

# Método dos Fótons Equivalentes

## Revisão e Aplicações

Alfredo Achterberg S. Pacheco

Orientador: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter

Defesa da Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Bacharelado em Física - Universidade Federal de Pelotas

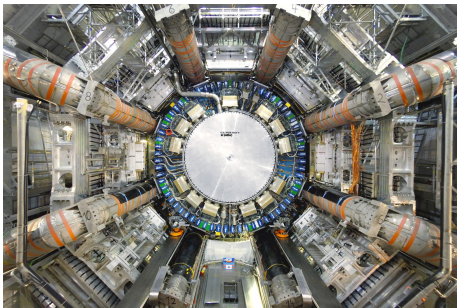
25 de Setembro, 2023



# Estrutura da Apresentação

- 1 Introdução e Contextualização
- 2 Objetivos do Trabalho
- 3 Seção de Choque Diferencial e Total
- 4 Demonstração do Método
- 5 Sobre o Fator de Forma
- 6 Colisões Ultraperiféricas
- 7 Metodologia
- 8 Cronograma

# Introdução e Contextualização



Colisões de partículas constituem o método experimental mais utilizado atualmente para o entendimento da estrutura fundamental da matéria e de teste para novos modelos físicos.

**Figura:** Foto do detector ATLAS do LHC. Créditos: [<https://home.web.cern.ch/science/experiments/atlas>]

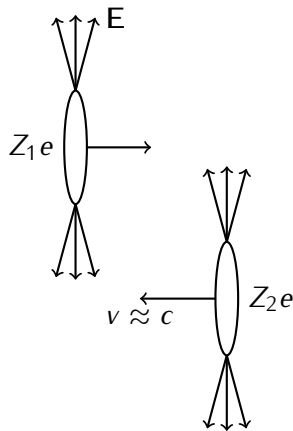
Estudos desse tipo de processo tem longa história na física.

- ▶ O trabalho de decréscimo de velocidade de partículas  $\alpha$  e  $\beta$  em meios materiais por N. Bohr, realizado em 1913;
- ▶ este propôs que a interação de partículas carregadas pode ser entendida pelo fenômeno eletromagnético de dispersão (uma analogia);
- ▶ em 1924, E. Fermi propôs que os campos de uma partícula carregada podem ser aproximados como pulsos de onda ou *fluxos de fótons virtuais*.

# Introdução e Contextualização

Disso, E. J. Williams, em 1933, propôs a generalização relativística do que seria o método dos fótons equivalentes.

- ▶ consiste em obter o número de fótons virtuais a partir da transformada de Fourier dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ;
- ▶ este consiste de uma aproximação *semi-clássica*.



**Figura:** Esquema representando os campos relativísticos de dois íons  $Z_1$  e  $Z_2$ . Adaptado de [Bertulani et al., 2005].

# Introdução e Contextualização

- ▶ Há motivação para o estudo do método nas áreas de interação nuclear e de partículas;
- ▶ focaremos nas colisões ultraperiféricas de íons;
- ▶ são colisões com maior distância (parâmetro de impacto) e com interação predominantemente eletromagnética;
- ▶ por conta disso, também há menos multiplicidade nos estados finais e os resultados experimentais são mais facilmente tratados;
- ▶ fenômenos de interesse incluem a produção de pares de partículas a partir de colisões de fótons.

# Objetivos do Trabalho

Para a realização do trabalho propomos uma revisão bibliográfica com cálculo analítico e computacional de quantidades de interesse dos processos de colisão. Para isso, temos os seguintes objetivos específicos:

- 1 realizar a revisão bibliográfica do método;
- 2 realizar o cálculo do fator de forma para o fator de forma para diferentes distribuições de carga;
- 3 deduzir o número de fótons equivalentes para diferentes distribuições de carga;
- 4 realizar um estudo mais aprofundado sobre o fenômeno de fotoprodução de pares de partícula-antipartícula;
- 5 obter as curvas teóricas para as seções de choque de diferentes processos de colisão e compará-las com as curvas experimentais.

# Seção de Choque Diferencial e Total

O problema de interesse do método é o de colisão de partículas carregadas. A quantidade de interesse em colisões é a seção de choque.



**Figura:** Partícula adentrando a região de espalhamento por uma seção de área  $d\sigma$  e sendo espalhada em um ângulo sólido  $d\Omega$ . Retirado de [Griffiths, 1987].



