

**Alfredo Achterberg Sanchotene Pacheco**

**O Método dos Fótons Equivalentes: Revisão e Aplicações**

Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter

Pelotas, 2023

Alfredo Achterberg Sanchotene Pacheco

O Método dos Fótons Equivalentes: Revisão e Aplicações

Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso aprovada, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da defesa: 25 de setembro de 2023

Banca Examinadora:

---

Maurício Jeomar Piotrowski  
Doutor em Física – Universidade Federal de Pelotas

---

Mario Luiz Lopes da Silva  
Doutor em Ciências – Universidade Federal de Pelotas

---

Wagner Tenfen  
Doutor em Física – Universidade Federal de Pelotas

## 1 INTRODUÇÃO

Uma das questões que desperta mais interesse na Física é compreender a composição da matéria em sua forma mais fundamental. Almeja-se a obtenção do conhecimento das características básicas dos componentes do mundo em que vivemos, as ditas partículas fundamentais e a forma como esses componentes interagem para criar a matéria da qual o universo é composto. Para tanto, o método de investigação experimental mais utilizado tanto no passado quanto atualmente é o de colisão de partículas (GRIFFITHS, 1987). Este consiste em analisar características das partículas fundamentais e dos núcleos atômicos a partir da forma como estes são espalhados (desviados) quando lançados uns contra os outros (THOMSON, 2013). Características que são obtidas por meio desse método incluem a carga elétrica desses íons e a distribuição de carga para partículas extensas, como os núcleos atômicos. Além disso, é possível investigar as próprias forças fundamentais da natureza nessas colisões e reações (GRIFFITHS, 1987).

Em especial, consideramos o estudo, realizado por Niels Bohr da interação de partículas aceleradas com a matéria (BOHR, 1913). O fenômeno tratado foi do decaimento de velocidade de partículas  $\alpha$  e  $\beta$  em meios materiais, para o qual o autor elaborou que os elétrons dos átomos oscilariam quando perturbados por forças externas. Nisso, Bohr propôs uma analogia entre o fenômeno eletromagnético de dispersão e o da interação das partículas carregadas.

Posteriormente, se propôs que os campos de uma partícula carregada podem ser aproximados como pulsos de onda e, desta forma, como um fluxo de fótons virtuais (FERMI, 1924). Fermi usou para tratar dos fenômenos de colisões de partículas carregadas com núcleos atômicos e para o cálculo da seção de choque destas colisões. Uma década após a publicação deste trabalho, foi proposto uma generalização para partículas relativísticas (WILLIAMS, 1933). Este método, denominado de método dos fótons equivalentes, ainda é utilizado e desenvolvido, com a generalização na teoria de eletrodinâmica quântica, para estudos com colisões envolvendo partículas carregadas (BALTZ *et al.*, 2008).

Desde esses trabalhos, o avanço nas áreas de interação nuclear tem aumentado consideravelmente, uma vez que colisões com interação eletromagnética permanecem como uma das formas mais convenientes de estudar a estrutura dos núcleos e núcleons atômicos (HARLAND-LANG, 2023). Em especial, salientamos as colisões ultraperiféricas de íons, que trazem consigo formas de estudar a distribuição de carga e glúons dessas partículas (BERTULANI; KLEIN; NYSTRAND, 2005). Esse método permite um estudo de fenômenos interessantes na física de partículas, como a produção de matéria a partir de radiação eletromagnética, o fenômeno de fotoprodução de partículas. Nesse processo os fótons colidem gerando estados finais com massa e carga, em geral, constituídos de pares de partícula e antipartícula, como elétrons e pósitrons (BAUR; HENCKEN; TRAUTMANN, 1998).

Com isso posto, essas colisões são observadas em experimentos de colisão de última geração, como os disponíveis no LHC<sup>1</sup> (BALTZ *et al.*, 2008). Nestes experimentos, as colisões

<sup>1</sup> LHC - *Large Hadron Collider* ou Grande Colisor de Hádrons é um laboratório de colisão de partículas inaugurado em 2008 sob gerenciamento da Organização Europeia de Pesquisas Nucleares.

ultraperiféricas permitem a obtenção de dados mais limpos (menos partículas sendo produzidas por colisão e menos ruído detectado nos sensores) do que as colisões que envolvem interação de força forte, uma vez que a multiplicidade dos estados finais é menor. Assim, a obtenção das curvas de seção de choque experimentais e sua comparação com a teoria é mais facilmente realizada.

A partir do que foi exposto aqui, este trabalho propõe uma revisão bibliográfica do método dos fótons equivalentes, com análise analítica e computacional dos processos que podem ser estudados a partir do método. Com isso, pretendemos, não somente realizar um estudo analítico dos campos de uma carga pontual se movendo, mas também, realizar o cálculo do número de fótons equivalentes para as diferentes distribuições de carga nuclear propostas na literatura. Realizar a revisão desses cálculos quando disponíveis e propor métodos computacionais para o cálculo destes, quando não forem analiticamente solúveis. Assim, planejamos também obter as seções de choque para alguns íons que são utilizados em experimentos de colisões e comparar com os dados experimentais dos experimentos respectivos.

