

# Método dos Fótons Equivalentes

## Revisão e Aplicações

Alfredo Achterberg S. Pacheco

Orientado por: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter

Defesa da Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso

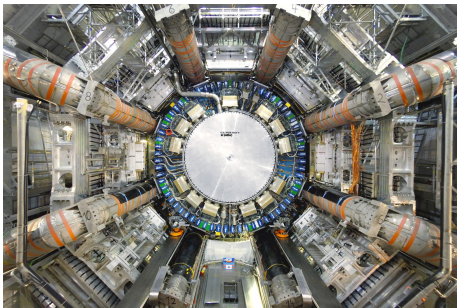
Curso de Bacharelado em Física – Universidade Federal de Pelotas

25 de Setembro, 2023



# Estrutura da Apresentação

- 1 Introdução e Contextualização
- 2 Objetivos do Trabalho
- 3 Seção de Choque Diferencial e Total
- 4 Demonstração do Método
- 5 Sobre o Fator de Forma



Colisões de partículas constituem o método experimental mais utilizado atualmente para o entendimento da estrutura fundamental da matéria e de teste para novos modelos físicos.

**Figura:** Foto do detector ATLAS do LHC.

Créditos: [<https://home.web.cern.ch/science/experiments/atlas>]

Estudos desse tipo de processo tem longa história na física.

- ▶ Como exemplo o trabalho de decréscimo de velocidade de partículas  $\alpha$  e  $\beta$  em meios materiais por N. Bohr;
- ▶ nesse trabalho, o físico propôs que a interação de partículas carregadas pode ser entendida pelo fenômeno eletromagnético de dispersão (uma analogia);
- ▶ em 1924, E. Fermi propôs que os campos de uma partícula carregada podem ser aproximados como pulsos de onda ou *fluxos de fótons virtuais*.

# Introdução e Contextualização

Disso, E. J. Williams, em 1933, propôs a generalização relativística do que seria o método dos fótons equivalentes.

- ▶ O método consiste, de forma introdutória, em obter o número de fótons virtuais do campo eletromagnético de uma partícula a partir da transformada de Fourier dos mesmos campos;
- ▶ este consiste de uma aproximação *semi-clássica* para o cálculo desses fótons virtuais.

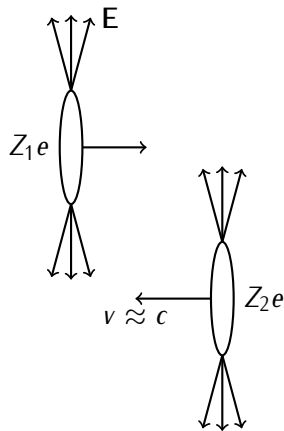


Figura: Esquema representando os campos relativísticos de dois íons  $Z_1$  e  $Z_2$

Desde tais desenvolvimentos, este método aproximativo teve maior aplicação e desenvolvimentos na área de interação nuclear e de partículas fundamentais.

- ▶ Em especial, focaremos nas colisões ultraperiféricas de íons;
- ▶ são colisões com maior distância (parâmetro de impacto) e com interação predominantemente eletromagnética;
- ▶ pela interação ser eletromagnética também há menos multiplicidade nos estados finais e os resultados experimentais são mais facilmente tratados;
- ▶ fenômenos de interesse nesses processos incluem a produção de pares de partículas a partir de colisões de fótons.

# Objetivos do Trabalho

Para a realização do trabalho propomos uma revisão bibliográfica com cálculo analítico e computacional de quantidades de interesse dos processos de colisão. Para isso, temos os seguintes objetivos específicos:

- 1 realizar a revisão bibliográfica do método;
- 2 realizar o cálculo do fator de forma para o fator de forma para diferentes distribuições de carga;
- 3 deduzir o número de fótons equivalentes para diferentes distribuições de carga;
- 4 realizar um estudo mais aprofundado sobre o fenômeno de fotoprodução de pares de partícula-antipartícula;
- 5 obter as curvas teóricas para as seções de choque de diferentes processos de colisão e compará-las com as curvas experimentais.

# Seção de Choque Diferencial e Total

O problema de interesse do método é o de colisão de partículas carregadas. A quantidade de interesse em colisões é a seção de choque.



