



Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Eletrônica

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

Autor: Alice Fazzolino Pinto Barbosa
Orientador: Dr. Ronni Amorim

Brasília, DF
2018



Alice Fazzolino Pinto Barbosa

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Dr. Ronni Amorim

Brasília, DF

2018

Alice Fazzolino Pinto Barbosa

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian/ Alice Fazzolino Pinto Barbosa. – Brasília, DF, 2018-
52 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr.Ronni Amorim

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2018.

1. Palavra-chave01. 2. Palavra-chave02. I. Dr.Ronni Amorim . II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

CDU 02:141:005.6

Alice Fazzolino Pinto Barbosa

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 01 de junho de 2013:

Dr. Ronni Amorim
Orientador

**Suélia de Siqueira Rodrigues Fleury
Rosa**
Convidado 1

Vinicius de Carvalho Rispoli
Convidado 2

Brasília, DF
2018

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à minha mãe, Monica, por todo esforço, dedicação, apoio e incentivo aos meus estudos e dos meus irmãos, e principalmente por ter me ensinado a importância de dar prioridade ao conhecimento.

Ao meu Avô, Ailton, que em conjunto com a minha mãe forneceu condições para que eu chegasse até aqui.

E ao meu orientador, Dr.Ronni Amorim,por ser um maravilhoso profissional, competente, paciente, dedicado, compreensivo e além de tudo , um ótimo amigo.

Resumo

Neste trabalho foi estudado o Método da Decomposição de Adomian (MDA) aplicada a Equação de Biotransferência de calor ou Equação de Pennes. Neste sentido, o MDA é explicado de forma pedagógica, apresentando-se diversos exemplos de sua aplicação. Na sequência, o modelo térmico de Pennes em regime estacionário, unidimensional em coordenadas cilíndricas foi solucionado de forma aproximada por meio do MDA.

Palavras-chaves: Método da Decomposição de Adomian, Equação da Biotransferência de Calor, Equação de Pennes.

Abstract

This work presents a study about the Adomian Decomposition Method (ADM) applied to the Bioheat Transfer Equation or Pennes' Bioheat Transfer Equation. The ADM is explained in an educational manner, presenting several examples of its application. Besides, the Pennes' thermal model in a stationary regime, one-dimensional at the cylindrical coordinates was approximately solved by the MDA.

Key-words: Adomian Decomposition Method, Bioheat Transfer Equation, Pennes' Bioheat Transfer Equation.

Lista de abreviaturas e siglas

MDA Método da Decomposição de Adomian

INCA Instituto Nacional do Câncer

SBD Sociedade Brasileira de Dermatologia

BHTE Bioheat Transfer Equation

Sumário

	Introdução	15
1	REFERENCIAL TEÓRICO	17
1.1	Câncer de pele	17
1.2	Harry H. Pennes e a Equação da Biotransferência de calor	20
1.2.1	Modelo físico-matemático	20
2	MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO	23
2.1	Introdução	23
2.2	Descrição do Método	24
2.3	Exemplos	25
2.3.1	Exemplo 1 : Equação linear de primeira ordem	26
2.3.2	Exemplo 2 : Equação não-linear de primeira ordem	28
2.3.3	Exemplo 3 : Equação não-linear de primeira ordem	31
2.3.4	Exemplo 4: Equação linear de segunda ordem	33
2.4	Método da decomposição para várias dimensões	35
2.4.1	Exemplo	35
3	MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO PARA A EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL ESTACIONÁRIA DE PENNES	43
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
	REFERÊNCIAS	51

Introdução

É de grande importância que profissionais da área da matemática, engenharia e saúde trabalhem em conjunto para criarem novos métodos de identificação de doenças, assim como novas técnicas de tratamento das mesmas. A utilização de modelos matemáticos para se detectar diversas doenças vem sendo cada vez mais utilizados em todo o mundo, pois podem contribuir fortemente para os estudos e diagnósticos exercidos pelos profissionais da saúde. Neste contexto, dentre os diversos modelos matemáticos desenvolvidos para simular os processos e fenômenos biológicos têm-se o modelo apresentado por Harry H. Pennes (1948), que descreve o processo de biotransferência de calor nos tecidos vivos. De acordo com Pennes (1948), o sistema humano têm a capacidade de manter a temperatura média interna próxima de $37^{\circ}C$, nesse caso, uma pequena variação dessa temperatura pode indicar a existência de células cancerígenas no local. Portanto, como a Equação de Biotransferência de calor de Pennes descreve o comportamento da temperatura nos tecidos vivos, a sua solução pode ser utilizada para a localização de tumores.

