Relações

Sejam A e B conjuntos. Uma relação binária ou, simplismente relação de A para B é um subconjunto de A x B.

Suponha que R é uma relação de A para B. Então R é um conjunto de pares ordenados onde cada primeiro elemento pertence a A e cada segundo elemento a B. Isto é, para cada a ϵ A e b ϵ B, exatamente uma das seguintes afirmativas é verdadeira:

1. (a,b) ϵ R; dizemos que “a é R-relacionado a b”, escrevemos a R b.
2. (a,b) ϵ R; dizemos que “a não é R-elacionada a b”, escrevemos a R b.

Se R é uma relação de um conjunto A para si mesmo, isto é, se R é um subconjunto de A² = A x A, então dizemos que R é uma relação em A. O dominio de uma relação R é o conjunto de todos os primeiros elementos de um par ordenado que pertence a R, e a imagem de R é o conjunto dos segundos elementos.

Quando uma relação é definida em um conjunto existem várias propriedades que são usadas para classificá-la, são elas: Reflexiva, Simetrica, Anti-Simetrica e Transitiva. Suas definições são citadas logo abaixo:

* Relação reflexiva, uma relação R em um conjunto A é chamada reflexiva se (a,a) ϵ R para todo elemento a ϵ A.

Ex: Considere as seguintes relações em um conjunto A= {1,2,3,4}

R1 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)};

R2 = A x A, a relação universal.

Como A contém os quatros elementos 1, 2, 3 e 4, uma relação R em A é reflexiva se contém os quatro pares ordenados.

* Relação Simétrica, uma relação R em um conjunto é dita simétrica se (b,a) ϵ R.

Ex: Considere as seguintes relações em um conjunto A= {1,2,3,4}

R1 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)};

R2 = Ø, a relação vazia;

R3 = A x A, a relação universal.

* Relação Anti-Simétrica, uma relação R em um conjunto A é dita Anti-Simétrica se (a,b) ϵ R e (b,a) ϵ R somente quando a=b, para a, b ϵ A.

Ex: Considere as seguintes relações em um conjunto A= {1,2,3,4}

R1 = {(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)};

R2 = {(1,3), (2,1)};

R3 = Ø, a relação vazia;

* Relação Transitiva, uma relaçao R em conjunto A é dita transitiva se quando (a,b) ϵ R e (b,c) ϵ R então (a,c) ϵ R, para a, b, c ϵ A, mas (a,c) ϵ R.

Ex: Considere as seguintes relações em um conjunto A= {1,2,3,4}

R1 = {(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)};

R2 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)};

R3 = Ø, a relação vazia;

R4 = A x A, a relação universal.

A propriedade de transitiva também pode ser expressa em termos da composição de relações. Para uma relação R em A, definice:

R² = R o R e, mais geralmente, Rⁿ = Rⁿ־¹ o R.

Então, temos o seguinte resultado.

Teorema: a relação R é transitiva se e somente se Rⁿ contido em R para n≥1.

Fechos de Relações

Seja R uma relação sobre um conjunto, R pode ou não possuir algumas propriedades P, tais como: Simétrica, Reflexiva e Transitiva. Uma relação S é o fecho de uma relação R como propriedade P se:

- S tem a propriedade P;

- R contido em S;

- S é subconjunto de qualquer outra relação que inclua R e tenha a propriedade P.

Se R é uma relação sobre A, pode acontecer que R não possua algumas propriedades importantes, tais como as citadas acima, se R não possui uma propriedade particular, pode-se querer adicionar os pares relacinados em R até que ela adquira a propriedade desejada.

Naturalmente, deseja-se adicionar o menor número de pares possível, de modo a obter a menor relação R1 sobre A que possui a propriedade desejada. Eventualmente R1 pode não existir se a relação R1, existe, ela é chamada de o fecho R com respeito à propriedade em questão.

* Fechos Simetricos

R é uma relação sobre um conjunto A e que R não é simétrica. Desta forma, deve existir pares (x,y) ϵ R tais que (y,x) ϵ R, por outro lado, (y,x) ϵ Rⁿ־¹. Portanto, para R se tornar simétrica, deve-se adicionar todos os pares de Rⁿ־¹→R deve ser aumentada para R com união em R־¹, que o mesmo é a maior relação simétrica que contém R, ou seja, R com união em R־¹ é o fecho simétrico de R. Assim se,

A= {a,b,c,d} e R={(a,b),(b,c),(a,c),(d,c)}, R ־¹ ={(b,a),(c,b),(c,a),(c,d)}

O fecho simétrico de R é: R com união em R ־¹ ={(a,b),(b,c),(a,c),(d,c), (b,a),(c,b),(c,a),(c,d)}.

* Fecho Reflexivo

Este fecho é obtido simplismente adicionando a R os elementos (a,a) da diagonal que não pertencem originalmente a R. Assim, R1=R com união em ∆ é a maior relação reflexiva sobre A que contém R, onde ∆ representa os conjuntos. Então R com união em ∆ é o fecho reflexivo de R. Este fecho possui apenas um que teorema de que, seja R uma relação em um conjunto A, este teorema se encaixa tanto para o fecho reflexivo quanto para o fecho simétrico.

* Fecho Transitivo

Seja R uma relação em um conjunto A com *n* elementos. Então será transitivo quando R com união em R² com união em até Rⁿ. Para que um fecho seja considerado transitivo deve conter os pares (a,c), (b,c) e (a,b).

Ex: conjunto A={1,2,3};

R={(1,2),(2,3),(3,3)}, então o fecho transitivo é = R com união R² com união R³ = {(1,2),(2,3),(3,3),(1,3).

O fecho transitivo possui dois teoremas:

1. R\* é o fecho transitivo da relação R
2. Seja R uma relação em um conjunto A com *n* elementos.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Teoria e Problemas de Matemática Discreta.** 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2004.