No texto dessa proposta, elencamos primeiramente, no capítulo 2, quais são os objetivos do trabalho a ser realizado. O que pretendemos realizar com o trabalho, os objetivos gerais, e quais passos serão tomados para a realização do que é pretendido, que são os objetivos específicos. Em seguida, no capítulo 3, realizamos uma revisão teórica de alguns conceitos que serão estudados mais profundamente na execução do trabalho. Onde realizamos primeiramente uma definição dos conceitos de seção de choque diferencial e total. Após isso, é feita uma dedução inicial do número de fótons equivalentes para uma partícula incidente pontual, calculados a partir da transformada de Fourier dos campos da partícula. Depois, fazemos uma conceituação inicial do nosso principal problema de interesse, colisões ultraperiféricas de íons, onde elencamos características e possíveis metodologias de análise para o problema. Sequencialmente, no capítulo 4, explanamos qual a metodologia que será utilizada na execução do trabalho. Esta consiste de cálculos analíticos e computacionais em C++<sup>2</sup> das quantidades de interesse. Por fim, no capítulo 5, está o cronograma proposto para a execução do projeto de pesquisa aqui colocado.

---

<sup>2</sup> Para o cálculo computacional será usada a biblioteca de computação científica GSL (*GNU Scientific Library*).

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 Objetivos Gerais

Este trabalho tem como objetivo uma revisão do método de fótons equivalentes, da sua obtenção e desenvolvimento com aplicações, em especial para as ditas colisões ultraperiféricas de íons. Procuraremos realizar, além da revisão do método, aplicações com cálculos do número de fótons equivalentes para diferentes fenômenos de colisões. Por fim, buscaremos enfatizar a sua utilidade e relevância em áreas de fronteira na física de partículas.

### 2.2 Objetivos Específicos

A fim de realizar esses objetivos iremos executar os seguintes objetivos específicos:

1. realizar a revisão bibliográfica do método;
2. realizar os cálculos para os fatores de forma para diferentes distribuições de carga;
3. deduzir detalhadamente os números de fótons equivalentes para os casos de carga pontual e distribuição de carga para diferentes íons, os quais exigem uma diferente escolha do parâmetro de impacto;
4. realizar um estudo dos processos de fotoprodução de pares de partícula-antipartícula;
5. obter as curvas teóricas do espectro de frequência, número de fótons equivalentes e seção de choque para os diferentes processos de colisão;
6. comparar as curvas com os dados experimentais, com interesse nas colisões ultraperiféricas, onde é observável o fenômeno de fotoprodução.

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

#### 3.1 Sobre as Seções de Choque Diferencial e Total

Neste trabalho iremos tratar do método dos fótons equivalentes. O problema de interesse deste método é o do cálculo da seção de choque em processos de colisão ou de produção de partículas. Por seção de choque consideramos como uma quantidade experimental de interesse em colisões (GRIFFITHS, 1987). Inicialmente, discutindo sob uma lente clássica, podemos considerar um processo de espalhamento, no qual a partícula entra na região de influência do centro de potencial, o qual possui parâmetro de impacto  $b$ , conforme a Figura 3.1. A partir da geometria apresentada, podemos obter os seguintes diferenciais de área e ângulo sólido, respectivamente,

$$d\sigma = |b db d\phi|, \quad (3.1)$$

$$d\Omega = |\sin \theta d\theta d\phi|. \quad (3.2)$$

Assim, a razão entre as duas é escrita como,

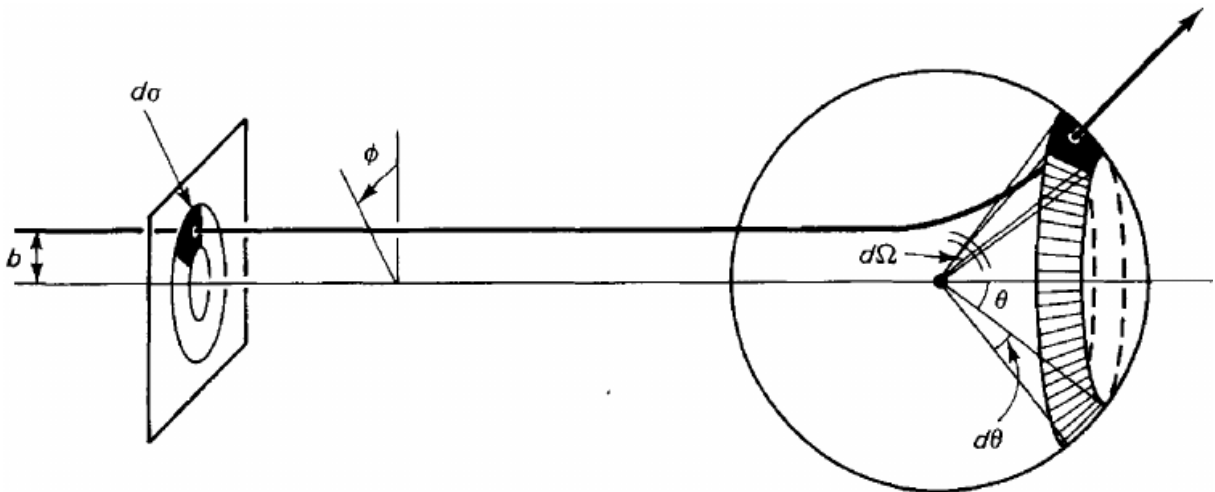
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (3.3)$$

Aqui, assumimos que o potencial do centro de espalhamento tem simetria azimutal, em  $\phi$ .

A quantidade dada na equação (3.3) é denominada de seção de choque diferencial (GRIFFITHS, 1987). A seção de choque total será a seção de choque diferencial integrada sobre todo o ângulo sólido  $\Omega$  sendo ela dada por,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3.4)$$

Figura 3.1 – Área diferencial  $d\sigma$  indicada com centro de espalhamento estático com parâmetro de impacto  $b$ . A partícula é espalhada em um elemento diferencial de ângulo sólido  $d\Omega$ .



