Интерполяция, аппроксимация и сплайны

Постановка задачи

x_0	x_1	x_2	x_3	…	…	…	…	…	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	…	…	…	…	…	$f(x_n)$

$$Q(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x)$$

$$1, x, x^2, x^3 \ldots$$

$$1, \sin x, \cos x\, , \sin 2x\, , \cos 2x, \ldots$$

$$1, e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, e^{a_3 x}, \ldots$$

$$\varphi_i\,(x)$$

Интерполирование функций

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \qquad f(x)$$

x_0	x_1	x_2	x_3	…	…	…	…	…	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	…	…	…	…	…	$f(x_n)$

$$Q(x_i) = f(x_i)$$

Интерполирование функций (2)

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \qquad f(x)$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} y_i$$

Интерполяционный полином Ньютона

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})f(x_0; \ldots; x_n),$$

$$f(x_j;\ x_{j+1};\ \ldots;\ x_{j+k-1};\ x_{j+k}) = \frac{f(x_{j+1};\ \ldots;\ x_{j+k-1};\ x_{j+k}) - f(x_j;\ x_{j+1};\ \ldots;\ x_{j+k-1})}{x_{j+k} - x_j};$$

в частности,

$$f(x_0;\ x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ x_2) = \frac{f(x_1;\ x_2) - f(x_0;\ x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{n-1};\ x_n) = \frac{f(x_1;\ \ldots;\ x_{n-1};\ x_n) - f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Интерполяционный полином Ньютона
случай равноотстоящих узлов

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $q = (x - x_0)/h,\ y_i = f(x_i)$, а выражения вида $\Delta^k y_0$ — конечные разности.

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_x^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k f(k)$$

Другие формы многочленов

многочлен p_n интерполирует функцию g в точках $\tau_1, \ldots, \tau_n$

$$p = \sum_{i=1}^{n} a_i P_{i-1},$$

где (P_i) — последовательность многочленов, удовлетворяющая трехчленному рекуррентному соотношению

$$P_{-1}(x) := 0, \quad P_0(x) := 1;$$

$$P_{i+1}(x) := A_i(x - B_i)P_i(x) - C_i P_{i-1}(x), \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

$$A_i \neq 0, \ B_i, \ C_i$$

Другие формы многочленов

$A_i = 1,\ B_i = \tau_{i+1},\ C_i = 0$ форма Ньютона

Базис многочленов Чебышева (P_i)

$$A_0 = 1,\ B_0 = 0;$$

$$A_j = 2,\ B_j = 0,\ C_j = 1,\ j = 1,2,3,\ldots,.$$

Число обусловленности

$$\|p\| := \max_{a \le x \le b} |p(x)| \qquad \|a\| := \max_{1 \le i \le n} |a_i|$$

$$m\|a\| \le \|\sum_i a_i P_{i-1}\| \le M\|a\|,$$

где

$$m := \min_a \|\sum_i a_i P_{i-1}\| / \|a\|, \quad M := \max_a \|\sum_i a_i P_{i-1}\| / \|a\|$$

$$\mathrm{cond}(P_i) := M/m$$

Как используется?

$$a + \delta a \Longrightarrow p + \delta p = \sum_i (a_i + \delta a_i) P_{i-1}$$

