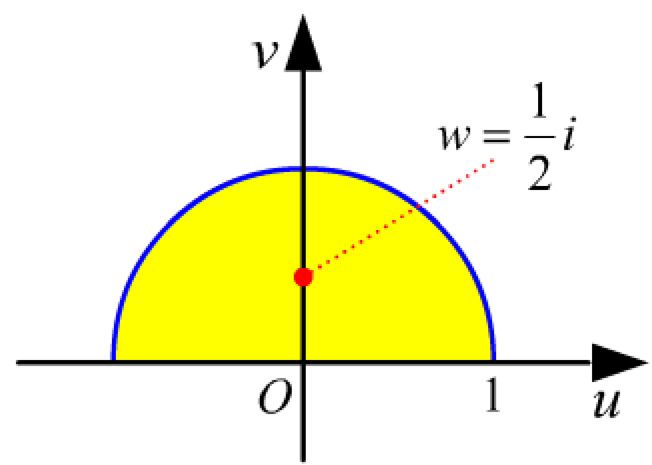
令 $z=r\,e^{i\theta}$，则 $w=z^2=r^2\,e^{i2\theta}$，

可得区域 D 的像(区域) G 满足

$$0<|w|<1,\ 0<\arg w<\pi,$$

即 $G=\{w:\mathrm{Im}\,w>0,|w|<1\}$.

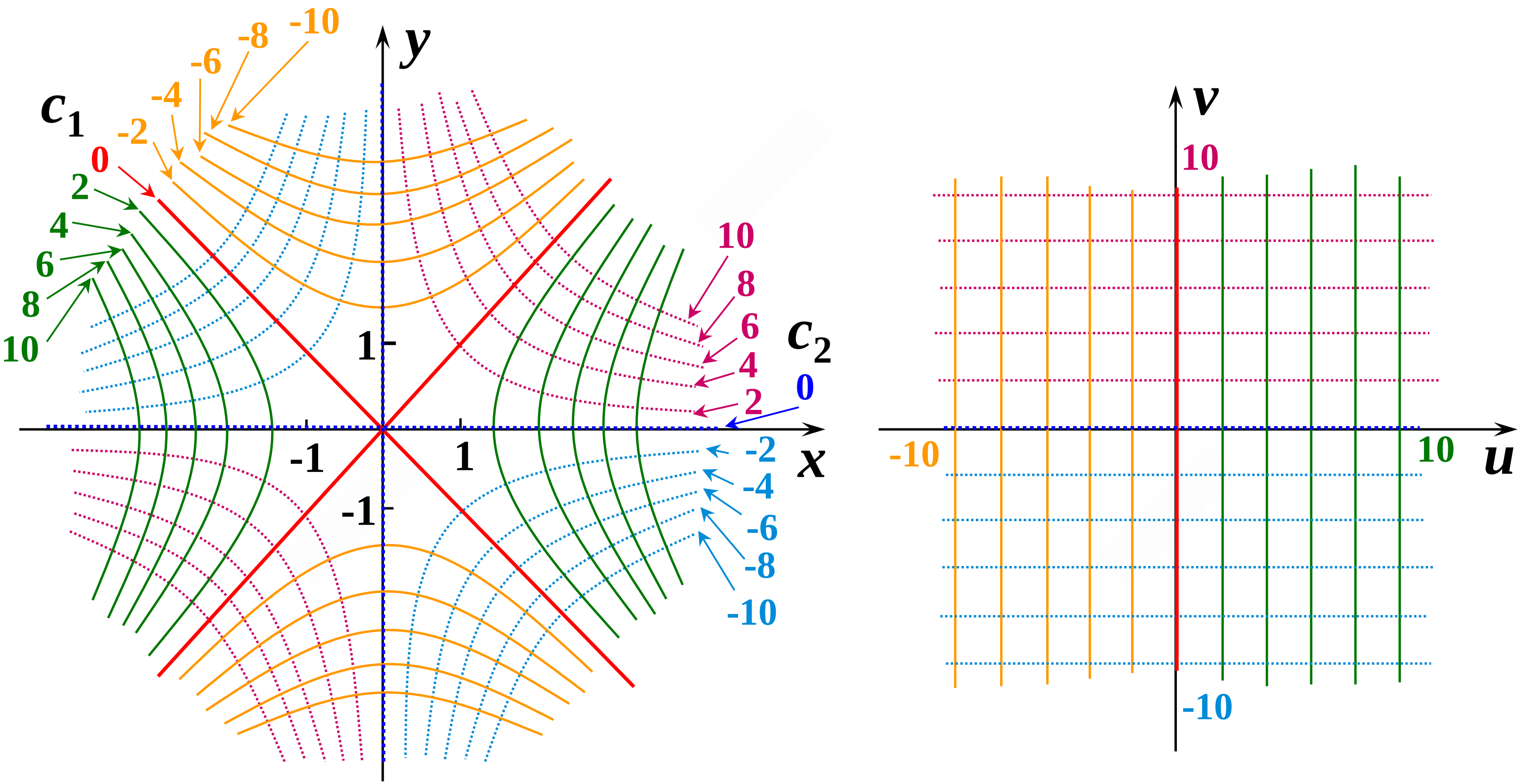




例1.3.4 函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数 $u=x^2-y^2,\ v=2xy$，

因此，它把 z 平面上的两族双曲线 $x^2-y^2=c_1,\ 2xy=c_2$，

分别映射成 w 平面上的两族平行直线 $u=c_1,\ v=c_2$.



