Мотоциклист в сфере

Математические модели для решения физических задач

Команда: Кривошеин Алексей, Сулимов Андрей, Юдинцев Степан

Цель проекта

Основная цель:

Старый цирковой номер - в шар въезжает мотоциклист и начинает разгонять мотоцикл, так что в конце концов мотоцикл движется по экватору шара. После этого нижняя часть шара отделяется. Какая минимальная скорость мотоцикла для этого требуется.

Ключевые задачи:

- Определение минимальной скорости для устойчивого движения.
- Исследование условий отрыва нижней части сферы.
- Предоставление пользователю возможности изменять параметры (масса, радиус, трение и т.д.) и визуализировать результаты.

Роли в команде

- **Кривошеин Алексей:**
  - Интеграция модели и GUI.
  - Написание отчетов и документации.
  - Тестирование и верификация результатов.
- **Сулимов Андрей:**
  - Разработка графического интерфейса (PyQt5, 3D-визуализация).
  - Реализация элементов управления и отображения данных.
  - Анализ источников
- **Юдинцев Степан:**
  - Разработка динамической модели (Python, численные методы).
  - Реализация физических алгоритмов (силы, отрыв, коррекция траектории).

Анализ литературы

- **Ключевые источники:**
  - Ландау, Лифшиц “Механика” — основы классической механики.
  - Goldstein “Classical Mechanics” — углубленный анализ динамики.
  - Статьи McDonald K.T. и Abramowicz M.A. — задачи о движении внутри сферы.
  - Журнал «Квант» — практические примеры и аналогичные задачи.
- **Как литература повлияла на работу:**
  - Подтвердила корректность формулы минимальной скорости.
  - Показала важность учета трения для движения выше экватора.
  - Вдохновила на переход от статической к динамической модели.

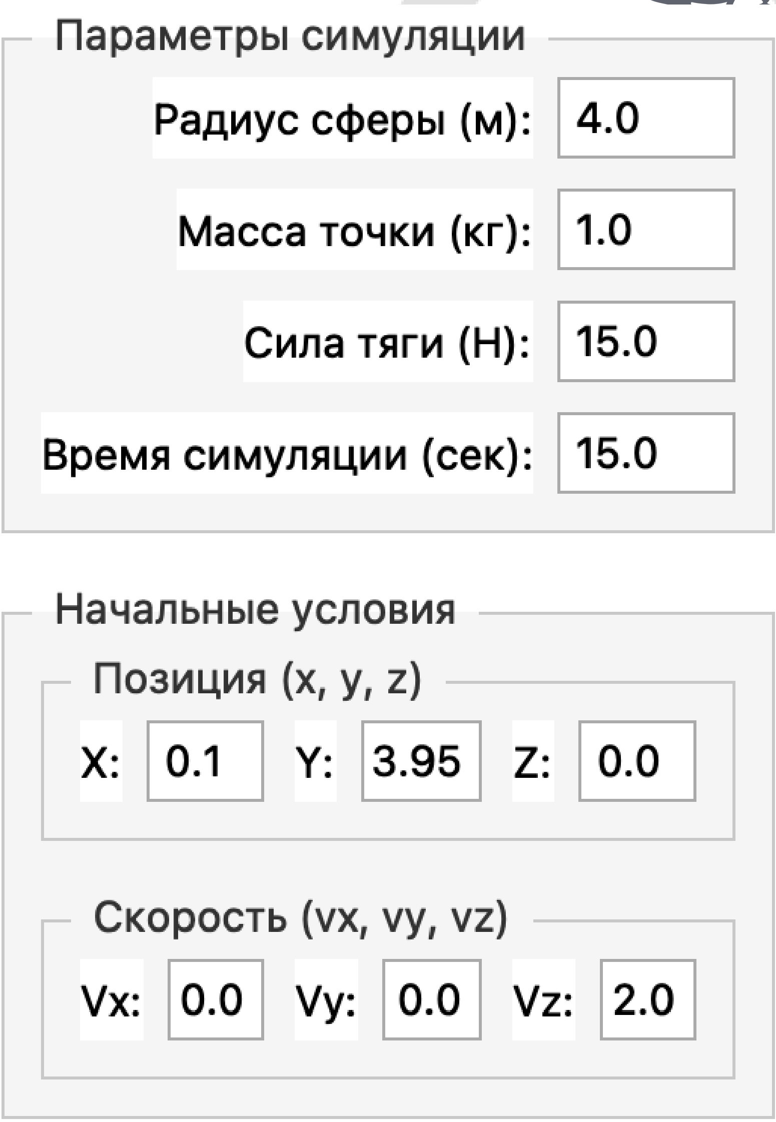
Математическая модель

Выбор алгоритмов и методов

- **Ньютоновская механика:**
  Выбрана как базовая модель для простоты и наглядности. Позволяет быстро проверить гипотезы.
- **Лагранжев формализм:**
  Использован для верификации результатов и учета геометрических ограничений.
- **Численный метод Semi-implicit Euler:**
  Выбран для динамической модели из-за устойчивости и простоты реализации. Позволяет шаг за шагом рассчитывать траекторию.
- **PyQt5 для GUI:**
  Обеспечивает интерактивность и удобную 3D-визуализацию.