# Seção de Choque Diferencial e Total

Da figura temos as diferenciais,

$$d\sigma = |b db d\phi|, \quad (1)$$

$$d\Omega = |\sin \theta d\theta d\phi|, \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (3)$$

A seção de choque total vem pela integral sobre  $\Omega$ ,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (4)$$

Isto para uma partícula incidente individual!

Estamos levando em conta uma partícula individual. Se quisermos tratar um feixe de partículas, vamos precisar definir a *luminosidade*.

## Luminosidade

Para um feixe de  $N$  partículas com mesma energia atravessando a área  $d\sigma$ , a luminosidade  $\mathcal{L}$  é definida como a quantidade de partículas que atravessam a região de espalhamento por unidade de área por unidade de tempo.

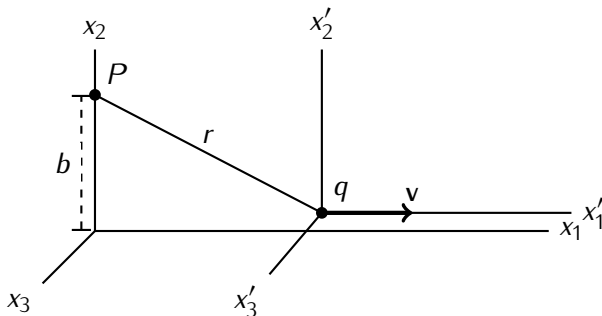
Disso, reescrevemos a seção de choque para um feixe de múltiplas partículas,

$$dN = \mathcal{L} d\sigma, \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}. \quad (6)$$

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Inicialmente consideramos uma carga em movimento como abaixo.<sup>1</sup>



**Figura:** Carga  $q$  em movimento com velocidade  $v$  passando por um ponto de observação  $P$  com parâmetro de impacto  $b$  e distância  $r$ . Referencial  $\Sigma$  é solidário ao ponto  $P$  e  $\Sigma'$  é solidário à carga pontual  $q$ . Adaptado de [Jackson, 1999].

<sup>1</sup>A partir daqui usaremos unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ).

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são escritos em forma explicitamente covariante usando o tensor eletromagnético,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

A transformada de Lorentz das componentes deste tensor é dada por,

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta}. \quad (8)$$

# Demonstração do Método para Carga Pontual

$\Lambda^\mu_\nu$  são as componentes da matriz de transformação de Lorentz, dada, para o nosso caso, como,

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

sendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  e  $\beta = v/c$  os parâmetros relativísticos da partícula.

O cálculo dos termos não nulos leva a,

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) \end{cases} . \quad (10)$$

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Escrevendo os campos nas *coordenadas* de  $\Sigma$  e depois aplicando a transformada de Lorentz temos os campos no *referencial*  $\Sigma$ ,

$$E_1(t) = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (11)$$

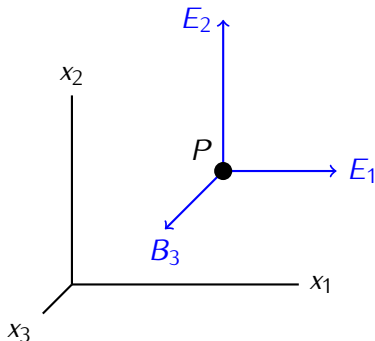
$$E_2(t) = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (12)$$

$$B_3(t) = \beta E_2(t). \quad (13)$$

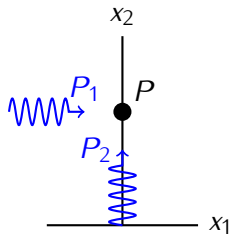
Aproximamos estes campos como pulsos de onda.

Analisando esses campos podemos notar que  $E_2$  e  $B_3$  formam um pulso de onda na direção  $x_1$ . Ainda assim, a interação do campo  $E_1$  pode ser analisada como um pulso de onda pela inserção de um campo magnético artificial como aproximação.

# Demonstração do Método para Carga Pontual



(a) Campos observados no referencial do ponto  $P$ .



(b) Pulsos aproximados  $P_1$  e  $P_2$  atingindo  $P$ .

**Figura:** Aproximação chave do método dos fótons virtuais é a de substituir os campos elétrico e magnético por pulsos de radiação equivalentes. Ambas as figuras adaptadas de [Caruso, 2009].

# Demonstração do Método para Carga Pontual

Com isso, iremos calcular agora os espectros de frequência<sup>2</sup>, para ambos os pulsos. Estes o são

$$I_1(\omega, b) = \frac{1}{2\pi} |E_2(\omega)|^2, \quad (14)$$

$$I_2(\omega, b) = \frac{1}{2\pi} |E_1(\omega)|^2, \quad (15)$$

em que

$$E_{1,2}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_{1,2}(t) e^{i\omega t}, \quad (16)$$

é a transformada de Fourier da parte elétrica dos pulsos.