Agora, vamos considerar um feixe de  $N$  partículas monoenergéticas (de mesma energia), todas sendo lançadas contra um dado centro de espalhamento. A luminosidade  $\mathcal{L}$  é definida como a quantidade de partícula que atravessam a região de espalhamento por unidade de área e unidade de tempo. Assim, a quantidade de partículas que atravessam a área  $d\sigma$  por unidade de tempo é dada por,

$$dN = \mathcal{L} d\sigma. \quad (3.5)$$

Disso segue que,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}. \quad (3.6)$$

Essa acaba sendo uma maneira mais útil de escrevermos a seção de choque diferencial. Sendo assim, o número de partículas espalhadas em um ângulo sólido  $d\Omega$  dividido por  $d\Omega$  e pela luminosidade.

### 3.2 Derivação do Método dos Fótons Equivalentes

Vamos tomar uma partícula pontual eletricamente carregada viajando a velocidades relativísticas perto de um alvo, que iremos considerar como fixo. A interação desta com o alvo se dará pelos campos gerados pela partícula, uma vez que o movimento desta consiste em uma variação da carga no espaço. Essa interação entre a partícula incidente e o alvo consiste em uma perturbação do alvo e no espalhamento da partícula incidente. O estudo desses campos é de interesse pois, assim, podemos obter o número de fótons equivalentes desses campos<sup>1</sup>. Com o uso do número de fótons equivalentes é possível o estudo de processos atômicos e subatômicos, dos quais podemos obter seções de choque de interesse.

O método dos fótons equivalentes aqui discutido consiste em aproximar os campos produzidos por cargas carregadas em movimento por pulsos de ondas. Através de uma transformada de Fourier desses campos, obtemos o espectro de frequência dos campos e, conseqüentemente, o número de fótons equivalentes destes, que pode ser usado para calcular seções de choque de interesse. Além disso, aqui e no resto do trabalho usamos unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ) com unidades de Heaviside-Lorentz (JACKSON, 1999) (KLUSEK-GAWENDA, 2014) (CARUSO, 2009) (LEMONS, 2007).

Vamos calcular como os campos elétrico ( $\mathbf{E}$ ) e magnético ( $\mathbf{B}$ ) de uma partícula carregada com carga  $q$  são percebidos quando esta passa na vizinhança de um ponto de observação  $P$ , como indicado na Figura 3.2. Vamos tomar  $\Sigma'$  como o referencial solidário à partícula carregada e  $\Sigma$  como o referencial solidário ao ponto  $P$ , assumindo que a origem dos sistemas dos referenciais coincidam no tempo  $t = t' = 0$ . Com isso, lembramos que os campos em termos dos potenciais escalar  $\Phi$  e vetor  $\mathbf{A}$  são,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.8)$$

<sup>1</sup> Aqui fazemos a obtenção dos fótons a partir de uma perspectiva semi-clássica.

Com isso, é mais fácil calcularmos a transformação dos campos a partir do tensor eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  (onde usamos a notação de Einstein<sup>2</sup>), cujas componentes são dadas pela matriz,

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Assim, a transformação das componentes pode ser dada por

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta}, \quad (3.10)$$

onde  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  são as componentes da matriz de transformação de Lorentz (LEMOS, 2007). Para o caso de um impulso na direção  $x$ , como estamos considerando, esta será,

$$(\Lambda_{\nu}^{\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

onde  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  e  $\beta = v/c$  são os parâmetros relativísticos. Calculando os termos não nulos a partir da expressão (3.10), obtemos as seguintes componentes dos campos elétrico e magnético, respectivamente,

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{cases}. \quad (3.12)$$

Agora, os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  no referencial  $\Sigma'$ , como percebidos no ponto  $P$ , são os campos de uma carga pontual estática. O campo  $\mathbf{B}$  será nulo e o campo  $\mathbf{E}$  só terá as componentes,

$$E'_1 = -\frac{qvt'}{r'^3}, \quad E'_2 = \frac{qb}{r'^3}. \quad (3.13)$$

Aqui, o tempo transformado é  $t' = \gamma t$  e a distância entre a partícula e o ponto de observação é  $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2} = \sqrt{b^2 + v^2 \gamma^2 t^2}$ , como pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras. Assim, as componentes do campo elétrico são dadas, usando as coordenadas de  $\Sigma$ , por,

$$E'_1 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad E'_2 = \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (3.14)$$

Com isso, podemos aplicar as transformações (3.12) para calcular os campos gerados em  $P$ . Tal procedimento nos fornece os campos transformados,

$$E_1(t) = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (3.15)$$

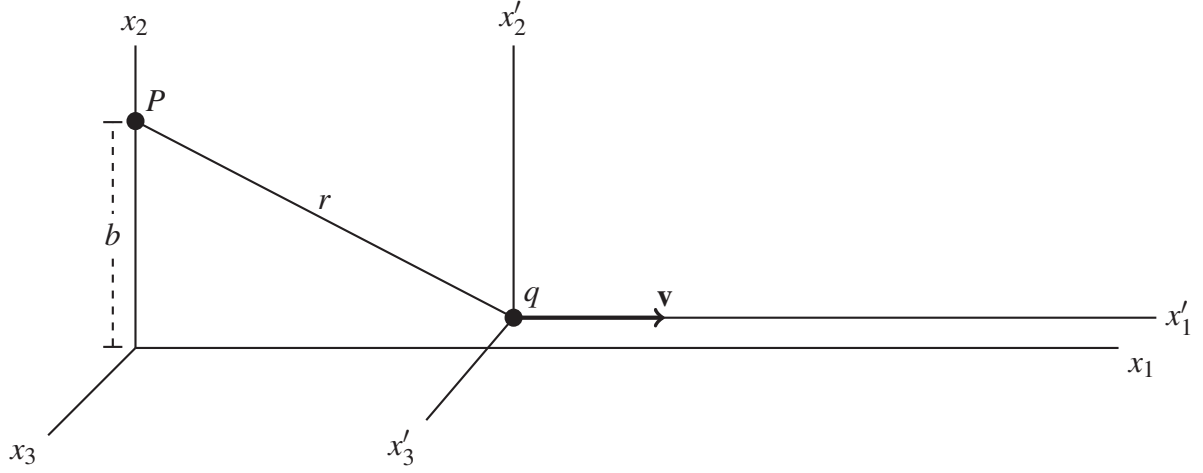
$$E_2(t) = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (3.16)$$