Para encontrar a solução de equações diferenciais, como a equação de Pennes, o Método da Decomposição de Adomian (MDA) apresenta-se como uma técnica promissora para se resolver de forma mais simples e rápida. Diante do que foi apresentado, o presente trabalho tem como principal objetivo solucionar a Equação de biotransferência de Calor de Pennes via MDA e dar início ao estudo de localizações de tumores de pele. Em primeiro momento, com objetivo de simplificar, o modelo da Equação de Pennes analisado foi na forma unidimensional e invariável no tempo.

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 é apresentado um estudo teórico em torno de alguns conceitos importantes sobre o câncer de pele e a transferência de calor em tecidos vivos, também é apresentada a Equação de Biotransferência de calor de Pennes e suas características.

No capítulo 2, o Método da Decomposição de Adomian é demonstrado com detalhes a partir de diversos exemplos.

No capítulo 3, O MDA é aplicado na equação unidimensional e estacionária de Pennes obtendo-se uma solução aproximada da mesma.

No capítulo 4 encontram-se as considerações finais sobre o estudo realizado e as perspectivas de tarefas a desenvolver na continuidade desse trabalho.

1 Referencial Teórico

1.1 Câncer de pele

“O câncer de pele é provocado pelo crescimento anormal e descontrolado das células que compõem a pele. Essas células se dispõem formando camadas e, de acordo com as que forem afetadas, são definidos os diferentes tipos de câncer” [?].

Existem dois tipos de cânceres de pele, o melanoma e os carcinomas. O melanoma é o tipo mais agressivo, mas seus casos são relativamente raros. Já os carcinomas tem letalidade baixa, mas o número de casos é extremamente alto no Brasil.

Geralmente, o câncer de pele é o menos agressivo dentre outros existentes, mas se houver um diagnóstico tardio, este pode levar a ferimentos, sérias deformidades físicas e até a morte.

O Instituto Nacional do Câncer (INCA) afirma que

“Estima-se que no Brasil existem 85.170 casos recentes de câncer de pele não melanoma entre homens e 80.410 nas mulheres para cada ano do biênio 2018-2019. Esses valores correspondem a um risco estimado de 82,53 casos novos a cada 100 mil homens e 75,84 para cada 100 mil mulheres” [[Educação 2018](#), p.54].

Em seu estudo a SBD diz que o maior motivo para evolução do câncer de pele é devido a exposição aos raios ultravioletas irradiados pelo sol. Os horários mais perigosos são no período de 10 às 16 horas. Evitar a exposição intensa ao sol nesses horários e proteger a pele dos impactos da radiação ultravioleta são os melhores métodos para evitar os tumores de pele.

Há várias formas de tratamento atualmente, mas todos os casos precisam ser identificados antecipadamente para melhores chances de cura. Uma forma de realizar tal feito é detectar tumores através da temperatura da pele, utilizando-se de equipamentos médicos.

Em sua tese Fabrício [[Bueno 2008](#)] alega que diferentemente da trombose ou esclerose vascular que reduz o sangue fluído na pele e consequentemente diminui a temperatura superficial da mesma, os tumores de pele provocam um aumento de temperatura local, por essa razão a temperatura incomum da pele pode apontar circulação sanguínea irregular. Lawson [[LAWSON 1956](#)] consolida esse fato afirmando que sangue venoso que escoar o tumor maligno é regularmente mais quente do que o fornecido pelo sistema arterial .

Ele também menciona que foi realizada uma experiência com 26 pacientes portadores de câncer de mama que comprovou que a temperatura da pele sobre o tumor na mama era maior que a do tecido normal.

“O aumento médio de temperatura detectável na área do tumor foi de $2.27^{\circ}F$. O máximo foi de $3.5^{\circ}F$ e o mínimo de $1.3^{\circ}F$. Em dois casos adicionais mostrando um aumento entre 1.5° e $2^{\circ}F$, o diagnóstico foi de malignidade duvidosa” [LAWSON 1956, p.309].

