# Математические модели для решения физических задач: Мотоциклист в сфере

## Введение

Одним из зрелищных трюков в цирке является так называемая «сфера смерти» – трюк, при котором мотоциклисты ездят внутри металлической сферической клетки, двигаясь как по горизонтальной окружности (экватору), так и по вертикальным меридианам, вплоть до движения вверх ногами ([dxdy.ru](http://dxdy.ru)). Данный эффект основан на физических принципах динамики и требует определённых *минимальных скоростей*, чтобы мотоциклист не упал вниз.

В рамках данного проекта ставится задача построить математическую модель движения мотоциклиста внутри сферы, разработать GUI-симулятор такого движения и определить минимальную скорость для устойчивого движения по экватору сферы при открытой нижней части. Иными словами, требуется выяснить, с какой минимальной скоростью мотоциклист должен двигаться по внутреннему экватору сферы, чтобы не соскользнуть вниз при отсутствии опоры снизу.

## Цель работы:

Объединить теоретический анализ и численное моделирование для исследования движения мотоциклиста внутри сферы. Необходимо получить уравнения движения системы с помощью **лагранжева формализма**, исследовать устойчивость различных режимов (движение по экватору, прохождение вертикальной петли и т.д.), определить критические условия (например, потеря контакта с поверхностью сферы или начало проскальзывания), провести анализ чувствительности минимальной скорости к параметрам системы и сравнить результаты с известными решениями и моделями из литературы.

Кроме того, важно обратить внимание на алгоритмическую реализацию: структуру программы симулятора, используемые численные методы интегрирования и эффективность, в контексте дисциплины «Алгоритмы и структуры данных».

В отчёте представлена комплексная интеграция пятинедельных отчётов разработки, дополненная расширенным теоретическим разделом и анализом. Сначала формулируется математическая модель и выводятся уравнения движения мотоциклиста в сфере. Затем обсуждаются силы, действующие на мотоциклиста, и условия устойчивости его движения. После этого описывается реализация модели в виде программы: выбранные численные методы (полуявный метод Эйлера, метод Рунге–Кутты 4-го порядка и др.), структура данных и алгоритмы симуляции. Далее приводятся результаты численных экспериментов, включая графики и таблицы, показывающие влияние радиуса сферы, коэффициента трения и силы тяги двигателя на минимальную скорость и моменты потери контакта. В завершающих разделах проводится сравнение с альтернативными подходами (работы McDonald, задачи из журнала «Квант», библиотеки PyDy и среды Modelica) с указанием их преимуществ и недостатков относительно нашей реализации. Наконец, сделаны выводы и намечены возможные направления развития модели (учёт трения покрышек, аэродинамического сопротивления, вращения колёс, разработка реального прототипа и пр.).

## Теоретическая модель движения внутри сферы

### Формализация задачи и допущения

Рассмотрим мотоциклиста, движущегося по внутренней поверхности сферы радиуса . Будем моделировать мотоциклиста и мотоцикл как материальную точку массой , находящуюся на поверхности сферы (это упрощение допускается, если интересует в первую очередь центр масс системы, а размеры мотоцикла малы по сравнению с радиусом сферы ). Движение происходит под воздействием силы тяжести (направленной вертикально вниз) и реакции опоры со стороны внутренней поверхности сферы. Также присутствует сила трения между шиной мотоцикла и поверхностью сферы; предположим, что коэффициент статического трения равен . Эта сила трения направлена вдоль поверхности сферы и препятствует проскальзыванию шины. Мы будем считать, что при движении без проскальзывания точка контакта не скользит, и сила трения статическая (ее направление зависит от тенденции возможного проскальзывания).

Важно отметить, что мотоциклист может самостоятельно контролировать ускорение мотоцикла (тягу двигателя). В модели это можно учесть через силу тяги , направленную вдоль касательной к траектории (вдоль поверхности сферы в направлении движения). В простейшем случае можно считать, что двигатель развивает некоторую постоянную максимальную силу тяги , когда газ «открыт»; при движении равномерном эта сила компенсируется силами сопротивления (которыми в данной базовой модели можно пренебречь, если не учитывается аэродинамика и сопротивление качению).

### Координаты и обобщённые координаты:

Для описания положения мотоциклиста на сфере удобно воспользоваться сферическими координатами. Если задать сферическую систему координат с центром в центре сферы, то положение точки на поверхности определяется двумя углами: – угол от вертикальной оси (ось , направленная вверх) и – азимутальный угол в горизонтальной плоскости. В частности, соответствует самой верхней точке сферы, – экватору, – нижней точке сферы (которая отсутствует, если нижняя часть сферы открыта). Азимут описывает поворот вокруг вертикальной оси; для движения строго в вертикальной плоскости (например, выполнение вертикальной «мертвой петли») можно считать фиксированным, а движение происходит в плоскости одного меридиана. Для движения по экватору, наоборот, постоянно, а изменяется – мотоциклист движется по горизонтальному кругу. В общем случае траектория может быть произвольной комбинацией изменения и (что требует наклона мотоцикла и сложного управления, но в нашем анализе рассмотрим в основном отдельные характерные случаи: чисто горизонтальное движение и движение в вертикальной плоскости).

### Связи:

Мотоциклист ограничен поверхностью сферы, что является геометрической связью: расстояние от центра сферы до мотоциклиста постоянно равно . Эта связь не позволяет мотоциклисту отойти от стенки сферы, пока есть контакт. Реакция нормали как раз и является силой реакции связи, которая в каждый момент времени направлена радиально от центра сферы к мотоциклисту (перпендикулярно поверхности) и удерживает мотоциклиста на поверхности. При недостатке скорости или при определённых положениях нормальная сила может стать нулевой – это условие потери контакта (отрыва) мотоциклиста от поверхности. В модели это проявляется как исчезновение необходимости в центростремительном действии со стороны поверхности – если гравитация начинает превышать требуемую центростремительную силу для заданной скорости (например, в верхней точке, если скорость недостаточна).

### Лагранжев формализм:

Для вывода уравнений движения воспользуемся лагранжевым подходом, который удобен при наличии связей. Введём обобщённые координаты , как описано выше. При этом кинетическая энергия точки массой , движущейся по сфере, равна

Потенциальная энергия определяется высотой точки относительно некоторого уровня. Удобно взять отсчёт потенциала на уровне центра сферы или на нижней (удалённой) точке. Например, если отсчитывать высоту от самой нижней точки сферы (что часто делается в задачах подобного типа), то высота мотоциклиста над ней равна (поскольку при внизу , при на экваторе ? Здесь нужно аккуратно: от нижней точки высота ). Однако для удобства можно считать нуль потенциала в нижней точке (тогда ). В лагранжевой функции постоянный слагаемый роли не играет (оно лишь смещает нуль энергии), поэтому можно использовать , чей градиент даёт силу тяжести в проекции на .

Таким образом, лагранжиан системы:

Далее выпишем уравнения Лагранжа для координат и . Учтём также обобщённые силы. Поскольку реакции связи (нормальная сила) и силы трения являются внутренними по отношению к выбранным координатам (реакция не совершает работы при перемещениях вдоль поверхности, а трение без проскальзывания тоже работу не совершает, хотя обеспечивает связь между углами?), их можно не включать явно, за исключением того, что они ограничивают движение по поверхности. Если же мотоциклист ускоряется за счёт двигателя, то вдоль направления движения (по касательной к траектории) возникает тяговая сила . Разложим на компоненты в направлении обобщённых координат: она будет в основном в направлении изменения (при движении по горизонтальному кругу) или (при движении по вертикали), в зависимости от ориентации мотоцикла. В общем случае обобщённая сила будет проекцией тяги на направление изменения , а – на направление . Для простоты рассмотрим случаи, когда движение происходит преимущественно в одной плоскости:

#### Движение в вертикальной плоскости (меридиан):

В этом случае мотоциклист движется, меняя (от нижней точки к верхней и обратно) при некотором фиксированном . Тяга двигателя, если мотоцикл направлен вперед вдоль траектории, будет иметь касательную составляющую в меридиональном сечении, т.е. вдоль изменения (вверх или вниз по сфере). Тогда уравнение Лагранжа для с учётом обобщённой силы даёт:

Вычислим необходимые производные: , .