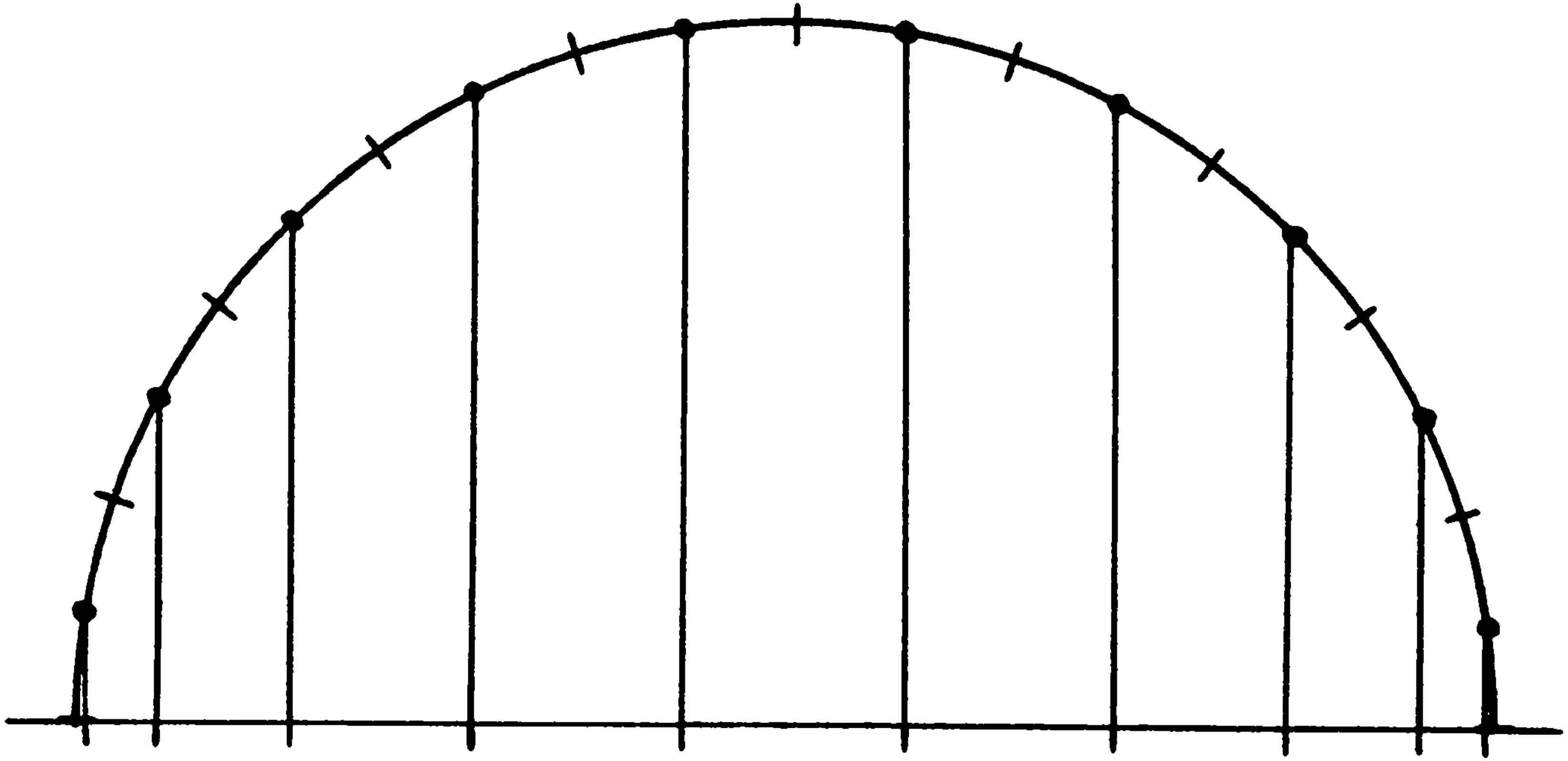
$$\frac{m\|\delta a\|}{M\|a\|} \le \frac{\|\delta p\|}{\|p\|} \le \frac{M\|\delta a\|}{m\|a\|}$$

$$M = \max_{\|c\| \le 1} \left\| \sum_i c_i P_{i-1} \right\| = n \qquad P_i(x) := (x/b)^{i-1}$$

$$T_{n-1}\left(\frac{a+3b}{b-a}\right)/n \le 1/m \le T_{n-1}\left(\frac{a+3b}{b-a}\right)$$