De acordo com [LAWSON 1956], no desenvolvimento de um tumor, novos vasos sanguíneos são gerados, ou seja, há um aumento na vascularização sanguínea e linfática, causando assim, um aumento de temperatura na região do tumor. Diante desse fato, é possível realizar diagnósticos.

Ao longo dos anos foram utilizados alguns métodos para medir essa temperatura corporal, como por exemplo o primeiro experimento de Pennes, em 1948, que com intuito de medir a temperatura do antebraço foi utilizado uma agulha de aço inoxidável para a introdução de um termopar(sensor utilizado para medição de temperatura).

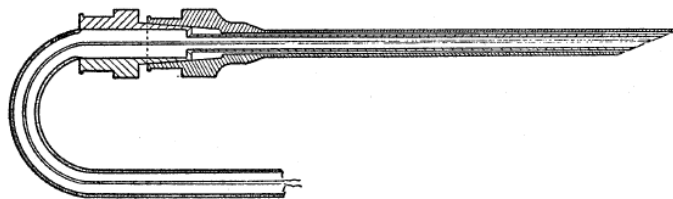


Figura 1 – Agulha de aço inoxidável usada para introdução de termopar. FONTE: [Pennes 1948]

De acordo com [LAWSON 1956], o termopar também foi usado em outras experiências, mas sem o uso de agulhas, a técnica simplesmente se resumia a aplicar o termopar na pele sobre o tumor, ou, no caso de uma neoplasia (massa anormal de tecido) profundamente enraizada, na aréola ipsilateral (pequena área circular que envolve o mamilo). Se o paciente portasse o câncer, haveria um diferencial de temperatura.

Outro método empregue foi o uso do Evaporógrafo Baird, um instrumento projetado para dar uma imagem térmica direta em um filme de óleo muito fino. “O princípio principal empregado neste aparelho é a evaporação diferencial de um filme de óleo em uma membrana transparente que pode ser observado ou fotografado em preto e branco ou colorido” [LAWSON 1956, p.309]. O equipamento dispõe-se de uma alta resolução em locais onde a temperatura é maior e má resolução onde a temperatura é menor.

Na atualidade, diversas técnicas numéricas e computacionais da engenharia são aplicadas para dominar e interpretar os fenômenos biológicos. Dentre essas técnicas, as

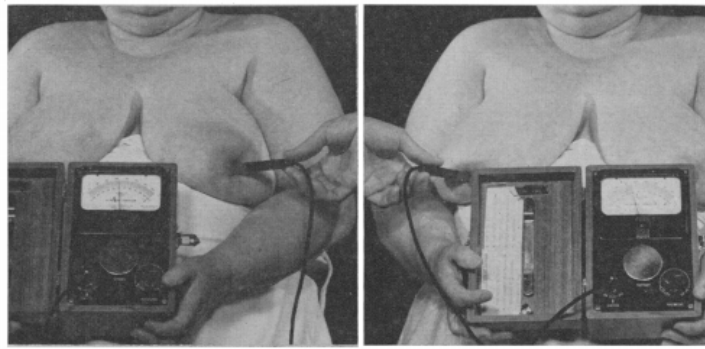


Figura 2 – Carcinoma de mama esquerda. Mama direita negativa no mesmo paciente, mostrando diferencial de temperatura. FONTE: [LAWSON 1956]



Figura 3 – Evaporógrafo de paciente com carcinoma de mama direita. FONTE: [LAWSON 1956]

simulações numéricas têm apresentado um papel de grande relevância em inúmeros problemas, principalmente à transferência de calor nos tecidos vivos.

A definição da temperatura em tecidos se dá por intermédio da transferência de calor nos mesmos e utilizando a “equação biotérmica de Pennes é possível encontrar a distribuição de temperatura e o fluxo de calor em um maciço de pele” [Bueno 2008].

1.2 Harry H. Pennes e a Equação da Biotransferência de calor

Pennes, em 1948, foi o primeiro a sugerir um modelo numérico que reproduzisse o processo de biotransferência de calor. Processo esse, que é bastante complexo, pois envolve diferentes procedimentos, como a condução, radiação, convecção, evaporação, metabolismo e mudança de fases [Souza 2009].

Com intuito de estudar a difusão de calor no corpo humano, Harry H. Pennes realizou experimentos no antebraço.

