复 数

习 题 一

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

1 求下列复数的实部、虚部、共轭复数、模与辐角.

(1)$\dfrac{1}{3+2i}$. (2)$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$. (3)$\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$. (4)$i^{8}-4i^{21}+i$.

2 设 $z=x+iy$,求$\dfrac{1}{z}$和$\dfrac{z-1}{z+1}$的实部和虚部.

3 将下列复数化简成 $x+iy$ 的形式.

(1)$(1+2i)^{3}$.

(2)$(1+i)^{n}+(1-i)^{n}$.

(3)$\sqrt{5+12i}$.

(4)$\sqrt{-i}$.

(5)$\sqrt{i}-\sqrt{-i}$.

(6)$\sqrt[4]{-1}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

4 如果等式$\dfrac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$成立,求实数$x,y$的值.

5 设$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,证明:

$$(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

6 求复平面上的点$z=(x,y)\in\mathbf{C}$在单位球面上的球极投影点$A(x',y',u')$的坐标,并证明:若点列$\{z_n\}\subset\mathbf{C}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$,则$\{z_n\}$的球极投影点列$\{A_n\}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=(0,0,2)$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

7 指出下列各题中点 z 的存在范围，并作图.

(1) $|z+2i|\geqslant 1$. (2) $\operatorname{Re} z^2\leqslant 1$. (3) $\operatorname{Re}(i\bar{z})=3$. (4) $|z+3|+|z+1|=4$.

(5) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$. (6) $|\arg z|<\dfrac{\pi}{3}$.

8 设 z,z_1,z_2 是三个复数，证明：

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}}=z$.

(2) 当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，z 是实数.

(3) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

(4) $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\leqslant|z_1\overline{z_2}|=|z_1||z_2|$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

9 试求下列极限.

(1) $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{\bar{z}}{z}$. (2) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$.

10 记 $z=x+iy$, $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$. 证明: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=1$.

年　月　日

11 证明：z 平面上的圆的方程可以写成 $az\bar{z}+\bar{e}z+e\bar{z}+d=0$ 的形式，其中 $a,d\in\mathbf{R}, a>0, e\in\mathbf{C}$，且 $|e|^2-ad>0$.

心得 体会 拓广 疑问

12 解方程：$z^2-3\mathrm{i}z-(3-\mathrm{i})=0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

13 证明：$\arg z(-\pi<\arg z\leqslant\pi)$在负实轴上(包括原点)不连续，除此之外在$z$平面上处处连续.

14 将函数$w=x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}y\left((1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$表示成变量$z$的表达式.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

15 设$|z_0|<1$.证明:若$|z|=1$,则$\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|=1$.

若$|z|<1$,则

(1) $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|<1$.

(2) $\dfrac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|}\leqslant\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|\leqslant\dfrac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$.

16 * 证明:方程$\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k(z_1\neq z_2,k>0,k\neq1)$表示复平面上圆心为$z_0=\dfrac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$,半径为$\rho=k\dfrac{|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$的圆周:$|z-z_0|=\rho$.

年 月 日