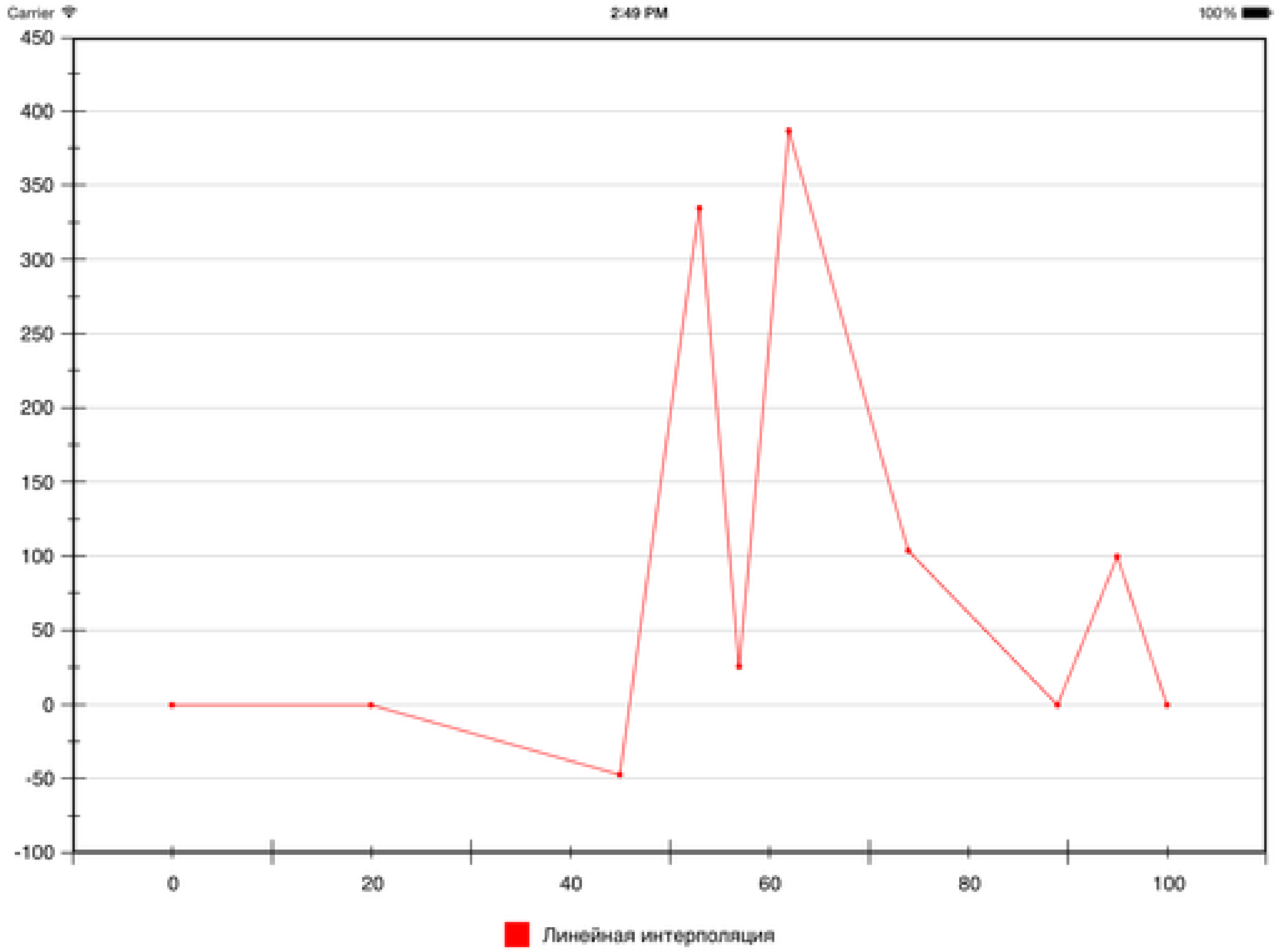
где T_{n-1} – многочлен Чебышева степени $n-1$ $\qquad T_{n-1}(x) \sim \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}$