“As temperaturas dos tecidos normais do antebraço humano e do sangue arterial braquial foram medidas para avaliar a aplicabilidade da teoria do fluxo de calor ao antebraço em termos básicos de taxa local de produção de calor tecidual e fluxo volumétrico de sangue ” [Pennes 1948, p.93].

Com esse estudo elaborou-se uma equação que descreve a propagação de calor no corpo humano, denominada de Equação da Biotransferência de Calor (Bioheat Transfer Equation - BHTE). É uma “equação difusão de calor, a qual são agregados dois termos que representam os efeitos da perfusão sanguínea e da combinação da geração de calor metabólica do tecido com a irradiação emitida por um dispositivo externo” [Souza 2009, p.26].

Uma das dificuldades encontradas no uso da BHTE é falta de conhecimento exata sobre as taxas volumétricas de perfusão sanguínea [Silva, Lyra e Lima 2013]. Houve vários estudos com o objetivo de aperfeiçoar a equação de biotransferência de calor de Pennes, porém, acabaram em modelos muito específicos e complexos. Por esses motivos e por sua clareza, a equação de Pennes ainda é a mais usada para caracterizar a transferência de calor e a disseminação da temperatura em tecidos biológicos vivos.

1.2.1 Modelo físico-matemático

A equação 1.1 descreve a transferência de calor nos organismos vivos e é chamada de Equação de Pennes.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q. \quad (1.1)$$

onde:

K_t = Condutividade térmica do tecido [$W/m^\circ C$];

ρ = Massa específica do tecido [kg/m^3];

c = Calor específico do tecido [$J/kg^\circ C$];

T = Temperatura [$^{\circ}C$];

t = Tempo [s];

Q_p = Fonte de calor devido à perfusão sanguínea [W/m^3];

Q_m = Fonte de calor devido à geração de calor metabólico [W/m^3];

Q = Fonte externa de calor sobre o domínio [W/m^3];

O termo Q pode ser qualquer fonte de aquecimento externa, como sementes ferromagnéticas e radiação eletromagnética, como radiofrequência, microondas, ultra-som, e laser [Silva 2004, p.10]. Já o termo Q_m , é a fonte de calor devido à geração metabólica, que é normalmente muito menor do que o calor externo depositado (R.K, 1983 apud C.STURESSON; ANDERRSON-ENGELS, 1995).

“O termo Q_p corresponde a fonte de calor devido à perfusão sanguínea que caracteriza-se pela transferência de calor efetuada pelo sangue através da vascularização capilar presente nos tecidos vivos” [Guimarães 2003, p.8]. O termo Q_p é dado pela equação abaixo:

$$Q_p = \omega \rho_s c_s \rho (T_a - T). \quad (1.2)$$

Onde:

ω = Taxa de perfusão sanguínea [$m^3 \text{desangue} / m^3 \text{detecido.s}$];

ρ_s = Massa específica do sangue [kg/m^3];

c_s = Calor específico do sangue [$J/kg.^{\circ}C$]

T_a = Temperatura arterial do sangue entrando no tecido [$^{\circ}C$];

T = Temperatura [$^{\circ}C$];

Reescrevendo a Eq.(1.1) em coordenadas cartesianas e desconsiderando o termo de geração de calor metabólico, temos:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_p + Q. \quad (1.3)$$

A dificuldade dessa equação diferencial é que ela não pode ser resolvida analiticamente, então é necessário utilizar-se de algum método numérico para se obter uma aproximação do resultado.

Os métodos numéricos mais utilizados para resolver esse tipo de equação é o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos (MVF), e o Método dos Elementos de Contorno (MEC);

O objetivo deste trabalho é alcançar essa solução utilizando um método diferente, o Método da Decomposição de Adomian.

2 Método da Decomposição de Adomian

2.1 Introdução

O Método da Decomposição de Adomian (ADM) não é uma técnica muito conhecida, mas é extremamente poderosa para solucionar equações diferenciais lineares ou não-lineares de diversos tipos. Tal método já foi utilizado com sucesso em diferentes estudos ao longo dos anos, dentre eles podemos citar o trabalho de Mustapha Azreg-Aïnou's - Developed Adomian method for quadratic Kaluza-Klein relativity, e de Antonio Gourlat e Bodmann -An analytical solution for the nonlinear energy spectrum equation by the decomposition method.

