Алгоритмы линейной алгебры

проблемы собственных значений

π

Собственные значения

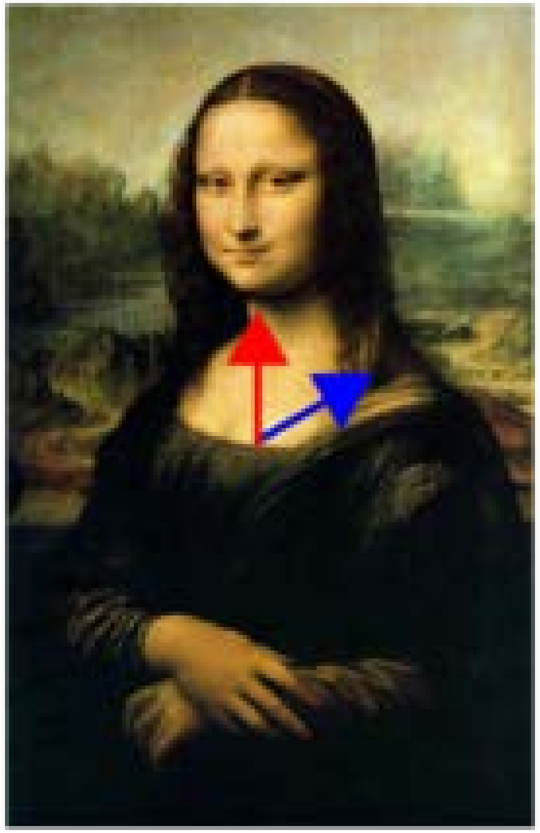
$$A\bar{u} = \lambda\bar{u}$$

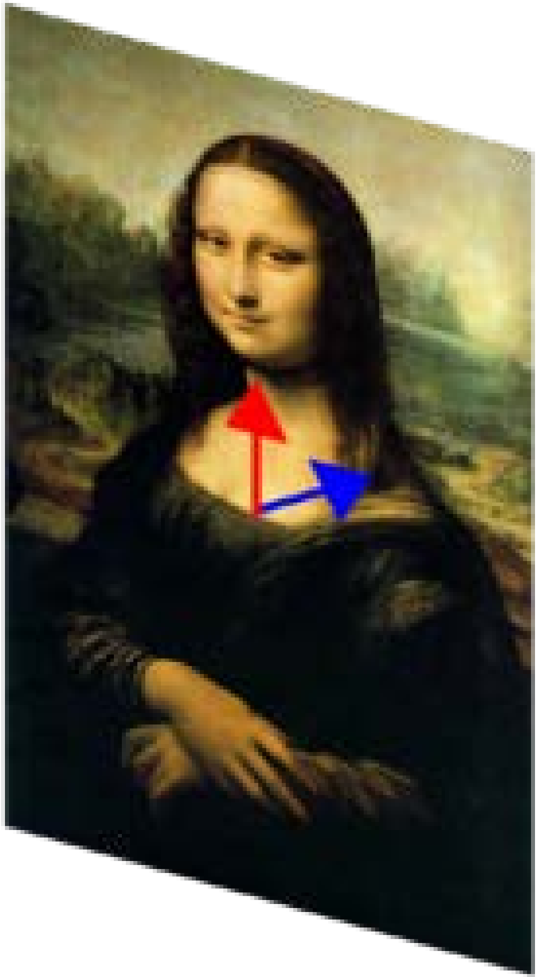
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

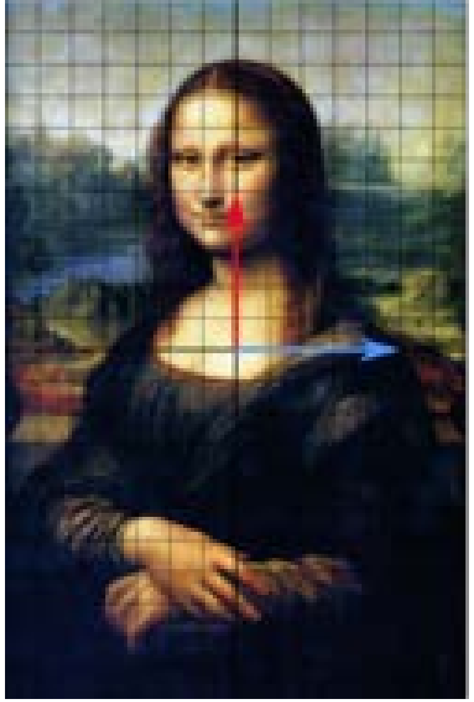
$$A\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \bar{c}$$

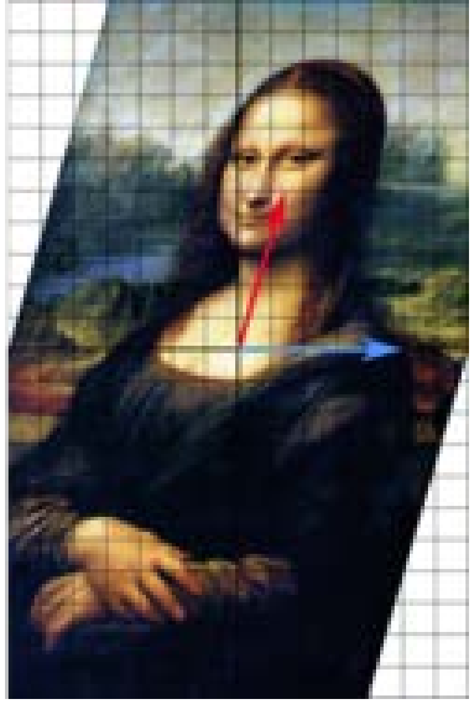
$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения









Характеристический полином

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21});$$

Характеристический полином

$$\det(A-\lambda E)=0$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-$$

$$-\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right\}\lambda+\det A.$$

Некоторые важные свойства

A – симметрична – собственные значения вещественны
собственные вектора ортогональны

$$(x^i, x^j) = 0$$

$$A^T y = \mu y$$

$$\lambda_i = \mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(x^i, y^i) = 0, \quad i \neq j.$$

Некоторые важные свойства

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Sp}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = (-1)^n \det(A)\ .$$

Пример Уилкинсона

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & & & & \\ & 19 & 20 & & & \\ & & 18 & 20 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2 & 20 \\ \varepsilon & & & & & 1 \end{pmatrix}_{20\times 20}$$

Методы вычисления характеристического полинома

НЕ эффективно

- разложение на миноры
- метод Гаусса

ВЫХОД

предварительное преобразование определителя с удалением λ с главной диагонали в крайний ряд

Метод Леверье

$$\mathrm{Sp}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = s_k$$

$$s_1 = \mathrm{Sp}(A),\ s_2 = \mathrm{Sp}(A^2),\ \ \ldots, s_n = \mathrm{Sp}(A^n)\ .$$

$$a_1 = -s_1, a_2 = -(s_2 + a_1 s_1)/2,$$

$$a_k = -(s_k + a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \cdots + a_{k-1} s_1)/k \textit{ при } k \leq n.$$

Метод Леверье (пример)

$$A = \begin{pmatrix} -5.509882 & 1.870086 & 0.422908 & 0.008814 \\ 0.287865 & -11.811654 & 5.711900 & 0.058717 \\ 0.049099 & 4.308033 & -12.970687 & 0.229326 \\ 0.006235 & 0.269851 & 1.397369 & -17.596207 \end{pmatrix}$$

Метод Леверье (пример)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 30.91795128 & -30.56848188 & 2.878480155 & 0.0031325713 \\ -4.705449283 & 164.6764010 & -141.3504639 & -0.4143169528 \\ 0.3341843103 & -106.6094396 & 193.1869924 & -6.756396001 \\ 0.0022236138 & -1.904168948 & -41.16923134 & 309.9628536 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -179.0125092 & 431.2849919 & -198.8601505 & -0.9173897610 \\ 66.38829278 & -2562.954533 & 2771.458834 & -15.49709921 \\ -23.08728044 & 2090.291485 & -3124.010318 & 156.9329019 \\ -0.649145142 & -71.21907809 & 956.2502143 & -5463.723497 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1100.720103 & * & * & * \\ * & 42332.23816 & * & * \\ * & * & 52669.62534 & * \\ * & * & * & 96355.91518 \end{pmatrix}.$$

Метод Леверье (пример)

Вычисляем следы матриц:

$$s_1 = -47.888430,\ s_2 = 698.7441983,\ s_3 = -11329.70086,\ s_4 = 192458.4988\ ,$$

и по формулам Ньютона получаем:

$$a_1 = 47.888430,\ a_2 = 797.278764_8,\ a_3 = 5349.45551_3,\ a_4 = 12296.550_{68}\ .$$

Метод Крылова

$$Y_0 = \left[y_1^{[0]}, \ldots, y_n^{[0]}\right]^\top$$

$$Y_1 = A \cdot Y_0,\; Y_2 = A \cdot Y_1, \ldots,\; Y_n = A \cdot Y_{n-1}$$

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} Y_0 & Y_1 & \cdots & Y_{n-1} & Y_n \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{array} \right]_{(n+1)\times(n+1)}$$

Метод Крылова

$$f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n.$$

$$f(\lambda) = (-1)^n \frac{\det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} Y_0 & Y_1 & \ldots & Y_{n-1} & Y_n \\ 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{array} \right]}{\det \left[\begin{array}{c|c|c|c} Y_0 & Y_1 & \ldots & Y_{n-1} \end{array} \right]}$$

Пример. Найти характеристический полином матрицы примера Леверье

$$A = \begin{pmatrix} -5.509882 & 1.870086 & 0.422908 & 0.008814 \\ 0.287865 & -11.811654 & 5.711900 & 0.058717 \\ 0.049099 & 4.308033 & -12.970687 & 0.229326 \\ 0.006235 & 0.269851 & 1.397369 & -17.596207 \end{pmatrix}.$$

Решение. Возьмем $Y_0 = [1, 0, 0, 0]^\top$. Имеем

$$Y_1 = AY_0 = \begin{pmatrix} -5.509882 \\ 0.287865 \\ 0.049099 \\ 0.006235 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = AY_1 = \begin{pmatrix} 30.917951 \\ -4.705449 \\ 0.334184 \\ 0.002223 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = AY_2 = \begin{pmatrix} -179.012509 \\ 66.388293 \\ -23.087280 \\ -0.649145 \end{pmatrix}, \quad Y_4 = AY_3 = \begin{pmatrix} 1100.720101 \\ -967.597333 \\ 576.522644 \\ -4.040153 \end{pmatrix}.$$

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \end{array} \right] = \begin{vmatrix} 1 & -5.509882 & 30.917951 & -179.012509 & 1100.720101 \\ 0 & 0.287865 & -4.705449 & 66.388293 & -967.597333 \\ 0 & 0.049099 & 0.334184 & -23.087280 & 576.522644 \\ 0 & 0.006235 & 0.002223 & -0.649145 & -4.040153 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0.348621\lambda^4 + 16.694915\lambda^3 + 277.948166\lambda^2 + 1864.932835\lambda + 4286.836454 =$$

$$= 0.348621\left(\lambda^4 + 47.888430\lambda^3 + 797.27876_3\lambda^2 + 5349.4555_0\lambda + 12296.550_5\right).$$