$$B_3(t) = \beta E_2(t). \quad (3.17)$$

<sup>2</sup> A notação de soma de Einstein implica que estamos somando os índices repetidos indo de 0 a 3. Por exemplo, isso implica que  $x^{\mu} y_{\mu} = x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3$ .



Figura 3.2 – Carga pontual  $q$  passando na vizinhança de um ponto de observação  $P$  com parâmetro de impacto  $b$ . São indicados os eixos dos referenciais  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ , além da direção e sentido da velocidade ( $\mathbf{v}$ ) da carga.



Fonte: Adaptado de (JACKSON, 1999).

O método dos fótons equivalentes consiste em aproximar a interação desses campos a partir de dois pulsos, um na direção de  $x_1$ , paralelo à direção de  $\mathbf{v}$ , e outro na direção de  $x_2$ , perpendicular à esta (CARUSO, 2009). Isso se baseia no fato de que, analisando os campos (3.15), (3.16) e (3.17), podemos notar que há formação de um pulso na direção<sup>3</sup>  $x_1$  pelos campos  $E_2$  e  $B_3$  que denotamos de  $P_1$ . Ainda assim, o campo  $E_1$  não forma pulso. É de nosso interesse que possamos construir um estudo do fenômeno somente a partir de pulsos. Para tanto podemos inserir um campo magnético artificial, como aproximação, de forma a gerar um pulso  $P_2$  na direção de  $x_2$ , desde que os movimentos das cargas constituintes do alvo não sejam relativísticos no referencial (JACKSON, 1999).

Assim, a energia por unidade de área e frequência de um determinado pulso, no caso  $P_1$  e  $P_2$ , é dada nas formas,

$$I_1(\omega, b) = \frac{1}{2\pi} |E_2(\omega)|^2, \quad (3.18)$$

$$I_2(\omega, b) = \frac{1}{2\pi} |E_1(\omega)|^2, \quad (3.19)$$

onde  $E_1(\omega)$  e  $E_2(\omega)$  são as transformadas de Fourier dos campos  $E_1(t)$  e  $E_2(t)$ , respectivamente. Iremos calcular a transformada para o pulso  $P_1$  primeiramente. Assim, para  $E_2(\omega)$ , temos,

$$E_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_2(t) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[ \frac{q\gamma b e^{i\omega t}}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \right], \quad (3.20)$$

que é a transformada de Fourier (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2017). Com isso, usamos a substituição de variável de integração  $u = \gamma v t / b$ , onde  $du = (\gamma v / b) dt$ . Com isso temos o seguinte,

$$E_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{qb^2}{v} \frac{\exp(i\omega b u / \gamma v)}{(b^2 + b^2 u^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{vb} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\exp(i\omega b u / \gamma v)}{(1 + u^2)^{3/2}}. \quad (3.21)$$

<sup>3</sup> Isso é verificável pelo cálculo do vetor de Poynting desse pulso de onda, sendo  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  (JACKSON, 1999).

Definindo o parâmetro  $\xi \equiv \omega b / \gamma v$ , e usando a identidade de Euler,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , podemos escrever para a integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\exp(i\omega b u / \gamma v)}{(1+u^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\cos(\xi u)}{(1+u^2)^{3/2}} + i \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\sin(\xi u)}{(1+u^2)^{3/2}}. \quad (3.22)$$

O integrando da segunda integral é uma função ímpar e, portanto, quando integrada sobre o intervalo simétrico  $[-\infty, +\infty]$ , resulta em um valor nulo. Por um argumento similar, o integrando da primeira função é par, e, assim, é equivalente a duas vezes o valor quando integrado sobre uma das metades do intervalo simétrico. Ou seja, temos a integral como,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{i\xi u}}{(1+u^2)^{3/2}} = 2 \int_0^{+\infty} du \frac{\cos(\xi u)}{(1+u^2)^{3/2}} = 2\xi K_1(\xi). \quad (3.23)$$

Onde usamos o fato que a representação integral para a função modificada de Bessel  $K_1(z)$  é,

$$K_1(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} du \frac{\cos(zu)}{(u^2+1)^{3/2}} \quad (3.24)$$

(ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2017). Com isso, temos a transformada de Fourier  $E_2(\omega)$  como,

$$E_2(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{vb} \xi K_1(\xi) \quad (3.25)$$

De forma análoga, a transformada de Fourier  $E_1(\omega)$  é obtida em termos da função de Bessel modificada  $K_0$ . Esta é,

$$E_1(\omega) = -\frac{iq}{\gamma bv} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi K_0(\xi). \quad (3.26)$$

Desta forma, são obtidos os seguintes espectros de frequência,

$$I_1(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_1^2 \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right), \quad (3.27)$$

$$I_2(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_0^2 \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right). \quad (3.28)$$

É notado que o espectro de frequência  $I_2(\omega, b)$  tem o termo  $\gamma^{-2}$ , logo para uma partícula incidente em velocidades ultrarrelativísticas, esse pulso causaria pouca perturbação no sistema e, portanto, poderia ser desconsiderado (este termo será desconsiderado na próxima subseção). A partir disso, o espectro de frequência final é integrado sobre todos os parâmetros de impacto, sendo dado por,

$$I(\omega) = 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] b db, \quad (3.29)$$

onde  $b_{\min}$  é o parâmetro de impacto mínimo para a integral, sendo escolhido de acordo com o sistema específico a ser estudado.