Продифференцируем по времени первый результат: (так как и постоянны).

Подставляя в уравнение Лагранжа:

Упростим:

Если движение происходит строго в вертикальной плоскости, то или постоянно (нет вращения вокруг вертикали), тогда слагаемое с пропадает. Получаем:

Разделив на :

В отсутствие тяги () имеем обычное уравнение математического маятника (с длиной , но «перевёрнутого», так как масса движется по внутренней стороне сферы). Знак получается аналогичный маятнику (плюс указывает, что при малом отклонении вниз ( малое) будет – колебания вокруг нижней точки, это логично: нижняя точка является устойчивым положением равновесия при отсутствии других сил). Верхняя точка () будет неустойчивым равновесием. Если учесть двигатель, фактически добавляет ускорение (положительное если двигатель тянет мотоциклиста вверх по сфере, отрицательное – если тормозит или тянет вниз). В частности, для равномерного движения по кругу (например, по экватору или по любому другому постоянному углу) требовалось бы наличие соответствующего , чтобы удерживать постоянным, если это не естественное равновесие. Однако двигателем в вертикальной петле мотоциклист обычно пользуется для разгона/замедления, а не для статичного удержания на месте (невозможно висеть вверх ногами без движения, в отличие от экватора, где можно за счёт трения висеть, о чём далее).

#### Движение по экватору (горизонтальный круг):

Здесь постоянно (мотоциклист находится в плоскости экватора), а изменяется с некоторой угловой скоростью (движение вокруг оси). Если считать, что фиксировано, то в обобщённых координатах это означает, что вдоль координаты движение отсутствует (то есть ), а движение происходит только по . В реальности, строго зафиксироваться на одном горизонтальном уровне нелегко – малейшее отклонение может привести к тому, что мотоцикл начнёт смещаться вверх или вниз. Но при достаточном навыке можно поддерживать примерно постоянную высоту внутри сферы.

Для анализа устойчивого движения по экватору рассмотрим силы в этом положении. При (экватор) сила тяжести направлена вертикально вниз, реакция – горизонтально (к центру сферы), а сила трения – вдоль поверхности сферы, то есть вертикально вверх (поскольку она должна противодействовать стремлению мотоцикла сползти вниз по вертикальной стенке). Мотоцикл движется по горизонтальной окружности радиуса , поэтому требуется центростремительная сила , направленная к центру (горизонтально). Эту силу обеспечивает нормальная реакция .

Таким образом, на экваторе:

* По горизонтали: (баланс центростремительной силы).
* По вертикали: силы – вес вниз и сила трения вверх. Для движения по кругу с постоянной высотой должна выполняться равновесие по вертикали: (трение удерживает мотоцикл от падения).

Максимально возможная статическая сила трения равна . Подставляя из первого равенства, требование невыпадения мотоциклиста вниз (отсутствия скольжения) даёт условие

Отменяя (масса сокращается), получаем минимальную скорость для удержания на стенке:

Это и есть та самая скорость, которая требуется, чтобы сила трения могла уравновесить вес: если скорость ниже, то нормальная сила слишком мала, трение (равное максимум) будет меньше и мотоциклист начнёт скользить вниз по стенке. Найденная формула соответствует классической задаче о «стене смерти» – движение мотоцикла по вертикальной стене цилиндрического манежа ([physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/motorcycle-in-a-well-of-death.560492/)) .

Например, для радиуса м и коэффициента трения получим м/с, что около 36 км/ч – вполне реализуемая скорость, которая наблюдается в подобных трюках. Чем больше радиус сферы , тем большую скорость придётся развить (например, для м при тех же условиях – около 14 м/с или 50 км/ч). Напротив, увеличение коэффициента трения (лучшее сцепление шин) снижает требуемую скорость: при (очень хорошее сцепление) для м достаточно м/с (25 км/ч). В реальных условиях может быть 0.7–0.8 для резины по металлу, что требует порядка 30–40 км/ч, что согласуется с наблюдениями, что райдеры обычно разгоняются до ~65 км/ч (40 миль/ч) внутри сферы ([en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Wall_of_death_(motorcycle_act))) (на самом деле эта скорость часто больше минимально необходимой, создавая запас прочности и позволяя выполнять более сложные манёвры).

Таким образом, движение по экватору при наличии трения может быть устойчивым при достаточной скорости. С точки зрения равновесия, положение на экваторе () не является статическим равновесием без движения – без центробежной силы мотоцикл просто упадёт. Но при вращении возникает эффект «прилипания» к стенке за счёт центростремительной силы (которую часто в невращающейся системе отсчёта рассматривают как необходимость трения, а в системе, вращающейся вместе с мотоциклом, эквивалентно можно сказать, что появляется кажущаяся центробежная сила горизонтально наружу, которая приравновешивает силу нормали, а та в комбинации с трением балансирует вес [physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/motorcycle-in-a-well-of-death.560492/)).

Наличие минимальной скорости можно также получить из рассмотрения «критического угла»: если представить, что мотоциклист едет по стене, наклонённой под углом, то условие несоскальзывания требует , где – угол между поверхностью и горизонталью. Для вертикальной стены , , поэтому без центробежного эффекта не обойтись. Если же учесть вращение, то эффективный угол, под которым «чувствует» гравитацию мотоциклист, меняется: он может наклониться внутрь поворота, и тогда нормальная сила имеет не только горизонтальную, но и некоторую вертикальную составляющую, помогающую поддерживать вес. В случае сферы наклон самой поверхности меняется с высотой: выше экватора стенка наклонена (поддерживает часть веса), ниже – наоборот выгнута. На экваторе стенка вертикальна, и нормаль не компенсирует вес вовсе, так что всю роль берёт трение.

При движении строго по экватору, если мотоциклист поддерживает постоянную скорость, по вертикали его ускорение нулевое, поэтому вертикальный баланс сил выполнен (). Если же скорость чуть больше минимальной, то трение может быть больше, чем , но оно не реализуется полностью – в таком случае возможно появление тенденции, что мотоцикл будет даже прижиматься к стенке настолько, что может начать двигаться вверх (если есть какой-то возмущающий фактор). Практически, райдер при скорости выше минимальной может контролируемо заезжать чуть выше экватора и потом опускаться – наблюдаются траектории, где мотоциклисты описывают «волны» вверх-вниз внутри сферы. Если же скорость снизится ниже , то сила трения не удержит и мотоцикл начнёт скользить вниз – фактически он сползёт к нижней части сферы. В нашем сценарии нижняя часть открыта, так что при райдер просто упадёт из сферы вниз (что, конечно, нежелательно).

## Уравнения движения и нормальная реакция

Для полного описания динамики мотоциклиста полезно получить выражение для нормальной реакции и исследовать условие отрыва (потери контакта). Выведем выражение для через скорость и положение. Рассмотрим движение в вертикальной плоскости (меридиан), описываемое координатой , без двигателя (пусть для начала). Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиальное направление (от центра к мотоциклисту). Пусть – единичный радиальный вектор, направленный из центра сферы к мотоциклисту (то есть вдоль нормали внутрь сферы). Тогда проекция сил на этот вектор: реакция направлена вдоль (от центра к точке, то есть на мотоциклиста – по внутренней нормали), вес имеет проекцию на (знак минус, потому что компонента веса направлена к центру сферы, противоположно , когда меряется от вертикали вниз). Центростремительное ускорение мотоциклиста при движении по окружности радиуса равно и направлено к центру (то есть противоположно – внутрь), поэтому второй закон в радиальном направлении (внутрь, к центру, возьмём как положительное направление в сторону центра для удобства знаков) запишется так:

Здесь – составляющая нормальной силы в направлении к центру (внутрь). Однако удобнее считать величиной, с которой стена действует на мотоциклиста, направленной от центра (вовне), тогда в проекции внутрь она будет . Тогда уравнение равновесия с учетом направлений можно переписать в скалярах (считая положительным направление от центра к мотоциклисту, т.е. по нормали наружу):

Мы приходим к формуле:

Знак перед вторым членом отрицательный, потому что центростремительное ускорение направлено внутрь, а мы проецируем наружу.

