# 随机事件与概率

# §1-1 随机事件

必然现象 / 确定性现象

随机现象 / 不确定性现象

试验（随机试验）$E$：

(a) 可以在相同条件下重复进行

(b) 可能结果不止一个且事先已知

(c) 每次试验出现已知可能结果中的一个，但不能确切预测哪一个

每一种可能结果称为基本事件/样本点，用 $e$ 表示，全体基本事件的集合称为样本空间，用 $S$ 表示

试验中可能发生也可能不发生的事件称为随机事件，简称事件，一般使用大写字母 $A, B, C, D, \cdots$ 表示。

样本空间 $S$ 是必然事件

空集 $\varnothing$ 是不可能事件

# § 1.2 事件的关系和运算

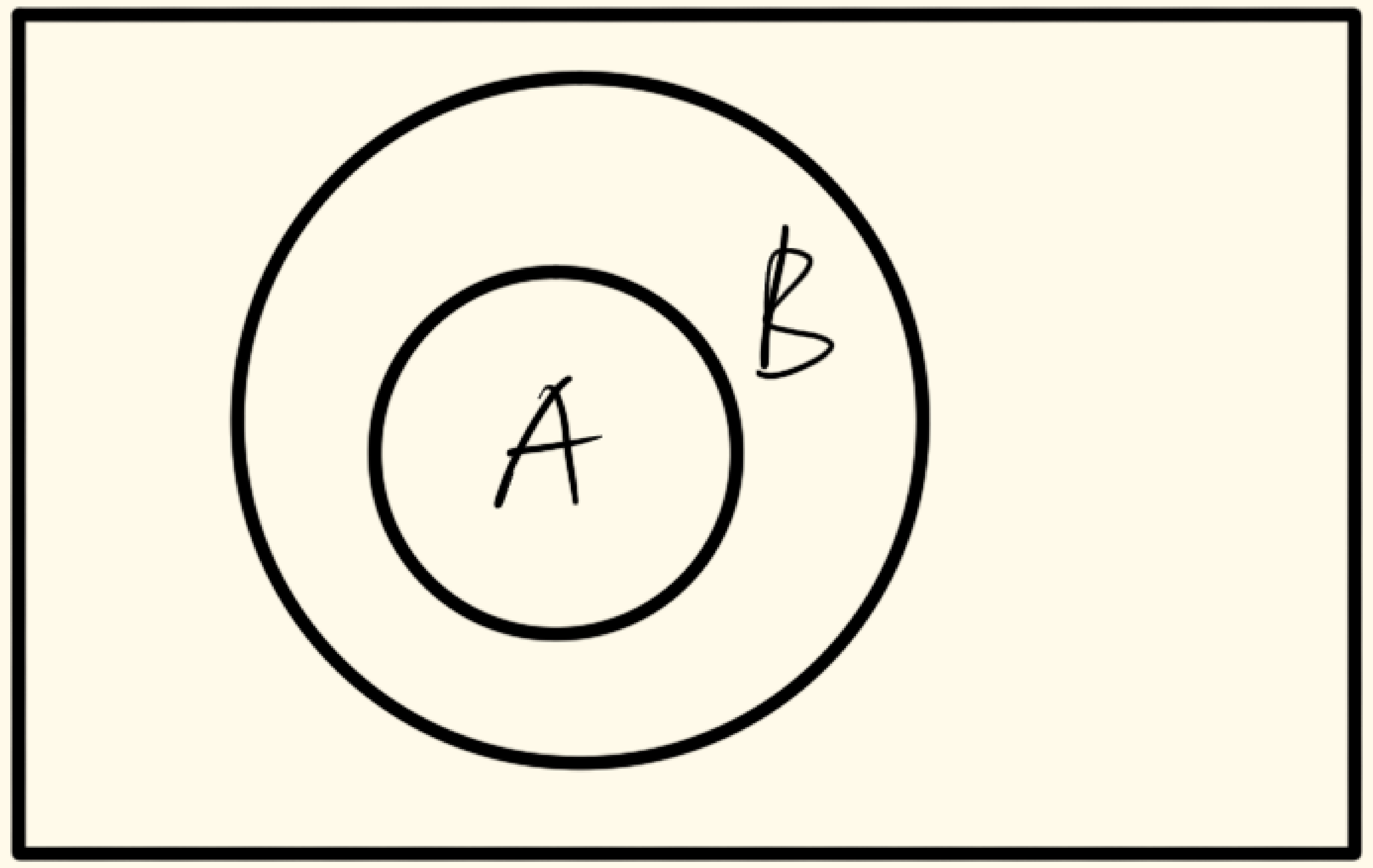
## 1、包含与相等

若事件A中的每一个样本点都属于事件B

则称事件B包含A，记作 $A \subset B$ / $B \supset A$

"事件A发生必然导致事件B发生"

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件A与事件B相等，记作 $A = B$




$A \subset B$

## 2、事件的积/交

同时属于事件A与事件B的样本点的集合称为事件A与事件B之积/交

记作 $A \cap B$ 或 $AB$

"事件AB发生即事件A与事件B同时发生"

## 3、互不相容/互斥

若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件A与事件B互不相容/互斥

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件互不相容，那么称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的

"互斥事件不能同时发生"

## 4. 事件的和/并

至少属于事件A与事件B二者之一的所有样本点组成的集合称为事件A与事件B之和/并，记为$A\cup B$

"事件$A\cup B$发生即事件A与事件B至少有一个发生"

若A,B互斥，则$A\cup B$也可记为$A+B$.

## 5. 事件的差

包含在事件A中而不包含在事件B中的样本点的集合称为事件A与事件B之差，记为$A-B$

"事件$A-B$发生即事件A发生且事件B不发生"

## 6. 对立事件

必然事件S与事件A之差S-A称为A的对立事件，记作$\overline{A}$

"事件$\overline{A}$发生即事件A不发生"

运算性质：

(1) 交换律. $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(AB)C=A(BC)$

(3) 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$

$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