O próximo passo agora é obter o número de fótons equivalentes a partir do espectro de frequência. Assim, o número de fótons pode ser escrito pela relação,

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\omega} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\omega^2} \xi^2 \left[ K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2(\xi) \right]. \quad (3.30)$$

Com isso, podemos escrever o número de fótons equivalentes para todos os parâmetros de impacto realizando uma integração em todos os  $b$ 's a partir de um  $b_{\min}$ ,

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \int_{b_{\min}}^{\infty} db \, b N(\omega, b) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2q^2}{\beta^2} \frac{1}{\omega} \left\{ \xi_{\min} K_0(\xi) K_1(\xi_{\min}) - \frac{\beta^2}{2} \xi_{\min}^2 [K_1^2(\xi_{\min}) - K_0^2(\xi_{\min})] \right\}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  $\xi_{\min} \equiv \omega b_{\min}/\gamma v$ . Conforme mencionado anteriormente o pulso  $P_2$  contribui fracamente e, portanto, será desconsiderado.

É notável que a aproximação utilizada se baseia em pressuposições semi-clássicas acerca das partículas e dos campos utilizados. Assim, a acurácia da aproximação depende das dimensões dos campos e se o momento transferido é suficientemente grande quando comparado com a incerteza sobre o momento da partícula incidente (CARUSO, 2009). Assim, supondo que os campos estejam limitados a uma região de dimensão  $a$  e se o potencial for da ordem de  $V$ , podemos considerar como válido o tratamento semi-clássico do método discutido, se forem satisfeitas as condições:

$$\frac{h}{mv} \ll a, \quad \frac{Va}{h\nu} \gg 1. \quad (3.32)$$

Para tanto, em problemas com altos parâmetros de impacto e para partículas pesadas e com alta energia cinética o tratamento dos fótons equivalentes em formulação semi-clássica pode ser realizado.

### 3.3 Sobre o Fator de Forma

O número de fótons equivalentes dado pela equação (3.30) para uma partícula incidente com distribuição pontual de carga. Entretanto, este não é o caso necessariamente e necessitamos incluir o fator de forma (BERTULANI; BAUR, 1988) (BAUR; FILHO, 1991). Assim escrevemos  $N(\omega, b)$ , como sendo,

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{Z^2 \alpha}{\beta^2 \omega b^2} \left| \int du \, u^2 J_1(u) \frac{F[(u^2 + \xi^2)/b^2]}{u^2 + \xi^2} \right|^2, \quad (3.33)$$

onde  $J_1$  é a função de Bessel,  $Z^2 \alpha$  é a carga do íon,  $\alpha = e^2/c \approx 1/137$  é a constante de estrutura fina e a função  $F$  é o fator de forma. Para uma distribuição pontual de carga o fator de forma é constante,  $F = 1$ . Isso faz com tenhamos o seguinte, resolvendo a integral,

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{Z^2 \alpha}{\beta^2 \omega b^2} u^2 K_1^2(u). \quad (3.34)$$

Esta é equivalente à expressão (3.30) para quando desprezamos o termo com  $\gamma^{-2}$ .

Para escrevermos o fator de forma vamos primeiro definir o momento transferido para a partícula incidente como  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ , em que  $\mathbf{p}$  é o momento da partícula antes da colisão e  $\mathbf{p}'$  é o momento após a colisão (POVH *et al.*, 2012). Também definimos a função de distribuição de carga  $f(\mathbf{r})$ , tal que a densidade de carga seja,

$$\rho(\mathbf{r}) = Ze f(\mathbf{r}). \quad (3.35)$$

Com isso, assumindo que o centro de espalhamento não sofre recuo (ou este é negligível) e quando  $Z\alpha \ll 1$ , o fator de forma pode ser escrito como

$$F(|\mathbf{q}|) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d^3r, \quad (3.36)$$

ou seja, é a transformada de Fourier da função de distribuição de carga. Para a maior parte dos problemas tratados, os íons podem ser modelados como tendo distribuição simétrica de carga. Assim, fazendo  $f = f(r)$ , onde  $r = |\mathbf{r}|$ , a integração sobre todo o ângulo sólido leva a,

$$F(|\mathbf{q}|) = 4\pi \int f(r) \frac{\sin(|\mathbf{q}|r)}{|\mathbf{q}|r} r^2 dr. \quad (3.37)$$

Certos fatores de forma podem ser obtidos por cálculos analíticos conforme exemplificados na Tabela 3.1 (POVH *et al.*, 2012). É notável que quanto mais estendida a distribuição de carga, mais o fator de forma cai bruscamente para valores altos de  $|\mathbf{q}|^2$ . De forma que, para uma distribuição pontual,  $F$  é uma constante ( $F(|\mathbf{q}|^2) = 1$ ).

Tabela 3.1 – Diferentes fatores de forma obtidos para diferentes distribuições de carga esfericamente simétricas.

$f(r)$		$F( \mathbf{q} )$	
Pontual	$\delta(r)/4\pi$	1	Constante
Exponencial	$\frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$	$\left(\frac{1 +  \mathbf{q} ^2}{a^2}\right)^{-2}$	Dipolo
Gaussiana	$(a^2/2\pi)^{3/2} e^{-a^2 r^2/2}$	$e^{ \mathbf{q} ^2/2a^2}$	Gaussiana
Esfera homogênea	$\begin{cases} 3/4\pi R^3, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$	$\frac{3(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha}$ , onde $\alpha =  \mathbf{q} R$	Oscilante

Fonte: Retirado de (POVH *et al.*, 2012).