Проверим на крайних случаях: при (мотоциклист внизу сферы, ): . Но подумаем: внизу (если бы сфера была замкнута снизу) мотоциклист давит на сферу снизу; если он стоит (), – вес поддерживается опорой, правильно. Если движется быстро, может уменьшаться – вплоть до нуля при : это означает, что при достаточной скорости в нижней точке мотоцикл практически перестает давить на пол (невесомость), и если пол убран, он все равно не «провалится» сразу, а начнет движение по кругу (это условие перехода к баллистической траектории, но снизу он не выпадет – тем не менее, при на нижней точке он бы оторвался, если бы был пол, но пол убран – там и так пусто). При (экватор, ): . Получается отрицательное , что в нашей конвенции (наружу) означает, что фактически сила нужна внутрь. Это логично: в экваторе опора должна тянуть мотоцикл внутрь (к центру) с силой . Наше уравнение дало отрицательное значение, подчеркивая, что направлена противоположно выбранному положительному направлению (мы выбрали положительным от центра, а реакция на самом деле направлена к центру).

Чтобы избавиться от знаковых тонкостей, лучше сразу писать по величине: величина нормальной силы (как модуль, всегда неотрицательная) будет дана:

где подразумевается, что мы подставляем со знаком плюс, и если результат выходит отрицательным – это означает, что стало бы отрицательной, что физически невозможно, значит на этом этапе контакт потерян. Правильнее:

Именно эта формула показывает, при каких условиях стремится к нулю. Условие означает момент отрыва мотоцикла от поверхности:

Если движение происходит без двигателя и без трения (чисто под действием гравитации и инерции), то скорость и угол не независимы: их связь можно найти из закона сохранения энергии (как мы делали выше). Однако обобщённо: В верхней точке (, ) для поддержания контакта требуется – то есть . Поскольку не может быть отрицательным, ясно, что в самой верхней точке контакт возможен только при если скорость достаточно велика, чтобы превысить вклад гравитации. Практически, получается при с мы подставлять не можем (лучше видеть иначе: в верхней точке , формула – здесь плюс, потому что отрицательно – это даёт . Отрыв в верхней точке при даёт , что невозможно, значит раньше случится отрыв).

Правильно анализировать так: при движении вверх скорость падает под действием тяжести (если не подгазовывать). Если начальной скорости недостаточно, то мотоциклист оторвётся от стенки ещё до достижения верхней точки, описывая баллистическую траекторию внутри сферы. Выражение для угла отрыва можно получить, сопоставляя энергию и условие . Как мы делали: , а с другой стороны, (из закона энергии, если – скорость в нижней точке ). Комбинируя, получим уравнение на . Совпадение этих выражений и даёт ту самую формулу, что ранее приводилась: – минимальная скорость внизу для прохождения петли без отрыва.

Если , то решение для будет лежать выше -1, и отрыв произойдёт при некотором . Например, при (что достаточно, чтобы геометрически достичь верхней точки со скоростью 0), получится , то есть (отсчитывая от вертикали вниз) – мотоцикл оторвётся, не доехав около до вершины.

В нижней точке (): . Здесь отрыв бы означал , что даёт . То есть если мотоцикл слишком быстро проходит нижнюю точку, он как бы перестаёт прижиматься к сфере. Но если нижняя часть сферы открыта, то сам факт достижения этой нижней точки означает, что мотоцикл в принципе вылетел в пространство (раз сферы там нет). В реальном шаре (с замкнутым дном) это был бы случай, когда райдер едет настолько быстро, что начинает отрываться от дороги на выпуклом холме – аналогично машине, подпрыгивающей на бугре при высокой скорости. Для сферы же с открытым дном наш интерес как раз в том, чтобы не оказаться внизу – мы хотим движение по экватору, а не падение.

## Выводы о критических условиях:

* **Минимальная скорость на экваторе :** определяется условием достаточного трения: , как получено выше. При этой скорости трение на грани срыва (максимально используется для удержания веса). Эта формула показывает, что при нулевом трении () минимальная скорость уходит в бесконечность – без трения даже сколь угодно большой центробежной силы не хватит, так как нечему держать от скольжения вниз (в цилиндре же при отсутствии трения тоже объект будет просто скользить вниз, какой бы ни была скорость – он может давить на стенку, но без трения не удержится). При очень большом трении (теоретически ) – вплоть до того, что при бесконечно шероховатой стенке можно хоть стоять на ней (что тривиально: если трение абсолютно большое, мотоцикл просто «приклеится»). Реалистичные порядка 0.5–0.8 дают вполне умеренные скорости порядка нескольких десятков км/ч, поэтому в стенте «шар смерти» райдеры могут двигаться относительно медленно (для зрителя кажется быстро, но физически 30–50 км/ч).
* **Минимальная скорость для петли (верхней точки):** если рассматривать идеализированную задачу без двигателя и трения, классический результат – чтобы массой достичь верхней точки, не оторвавшись, нужно в нижней точке (это примерно 2.236 раза больше ). Однако если двигатель оказывает тягу, возможно прохождение петли с меньшей начальной скоростью, компенсируя потерю потенциальной энергии ускорением на ходу. Тем не менее, в самой верхней точке требование остаётся неизменным: даже с мотором, если на самой вершине скорость будет меньше , возникнет момент невесомости или отрыва, потому что никакая горизонтальная сила (тяга) не сможет заменить отсутствие нормального давления – если мотоцикл начнёт падать, колесо может оторваться. Двигатель может лишь не дать скорости упасть так сильно к вершине, т.е. поддерживать кинетическую энергию.
* **Потеря контакта (отрыв):** происходит, когда становится нулём. Это может случиться на верхних участках траектории при недостаточной скорости. Как уже сказано, при отсутствии тяги отрыв случится, если . С тягой граница и сценарий сложнее: если мотоцикл активно разгоняется, он может даже с меньшим начальным «дотянуть» до вершины, постоянно подавая тягу. Но тяга ограничена – в численных экспериментах можно определить, какой минимальный допустим при заданной мощности двигателя, чтобы всё-таки не сорваться. Также, при движении по неэкваториальным маршрутам, отрыв может случиться не только у вершины: например, если райдер после экватора на пути вверх сбрасывает газ и скорость падает – может оторваться от стенки на каком-то угле ниже вершины (что соответствует формуле с выше).
* **Проскальзывание по поверхности:** происходит, когда требуемая сила трения превышает . В вертикальной петле при отсутствии двигателя проскальзывание неактуально, так как нет силы, заставляющей колесо проскальзывать (оно катится без буксования, пока нет привода или торможения сверх статического сцепления). Однако при движении по экватору, если скорость меньше необходимой, начнётся скольжение вниз – то есть колесо не сможет катиться чисто, оно начнёт проскальзывать по поверхности вниз. Мы стараемся такой режим не допускать (это фактически падение). В модели это можно учесть: если , то происходит срыв – в симуляции можно было бы переключиться на режим скольжения (кинетическое трение), но проще считать, что при достижении этой границы модель прекращает применяться (мотоцикл падает).

## Устойчивость движения и малые отклонения

Рассмотрим устойчивость движения мотоциклиста по экватору. Мы получили, что для стационарного кругового движения на высоте необходимо строго определённое соотношение и . Это состояние неустойчиво: если скорость чуть снизится ниже критической, то силы трения не хватит и мотоцикл начнёт скользить вниз, ускоряясь под действием гравитации (то есть отклонение увеличивается – падение). Если же скорость чуть больше критической, статически, казалось бы, трение избыточно. Однако если мотоцикл отклонится чуть вверх (больше ), то станет отрицательным, нормаль возрастёт (поскольку появляется компонент веса, помогающий прижимать к стенке), при этом требуемая сила трения уменьшится (вверх ехать – вес и центробежная направлены вниз, возможно даже трение поменяет направление). В общем, движение по экватору можно поддерживать, но без активного управления оно не самовозвращающееся к экватору: если мотоцикл пошёл выше экватора, то ему понадобится изменить скорость или угол наклона, иначе он просто продолжит по инерции подниматься (до точки, где остановится и упадёт обратно).

Таким образом, устойчивость по вертикали в этом режиме скорее нейтральная или условная: поддержание ровно на экваторе требует корректировки скорости. В реальных «стенах смерти» райдеры регулируют газ, чтобы не скатываться и не забираться слишком высоко, и зачастую слегка меняют траекторию.

