条件概率与独立性

§2.1 条件概率，乘法定理

具有附加条件的概率，称为**条件概率**

严格说来，概率都是有条件的，因为试验都是在一组固定条件下进行的，故条件概率的条件指在原有固定条件中增加一个附加条件

设A和B为任意两个事件且$P(B)>0$，则称比值$\frac{P(AB)}{P(B)}$为**事件A在事件B发生的条件下的条件概率**，记作：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率满足概率的性质：

(1) $0\le P(A|B)\le 1$

(2) $P(S|B)=1$

(3) $A_1\cap A_2=\varnothing \Rightarrow P(A_1+A_2|B)$
$$=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

(4) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$

(5) $P(\varnothing|B)=0$

(6) $A\subset B \Rightarrow P(A|C)\le P(B|C)$

且 $P(B-A|C)=P(B|C)-P(A|C)$

(7) $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$
$$-P(AB|C)$$

此外，由定义还有概率的乘法公式：

$$P(AB)=P(B)P(A|B),\quad P(B)>0$$
$$=P(A)P(B|A),\quad P(A)>0$$

或称乘法定理

即条件概率的乘法公式：

$$P(A_1A_2|B)=P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$$
$$=P(A_2|B)P(A_1|A_2B)$$

§2.2 全概率公式

将复杂的事件分解

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的事件，

且 $P(A_i) > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

若对任意事件 B，有 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n \supset B$，

则：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$$

§2.3 贝叶斯公式

"逆概公式"

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容事件，

且 $P(A_i) > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

若对任意事件 B，有 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n \supset B$。

则：

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$。

§2.4 事件的独立性

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，

则称 A与B相互独立.

判断两个事件是否独立一般要借助实际意义

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

$\Longleftrightarrow P(B|A)=P(B)$

若A与B相互独立，则 A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，

$\bar{A}$与$\bar{B}$也分别相互独立

区别于互斥：A，B不能同时发生

互斥：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

独立：$P(AB)=P(A)P(B)$

推广到n个事件：

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是n个事件，若对任意 $k\ (1<k\le n)$，任意 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$

满足：

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的

当 $k=2$ 时即n个事件两两独立

故 相互独立 $\supset$ 两两独立

将其中任意个事件换成其对应的对立事件，仍然相互独立.

系统的可靠性：系统两端有电流通过即为正常工作，可靠性即系统正常工作的概率

§2-5 重复独立试验、二项概率公式

进行n次试验，每次试验中任一事件出现的概率与其他各次试验结果无关，则称这n次试验是独立的

将一个试验重复进行n次的独立试验称为n次重复独立试验

若一个试验只有A和$\bar{A}$两种结果，则称其为伯努利试验，它的n次重复独立试验称为n重伯努利试验

设在每次试验中成功的概率为$p\ (0<p<1)$，则在n重伯努利试验中恰好成功k次的概率为：

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

由二项式定理：

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1$$

称公式 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 为二项概率公式

若 $n\to\infty$，$p\to 0$，使 $np=\lambda$ 保持为正常数，

则：$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

对 $k=0,1,2,\cdots$ 一致地成立

称为二项概率的泊松逼近

实际计算中，常有 $\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 的数值表

故利用 $\sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 近似求值