Входные данные модели

Геометрия сферы: радиус сферы R (м).
Масса: общую массу точки m
Двигательная сила: максимальная сила тяги двигателя F_{drive} (Н)
Время симуляции: T_{sim} (с)
Начальные условия: начальная позиция $\mathbf{r}0 = (x_0, y_0, z_0)$ на внутренней поверхности сферы начальная скорость $\mathbf{v}0 = (vx0, vy0, vz0)$



Выходные данные модели

Траектория движения: функция $\mathbf{r}(t)$, представление в 3D-графике
Скорость : функции $\mathbf{v}(t)$, а также скалярная скорость $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$
Критическая минимальная скорость на экваторе: значение v_{crit}

Информация о точке (текущий кадр)

Критическая скорость: 6.26 м/с

Время: 1.275 сек

Позиция (x,y,z): (-1.975, -0.966, -3.342)

Скорость (vx,vy,vz): (8.131, 4.242, -6.032)

Скорость (скаляр): 10.977 м/с

Математическая модель

Используем второй закон Ньютона:

$$m, \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\mathrm{g} + \mathbf{F}\mathrm{drive} + \mathbf{F}\mathrm{fr} + \mathbf{F}\mathrm{drag} + \mathbf{N}$$

Нормаль:

$$\mathbf{N} = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\phi$$

Трение:

$$|\mathbf{F}\mathrm{fr}| \leq \mu N$$

Критическая скорость:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu}}$$

Метод Эйлера / Рунге-Кутты

Сравнение моделей

Статическая модель:

- Равновесие сил, нет ускорений
- Позволяет найти $v_{\min}$, но не процесс

Динамическая модель:

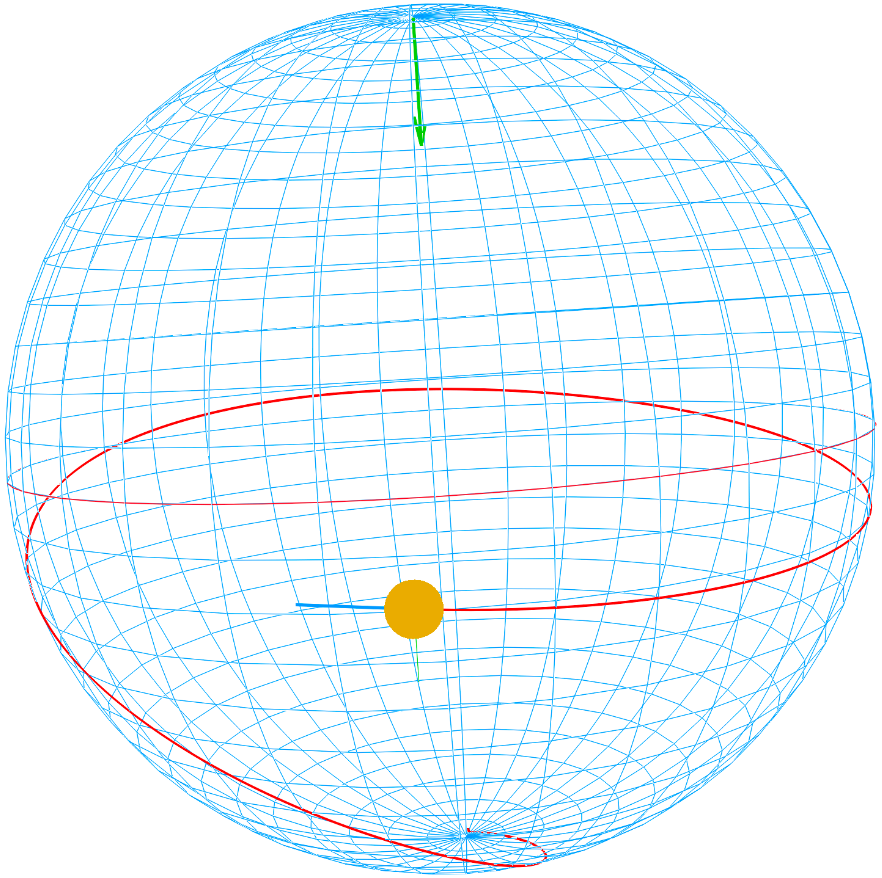
- Определяет эволюцию $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$
- Учитывает инерцию, отрыв, переходы
- Показывает реальную траекторию
- Может моделировать отрыв от стены

Вывод:
Динамика точнее, применима к любому моменту
Преимущественна для симуляций и анимаций

Результат

Трудности и решения

- **Проблемы:**
  - Численный дрейф при интегрировании.
  - Физическая корректность условий отрыва.
  - Интеграция сложной логики в GUI.
- **Решения:**
  - Жесткая коррекция положения точки на сфере.
  - Введение запаса в условии отрыва ($\times 1.05$).
  - Постепенное усложнение модели (итеративный подход).



Результаты

- Реализована работоспособная динамическая модель и интерактивный GUI.
- Получены результаты, согласующиеся с теоретическими предсказаниями.
- Проект предоставляет удобный инструмент для анализа движения мотоциклиста в сфере.

Спасибо за внимание!

Мы готовы ответить на ваши вопросы