---

<sup>2</sup>A energia por unidade de frequência e área de um pulso



# Demonstração do Método para Carga Pontual

O cálculo da integral para os dois campos leva ao seguinte resultado,

$$I_1(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \xi^2 K_1^2(\xi), \quad (17)$$

$$I_2(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\gamma^2} \xi^2 K_0^2(\xi), \quad (18)$$

onde  $\xi \equiv \frac{\omega b}{\gamma v}$  e as funções  $K_1$  e  $K_0$  são as funções modificadas de Bessel.

# Demonstração do Método para Carga Pontual

A partir disso, o número de fótons equivalentes pode ser obtido pelo espectro de frequência como,

$$\begin{aligned} N(\omega, b) &= \frac{1}{\omega} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\omega^2} \xi^2 \left[ K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Este pode ser simplificado:

Por conta do fator  $\gamma^{-2}$ , para velocidades relativísticas altas o termo com  $K_0$  contribui pouco para o fluxo de fótons e podemos escrever,

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{\omega^2} \xi^2 K_1^2(\xi). \quad (20)$$

# Demonstração do Método para Carga Pontual

O número de fótons total é dado pela integral de  $N(\omega, b)$  sobre os parâmetros de impacto,

$$n(\omega) = \int_{b_{\min}}^{\infty} db \, b N(\omega, b) = \frac{1}{\pi} \frac{2q^2}{\beta^2} \frac{1}{\omega} \left\{ \xi_{\min} K_0(\xi) K_1(\xi_{\min}) - \frac{\beta^2}{2} \xi_{\min}^2 \left[ K_1^2(\xi_{\min}) - K_0^2(\xi_{\min}) \right] \right\}. \quad (21)$$

Para o caso da partícula incidente não ser pontual é introduzido o *fator de forma*  $F(|\mathbf{q}|)$ . Assim, o  $N(\omega, b)$  fica escrito como,

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{Z^2 \alpha}{\beta^2 \omega b^2} \left| \int du u^2 J_1(u) \frac{F[(u^2 + \xi^2)/b^2]}{u^2 + \xi^2} \right|^2. \quad (22)$$

O fator de forma  $F(|\mathbf{q}|)$  é a transformada de Fourier da distribuição de carga  $f(\mathbf{r})$ .  $\mathbf{q}$  aqui é a transferência de momento na colisão.

# Sobre o Fator de Forma

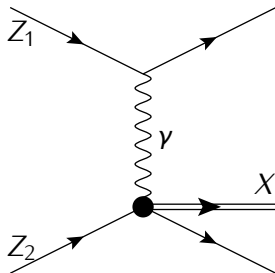
- A maior parte das distribuições de carga são esfericamente simétricas.

$f(r)$	$F( \mathbf{q} )$
$\delta(r)/4\pi$	1
$\frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$	$\left( \frac{1 +  \mathbf{q} ^2}{a^2} \right)^{-2}$
$(a^2/2\pi)^{3/2} e^{-a^2 r^2/2}$	$e^{ \mathbf{q} ^2/2a^2}$
$\begin{cases} 3/4\pi R^3, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$	$\frac{3(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha}, \alpha =  \mathbf{q} R$

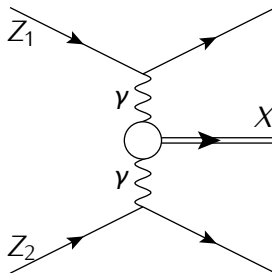
**Tabela:** Fatores de forma disponíveis para diferentes distribuições de carga esfericamente simétricas. Tabela retirada de [Povh et al., 2012].

- ▶ Possuem alto parâmetro de impacto  $b$ .
- ▶ A interação é predominantemente eletromagnética.
- ▶ Estados finais tem baixa multiplicidade → dados experimentais mais limpos!
- ▶ Fenômenos de interesse ocorrem como a produção de partículas por colisão de fótons.

# Colisões Ultraperiféricas



(a) Processo de excitação do íon  $Z_2$  pelo fóton  $\gamma$  e produção do estado final  $X$ .



(b) Processo de produção do estado  $X$  por colisão dos fótons  $\gamma$ .