De acordo com ([SCHNEIDER, 2006](#) apud [PEREIRA, 2010](#)), o Método da Decomposição de Adomian (ADM) foi apresentado pelo matemático americano George Adomian (1922-1996) na década de 80. Tal método consiste em separar a equação em duas partes, a parte linear e a não-linear e em sequência aplicar o maior operador derivativo em ambos os lados do polinômio. As condições iniciais e/ou de contorno e a constante da equação são reconhecidas como aproximação inicial. Desse modo, a função se divide em uma série onde os componentes y_n devem ser encontrados e o termo não-linear se divide em polinômios, denominados polinômios de Adomian, aqui referenciados como A_n .

Segundo [[Ray 2014](#)], a solução é obtida como uma série infinita em que cada termo pode ser facilmente encontrado utilizando-se dos termos anteriores que convergem rapidamente para a solução específica.

Em seu livro, [[Adomian 1956](#)] afirma que o maior objetivo desse método é tornar viável soluções realistas de sistemas complexos sem a obrigação de utilizar-se da modelagem usual.

Segundo [[Adomian 1988](#)], a diferença é que o Método da Decomposição de Adomian pode fornecer aproximação analítica sem linearização, perturbação, aproximações de fechamento, ou métodos de discretização que podem resultar em complexos modelos computacionais. “Além disso, ao contrário da maioria dos métodos numéricos, o Método da Decomposição de Adomian fornece uma forma fechada da solução” ([DEHGHAN, 2004](#) apud [PEREIRA, 2010](#)), ou seja, é capaz de ser representada analiticamente em termos de uma quantidade limitada de funções conhecidas.

2.2 Descrição do Método

Considerando a seguinte equação diferencial não-linear abaixo

$$\mathbf{L}y + \mathbf{R}y + \mathbf{N}y = g \quad (2.1)$$

,

O termo \mathbf{L} é o operador derivativo de maior grau da equação, $\mathbf{R}y$ representa o termo linear, $\mathbf{N}y$ o termo não-linear e \mathbf{g} a condição inicial e os valores conhecidos. Resolvendo para $\mathbf{L}y$ e aplicando o operador inversor L^{-1} , têm-se

$$\mathbf{L}y = g - \mathbf{R}y - \mathbf{N}y, \quad (2.2)$$

,

$$L^{-1}\mathbf{L}y = L^{-1}g - L^{-1}\mathbf{R}y - L^{-1}\mathbf{N}y, \quad (2.3)$$

L é definido como $\frac{d^n y}{dx^n}$, sendo assim, L^{-1} é um operador integral de 0 até x ,

$$L^{-1} = \int_0^x (\dots) dt. \quad (2.4)$$

Caso L seja de segunda-ordem, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ por exemplo, L^{-1} será um operador de integração duplo. E a equação se resultará em

$$y = y(0) + xy'(0) + L^{-1}g - L^{-1}\mathbf{R}y - L^{-1}\mathbf{N}y, \quad (2.5)$$

Analisando a equação é possível perceber que $y(0)$, $xy'(0)$ são as condições iniciais e $L^{-1}g$ o valor inicial conhecido. Então, y_0 se resume nos três primeiros termos do lado direito da equação. Também é possível perceber que a parte linear da equação são os termos $y(0)$, $xy'(0)$, $L^{-1}g$ e $L^{-1}\mathbf{R}y$ e sua decomposição é $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Já o último termo $L^{-1}\mathbf{N}y$ é a parte não-linear, decompondo-o têm-se $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Com essas considerações, a equação final se resulta em

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - L^{-1}\mathbf{R} \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.6)$$

Consequentemente, é possível escrever

$$y_1 = -L^{-1}(\mathbf{R}y_0) - L^{-1}(A_0), \quad (2.7)$$

$$y_2 = -L^{-1}(\mathbf{R}y_1) - L^{-1}(A_1), \quad (2.8)$$

$$y_3 = -L^{-1}(Ry_2) - L^{-1}(A_2), \quad (2.9)$$

Generalizando para o y_n acha-se:

$$y_n = -L^{-1}(Ry_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}). \quad (2.10)$$

De acordo com GOULART et.al (2013) os polinômios de Adomian A_n são obtidos a partir da expansão da série de Taylor do termo não-linear em torno do primeiro termo da série y_0 . Dependem apenas de y_0 à y_n :

$$A_0 = f(y_0), \quad (2.11)$$

$$A_1 = y_1 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0), \quad (2.12)$$

$$A_2 = y_2 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + \left(\frac{y_1^2}{2!} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0), \quad (2.13)$$

$$A_3 = y_3 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + y_1 y_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0) + \left(\frac{y_1^3}{3!} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3} \right) f(y_0), \quad (2.14)$$

...