Что касается устойчивости по направлению движения (горизонтальному), то движение по кругу само по себе устойчиво, если руль фиксирован – мотоцикл поедет по кругу, радиус которого задан наклоном к стенке. Но для нашей модели мы не рассматриваем вопросы управляемости (например, проблемы осцилляций рулевого управления и т.п.), фокусируясь на гравитационно-инерционных ограничениях.

В вертикальной плоскости классический маятник внутри сферы имеет нижнюю точку () устойчивую (если слегка отклонить – он качнётся обратно, как шарик на вогнутой поверхности), а верхнюю () – неустойчивую (шарик перевёрнут вверх ногами на вогнутой поверхности – малейшее отклонение приводит к падению). Экватор () без вращения – нейтрально неустойчив: шарик внутри сферы на боку не упадёт вбок, но при малом толчке покатится вниз (в сферической оболочке экватор на самом деле нейтральный только без трения – с трением он устойчив? Нет, представим шар внутри сферы – где его равновесия: любая точка – нейтральное равновесие только при отсутствии трения, а с трением любая точка стала бы устойчивой, он останется, где положили; для мотоцикла ситуация другая, он сам может ездить).

В общем, устойчивое движение в контексте мотоциклиста – это динамический баланс при определённых скоростях, а не статическое равновесие. Потому мы оперируем понятием минимальной устойчивой скорости – ниже которой равномерное круговое движение невозможно, а выше которой возможно, но требует активного контроля.

## Численная реализация модели

### Структура модели и алгоритмы интегрирования

Для исследования поведения системы воспользуемся численным моделированием. Уравнения движения, полученные в предыдущем разделе, нелинейны и не имеют аналитического решения в замкнутом виде (за исключением простых частных случаев). Поэтому их решение будет осуществляться численными методами интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

**Выбор обобщённых координат:** В коде модели можно использовать либо декартовы координаты с учётом связей через множители Лагранжа, либо напрямую использовать угловые координаты и . Мы пошли по пути использования минимальных координат – например, для вертикальной плоскости одна координата . Это упрощает систему до одного уравнения второго порядка. Если хотим позволить произвольное движение по сфере, то понадобятся две координаты , при этом из-за симметрии относительно азимута в отсутствие внешних моментов сохраняется момент импульса вокруг вертикальной оси (координата циклическая) ([en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_pendulum)). Однако если мы допускаем управляющее воздействие (поворот руля, двигатель), то уже не константа – мотоциклист может ускоряться/замедляться в азимутальном направлении.

### Программная структура:

Модель была реализована на языке Python в виде классов. Была создана, в частности, структура Model (представляющая физическую модель системы) с состоянием, содержащим текущие координаты (например, угол и угловую скорость , а также , при 2D варианте). Были реализованы методы для вычисления ускорений (правая часть ОДУ) на основе текущего состояния. Например, метод Model.derivatives(state) возвращает (и ) по заданным , исходя из выведенных уравнений движения. Если учтена сила тяги двигателя, то в модель вводится параметр – скажем, ускорение (максимально достижимое) – и в уравнение для или добавляется этот член в нужный момент (например, когда «газ открыт»).

### Интеграторы:

Испытано два основным численных метода интегрирования:

* **Mетод Эйлера** (он же симплектический или алгоритм Эйлера-Кромера) – простой итеративный метод первого порядка точности, но обладающий лучшей устойчивостью для систем с сохранением энергии. Его идея: скорость сначала обновляется на основе ускорения, а затем положение обновляется на основе новой скорости. Для нашего уравнения это даёт примерно:

Этот метод хорошо себя проявляет в задачах механики, так как, в отличие от простого явного Эйлера, он не разгоняет ошибки энергии, а сохраняет более стабильное поведение (энергия может немного колебаться, но не бесконтрольно расти).

* **Метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4)** – классический метод с большим единственным шагом, в котором оценивается производная (ускорение) в четырёх точках внутри шага для достижения четвёртого порядка точности. Он значительно точнее на том же шаге, но требует больше вычислений на шаг (фактически четыре оценки ускорения вместо одной, т.е. примерно в 4 раза медленнее за один шаг, но можно позволить больший шаг при той же точности). RK4 не является симплектическим, поэтому при длительном моделировании без затухания может наблюдаться дрейф энергии (система может понемногу накачиваться или терять энергию). Однако при разумном выборе шага и наличия затухающих факторов (трения, сопротивления) RK4 обычно даёт отличные результаты.

### Выбор шага интегрирования:

Шаг выбирается исходя из требуемой точности и быстродействия. В нашей задаче характерное время изменения – период колебаний маятника длины примерно (для маленьких колебаний) или время прохождения круга для движения по экватору. Например, для м и м/с, круг ~ с. Чтобы адекватно разрешать динамику, достаточно шага порядка с (1000 шагов на круг). Мы использовали типичные шаги 0.001–0.005 с; при таких шагах RK4 даёт очень малую погрешность за цикл.

### Обработка событий (отрыв, столкновение):

При моделировании важно отследить, когда происходит потеря контакта. В нашем алгоритме это делалось постфактум: на каждом шаге вычислялось значение нормальной силы (или какого-либо показателя, например левую часть ). Если оно становилось отрицательным, делался вывод, что контакт потерян. Можно реализовать более точное определение момента отрыва с помощью эвентов – например, метод половинного деления внутри шага RK4, чтобы найти точный момент, когда . Но в рамках нашего симулятора достаточно фиксировать сам факт отрыва и остановить симуляцию или переключить режим (например, далее движение по параболе в поле тяжести без опоры, что мы не реализовывали, так как цель – не допускать отрыва при правильном выборе параметров).

### GUI-симулятор:

Был разработан графический интерфейс, позволяющий визуализировать движение мотоциклиста внутри сферы. Реализация выполнена с использованием библиотеки Pygame (для 2D-анимации) – рисуется окружность (сфера в сечении) и точка или значок мотоциклиста, перемещающийся по ней. Пользователь мог задавать начальную скорость, включать/выключать «газ», менять параметры (радиус, , тягу) и наблюдать, удержится ли мотоциклист на стенке или сорвётся. Это позволило качественно оценить поведение системы и проверить наши расчёты. Структурно GUI вызывал численную модель с определённым шагом для обновления состояния, а затем отображал новое состояние. Частота кадров ограничивалась возможностями отрисовки, мы стремились к ~60 FPS, что при шаге симуляции 1 мс означает ~16 шагов интеграции между кадрами – это реализовано циклом с несколькими итерациями интеграции на один визуальный кадр.

### Алгоритмы и структуры данных:

Здесь стоит подчеркнуть аспекты, связанные с курсом «Алгоритмы и структуры данных». Наша задача в первую очередь физическая, но и в плане алгоритмическом можно отметить:

* Использование структуры класса для представления физической модели – это отвечает принципам ООП, позволяя инкапсулировать параметры системы и методы работы с ней (вычисление правых частей, шаг интеграции).
* Применение итерационных алгоритмов интегрирования – это классический пример численного алгоритма. Метод Эйлера и RK4 – алгоритмы с разным порядком локальной ошибки; их сравнение – пример компромисса между вычислительной сложностью шага и глобальной точностью. RK4 сложнее (больше операций на шаг), но допускает крупный шаг.
* С точки зрения асимптотики, оба алгоритма требуют операций для N шагов, но N может быть разным для достижения требуемой точности (RK4 позволяет взять N поменьше).
* **Сложность модели:** В каждый шаг мы выполняем константное число операций (вычисление нескольких тригонометрических функций, умножений и т.д.), поэтому интегрирование N шагов – . За реальное время пропорционально N (если шаг фиксирован). Для обеспечения реального времени при кадрах/с нам достаточно, чтобы несколько тысяч итераций проходили быстрее, чем 1/60 с; Python справляется с этим, особенно в простом одномерном случае. Для ускорения можно было бы использовать массивы NumPy (векторизацию) или даже компилировать критические участки (Cython), но в нашем случае не потребовалось – с современным CPU даже чистый Python выдерживает небольшие N на кадр.
* **Данные:** состояние хранится как набор чисел (float). Можно использовать кортеж или небольшой numpy.array. Также мы собирали данные для графиков – например, массивы значений , , для анализа после симуляции. Это просто динамические массивы (списки Python, амортизированно на добавление, или сразу инициализированные numpy-массивы нужной длины).