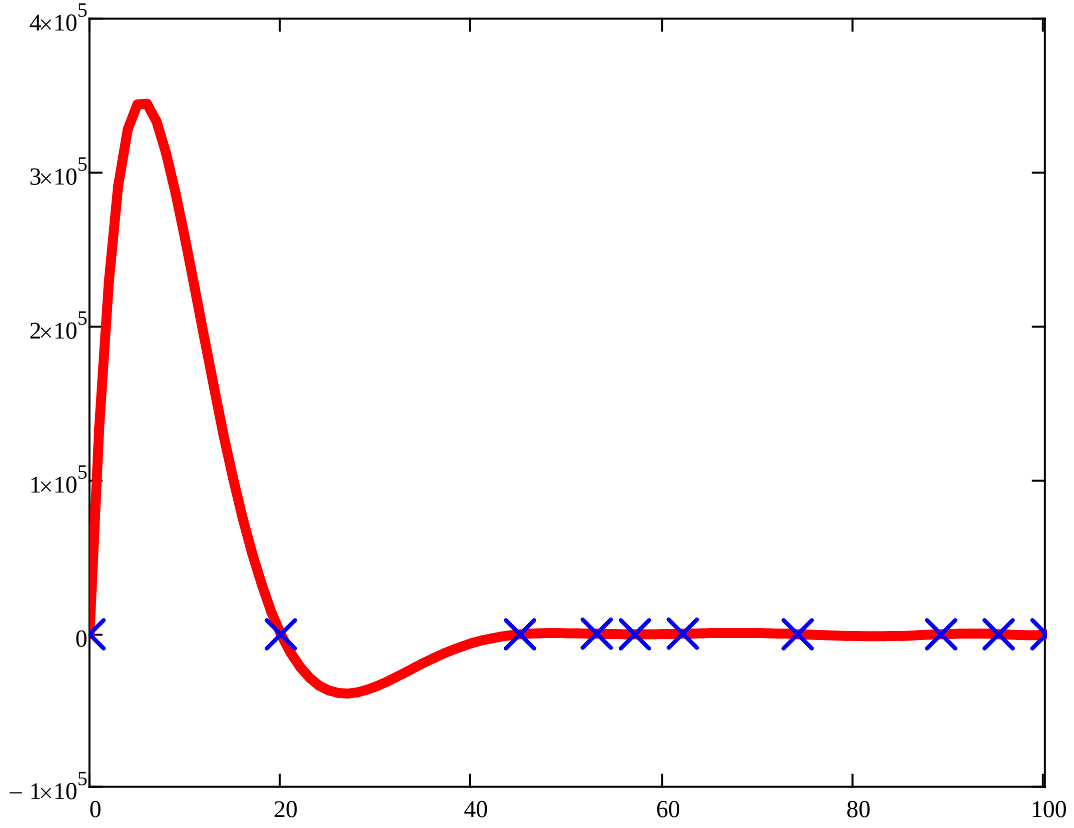
Точки Чебышева



$$\tau_j^C := (a+b - (a-b)\cos((2j-1)\pi/(2n)))/2, \quad j = 1,\dots,n$$

Кусочно-линейная аппроксимация



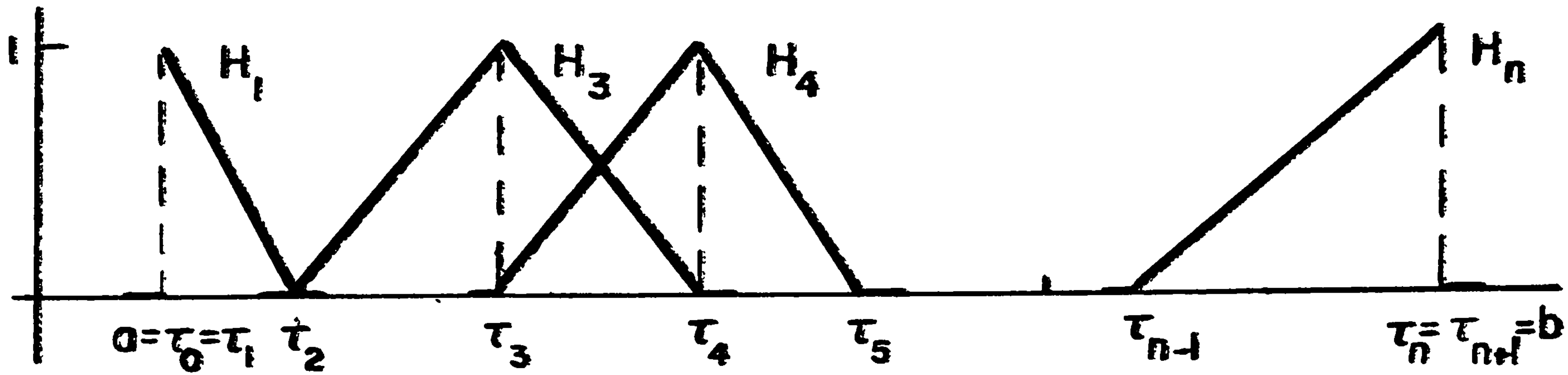


Кусочно-линейная аппроксимация

$$I_2 g(x) := g(\tau_i) + (x-\tau_i)[\tau_i, \tau_{i+1}]g$$

на интервале $\tau_i \le x \le \tau_{i+1}, \quad i = 1,\dots,n-1$

$$I_2 g = \sum_{i=1}^{n} g(\tau_i) H_i \qquad H_i(x) := \begin{cases} (x-\tau_{i-1})/(\tau_i-\tau_{i-1}), & \tau_{i-1} < x \le \tau_i \\ (\tau_{i+1}-x)/(\tau_{i+1}-\tau_i), & \tau_i \le x < \tau_{i+1} \\ 0 & \text{, в других случаях.} \end{cases}$$