**Figura:** Fenômenos de fotoprodução de estados  $X$ . Ambas as figuras retiradas de [Bertulani et al., 2005].

As seções de choque são calculadas com  $n(\omega)$

As seções de choque dos processos são obtidos com o número de fótons equivalentes. Para os processos de excitação e colisão de fótons temos, respectivamente,

$$\sigma_X = \int d\omega \frac{n(\omega)}{\omega} \sigma_X^\gamma(\omega) \quad (23)$$

$$\sigma_{Z_1 Z_2 \rightarrow X} = \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{n(\omega_1)}{\omega_1} \frac{n(\omega_2)}{\omega_2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}(\omega_1, \omega_2), \quad (24)$$

onde  $\sigma_X^\gamma$  é a seção de choque fotonuclear e  $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}$  é a seção de choque fóton-fóton.



- ▶ Energia (a frequência  $\omega$ ) e parâmetro de impacto mínimo são relacionados aos parâmetros dos experimentos de colisão;
- ▶ Destacamos a luminosidade e a energia máxima de colisão  
$$\omega_{\max} \sim \frac{\gamma v}{b};$$
- ▶ Estes são relacionados com a quantidade de íons por feixe e a energia máxima com que estes colidem.

# Colisões Ultraperiféricas

Íons	Acelerador	$\omega_{\max}$	$\mathcal{L} [10^{30} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}]$
$e^+ e^-$	VEPP (Novosibirsk)	6,0 GeV	20
	BEPC-II (China)	1,89 GeV	1000
	CESR-C (Cornwell)	6,0 GeV	76
$p p$	LHC (CERN)	6,5 TeV	$2,11 \cdot 10^4$
$p \bar{p}$	TEVATRON (Fermilab)	0,980 TeV	431
$Au Au$	RHIC (Brookhaven)	0,1 TeV	8,7
$p Au$	RHIC	0,1 TeV	450
$Xe Xe$	LHC	2,72 TeV	0,4

**Tabela:** Parâmetros de experimentos de alguns colisores. Tabela baseada em [Workman et al., 2022].

- ▶ Revisão mais aprofundada da literatura sobre os temas discutidos;
- ▶ refazer os cálculos analíticos para as quantidades de interesse nos casos em que for possível:
  - Fatores de forma  $F(|\mathbf{q}|)$ ;
  - números de fótons  $N(\omega, b)$  e  $n(\omega)$ ;
  - seções de choque  $\sigma$ .
- ▶ obter as curvas teóricas e realizar cálculos computacionais com auxílio da biblioteca GSL (*Gnu Scientific Library*) para C++.

	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4	Mês 5
1) Revisão bibliográfica	×	×	×	×	
2) Dedução dos $F( \mathbf{q} )$	×	×	×		
3) Cálculo de $N(\omega, b)$ e $n(\omega)$		×	×	×	
4) Obtenção das $\sigma$		×	×	×	
5) Redação do TCC			×	×	×
6) Defesa do TCC					×

**Tabela:** Cronograma a ser seguido na execução do projeto.

# Referências I



Bertulani, C. A., Klein, S. R., and Nystrand, J. (2005).

Physics of ultra-peripheral nuclear collisions.

*Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 55(1):271–310.



Caruso, F. (2009).

Sobre o método de weiszäcker-williams e suas primeiras aplicações.

Monografia do CBPF.

CBPF-MO-001/09.



Griffiths, D. (1987).

*Introduction to Elementary Particles*.

John Wiley & Sons, INC.



Jackson, J. D. (1999).

*Classical Electrodynamics*.

John Wiley & Sons, INC., 3 edition.



Povh, B., Rith, K., Scholz, C., and Zetsche, F. (2012).  
*Particles and Nuclei: An Introduction to the Physical Concepts*.  
Springer Berlin Heidelberg, 6 edition.



Workman et al. (2022).  
Review of particle physics.  
*Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2022(8):083C01.

# Agradecimentos



# Como escrevemos os Campos nas Coordenadas de $\Sigma$

Os campos como percebidos em  $P$ ,  
no referencial  $\Sigma'$  tem a forma

$$E'_1 = -\frac{qv't'}{r'^3}, \quad E'_2 = \frac{qb}{r'^3}. \quad (25)$$

Escrevemos nas *coordenadas* de  $\Sigma$   
usando,

$$t' = \gamma t, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{b^2 + (vt')^2} \\ &= \sqrt{b^2 + v^2 \gamma^2 t^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Assim

$$E'_1 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (28)$$

$$E'_2 = \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (29)$$

para os quais devemos aplicar a  
transformação de Lorentz.