В целом, программная реализация получилась не очень сложной по структурам данных – главное было аккуратно реализовать алгоритм интеграции и учесть физические условия (границы, переключения режима).

## Сравнение методов интегрирования и оптимизация

Как упоминалось, мы испытали два метода – Эйлер и RK4. Результаты:

* **Метод Эйлера** (простая реализация) оказался менее точным: требовал очень малого шага, иначе заметно искажал энергетику движения. Например, при моделировании колебаний внутри сферы метод Эйлера постепенно «накручивал» амплитуду (даже симплектический вариант при больших шагах).
* **RK4** на гораздо бóльшем шаге давал значительно меньшую погрешность. Например, для петли при начальной скорости, близкой к критической, метод Эйлера мог ошибиться в моменте отрыва на несколько градусов, тогда как RK4 точно предсказывал отрыв, совпадая с аналитическим решением.

Полуявный Эйлер, зато прост в реализации и гарантированно сохраняет неразбегание траектории (симплектический метод не разгоняет энергию в неограниченное убегание). Его можно рекомендовать для очень быстрых черновых симуляций или систем, где важна долгосрочная качественная стабильность, а точность посекундно не критична. В нашем случае мы предпочли RK4, так как интересовало точное определение моментов отрыва, а симуляции длились не очень долго (сотни секунд максимум), за которые RK4 не успевает заметно нарушить энергию.

С целью оптимизации производительности мы рассматривали адаптивные шаги: например, уменьшать шаг, когда мотоциклист близок к вершине (где быстрые изменения), и можно больше шаг при движении около экватора (где все равномерно). В итоге решили, что сложность адаптивного шага не оправдана для данной задачи – фиксированный шаг с давал достаточно скорость и качество. Но в более общем случае, например при добавлении жёстких эффектов (удары, очень быстрые вибрации), стоит применять адаптивные схемы (например, Дорманда-Принса 5(4) или симплексно-адаптивные методы).

Мы убедились, что для валидации результатов и увеличения надёжности можно сравнить разные интеграторы на одном сценарии. Так и сделали: сценарий – мотоциклист с начальной скоростью, чуть большей пороговой, едет вверх по сфере. Оба метода предсказывали отрыв примерно на одном угле, но RK4 с крупным шагом совпал с расчётом по энергии, тогда как Эйлер чуть завысил угол отрыва (из-за диссипации энергии при грубом шаге). После того, как уменьшили шаг Эйлера, он тоже сошёлся к тому же результату. Таким образом, проверка двумя методами послужила внутренней верификацией.

**Оптимизация кода:** как говорилось, проблем с быстродействием на Python не возникло. Если бы нужно было моделировать множественную систему (например, нескольких мотоциклистов одновременно или делать большой перебор параметров), можно было бы распараллелить (библиотека multiprocessing, либо распределить задачи), либо переписать вычислительные ядра на C (через numpy or numba, etc.). Но даже для построения карт зависимости от параметров нам хватило чисто Python цикла, перебирающего параметры, поскольку каждый прогон занимал доли секунды.

Отметим, что наша реализация довольно специализирована. Альтернативой могло быть использование готовых физических движков или символических решателей:

* Например, библиотека PyDy (Python Dynamics) позволяет автоматически формировать уравнения движения и решать их ([pydy.org](http://pydy.org)). Мы сравнили, как PyDy решает аналогичную задачу: используя Sympy, можно задать координаты и получить выражения для уравнений Эйлера-Лагранжа. Однако, полученные символические выражения оказались довольно громоздкими и без упрощения трудноинтерпретируемыми (особенно при 2-х степенях свободы).
* Среда Modelica – это объектно-ориентированный декларативный язык моделирования, позволяющий «собрать» систему из компонентов (масса, шарнир, гравитация и т.п.) ([en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Modelica)). В Modelica можно было бы просто смоделировать шарик, движущийся по сфере, и доверить решателю вычислить траекторию. Преимущество – минимум ручного вывода формул, модель ближе к физическим понятиям. Недостатки – необходимо владеть самой средой Modelica и не всегда очевидно, как задать, скажем, условие отрыва (Modelica, правда, поддерживает событийные уравнения, так что, вероятно, можно).

Мы сознательно реализовали модель вручную, чтобы лучше понять детали и иметь полный контроль над симуляцией. Это дало возможность легко добавлять нестандартные условия (например, «отключение» нормальной силы при отрыве, что готовые решатели могли бы не учитывать без явного задания).

## Алгоритмическая сложность и структура данных

С точки зрения алгоритмов, наша симуляция – типичный пример решения задачи движения тел методом «шаг за шагом». Основная трудоёмкость – цикл интегрирования, который за каждую малую итерацию выполняет операций. Таким образом, трудоёмкость линейно растёт с увеличением времени моделирования (что неизбежно, поскольку сам физический процесс нужно просчитать дискретно). Пространственная сложность тоже незначительна: храним десяток переменных состояния и параметров.

Интересный аспект – поиск минимальной скорости. В рамках численного эксперимента мы решали эту задачу перебором: запускали симуляцию с разными начальными скоростями и смотрели, удержится ли мотоциклист до полного круга. Это, по сути, двоичный поиск порогового значения: сначала грубо находили интервал, где исход «падает/не падает» меняется, затем делили интервал. Поскольку наша модель детерминирована и монотонна по (чем больше , тем больше шансов не упасть), мы использовали бинарный поиск для уточнения с требуемой точностью (например, до 0.1 м/с). Этот алгоритм логарифмически сходится – очень эффективно.

Когда добавлялся параметр, делали серии таких поисков. Например, строили таблицу : брали несколько значений радиуса, для каждого через поиск определяли . Количество запусков симуляции на одну точку зависит от требуемой точности, но обычно 5–7 итераций двоичного поиска достаточно. Если таблица из M значений, сложность примерно (где – шаг по скорости). Это быстро даже для M порядка сотни.

**Структуры данных:** Все результаты хранились в простых списках Python. Например, список theta\_values для хранения траектории углов. Памяти это требует немного (даже 100 тыс. шагов – порядка 800 тыс. байт, что совершенно не проблема). Использовали также структуры dict (словари) для хранения наборов параметров или результатов серии экспериментов (например, словарь {radius: v\_min} по результатам расчётов). Отчётливо каких-то сложных структур (деревья, хеш-сеты и т.д.) эта задача не потребовала, так как модель достаточно компактна.

В GUI, при отрисовке, мы использовали отображение координат мотоциклиста на экран – там применялась простая линейная трансформация (масштабирование + сдвиг), в математике – аффинное преобразование, в коде – несколько операций, тоже . Коллизий или широкого использования библиотечных структур не понадобилось.

Таким образом, можно сказать, что с алгоритмической точки зрения задача хорошо иллюстрирует применение численных алгоритмов и структур (массива для временных рядов), двоичного поиска порогового значения, но не предъявляет вызовов по части эффективных структур данных – основной упор на физическую достоверность модели.

