Отчет 2: Выбор и обоснование начальной математической модели

Проект: "Математические модели для решения физических задач: Мотоциклист в сфере"

Команда: Кривошеин, Сулимов, Юдинцев

Отчетный период: Неделя 2 (24 - 30 марта)

---

1. Краткое напоминание цели проекта

Целью нашего семестрового проекта является создание математической модели и интерактивного графического интерфейса для анализа движения мотоциклиста внутри сферы ("шара смелости"). Модель должна позволять исследовать условия устойчивого движения, в частности, определить минимальную скорость для движения по экватору, необходимого для трюка с отделением нижней части сферы. Интерфейс должен предоставлять возможность изменять ключевые параметры системы (масса `m`, радиус `R`, трение μ_s, скорость v и т.д.).

---

2. Проделанная работа за неделю

В течение прошедшей недели наша команда сосредоточилась на следующих задачах:

1. **Углубленный анализ литературы:** Мы продолжили изучение рекомендованной литературы, уделяя особое внимание источникам по классической и аналитической механике (Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *«Механика»*; Goldstein H. *"Classical Mechanics"*), а также статьям, непосредственно посвященным задаче о движении внутри сферы (Abramowicz M.A., Szuszkiewicz E. *"The Wall of Death"*; McDonald K.T. *"Circular Orbits Inside the Sphere of Death"*; Черноуцан А. в *«Квант»*).
2. **Обсуждение и выбор начальной модели:** Основываясь на анализе литературы и целях проекта, мы провели обсуждение и приняли решение о выборе начальной математической модели для первого этапа разработки.
3. **Формализация начальной модели:** Мы описали выбранную модель с точки зрения действующих сил, уравнений движения и сделанных допущений.
4. **Планирование следующих шагов:** Определили задачи на следующую неделю, связанные с реализацией выбранной модели и началом разработки GUI.

3. Выбор начальной математической модели

После анализа различных подходов, описанных в литературе, наша команда приняла решение начать с **упрощенной модели, основанной на законах классической механики Ньютона**, не учитывающей на данном этапе такие факторы, как сопротивление воздуха, деформация шин, гироскопические эффекты колес, сложная геометрия мотоцикла и динамика пилота.

Рассматриваемая система:

- Мотоцикл с гонщиком рассматривается как **материальная точка** с суммарной массой m .
- Движение происходит по внутренней поверхности **идеальной сферы** радиусом R.
- Рассматривается **стационарное движение по горизонтальной окружности** – экватору сферы (на высоте $h = 0$ относительно центра сферы).
- Учитываются следующие силы:
- **Сила тяжести:** $F_g = mg$, направлена вертикально вниз.
- **Сила нормальной реакции опоры:** N, направлена перпендикулярно поверхности сферы к ее центру (в данном случае – горизонтально к центру экваториальной окружности).
- **Сила трения покоя:** F_s, направлена вдоль поверхности сферы (в данном случае – вертикально вверх, чтобы компенсировать силу тяжести). Коэффициент трения покоя между шинами и поверхностью сферы равен μ_s.

Допущения модели:

- Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.
- Мотоцикл движется с постоянной скоростью v.
- Трение качения не учитывается, рассматривается только трение покоя, удерживающее мотоцикл от соскальзывания вниз.
- Сфера является абсолютно жесткой.
- Мотоцикл рассматривается как единое целое (материальная точка).

4. Описание и уравнения выбранной модели

Для движения по горизонтальной окружности радиусом R (экватору) с постоянной скоростью v, необходимо выполнение следующих условий согласно второму закону Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную (радиальную) оси:

1. **Вертикальная ось (ось Z):** Сумма сил равна нулю, так как нет вертикального ускорения. Сила трения покоя F_s уравновешивает силу тяжести mg.

$$\Sigma F_z = F_s - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_s = mg$$

2. **Горизонтальная ось (радиальная, направлена к центру окружности):** Сила нормальной реакции N обеспечивает центростремительное ускорение $a_c = v^2/R$.

$$\Sigma F_r = N = m \cdot a_c = m\frac{v^2}{R}$$

Условие удержания на траектории:

Движение по экватору возможно только в том случае, если необходимая для компенсации силы тяжести сила трения покоя F_s не превышает максимально возможную силу трения покоя $F_{s,max}$.

$$F_s \le F_{s,max}$$

где

$$F_{s,max} = \mu_s \cdot N$$

Подставляя выражения для F_s и N из уравнений движения, получаем:

$$mg \le \mu_s \cdot \left(m\frac{v^2}{R}\right)$$

Определение минимальной скорости:

Из этого неравенства можно выразить минимальную скорость v_{min}, необходимую для поддержания движения по экватору:

$$v^2 \ge \frac{gR}{\mu_s}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}$$

Эта формула определяет минимальную скорость, при которой сила нормальной реакции достаточна для создания силы трения, способной удержать мотоциклиста от падения под действием силы тяжести при движении по экватору. Именно при достижении (и превышении) этой скорости возможно безопасное отделение нижней части сферы.

Сравнение с Отчетом 1: Отметим, что в "Отчете 1" была приведена формула $v = \sqrt{gR}$. Та формула является классическим результатом для *минимальной* скорости в *верхней* точке вертикальной петли (когда N стремится к 0) или для случая движения по экватору *гладкой* сферы *под углом* к горизонту. В нашем случае (горизонтальный экватор, наличие трения, компенсирующего гравитацию) более корректной для *минимальной* скорости является формула $v_{min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}$, которая явно учитывает необходимость трения для удержания на горизонтальной траектории. Мы считаем эту уточненную формулу основой для нашей начальной модели.

---

5. Обоснование выбора модели

Выбор упрощенной ньютоновской модели на первом этапе обусловлен следующими причинами:

- **Итеративный подход:** Мы придерживаемся принципа постепенного усложнения. Начиная с базовой модели, мы можем проверить основные физические принципы и работоспособность алгоритмов, прежде чем вводить более сложные факторы.
- **Фундаментальность:** Классическая механика (Ландау, Гольдштейн) является основой для понимания динамики системы. Данная модель позволяет наглядно продемонстрировать баланс сил (гравитация, нормальная реакция, трение) и роль центростремительного ускорения.
- **Соответствие литературе:** Рассмотренные статьи (особенно McDonald K.T. и задача из *«Кванта»*) подчеркивают важность трения для движения по горизонтальным и наклонным траекториям внутри сферы. Наша модель, хоть и упрощенная, сразу включает этот ключевой аспект (μ_s) для движения по экватору.
- **Основа для GUI:** Простая модель позволяет быстрее реализовать базовую версию графического интерфейса и проверить взаимодействие пользователя с параметрами (m, R, μ_s, v).
- **Контрольные точки:** Результаты, полученные с помощью этой модели (например, v_{min}), можно будет качественно сравнить с оценками из литературы (например, с задачей из *«Кванта»*, хотя там рассматривается движение выше экватора).

---

6. Возможные трудности и ограничения модели

Мы осознаем ограничения выбранной модели:

- Пренебрежение сопротивлением воздуха может быть существенным на высоких скоростях.
- Модель материальной точки не учитывает размеры мотоцикла, его наклон (контрруление), гироскопический эффект колес, которые важны для устойчивости.

- Предположение о постоянной скорости и движении строго по экватору является идеализацией.
- Коэффициент трения на практике не является константой.

Эти факторы будут учтены на последующих этапах разработки проекта.

---

7. Планы на следующую неделю

1. **Программная реализация:** Реализовать расчет минимальной скорости $v_{min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}$ и базовую симуляцию движения точки по экватору на Python.
2. **Начало разработки GUI:** Спроектировать структуру графического интерфейса (выбор библиотек, например, Tkinter, PyQt или Kivy), создать основные элементы для ввода параметров (`m`, `R`, μ_s, `g`) и вывода результата (v_{min}).
3. **Исследование моделей с учетом сопротивления воздуха:** Начать более детальное изучение литературы по аэродинамике (Anderson J.D., Hucho W.H., Kamble A. et al.) для планирования следующего этапа усложнения модели.