**Figura:** Partícula adentrando a região de espalhamento por uma seção de área  $d\sigma$  e sendo espalhada em um ângulo sólido  $d\Omega$ .



# Seção de Choque Diferencial e Total

Da figura temos as diferenciais,

$$d\sigma = |b db d\phi|, \quad (1)$$

$$d\Omega = |\sin \theta d\theta d\phi|. \quad (2)$$

A seção de choque total vem pela integral sobre  $\Omega$ ,

A razão entre as duas é,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (3)$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (4)$$

Que é a seção de choque diferencial.

Isto para uma partícula incidente individual!

Estamos levando em conta uma partícula individual. Se quisermos tratar um feixe de partículas, vamos precisar definir a *luminosidade*.

## Luminosidade

Para um feixe de  $N$  partículas com mesma energia atravessando a área  $d\sigma$ , a luminosidade  $\mathcal{L}$  é definida como a quantidade de partículas que atravessam a região de espalhamento por unidade de área por unidade de tempo.

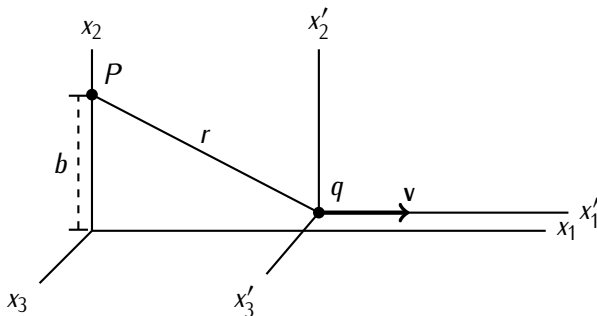
Disso, reescrevemos a seção de choque para um feixe de múltiplas partículas,

$$dN = \mathcal{L} d\sigma, \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}. \quad (6)$$

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Inicialmente consideramos uma carga em movimento como abaixo.<sup>1</sup>



**Figura:** Carga  $q$  em movimento com velocidade  $v$  passando por um ponto de observação  $P$  com parâmetro de impacto  $b$  e distância  $r$ . Referencial  $\Sigma$  é solidário ao ponto  $P$  e  $\Sigma'$  é solidário à carga pontual  $q$ .

<sup>1</sup>A partir daqui usaremos unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ).

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Para o caso com velocidade da partícula em  $x_1$ , a transformação de Lorentz dos campos é,

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{cases} \quad , \quad (7)$$

sendo  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  e  $\beta = v/c$  os parâmetros relativísticos da partícula.

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Escrevendo os campos nas *coordenadas* de  $\Sigma$  e depois aplicando a transformada de Lorentz temos os campos no *referencial*  $\Sigma$ ,

$$E_1(t) = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

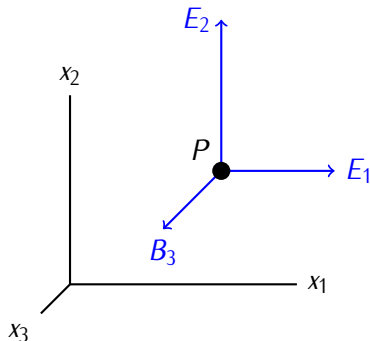
$$E_2(t) = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (9)$$

$$B_3(t) = \beta E_2(t). \quad (10)$$

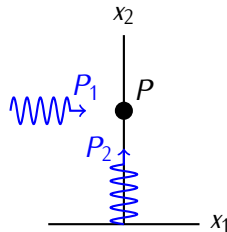
Aproximamos estes campos como pulsos de onda.

Analisando esses campos podemos notar que  $E_2$  e  $B_3$  formam um pulso de onda na direção  $x_1$ . Ainda assim, a interação do campo  $E_1$  pode ser analisada como um pulso de onda pela inserção de um campo magnético artificial como aproximação.

# Demonstração do Método para Carga Pontual



(a) Campos observados no referencial do ponto  $P$ .



(b) Pulsos aproximados  $P_1$  e  $P_2$  atingindo  $P$ .

**Figura:** Aproximação chave do método dos fótons virtuais é a de substituir os campos elétrico e magnético por pulsos de radiação equivalentes.

