级　数

习　题　四

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

1 (1) 设 $z_n=\dfrac{n-1}{n}+\mathrm{i}\dfrac{2n}{3n+1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

(2) 设 $z_n=1+\dfrac{\mathrm{i}}{n}$，$z'_n=\dfrac{n-1}{n}+\mathrm{i}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\pm z'_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot z'_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{z'_n}$.

2 确定下列复数项级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-\mathrm{i})^{2n}}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{\mathrm{i}}{2^n}\right)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$.

3 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-1+\mathrm{i}}$ 收敛，但不绝对收敛.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}(|z| \neq 1)$ 的和函数.

5 下列结论是否正确？为什么？

(1) 每一个幂级数在其收敛圆内与收敛圆上均收敛.

(2) 每一个幂级数收敛于一个解析函数.

(3) 每一个在点 z_0 处连续的函数一定可以在点 z_0 的某一邻域内展开成泰勒级数.

(4) 每一个在点 z_0 处可导的函数一定可以在点 z_0 的某一邻域内展开成泰勒级数.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

6 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 处收敛而在 $z=3$ 处发散？

7 若函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，且 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，$|z|<R$.

证明：

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{Re}f(r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{Im}f(r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

其中 $0<r<R, n=1,2,\cdots$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

8 若级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$在它的收敛圆周$z_0$处绝对收敛，证明：它在收敛圆周所围的闭区域内处处绝对收敛.

9 我们知道，函数$\frac{1}{1+x^2}$当x为任意实数时，都有确定的值，而且是可导的. 但它的泰勒展开式：$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots$却只当$|x|<1$时成立，通过研究函数$\frac{1}{1+z^2}$试说明其原因.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

10 证明如下不等式.

(1) 对于任意的 $z\in\mathbf{C}$,有

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant |z|e^{|z|}$$

(2) 当 $0<|z|<1$ 时,有

$$\frac{1}{4}|z|<|e^z-1|<\frac{7}{4}|z|$$

11 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式,并指出它们的收敛半径.

(1) $\dfrac{1}{z^2}, z_0=-1$.

(2) $\dfrac{1}{4-3z}, z_0=1+i$.

(3) $\dfrac{e^{z^2}}{\cos z}, z_0=0$.

(4) $\sin\dfrac{1}{1-z}, z_0=0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

12 证明：(1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n) z^n$ 的收敛半径大于或等于 R.

13 设 $f(z)=\dfrac{z-a}{z+a}$，$a\neq 0$，求 $\oint_C \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$，$n\geqslant 0$，其中 C 为任意一条包含原点且落在圆周 $|z|=|a|$ 内的简单光滑闭曲线.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

14 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$|z|<R$. 记 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$，证明：

(1) $S_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}f(\zeta)\dfrac{\zeta^{n+1}-z^{n+1}}{(\zeta-z)\zeta^{n+1}}d\zeta$，$|z|<r<R$.

(2) $f(z)-S_n(z)=\dfrac{z^{n+1}}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta-z)}d\zeta$，$|z|<r<R$.

15 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R>0$，其和函数为 $f(z)$，证明：

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n},n=0,1,2,\cdots$$

其中 $0<r<R$，$M(r)=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

16 若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均在圆盘 $|z|<R$ 内解析，且

$$g(0)\neq 0,f(z)g(z)\equiv 0,\ |z|<R$$

证明：$f(z)\equiv 0,\ |z|<R$.

17 (1) 若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<\infty$，且 $M(r)\leqslant kr^n$（k 为大于零的正数，n 为大于或等于 1 的自然数，$M(r)=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$），证明：$f(z)$ 是一个次数至多为 n 的多项式.

(2) 若 $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 是 n 次多项式，即 $a_n\neq 0$，$n\geqslant 1$. 证明：存在正常数 k 和 $r_0>0$，使得当 $|z|>r_0$ 时，有

$$|P(z)|\geqslant k|z|^n$$

(3) 证明：一个 $n\geqslant 1$ 次的多项式的值不可能对于一切 z 都相同.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

18 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $\mathrm{Re}[f(z)]>0$，证明：

(1) 对任意的 $0<r<1, n=1,2,\cdots$，有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=r}\zeta^{n-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=0$$

(2) 对任意的 $0<r<1, n=1,2,\cdots$，有

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(re^{\mathrm{i}\theta})+\overline{f(re^{\mathrm{i}\theta})}]r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta$$

(3) $|a_n|\leqslant 2(\mathrm{Re}\,a_0), n=1,2,\cdots$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

19 把下列函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数.

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1<|z|<2.$

(2) $\sin\dfrac{1}{1-z}, 0<|z-1|<+\infty.$

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, 1<|z|<2,\ 2<|z|<+\infty,\ 0<|z-1|<1,\ 1<|z-1|<+\infty,\ 0<|z-2|<1,\ 1<|z-2|<+\infty.$

(4) $\dfrac{1}{z(z+2)^3},\ 0<|z+2|<2.$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

20 求函数 $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ 的以 $z=0$ 为心的解析的各个圆环区域内的洛朗展开式.

21 若函数 $f(z)$ 在 $r<|z|<R(r<1<R)$ 内解析,且

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n,r<|z|<R$$

证明:

$$2-a_n-a_{-n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta,n=1,2,\cdots$$

22 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析,且

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

若 $f(z)$ 在区间 $(-R,R)$ 上取实值,证明:a_n 为实数,$n=0,1,2,\cdots$.

年 月 日