Para desfazermos a dependência dessa expressão em  $b$ , realizamos a mesma integração feita para obtermos a expressão (3.31),

$$n(\omega) = \int_{b_{\min}}^{\infty} db b N(\omega, b), \quad (3.38)$$

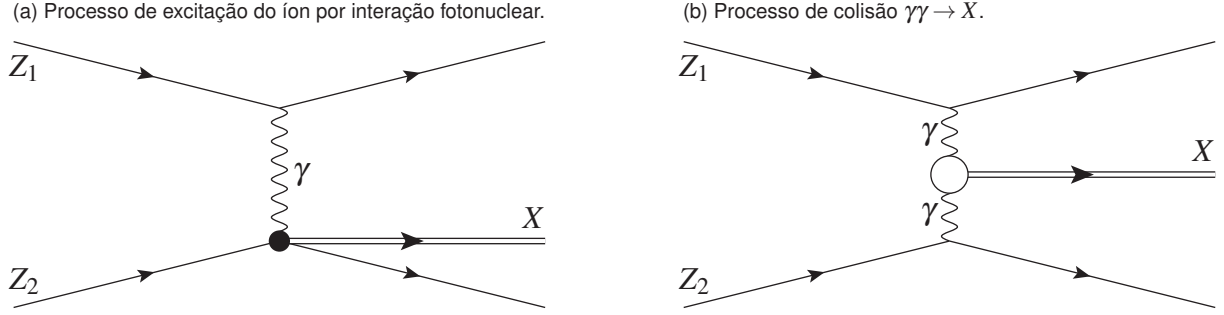
onde  $N(\omega, b)$  é dado por (3.33). Para os fatores de forma que não podem ser obtidos analiticamente, como os dispostos na Tabela 3.1, é necessário o uso de métodos computacionais para obtenção das curvas.

### 3.4 Colisões Ultraperiféricas de Íons

Fenômenos de colisão ultraperiférica são uma aplicação de interesse do método dos fótons equivalentes, uma vez que nos permitem analisar a estrutura interna dos íons envolvidos na colisão, em especial, a distribuição de glúons dos núcleos de tais íons. Esses se caracterizam por sofrerem interação, em sua maioria, eletromagnética e ocorrerem com parâmetro de impacto  $b > R_A$ , em que  $R_A$  é o raio atômico dos íons (BERTULANI; KLEIN; NYSTRAND, 2005). Nos permitindo assim,

utilizar a aproximação apresentada com suficiente êxito. Além disso, do ponto de vista experimental, essas colisões são mais convenientes do que as colisões hadrônicas convencionais. Uma vez que a multiplicidade do estado final é menor, ou seja, há consideravelmente menos partículas sendo produzidas após a colisão e o resultado final dos dados experimentais é mais “limpo”<sup>4</sup>.

Figura 3.3 – Reações de fotoprodução de estados  $X$ , a partir de íons  $Z_1$  e  $Z_2$ . Primeiramente temos a excitação do íon  $Z_2$  por um fóton emitido pelo íon  $Z_1$ , o qual emite um estado  $X$ . O segundo esquema mostra uma colisão  $\gamma\gamma$ , que gera um estado  $X$ .



Fonte: Baseado em (BERTULANI; KLEIN; NYSTRAND, 2005).

Nas colisões ultraperiféricas, em geral, dois tipos de interações entre íons ocorrem (BERTULANI; KLEIN; NYSTRAND, 2005). É possível que um dos íons emita um fóton que atinge outro, gerando um estado decorrente da excitação do íon atingido, por meio da interação fotonuclear. Outra possibilidade é que ambos os íons emitam fótons e estes colidam. Da colisão dos fótons temos a criação de um estado, em geral constituído de pares de partícula-antipartícula. Ambos os processos estão indicados na Figura 3.3. Para o cálculo de ambos os processos podemos fazer uso do número de fótons equivalentes obtido em (3.31) ou do dado pela integração de (3.33). A seção de choque para o processo de fotoexcitação, como dado na Figura 3.3a, é dada por

$$\sigma_X = \int d\omega \frac{n(\omega)}{\omega} \sigma_X^\gamma(\omega), \quad (3.39)$$

onde  $n(\omega)$  é associado ao íon que libera o fóton e  $\sigma_X^\gamma$  é a seção de choque fotonuclear. Esta é dada por uma expansão multipolar da interação eletromagnética (BERTULANI; BAUR, 1988). Para os processos  $\gamma\gamma$ , exemplificados no esquema da Figura 3.3b, a seção de choque é dada por,

$$\sigma_{Z_1 Z_2 \rightarrow Z_1 Z_2 X} = \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{n(\omega_1)}{\omega_1} \frac{n(\omega_2)}{\omega_2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}(\omega_1, \omega_2), \quad (3.40)$$

em que  $n(\omega_1)$  é o número de fótons equivalentes produzido pelos campos do íon  $Z_1$ ,  $n(\omega_2)$  é o número de fótons equivalentes produzido pelos campos do íon  $Z_2$  e  $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}$  é a seção de choque fóton-fóton.