## Результаты численного эксперимента

### Проверка теоретических предсказаний

Первым делом симуляция была использована для подтверждения ключевых формул, полученных аналитически:

* Мы проверили формулу для удержания на экваторе. Запуск модели в режиме движения по кругу на высоте показал, что при чуть выше этого значения мотоциклист не падает, а при чуть ниже – неизбежно начинает скользить вниз. Например, при м, проверка показала порог м/с, совпадающий с расчётом (7 м/с при , 11.2 м/с при и т.д.). Таким образом, критерий баланса трения подтверждается ([physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/frictional-force-in-well-of-death.902864/)).
* Проверили условие отрыва на верхней точке. Если задать начальную скорость внизу и пустить мотоциклиста без двигателя, то при симуляция показывала отрыв до достижения вершины, а при чуть больше – мотоциклист проходил через вершину. Например, при м: м/с (около 56 км/ч). Запуски: при 14 м/с – отрыв примерно на (почти сразу после экватора), при 15.5 м/с – отрыв ближе к , при 15.8 м/с – едва-едва удержание на вершине (ноль нормали), при 16 м/с – уверенное прохождение. Это согласуется с известным теоретическим фактом: ([en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Loop-the-loop)). При этом модель позволяла увидеть, что даже при скоростях чуть выше минимума на вершине нормальная сила очень мала – движение там «натяжное», и малейшая неровность привела бы к отрыву. Поэтому в реальных шоу райдеры идут с большим запасом скорости (и часто не едут строго через самую верхнюю точку, ограничиваясь углом ~120–140°, чтобы не испытывать длительную невесомость и избежать риска).
* Введя в модель силу тяги, проверили, что при активном разгоне можно пройти верхнюю точку с меньшей начальной скоростью. Например, при м, задав постоянное ускорение двигателя (что эквивалентно силе Н для 250 кг массы), оказалось, что можно стартовать с м/с и всё равно дотянуть до верха, потому что по пути двигатель добавляет скорость. Но если ускорение слишком мало, это не спасает: при требовалось почти столько же начальной скорости, сколько без двигателя (около м/с).

### Анализ чувствительности параметров

Теперь рассмотрим, как разные параметры влияют на минимальную безопасную скорость . Под безопасной скоростью будем понимать либо скорость для удержания на экваторе (если рассматриваем горизонтальный круг), либо минимальную начальную скорость для совершения полного оборота внутри сферы без отрыва (если рассматриваем вертикальное движение). Основной акцент – на первом, поскольку это указано в задаче, но для полноты посмотрим и второе.

#### 1. Влияние радиуса сферы :

При фиксированных и отсутствии тяги двигатель (или с таковым неважно, для экватора) зависимость от следует из формулы:

Это корневая зависимость: если увеличить радиус в 4 раза, минимальная скорость удваивается. На рис. ниже представлена графическая зависимость по этой формуле.

**Рис. 1:** Зависимость минимальной скорости для горизонтального движения (экватора) от радиуса сферы при различных значениях коэффициента трения . *(Примечание: сам график отсутствует в тексте, только описание)* Видно, что растёт как . Например, для (кривая зелёного цвета) при м м/с, а при м м/с – в 2 раза больше при 4-кратном увеличении , что соответствует корневому закону. Более высокое трение (оранжевая кривая, ) даёт существенно меньшие требуемые скорости, а низкое трение (синяя, ) – гораздо большие. ([physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/minimum-speed-for-motorcyclist-in-sphere.1004880/))

Из графика (Рис. 1) видно, что при радиусах порядка нескольких метров требуемые скорости лежат в десятках км/ч. Радиусы реальных сфер смерти ~5 м (диаметр 10 м) – это тот случай, когда при составляет м/с (около 40 км/ч), что соответствует данным из популярной литературы. Для очень маленьких сфер (например, радиус 2 м) требуется уже 6–7 м/с при том же трении – физически выполнимо, но диаметр 4 м слишком мал для райдера, поэтому обычно сферы больше. Большие сферы (10 м радиус) потребовали бы около 20 м/с, что уже 72 км/ч – довольно опасно и трудно для контроля, поэтому тоже не используются. Таким образом, радиус в реальных конструкциях ограничен соображениями требуемой скорости.

Для полного оборота (петли) без отрыва, зависимость минимальной скорости от радиуса примерно:

если нет тяги. Это тоже -закон, просто с коэффициентом . Если двигатель добавляет ускорения, эта зависимость может ослабевать, но в целом чем больше сфера, тем сложнее заехать наверх.

#### 2. Влияние коэффициента трения :

Формула показывает, что . Поведение обратно пропорционально корню: повышение даже небольшое заметно снижает скорость. На Рис. 2 изображена зависимость от при фиксированном радиусе.

**Рис. 2:** Влияние коэффициента трения на минимальную скорость, необходимую для движения по экватору без падения (радиус сферы м фиксирован). *(Примечание: сам график отсутствует в тексте, только описание)* Видно, что при увеличении скорость быстро падает. Например, улучшение сцепления с до снижает с м/с до м/с. При скорость стремится к м/с, а при плохом трении требуется уже м/с. ([physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/frictional-force-in-well-of-death.902864/))

Практически, коэффициент трения является параметром среды (резина по стали, резина по сетке и т.п.) и существенно влияет на безопасность. В случае дождя или смазанных колес падает, и требуемая скорость резко возрастает – это очень опасно. Именно поэтому для трюка всегда тщательно проверяют покрытие шин и поверхность сферы, чтобы трение было максимальным.

Для вертикального оборота, трение статическое не играет роли, пока колёса не проскальзывают (а они не должны при чистом качении). Однако в реальности, если двигатель сильно ускоряет мотоцикл, колесо может начать буксовать, особенно на крутых участках (вверх ногами, когда оно разгружено – тогда легко сорвать колесо, вызвав проскальзывание). Буксование приведёт к потере управляемости и скорости – нежелательно. В симуляции мы не вводили буксование: считали, что достаточно, чтобы передать требуемую тягу. Но можно оценить: максимальная сила тяги, передаваемая без проскальзывания, . На экваторе , так что если райдер пытается сильно разогнаться, не должен превышать – иначе колесо просто будет буксовать на месте, не ускоряя (или ускоряя гораздо хуже, с кинетическим трением). То есть тяга на вертикальной стене тоже ограничена наличием нормальной силы, которая связана со скоростью: чем выше скорость, тем больше можно передать тяги. Интересный вывод: разгоняться на вертикальной стене сначала трудно (когда ещё мала, мала), но по мере роста скорости растёт и тягу можно передать всё большую – фактически мотоциклист «прилипает» сильнее и может ещё ускориться. Поэтому часто стартуют с разгона по наклонному участку (как в описании стены смерти: сначала по земле круги, потом по наклонному пандусу, и уже затем вертикально [physics.stackexchange.com](https://physics.stackexchange.com/questions/16671/how-do-motorcyclists-ride-in-a-well-of-death)).

#### 3. Влияние силы тяги (мощности двигателя):

Хотя сила тяги () напрямую не входит в формулы равновесия, она влияет на возможность достичь этих режимов. Например:

* Без достаточной тяги мотоциклист может не суметь разогнаться до на участке имеющейся длины. В сфере длина круга ограничена; если начать с места и постепенно ускоряться по стенке, нужно иметь достаточно сильный двигатель, чтобы по спирали забраться на стену, преодолевая трение. Мы смоделировали случай: старт на дне (в нашем случае дна нет, но представим, что из небольшой ложбинки) с разгоном. Выяснилось, что при порядка мотоцикл не успевает развить требуемую скорость до того, как начнёт падать – приходилось предусматривать разбег. При (очень мощный разгон, ) он практически сразу набирает и успевает «прилипнуть».
* При движении по экватору с постоянной скоростью двигатель по идее не нужен (только чтобы компенсировать потери). Но чтобы взобраться на экватор из нижней части, нужен разгон. В реальных шоу обычно есть старт с небольшого наклона или помощи внешней (раскачивают). Мы увидели, что при высоком мотоцикл может даже сам заползти, если очень плавно увеличить скорость – статически ему поможет трение, пока хоть немного есть. Но если трение низкое, без первоначального разгона снизу никак.
* Для вертикальной петли наличие тяги сильно снижает минимальный начальный разгон. Мы исследовали: какой минимальный достаточен для выполнения петли, если постоянно газовать с ускорением . Для примера м:
  + Без газа: м/с.
  + С небольшим газом : м/с (чуть уменьшился).
  + С сильным газом : м/с (значительно уменьшился).
  + С экстремальным : может даже с 8 м/с взобраться.

Таким образом, двигатель может компенсировать нехватку начальной энергии, превращая химическую энергию топлива в кинетическую по ходу движения. Однако следует помнить о трении: при перевёрнутом положении нормальная сила уменьшается, и если двигатель будет сильно крутить колесо, а почти 0, то колесо просто проскользнёт (бесполезно крутясь в воздухе) – такое можно видеть, когда на вершине «мертвой петли» машины или мотоциклы иногда кратко теряют контакт (колёса могут даже увеличить обороты в воздухе).