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{v=1}^n c(v, n) \left(\frac{\partial^v f}{\partial y^v} \right). \quad (2.15)$$

Quando a equação é linear, $f(y) = y$, o termo A_n reduz para y_n . Quando a equação é não-linear, $A_n = A_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Por exemplo $f(y) = y^3$, $A_0 = y_0^3$, $A_1 = 3y_0 y_1$, $A_2 = y_1^2 + 3y_0 y_2$, $A_3 = 3y_1 y_2 + 3y_0 y_3$.

2.3 Exemplos

Com o objetivo de simplificar o entendimento do Método de Decomposição de Adomian, alguns exemplos de fácil compreensão serão demonstrados a seguir.

2.3.1 Exemplo 1 : Equação linear de primeira ordem

Considere a equação linear abaixo com a condição linear $y(0) = 1$:

$$y' = y,$$

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

Pode-se escrever

$$\mathbf{L}y - \mathbf{R}y = g,$$

$$\mathbf{L}y = 1 + \mathbf{R}y,$$

Lembrando que \mathbf{L} é o operador derivativo de maior ordem, que nesse caso é $\frac{dy}{dx}$, portanto o operador inverso é $L^{-1} = \int_0^x \frac{dy}{dx} dx$. Aplicando o operador inverso nos termos da equação, obtêm-se:

$$\mathbf{L}^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \mathbf{L}^{-1}y,$$

$$\int_0^x \frac{dy}{dx} dx = \mathbf{L}^{-1}y,$$

Integrando o lado esquerdo,

$$y(x) - y(0) = \mathbf{L}^{-1}y,$$

$$y(x) = y(0) + \mathbf{L}^{-1}y,$$

De acordo com a equação (2.6) obtêm-se:

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) + \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

É importante notar que nesse exemplo não serão utilizados os polinômios de Adomian A_n devido ao fato da equação ser inteiramente linear. A partir deste momento basta comparar o lado esquerdo da equação acima com o lado direito da mesma e aplicar o operador inverso:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(y_0),$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(y_1),$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(y_2),$$

...

$$y_n = \mathbf{L}^{-1}(y_{n-1}).$$

E agora aplicar o operador inverso para cada y_n , neste trabalho os exemplos se limitarão em três interações.

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(y_0),$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(1),$$

$$y_1 = \int_0^x 1 dx,$$

$$y_1 = x.$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(y_1),$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(x),$$

$$y_2 = \int_0^x x dx,$$

$$y_2 = \frac{x^2}{2}.$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(y_2),$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

$$y_3 = \int_0^x \frac{x^2}{2} dx,$$

$$y_3 = \frac{x^3}{2.3}.$$

Em seguida, de acordo com a equação(2.6) obtêm-se a série:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

2.3.2 Exemplo 2 : Equação não-linear de primeira ordem

Considere a seguinte equação não-linear, com a condição inicial $y(0) = 1$:

$$y' = y^2,$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

Pode-se escrever

$$\mathbf{L}y' = g - Ny.$$

Aplicando o operador inverso nos termos da equação, acha-se:

$$\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathbf{L}^{-1}y^2,$$

$$\int_0^x \frac{dy}{dx} = \mathbf{L}^{-1}y^2,$$

Integrando o lado esquerdo, obtém-se

$$y(x) - y(0) = \mathbf{L}^{-1}(y^2),$$

$$y(x) = y(0) + \mathbf{L}^{-1}(y^2),$$

De acordo com a equação (2.6)

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) + \mathbf{L}^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

É possível observar que o lado direito da equação acima só apresenta a condição inicial e os polinômios de Adomian, isso é devido ao fato da equação não ter termo linear, diferentemente do exemplo 1.