Tanto a energia dos íons (a frequência  $\omega$ ) como o parâmetro mínimo de impacto são relacionados aos parâmetros dos experimentos de colisão realizados. Destes parâmetros, destacamos a energia máxima por feixe de íons e a luminosidade do feixe de íons (BAUR *et al.*, 2002). Ambos os

<sup>4</sup> Limpo aqui quer dizer que os colidores medem um menor volume de partículas livres. Facilitando, assim, a análise dos fluxos de partículas que são medidos.

fatores nos permitem calcular a energia por íon dos processos envolvidos. Para diferentes experimentos de colisão em colisores temos esses parâmetros disponíveis na Tabela 3.2 (WORKMAN *et al.*, 2022). Além disso, podemos citar a energia máxima de fóton (proporcional à frequência)  $\omega_{\max}$ , que é proporcional ao inverso do tempo de interação, ou ainda,

$$\omega_{\max} \sim \frac{\gamma v}{b}. \quad (3.41)$$

Estes parâmetros, evidentemente, têm utilidade para realizar uma análise quantitativa do método dos fótons equivalentes e para obtermos as curvas de seção de choque.

Tabela 3.2 – Parâmetros de colisões de íons em colisores selecionados. A energia máxima é a energia cinética máxima para os quais as partículas dos feixes são aceleradas.

Íons	Acelerador	Energia máxima por feixe	Luminosidade ( $10^{30} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ )
$e^+ e^-$	VEPP (Novosibirsk)	6,0 GeV	20
	BEPC-II (China)	1,89 GeV	1000
	CESR-C (Cornwell)	6,0 GeV	76
$p p$	LHC (CERN)	6,5 TeV	$2,11 \cdot 10^4$
$p \bar{p}$	TEVATRON (Fermilab)	0,980 TeV	431
$Au Au$	RHIC (Brookhaven)	0,1 TeV	8,7
$p Au$	RHIC	0,1 TeV	450
$Xe Xe$	LHC	2,72 TeV	0,4

Fonte: Adaptado de (WORKMAN *et al.*, 2022).

Processos que envolvem baixas energias são normalmente entendidas como excitações de coulomb relativísticas (BERTULANI; BAUR, 1988). Estes permitem investigar a dinâmica nuclear e a estrutura dos núcleos envolvidos nas colisões (BERTULANI; KLEIN; NYSTRAND, 2005). Esse tipo de processo envolve uma ou múltiplas trocas de fótons entre o íon incidente e o íon alvo. Exemplos deste envolvem os processos radiativos de captura, dados por

$$b + c \rightarrow a + \gamma. \quad (3.42)$$

Estes são de particular interesse para a Astrofísica, uma vez que processos de interesse desta área de estudo ocorrem em estados de pré-supernova por exemplo. Algumas destas podem ser estudadas pela reação inversa fóto-dissociativa. Por exemplo, a reação  ${}^7\text{Be} + p \rightarrow \gamma + {}^8\text{Be}$  pode ser estudada pelo tratamento da reação inversa no tempo  ${}^8\text{Be} + \gamma \rightarrow {}^7\text{Be} + p$ .

Agora, como afirmado anteriormente, o interesse principal no entendimento dos processos de fotoprodução é que estes nos possibilitam determinar a distribuição de glúons em núcleos de átomos e em seus núcleons (BALTZ *et al.*, 2008). Exemplos de interações que permitem tal fato são a produção exclusiva de mésons de vetores pesados, fotoprodução de pares de quark-antiquark e fotoprodução de jatos (KRAUSS; GREINER; SOFF, 1997). Inicialmente, uma densidade nuclear de glúons para um núcleo com  $A$  núcleons,  $G^A(x, Q^2)$ , é escrita como

$$G^A(x, Q^2) = A g(x, Q^2), \quad (3.43)$$

onde  $g(x, Q^2)$  é a distribuição nuclear de glúons,  $x$  é a fração do momento do projétil carregada pelo glúon e  $Q^2$  é a transferência de quadri-momento ao quadrado (BERTULANI; KLEIN; NYSTRAND, 2005).

## 4 METODOLOGIA

Na execução desse projeto de pesquisa pretendemos realizar uma leitura mais aprofundada do método de fótons equivalentes, realizando os cálculos analíticos e revisando os métodos teóricos de análise dos problemas. Nesse sentido, uma revisão do método incluirá um cálculo do fluxo de fótons equivalentes para distribuições pontuais e extensas de carga. Também, uma revisão teórica das interações eletromagnéticas em colisões relativísticas de íons será feita, com o intuito de obter um entendimento maior dos fluxos de fótons gerados pelos íons a velocidades relativísticas.

Para os cálculos que não puderem ser realizados analiticamente, usaremos de métodos computacionais para obtenção das curvas teóricas. Com isso, faremos uso da biblioteca GSL (*GNU Scientific Library*) para C e C++, que possui as funções especiais de interesse, em conjunto com rotinas de integração que serão úteis no cálculo de integrais como na equação (3.33) (GALASSI *et al.*, 2021).

Após a obtenção destes, vamos calcular as seções de choque de processos de fotoprodução para diferentes íons. Inicialmente processos de colisão  $e^-e^+$ ,  $e^-e^-$ , que possuem distribuição de carga pontual. Deduzir a seção de choque de fotoprodução de pares nessas colisões analiticamente ou obtê-las numericamente se for o caso. Disso, iremos calcular as seções de choque para alguns íons da Tabela 3.2, nos atentando para os parâmetros experimentais de energia e luminosidade, e compararemos tais curvas teóricas com os dados experimentais das respectivas colisões.



## 5 CRONOGRAMA E PLANO DE TRABALHO

### 5.1 Cronograma

A fim de cumprir com os objetivos postos, planejamos seguir com o seguinte cronograma para realização do projeto.

Tabela 5.1 – Cronograma de trabalho a ser realizado.