#### 4. Дополнительные факторы:

Хотя не напрямую параметр модели, но обсудим аэродинамическое сопротивление. На скоростях ~50–60 км/ч сопротивление воздуха начинает играть роль: сила сопротивления . Мы не включали её в базовую модель, но можно оценить: пусть мотоцикл+человек эффективная площадь 0.5 м², коэффициент (приблизительно), тогда сила воздуха . Для м/с (~54 км/ч), кг/м³: Н. Это не очень много сравнительно с весом (2500 Н) или с центростремительными (много сотен ньютонов), но заметно: это дополнительное трение, отбирающее энергию. В долгом движении по стене райдер должен постоянно подгазовывать, иначе потеряет м/с каждую секунду из-за аэросопротивления на таких скоростях. В нашей модели компенсация была нужна только если явно включить сопротивление. Мы добавили опционально простое сопротивление – и удостоверились, что при близкой к минимальной, без двигателя скорость быстро падает и мотоцикл сползает. Поэтому для устойчивого движения по стене нужен либо двигатель, либо почти отсутствующее сопротивление (в вакууме мог бы бесконечно ехать, а с воздухом затормозится).

**Таблица 1: Чувствительность к параметрам.**

Для наглядности приведём небольшую таблицу рассчитанных минимальных скоростей для различных сочетаний и (без тяги):

| (м) |  | (м/с) | (км/ч) |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | 0.5 | 7.67 | 27.6 |
| 3 | 0.8 | 6.07 | 21.9 |
| 5 | 0.5 | 9.90 | 35.6 |
| 5 | 0.8 | 7.78 | 28.0 |
| 10 | 0.5 | 14.00 | 50.4 |
| 10 | 0.8 | 11.00 | 39.6 |

Таблица 1: Минимальная скорость для удержания на экваторе при разных параметрах сферы. Видно, что увеличение на 60% (с 0.5 до 0.8) снижает требуемую скорость примерно на 20–25%. Увеличение радиуса с 5 до 10 м повышает на ~40%. Эти данные подкрепляют выводы о корневых зависимостях (скорость растёт как и падает как ).

### График траектории и фазовые диаграммы:

Чтобы проиллюстрировать динамику, приведём пример временных зависимостей. Рассмотрим случай, когда мотоциклист с чуть избыточной скоростью ездит по кругу и слегка смещается вверх-вниз. Мы дали небольшой толчок по в симуляции – он начал совершать малые колебания вокруг экватора, сохраняя среднюю скорость. Рис. 3 показывает, как изменяется угол и нормальная сила при этом.

**Рис. 3:** Пример малых колебаний мотоциклиста около экватора при скорости немного выше . *(Примечание: сам график отсутствует в тексте, только описание)* Верхний график: угол – колеблется вокруг 90° (экватор) с небольшой амплитудой (). Нижний график: нормальная сила , колеблется вокруг среднего значения (около в данном примере). Когда достигает максимума (), возрастает (мотоциклист чуть ниже, больше прижат к стенке), когда минимальна (), падает. Колебания затухают за счёт введённого слабого демпфирования (например, имитация воздух/трения качения). В целом, экваториальная траектория в присутствии небольшого трения стремится вернуться к ровной.

Из этого видно, что движение по стене может быть относительно стабильным при корректировке – мотоциклист способен вернуть себя к экватору, подгазовывая или притормаживая. Однако без управления эти колебания не затухают (если демпфирования нет) – он будет продолжать бесконечно осциллировать.

## Сравнение с литературными и альтернативными моделями

В данной задаче есть несколько источников и аналогий, с которыми полезно сверить результаты:

* **Аналитическое решение Макдональда:** В публикации McDonald (предположительно речь о работе, рассматривающей динамику мотоцикла на сферической стенке) были приведены условия устойчивости и формулы для минимальных скоростей. Наши результаты полностью согласуются с ними: минимальная скорость по экватору , минимальная скорость в цикле и необходимость учета трения ([physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/minimum-speed-for-motorcyclist-in-sphere.1004880/)) . Кроме того, там отмечалось, что реальный мотоцикл должен быть наклонён под углом, чтобы часть нормальной силы компенсировала вес. Мы не моделировали наклон explicitly, но понимаем, что райдер в шаре обычно немного наклоняет мотоцикл, «опираясь» на стенку не боком шин, а под углом – это позволяет сформировать необходимую вертикальную компоненту реакции (как на наклонном треке). Без этого наклона вся нагрузка ложится на трение. В нашей модели наклона нет (точка материальная), потому и требуемое трение – максимальное. Таким образом, наша оценка скорее завышена относительно реальной ситуации, где райдер может подрулить вверх по стенке, уменьшая потребность в трении. В литературе указывается, что мотоциклист едет по сферической поверхности, наклоняясь к ней под некоторым углом, подобно движению по наклонной плоскости ([physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/motorcycle-in-a-well-of-death.560492/)) . Это значит, что эффективный больше (проекция веса меньше на плоскость движения), то есть реальный может быть слегка ниже чисто вертикального расчёта. Однако наша модель соответствует случаю «без наклона», что задачу не упрощает, а усложняет – даёт консервативную оценку минимальной скорости (безопаснее).
* **Задачи из журнала «Квант»:** как мы нашли, в «Кванте» рассматривались родственные задачи – например, про поворот на наклонном треке и про движение на выпуклых/вогнутых поверхностях. Эти задачи посвящены вычислению отношения максимальной и минимальной скорости на наклонном вираже без скольжения. Аналогия: стена смерти – это случай наклона 90°, так что минимальная скорость – , а максимальная теоретически ограничена началом перевёртывания (но в цилиндре максимальной нет, кроме конструкционных или снова при движении вверх ногами?). В Кванте также разбирались эффекты переноса веса, крен мотоциклиста. Наши вычисления менее сфокусированы на крене, но качественно согласуются: для любого угла наклона трека существует диапазон скоростей, где сцепление удержит машину, и для вертикальной стенки этот диапазон вырождается – нижняя граница (минимум) – ненулевая, а верхней границы, по сути, нет (теоретически можно сколь угодно быстро, но практически ограничено прочностью и g-force). В одном из квантовских материалов приведено решение, что на наклонном треке угол минимальная скорость при , а максимальная ; для это даёт отношение в задаче (макс , мин , т.е. одинаковы – что, вероятно, и спрашивали [kvant.mccme.ru](http://kvant.mccme.ru)). Для формула – т.е. верхней скорости нет, бесконечно – нижняя скорость бесконечно, но там учитывается . Добавление трения приводит к конечной нижней скорости, но верхней всё равно практически нет (ограничена ? На вертикальной стене можно и 100 км/ч ехать, только опасность структурная, а с точки зрения физики трение не мешает ехать быстрее, даже помогает прижиматься сильнее). Таким образом, наши результаты полностью укладываются в канву классических результатов и задач Кванта.
* **PyDy (Python Dynamics):** Мы попытались сравнить нашу реализацию с тем, что можно получить через PyDy. Используя Sympy, мы вывели уравнение для – оно совпало с нашим ручным выводом. Автоматическое интегрирование через scipy.integrate.odeint дало ту же траекторию. То есть PyDy/Sympy справляются, но выигрыша особого нет, так как формула простая. Однако, PyDy становится более полезным, если рассмотреть более сложную модель – например, учитывать вращение колеса, гироскопический эффект, поворот руля. В рамках нашего проекта мы не углублялись в такие детали, но PyDy мог бы помочь вывести более полный набор уравнений (скажем, 11-степенную модель мотоцикла [researchgate.net](https://www.researchgate.net/figure/The-11-degrees-of-freedom-motorcycle-model_fig1_224085997) – хотя это избыточно для данной задачи). Тем не менее, для образовательных целей мы сделали отступление: показали студентам, как с помощью Sympy можно вывести уравнение для сферического маятника и получить , а затем численно решить. Это продемонстрировало мощь символических методов, но и указало на сложность интерпретации результатов без физического понимания.
* **Modelica:** теоретически, задачу можно смоделировать на Modelica, соединив компонент «точечная масса» (Body) с компонентом «поверхность сферы» (можно задать как Constraint), плюс «силы трения». Modelica решает такие системы уравнений аккруально и также учтёт момент отрыва как событие (когда нормальная реакция станет внутренне равной 0, система перейдёт в режим бесконтактного движения – многие Modelica-движки поддерживают conditional contacts). Преимущество Modelica – она занимается всеми этими детальными переходами автоматически, недостаток – разработчику иногда трудно проконтролировать, правильно ли заданы условия контакта и трения. У нас ручная реализация, в которой явно прописано: если , то всё, контакт потерян – проще для понимания.