A partir desse momento, basta comparar os dois lados e em seguida aplicar as fórmulas para cada y e para cada A .

$$y_0 = y(0) = 1.$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(A_0).$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(A_1).$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(A_2).$$

...

$$y_n = \mathbf{L}^{-1}(A_n - 1).$$

Calculando os polinômios de Adomian têm-se

$$A_0 = fy(0) = y_0^2 = 1.$$

$$A_1 = y_1 \cdot 2y_0,$$

$$A_1 = 2 \cdot y_0 \cdot y_1,$$

$$A_1 = 2y_1,$$

$$A_2 = y_2 \cdot 2y_0 + \frac{y_1^2}{2} \cdot 2,$$

$$A_2 = 2y_2 + y_1^2.$$

$$A_3 = y_3 \cdot 2y_0 + y_1 \cdot y_2 \cdot 2,$$

$$A_3 = 2y_3 + 2y_1y_2.$$

Fazendo as devidas substituições dos polinômios de Adomian, obtém-se:

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(A_0),$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(1),$$

$$y_1 = \int_0^x 1dx,$$

$$y_1 = x.$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(A_1),$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(2y_1),$$

$$y_2 = \int_0^x 2y_1 dx,$$

$$y_2 = 2\frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = x^2.$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(A_2),$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(2y_2 + y_1^2),$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(2x^2 + x^2),$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(3x^2),$$

$$y_3 = \int_0^x 3x^2 dx,$$

$$y_3 = x^3.$$

Finalmente, encontra-se:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

No primeiro exemplo a equação demonstrada foi de natureza linear, já no segundo, não-linear e para o terceiro exemplo será empregue uma equação com termo linear e não-linear.

2.3.3 Exemplo 3 : Equação não-linear de primeira ordem

Considere a equação abaixo com condição inicial $y(0) = 2$:

$$y' + y - y^2 = 0.$$

É possível notar que diferentemente do exemplo 1 e 2, essa equação possui termo linear e também termo não-linear, porém será demonstrado a seguir que o método é o mesmo.

Aplicando o operador inverso

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2), \\ \int_0^x \frac{\partial y}{\partial x} &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2), \\ y(x) - y(0) &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2).\end{aligned}$$

Com a equação (2.6) obtém-se:

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) - \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \mathbf{L}^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

A partir daqui basta comparar o lado esquerdo com o lado direito da equação e aplicar as fórmulas (2.10) e (2.15),

$$\begin{aligned}y_0 &= y(0). \\ y_1 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_0) + \mathbf{L}^{-1}(A_0). \\ y_2 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_1) + \mathbf{L}^{-1}(A_1). \\ y_3 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_2) + \mathbf{L}^{-1}(A_2).\end{aligned}$$

$$A_0 = fy(0) = y^2 = 4.$$

$$A_1 = y_1 \cdot 2y_0,$$

$$A_1 = 4y_1.$$

$$A_2 = y_2 \cdot 2y_0 + \frac{y_1^2}{2} \cdot 2,$$

$$A_2 = 4y_2 + y_1^2.$$

$$A_3 = y_3 \cdot 2y_0 + y_1 y_2 \cdot 2,$$

$$A_3 = 4y_3 + 2y_1 y_2.$$

Agora fazendo as devidas substituições, temos:

$$\begin{aligned}y_1 &= -\mathbf{L}^{-1}(2) + \mathbf{L}^{-1}(4), \\y_1 &= -2 \int_0^x dx + 4 \int_0^x dx, \\y_1 &= -2 + 4x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= -\mathbf{L}^{-1}(2x) + \mathbf{L}^{-1}(4(2x)), \\y_2 &= 2 \int_0^x x dx + 8 \int_0^x x dx, \\y_2 &= -x^2 + 4x^2, \\y_2 &= 3x^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3 &= -\mathbf{L}^{-1}(3x^2) + \mathbf{L}^{-1}(4(3x^2) + (2^2x^2)), \\y_3 &= -\int_0^x 3x^2 dx + \int_0^x 14x^2 dx, \\y_3 &= -x^3 + 16\frac{x^3}{3}, \\y_3 &= \frac{-3x^3 + 16x^3}{3}, \\y_3 &= \frac{13x^3}{3}.\end{aligned}$$