	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4	Mês 5
1) Revisão bibliográfica	×	×	×	×	
2) Dedução dos fatores de forma	×	×	×		
3) Cálculo do número de fótons equivalentes		×	×	×	
4) Obtenção das seções de choque dos processos		×	×	×	
5) Redação do TCC			×	×	×
6) Defesa do TCC					×

Fonte: O autor (2023).

### 5.2 Plano de Trabalho

1. **Revisão bibliográfica:** Procuraremos aprofundar o referencial teórico do trabalho. Em especial, para obter mais entendimento das colisões ultraperiféricas e dos processos eletromagnéticos dessas colisões;
2. **Dedução dos fatores de forma:** Obter os fatores de forma analiticamente ou numericamente para diferentes distribuições de carga disponíveis na literatura;
3. **Cálculo do número de fótons equivalentes:** Calcular os  $N(\omega, b)$  e  $n(\omega)$  para as diferentes distribuições de carga, utilizando os fatores de forma já calculados;
4. **Obtenção das seções de choque:** Obter as seções de choque para os diferentes íons usando distribuições de carga recomendadas na literatura para cada um, em conjunto com os fatores de forma e números de fótons equivalentes calculados;
5. **Redação do TCC:** Com o que foi obtido, tanto na revisão bibliográfica quanto no estudo realizado dos processos, escrever uma revisão do que foi obtido, em conjunto com os resultados;
6. **Defesa do TCC:** Após isso, defender o trabalho final.

## REFERÊNCIAS

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F.E. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. [s. l.]: Elsevier Editora Ltda., 2017.
- BALTZ, A.J. *et al.* The physics of ultraperipheral collisions at the LHC. **Physics Reports**, v. 458, n. 1, p. 1–171, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.12.001>. ISSN 0370-1573.
- BAUR, G.; FILHO, L.G.Ferreira. Charge form-factor effects in  $\gamma - \gamma$  production of non-strongly interacting particles in relativistic heavy-ion collisions. **Physics Letters B**, v. 254, n. 1, p. 30–34, 1991. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90390-C](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90390-C). ISSN 0370-2693.
- BAUR, G.; HENCKEN, K.; TRAUTMANN, D. Photon-photon physics in very peripheral collisions of relativistic heavy ions. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 24, n. 9, p. 1657, sep 1998. DOI: 10.1088/0954-3899/24/9/003. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/24/9/003>.
- BAUR, G. *et al.* Coherent  $\gamma\gamma$  and  $\gamma a$  interactions in very peripheral collisions at relativistic ion colliders. **Physics Reports**, v. 364, n. 5, p. 359–450, 2002. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00101-6](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00101-6). ISSN 0370-1573.
- BERTULANI, C. A.; BAUR, G. Electromagnetic processes in relativistic heavy ion collisions. **Physics Reports**, v. 163, n. 5, p. 299–408, 1988. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(88\)90142-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(88)90142-1). ISSN 0370-1573.
- BERTULANI, C. A.; KLEIN, S. R.; NYSTRAND, J. Physics of ultra-peripheral nuclear collisions. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, v. 55, n. 1, p. 271–310, 2005. DOI: 10.1146/annurev.nucl.55.090704.151526.
- BOHR, N. II. On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 25, n. 145, p. 10–31, 1913. DOI: 10.1080/14786440108634305.
- CARUSO, F. **Sobre o Método de Weiszäcker-Williams e suas Primeiras Aplicações**. 2009. Monografia do CBPF. CBPF-MO-001/09. Disponível em: [https://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/mo00109.2009\\_07\\_01\\_15\\_36\\_02.pdf](https://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/mo00109.2009_07_01_15_36_02.pdf).
- FERMI, E. Über die theorie des stoßes zwischen atomen und elektrisch geladenen teilchen. **Zeitschrift für Physik**, v. 29, n. 1, p. 315–327, Dec 1924. DOI: 10.1007/BF03184853. ISSN 0044-3328.
- GALASSI, M. *et al.* **GNU Scientific Library**. 2021. Disponível em: <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/latex/gsl-ref.pdf>.
- GRIFFITHS, D. **Introduction to Elementary Particles**. [s. l.]: John Wiley & Sons, INC., 1987.
- HARLAND-LANG, L. A. Exciting ions: A systematic treatment of ultraperipheral heavy ion collisions with nuclear breakup. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 107, p. 093004, May 2023. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.093004.
- JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. [s. l.]: John Wiley & Sons, INC., 1999.

KLUSEK-GAWENDA, M. **Production of pairs of mesons, leptons and quarks in ultraperipheral ultrarelativistic heavy ion collisions**. 2014. Tese (Doutorado) – The Henryk Niewodniczański Institute of Nuclear Physics Polish Academy of Sciences, 2014.

KRAUSS, F.; GREINER, M.; SOFF, G. Photon and gluon induced processes in relativistic heavy-ion collisions. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 39, p. 503–564, 1997. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0146-6410\(97\)00049-5](https://doi.org/10.1016/S0146-6410(97)00049-5). ISSN 0146-6410.

LEMOS, N. Mecânica relativística. In: LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. 1. ed. [s. l.]: Livraria da Física, 2007. cap. 6.

POVH, B. *et al.* **Particles and Nuclei: An Introduction to the Physical Concepts**. 6. ed. [s. l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN 9783642877780.

THOMSON, M. **Modern Particle Physics**. 1. ed. [s. l.]: Cambridge University Press, 2013.

WILLIAMS, E.J. Applications of the Method of Impact Parameter in Collisions. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 139, n. 837, p. 163–186, jan. 1933. DOI: 10.1098/rspa.1933.0012.

WORKMAN *et al.* Review of particle physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2022, n. 8, p. 083C01, 08 2022. DOI: 10.1093/ptep/ptac097. ISSN 2050-3911. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>.