(4) 对偶原理：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

# §1.3 古典概率

设试验E的样本空间满足：

① 只有有限个基本事件（防止分母为无穷）

② 每个基本事件发生的可能性相等（确定基本事件）

则称E为古典概型的试验

即 有限性＋等可能性 → 古典概型

古典概型中，事件A的概率定义为

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}$$

## 概率的性质

三条基本性质：

(1) $0\leq P(A)\leq 1$

(2) $P(S)=1$

(3) 概率的加法公式

$A,B$互斥 $\Rightarrow P(A+B)=P(A)+P(B)$

（反之不成立，可推广到n个事件）

$A_1,A_2,\cdots,A_n$互不相容

$\Rightarrow P(A_1+A_2+\cdots+A_n)$

$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

由以上三条基本性质可得如下推论：

(4) $P(\bar{A})=1-P(A)$

(5) $P(\varnothing)=0$

(6) $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

（反之不成立）

推论：概率的减法公式：

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)$$

(7) 一般概率加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

可以推广到 n 个事件，不在此处列出。

推论：$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

## §1-4 几何概率

适用于无限个基本事件而等可能的场合

向区域 S（一维区间，二维平面……）中掷一质点 M，若 M 必落在 S 内且落在 S 内任一子区域 A 上的可能性只与 A 的度量 L(A)（长度，面积……）成正比而与 A 的位置与形状无关，则称这个试验为几何概型的试验，并定义 M 落在 A 中的概率：

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$$

## §1-5 统计概率

适用于基本事件不是等可能的场合

重复 n 次，出现 m 次

→ 相对频率（频率）：

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

n 增大时围绕某一个常数 p 摆动，一般随 n 增大摆动幅度越小，则称常数 p 为此事件 A 的概率，即

$$P(A)=p$$

当 n 充分大时，用频率作为概率的近似值

即 $P(A)\approx\frac{m}{n},\ n\to\infty$