1.3.2 极限与连续性

1. 极限

定义 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若存在复数 $A\neq\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，

则称 A 为函数 $w=f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，

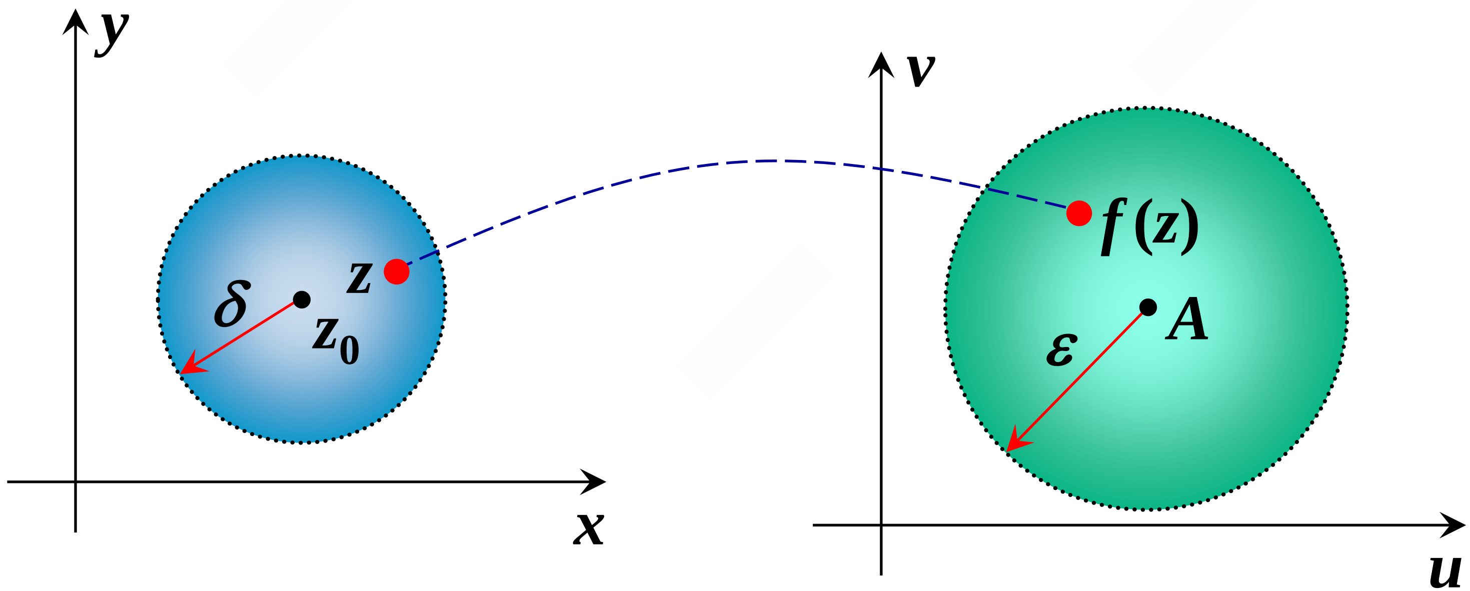
记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 或 $f(z)\to A\ (z\to z_0)$.

注 (1) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可以无定义；

(2) z 趋向于 z_0 的方式是任意的。

1.3.2 极限与连续性

1. 极限



- 当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小的 δ 邻域时，它的像点 $f(z)$ 就落在 A 的预先给定的 ε 邻域内。

1.3.2 极限与连续性

定理 设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$，$A=u_0+i\,v_0$，$z_0=x_0+i\,y_0$，

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 必要性 “$\Rightarrow$” 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

(跳过?)

当 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

$$|f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad |u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

1.3.2 极限与连续性

定理 设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$，$A=u_0+i\,v_0$，$z_0=x_0+i\,y_0$，

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 充分性 “$\Leftarrow$” 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$，

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

$$|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},|v-v_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$\Rightarrow\quad |f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

1.3.2 极限与连续性

2. 极限

性质　如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$，

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$，

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$，$(B\neq 0)$.