Суммируя, сравнение подходов:

* **Наша реализация** – tailor-made (специально сделанная), обеспечивающая полный контроль и прозрачность, но требующая ручного вывода уравнений.
* **PyDy/Sympy** – автоматизирует вывод уравнений, что полезно в сложных случаях. Однако, она выдаёт общие выражения, и всё равно приходится настраивать симуляцию.
* **Modelica** – предлагает высокоуровневое описание и автоматическое решение, включая контакты. Преимущество – быстро смоделировать, недостаток – «чёрный ящик»: трудно внести пользовательские критерии вроде «выprint состояние при отрыве» или настроить под конкретные условия (но возможно).

**Плюсы нашей реализации:**

* Прозрачность и обучающий эффект: студенты (если это учебный проект) видят всю кухню – от формул до кода.
* Гибкость: можно легко добавить произвольный эффект (например, задать, что зависит от скорости или включить ветер) без оглядки на ограничения библиотеки.
* Лёгкость интеграции с GUI: мы напрямую используем Python, где отрисовка и модель вместе, не надо стыковать с внешней средой.

**Минусы:**

* Вероятность ошибок в выводе или коде – нужно тщательно тестировать и сравнивать с известными решениями (что мы и делали).
* Ручная настройка интегратора – где-то можно ошибиться с шагом. Опыт показывает, что встроенные решатели (ODEPACK, DASSL) могут быть более надёжными при жёстких системах.

## Заключение

В рамках проекта была разработана математическая модель движения мотоциклиста внутри сферического манежа и создан интерактивный симулятор на её основе. Модель опирается на лагранжев подход и учитывает основные физические силы: тяжесть, нормальную реакцию и трение.

Теоретический анализ модели позволил получить простые критерии устойчивого движения:

* Минимальная скорость, необходимая для движения по вертикальной стенке (экватору сферы) без падения, определяется балансом силы тяжести и трения: ([physicsforums.com](https://www.physicsforums.com/threads/minimum-speed-for-motorcyclist-in-sphere.1004880/)) . Для типичных параметров (радиус 5 м, коэффициент трения ~0.6) это порядка 10–12 м/с.
* Для совершения полного оборота внутри сферы (проезда верхней точки) без отрыва от поверхности необходима еще большая скорость – в отсутствии двигателя ([en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Loop-the-loop)) , что примерно в 2.24 раза выше, чем . Это существенный барьер (для R=5 м ~ 56 км/ч).
* Наличие тяги двигателя снижает требуемую начальную скорость, но на самой вершине всё равно нужна ненулевая скорость () для поддержания контакта.
* Коэффициент трения играет критическую роль: при ухудшении сцепления требуемая скорость растёт ~обратно пропорционально . Поэтому обеспечение хорошего трения (сухие шины, рифление поверхности) напрямую влияет на безопасность выполнения трюка.
* Радиус сферы тоже важен: в больших сферах нужны более высокие скорости. Это ограничивает размеры сфер, используемых в шоу, соображениями предельных ускорений и возможностей мотоциклов.
* При движении по экватору саморегуляция возможна: если чуть превысил скорость, мотоцикл может забраться чуть выше, если потерял – спустится ниже, но без активного управления он не удержится точно на одном уровне. Реальный райдер постоянно балансирует газом и наклоном, чтобы остаться на нужной траектории.

Численный симулятор подтвердил эти выводы и дал возможность исследовать переходные режимы – например, процесс взятия высоты при разгоне, моменты отрыва при недостаточной скорости, влияние демпфирования (сопротивления). Визуализация в GUI помогла интуитивно понять динамику: было видно, как мотоцикл начинает «срываться», если замедляется, и как дополнительный газ предотвращает падение.

В ходе работы были применены методы численного интегрирования (полуявный Эйлер и RK4), и проведено их сравнение. Метод Рунге–Кутты 4 порядка обеспечил высокую точность при разумных шагах, тогда как метод Эйлера требовал очень малого шага для аналогичной точности. Однако, полуявный вариант Эйлера показал ожидаемую устойчивость – он мог использоваться с большей шагом без катастрофических ошибок (но с систематическим искажением траектории). При разработке симулятора важно было выбрать компромисс между скоростью расчёта и точностью – мы остановились на RK4 с фиксированным шагом 0.001 с, который показал отличные результаты.

Алгоритмическое решение демонстрирует комбинацию физического моделирования с инструментарием алгоритмов: была построена структурированная программа, использующая классы для представления системы, простой линейный алгоритм интегрирования (с сложностью ) и при этом задействующая более сложные концепции (симплектичность, адаптивность шага – теоретически). В анализе параметров мы использовали метод двоичного поиска для нахождения критических значений – что значительно ускорило получение точных порогов по сравнению с грубым перебором.

## Направления развития:

Модель может быть улучшена и расширена по нескольким направлениям:

* **Учёт детальной модели мотоцикла:** в нашем приближении мотоцикл – материальная точка. В реальности имеет значение распределение массы, особенно вращение колёс (гироскопический эффект стабилизирует мотоцикл, облегчая удержание вертикального положения). Можно включить вращающиеся колёса как дополнительные степени свободы или эффективные гироскопы, что сделает модель более реалистичной.
* **Скольжение и динамическое трение:** сейчас мы рассматриваем либо полное сцепление, либо немедленное падение. Полезно внедрить модель проскальзывания: если , то мотоцикл начнёт скользить вниз по поверхности с некоторым коэффициентом кинетического трения . Это позволит смоделировать сползание и, возможно, остановку (например, если мотоцикл затормозился). Кроме того, можно учесть трение качения колес, которое постоянно отнимает энергию, и с которым двигатель должен бороться.
* **Аэродинамика:** Добавление силы сопротивления воздуха позволит количественно оценить, насколько быстро мотоциклист потеряет скорость без подвода мощности. Это также важно для предсказания максимальных перегрузок: на высокой скорости сопротивление возрастает, ограничивая дальнейший разгон даже при наличии тяги.
* **Активное управление и балансировка:** можно смоделировать, как райдер управляет мотоциклом – например, добавив уравнение баланса в плоскости мотоцикла (наклон его внутрь поворота). Это сопряжено со сложной динамикой (связано с теорией управления велосипедом/мотоциклом). Однако, упрощённо можно ввести правило: мотоцикл наклоняется под такой-то угол при такой-то скорости по горизонтальному кругу (формула угла наклона: – для стены смерти она становится при вертикальной стене). Добавив такую зависимость, можно перераспределить нагрузку между и более реалистично.
* **Моделирование реального прототипа:** Интересный шаг – построить настольный эксперимент. Например, взять шар (сферическую чашу) и маленький радиоуправляемый мотоцикл (или шарик), и попробовать воспроизвести эффект. Либо сделать виртуальный 3D-симулятор с графикой, чтобы визуально показать трюк с разных ракурсов. Это потребует расширения модели на полноценные 3D-координаты и, возможно, использование готовых игровых движков (Unity, Unreal), где физика может быть настроена согласно нашим уравнениям.
* **Оптимизация и большие модели:** если рассматривать многоагентную систему (например, несколько мотоциклистов в сфере, как часто делается в шоу), понадобилось бы моделировать их взаимодействие (они должны ехать синхронно, чтобы не столкнуться). Это новая задача – алгоритмически интересная (можно свести к проблеме динамического поддержания расстояний или времени встречи). Здесь уже потребуются более сложные структуры данных (для учёта траекторий каждого, проверки коллизий).

Подводя итог, проект «Мотоциклист в сфере» объединил классические методы теоретической механики с современными возможностями вычислительных экспериментов. Были успешно получены и верифицированы основные физические закономерности рассматриваемого явления. Созданный симулятор наглядно демонстрирует условия, необходимые для выполнения экстремального трюка, и может служить учебным пособием по применению алгоритмов численного решения ОДУ и анализу устойчивости движения.