Кусочная интерполяция (кубические сплайны)

$$f(x) = P_i(x) \quad \tau_i \le x \le \tau_{i+1} \quad P_i \in \mathbb{P}_4$$
$$i = 1,\ldots,n-1$$

$$\left.\begin{array}{ll} P_i(\tau_i) = g(\tau_i), & P_i(\tau_{i+1}) = g(\tau_{i+1}), \\ P_i'(\tau_i) = s_i, & P_i'(\tau_{i+1}) = s_{i+1}, \end{array}\right\} \quad i = 1,\ldots,n-1.$$

Здесь $s_1, \ldots, s_n$ — свободные параметры.

Кубические сплайны

$$P''_{i-1}(\tau_i) = P''_i(\tau_i),$$

или

$$2c_{3,i-1} + 6c_{4,i-1}\Delta\tau_{i-1} = 2c_{3,i},$$

или

$$2([\tau_{i-1},\tau_i]g - s_{i-1})/\Delta\tau_{i-1} + 4c_{4,i-1}\Delta\tau_{i-1} =$$

$$= 2([\tau_i,\tau_{i+1}]g - s_i)/\Delta\tau_i - 2c_{4,i}\Delta\tau_i,$$

или

$$s_{i-1}\Delta\tau_i + s_i 2(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) + s_{i+1}\Delta\tau_{i-1} = b_i,$$

где

$$b_i := 3(\Delta\tau_i[\tau_{i-1},\tau_i]g + \Delta\tau_{i-1}[\tau_i,\tau_{i+1}]g),\ i = 2,\ldots,n-1$$

Граничные условия

1. Если известны значения g' в точках τ_1 и τ_n, то вполне естественно выбрать $s_1 = g'(\tau_1)$ и $s_n = g'(\tau_n)$. Полученная в результате функция $f = I_4 g$ согласуется с g в точках $\tau_0, \ldots, \tau_{n+1}$ (где $\tau_0 := \tau_1, \tau_{n+1} := \tau_n$ и называется фундаментальным интерполяционным кубическим сплайном функции g.

2. Если в граничных точках интервала известно значение g'', то можно положить в этих точках $f'' = g''$, добавляя уравнения

$$2s_1 + s_2 = 3[\tau_1, \tau_2]g - (\Delta\tau_1)g''(\tau_1)/2;$$

$$s_{n-1} + 2s_n = 3[\tau_{n-1}, \tau_n]g + (\Delta\tau_{n-1})g''(\tau_n)/2$$

3. Так называемая интерполяция *естественными* сплайнами *нулевых граничных условий* свободного конца:

$$f''(\tau_1) = f''(\tau_n) = 0.$$

Граничные условия

4. Если ничего не известно о производных на концах интервала, то следует попытаться применить условие; называемое "**отсутствием узла**". При этом выбирают s_1 и s_n так, что $P_1 = P_2$ и $P_{n-2} = P_{n-1}$ (т. е. первый и последний внутренние узлы не являются активными). Для этого требуется, чтобы f''' была непрерывной в окрестностях точек τ_2 и τ_{n-1}, что равносильно добавлению уравнений

$$s_1\Delta\tau_2 + s_2(\tau_3-\tau_1) = \frac{(\Delta\tau_1+2(\tau_3-\tau_1))\Delta\tau_2[\tau_1,\tau_2]g+(\Delta\tau_1)^2[\tau_2,\tau_3]g}{\tau_3 - \tau_1};$$

$$s_{n-1}(\tau_n-\tau_{n-2}) + s_n\Delta\tau_{n-2} =$$

$$= \frac{(\Delta\tau_{n-1})^2[\tau_{n-2},\tau_{n-1}]g+(2(\tau_n-\tau_{n-2})+\Delta\tau_{n-1})\Delta\tau_{n-2}[\tau_{n-1},\tau_n]g}{\tau_n - \tau_{n-2}}$$