(4) 复合函数极限

例 1.3.5 计算下列极限

（1）$\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$

（2）$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z+i}{z+1}$

1.3.2 极限与连续性

- 所关心的两个问题:

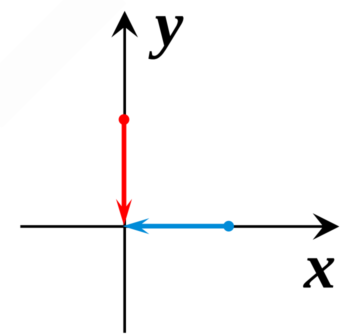
(1) 如何证明极限存在? 放大技巧 $|f(z)-A| \le g(|z-z_0|)$。

(2) 如何证明极限不存在? 选择不同的路径进行攻击。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。

解 方法一

$$f(z)=\frac{x-iy}{x+iy},$$



当 $y=0,\ x\to 0$ 时，$f(z)\to 1$,

当 $x=0,\ y\to 0$时，$f(z)\to -1$,

因此极限不存在。

方法二 （由充要条件）

$$f(z)=\frac{\bar{z}^2}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2-i\,2xy}{x^2+y^2},\quad u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

当 $y=0,\ x\to 0$ 时，$u(x,y)\to 1$,

当 $x=0,\ y\to 0$ 时，$u(x,y)\to -1$,

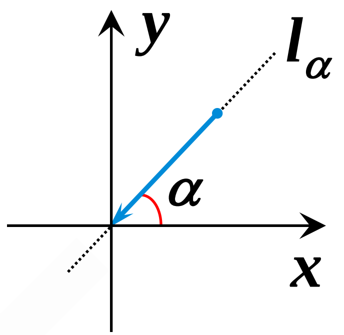
因此极限不存在。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。

方法三

沿着射线 l_α： $z=r\,\mathrm{e}^{i\alpha}$， $r\to 0$，

$$\lim_{\substack{z\in l_\alpha\\ z\to 0}} f(z)=\mathrm{e}^{i(-2\alpha)}$$，与 α 有关，因此极限不存在。



1.3.2 极限与连续性

2. 连续

定义 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续。

注 (1) 连续的三个要素：$f(z_0)$ 存在；$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在；相等。

(2) 连续的等价表示：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\Delta w=0 \Leftrightarrow \lim_{|\Delta z|\to 0}|\Delta w|=0.$$

其中，$\Delta z=z-z_0$，$\Delta w=f(z+z_0)-f(z_0)$.

通常说：当自变量充分靠近时，函数值充分靠近。

(3) 一旦知道函数连续，反过来可以用来求函数的极限。

1.3.2 极限与连续性

2. 连续

(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(分母在 z_0 不为零)在 z_0 处连续。

(2) 如果函数 $\xi = g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $w = f(\xi)$ 在 $\xi_0 = g(z_0)$ 连续，则函数 $w = f[g(\xi)]$ 在 z_0 处连续。

（由基本初等函数的连续性可得初等函数的连续性）

(3) 如果函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则

- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必有界；
- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必能取到最大值与最小值；
- $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上必一致连续。

例 1.3.6 $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right), z\neq 0$,试证$f(z)$在原点无极限。

例 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的连续性。

解 $w=|z|^2=z\cdot\bar{z}$,

$$|\Delta w|=|(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\cdot\bar{z}|$$

$$=|\Delta z\cdot\bar{z}+\overline{\Delta z}\cdot z+\Delta z\cdot\overline{\Delta z}|$$

$$\leq 2|\Delta z|\cdot|z|+|\Delta z|^2\to 0,\text{(当}\Delta z\to 0\text{ 时)}$$

故函数 $w=f(z)=|z|^2$ 处处连续。

1.3.2 极限与连续性

2. 连续

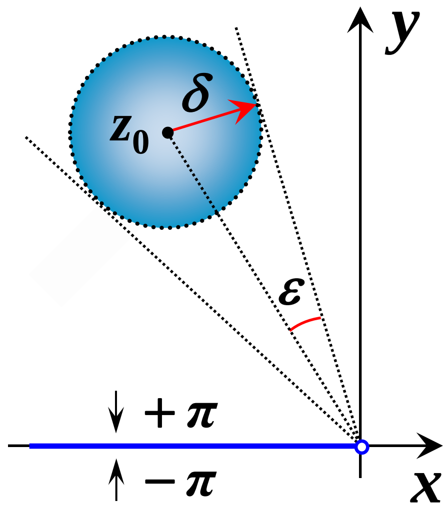
定理 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+i\,y_0$ 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续。

例如 函数 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$ 在复平面内除原点外是处处连续的。

因为 $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外是处处连续的，

而 $v(x,y)=x^2-y^2$ 是处处连续的。

例 证明 $f(z)=\arg z$ 在复平面上除去原点和负实轴的区域上连续。



证明： 分成三种情况讨论

(1) $z_0=0$, $f(z)$在z_0处无定义.

(2) z_0落在负实轴上, 分别从上半平面和下半平面趋向于 z_0, 主辐角极限分别为$+\pi,-\pi$.

(3)$z_0\in \mathrm{D}=\{z;\ -\pi<\arg z<\pi, z\neq 0\}$

证明在z_0处 $f(z)$ 连续。

取$\delta=|z_0\sin\varepsilon|$，则在$|z-z_0|<\delta$时， 有$|\arg z-\arg z_0|<\varepsilon$