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Com isso, iremos calcular agora os espectros de frequência<sup>2</sup>, para ambos os pulsos. Estes o são

$$I_1(\omega, b) = \frac{1}{2\pi} |E_2(\omega)|^2, \quad (11)$$

$$I_2(\omega, b) = \frac{1}{2\pi} |E_1(\omega)|^2, \quad (12)$$

em que

$$E_{1,2}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_{1,2}(t) e^{i\omega t}, \quad (13)$$

é a transformada de Fourier da parte elétrica dos pulsos.

---

<sup>2</sup>A energia por unidade de frequência e área de um pulso



# Demonstração do Método para Carga Pontual

O cálculo da integral para os dois campos leva ao seguinte resultado,

$$I_1(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \xi^2 K_1^2(\xi), \quad (14)$$

$$I_2(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\gamma^2} \xi^2 K_0^2(\xi). \quad (15)$$

onde  $\xi \equiv \frac{\omega b}{\gamma v}$  e as funções  $K_1$  e  $K_0$  são as funções modificadas de Bessel.

# Demonstração do Método para Carga Pontual

A partir disso, o número de fótons equivalentes pode ser obtido pelo espectro de frequência como,

$$\begin{aligned} N(\omega, b) &= \frac{1}{\omega} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\omega^2} \xi^2 \left[ K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Este pode ser simplificado:

Por conta do fator  $\gamma^{-2}$ , para velocidades relativísticas altas o termo com  $K_0$  contribui pouco para o fluxo de fótons e podemos escrever,

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\omega^2} \xi^2 K_1^2(\xi). \quad (17)$$

# Demonstração do Método para Carga Pontual

O número de fótons total é dado pela integral de  $N(\omega, b)$  sobre os parâmetros de impacto,

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \int_{b_{\min}}^{\infty} db \, b N(\omega, b) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2q^2}{\beta^2} \frac{1}{\omega} \left\{ \xi_{\min} K_0(\xi) K_1(\xi_{\min}) - \frac{\beta^2}{2} \xi_{\min}^2 \left[ K_1^2(\xi_{\min}) - K_0^2(\xi_{\min}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

Para o caso da partícula incidente não ser pontual é introduzido o *fator de forma*  $F(|\mathbf{q}|)$ . Assim, o  $N(\omega, b)$  fica escrito como,

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{Z^2 \alpha}{\beta^2 \omega b^2} \left| \int du u^2 J_1(u) \frac{F[(u^2 + \xi^2)/b^2]}{u^2 + \xi^2} \right|^2. \quad (19)$$

O fator de forma  $F(|\mathbf{q}|)$  é a transformada de Fourier da distribuição de carga  $f(\mathbf{r})$ .

- A maior parte das distribuições de carga são esfericamente simétricas.

$f(r)$	$F( \mathbf{q} )$
$\delta(r)/4\pi$	1
$\frac{a^3}{8\pi}e^{-ar}$	$\left(\frac{1 +  \mathbf{q} ^2}{a^2}\right)^{-2}$
$\left(a^2/2\pi\right)^{3/2}e^{-a^2r^2/2}$	$e^{ \mathbf{q} ^2/2a^2}$
$\begin{cases} 3/4\pi R^3, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$	$\frac{3(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha}, \alpha =  \mathbf{q} R$

**Tabela:** Fatores de forma disponíveis para diferentes distribuições de carga esfericamente simétricas.

# Dedução da Transformada de Lorentz para os Campos

Sendo os campos elétrico e magnético escritos em termos dos potenciais,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21)$$

estes são escritos em forma explicitamente covariante usando o tensor eletromagnético,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

# Como escrevemos os Campos nas Coordenadas de $\Sigma$

Os campos como percebidos em  $P$ , no referencial  $\Sigma'$  tem a forma

$$E'_1 = -\frac{qvt'}{r'^3}, \quad E'_2 = \frac{qb}{r'^3}. \quad (23)$$

Escrevemos nas *coordenadas* de  $\Sigma$  usando,

$$t' = \gamma t, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{b^2 + (vt')^2} \\ &= \sqrt{b^2 + v^2 \gamma^2 t^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Assim

$$E'_1 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (26)$$

$$E'_2 = \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (27)$$

para os quais devemos aplicar a transformação de Lorentz.