Finalmente, encontra-se a série:

$$y(x) = 2 + 2x + 3x^2 + \frac{13x^3}{3} + \dots$$

2.3.4 Exemplo 4: Equação linear de segunda ordem

Considere a equação abaixo com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$:

$$y'' + y = 0.$$

É possível notar que agora o operador derivativo de maior ordem é $\frac{d^2y}{dx^2}$ e por isso o operador inverso \mathbf{L}^{-1} será

$$\int_0^x \int_0^x \frac{d^2y}{dx^2} dx.$$

Ou seja,

$$\mathbf{L}^{-1} \int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = -\mathbf{L}^{-1}(y).$$

Integrando o lado esquerdo, acha-se

$$\begin{aligned} y(x) - y(0) - xy'(0) &= -\mathbf{L}^{-1}(y), \\ y(x) &= y(0) + xy'(0) - \mathbf{L}^{-1}(y). \end{aligned}$$

De acordo com a equação (2.6), obtém-se

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_n = y(0) + xy'(0) - \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_n).$$

É possível notar a falta dos polinômios de Adomian na equação, isso é devido ao fato da equação não possuir termo não-linear.

Comparando o lado esquerdo com o lado direito da equação acima, acha-se

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) + xy'(0). \\ y_1 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_0). \\ y_2 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_1). \\ y_3 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_2). \\ y_4 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_3). \end{aligned}$$

Para finalizar basta fazer as apropriadas substituições, como demonstrado a seguir

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + x.0, \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

$$y_1 = - \int_0^x \int_0^x 1 dx dx,$$

$$y_1 = \frac{-x^2}{2!}.$$

$$y_2 = - \int_0^x \int_0^x \frac{-x^2}{2} 1 dx dx,$$

$$y_2 = \frac{-x^4}{4!}.$$

$$y_3 = - \int_0^x \int_0^x \frac{-x^4}{4!}.$$

$$y_3 = \frac{-x^6}{6!}.$$

A série então se resume em

$$y(x) = 1 - x + \frac{-x^2}{2!} - \frac{-x^4}{4!} - \frac{-x^6}{6!}.$$

2.4 Método da decomposição para várias dimensões

2.4.1 Exemplo

Considerando a equação de onda abaixo:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, com as condições iniciais

$$u(x, 0) = 0.$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x.$$

$$u(0, y) = 0.$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \operatorname{sen} y.$$

Como é uma equação de duas dimensões é possível perceber que os operadores derivativos serão

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

$$L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Então, seus respectivos operadores inversos serão

$$L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x dx dx.$$

$$L_y^{-1} = \int_0^y \int_0^y dy dy.$$

Integrando, obtém-se:

$$u(x, y) - u(0, y) - x \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = L_x^{-1}(u_{yy}).$$

$$u(x, y) - u(x, 0) - y \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = L_y^{-1}(u_{xx}).$$

Sabendo que,

$$u(x, y) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

A partir deste momento, basta comparar o lado esquerdo com o direito da equação acima e assim calcular u_0, u_1 e u_2 .

$$u_0 = u(0, y) + xu_x(0, y).$$

$$u_0 = u(x, 0) + yu_y(x, 0).$$

Chamando $u(0, y)$ de $k_1(y)$, $u_x(0, y)$ de $k_2(y)$, $y(x, 0)$ de $k_3(x)$ e $u_y(x, 0)$ de $k_4(x)$, para a primeira aproximação, substituindo as condições iniciais abaixo nas equações (2.15) e (2.16)

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0. \\ u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) &= \text{sen}y. \end{aligned}$$

acha-se:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(0, y) + xu_x(0, y), \\ u(0, y) &= u(0, y) + 0, \\ k_1(y) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) &= \frac{\pi}{2}u_x(0, y) = \text{sen}y, \\ k_2 &= \frac{2}{\pi}\text{sen}y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x, 0) + yu_y(x, 0), \\ k_3(x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) &= \text{sen}x, \\ \frac{\pi}{2}u_y(x, 0) &= \text{sen}x, \\ u_y(x, 0) &= \frac{2}{\pi}\text{sen}x, \\ k_4(x) &= \frac{2}{\pi}\text{sen}x. \end{aligned}$$

Somando as equações encontra-se

$$u(x, y) + u(x, y) = \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} y + \frac{2}{\pi} y \operatorname{sen} x.$$

Portanto, em primeira aproximação resulta-se em

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} (x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x).$$

Para a segunda aproximação têm-se

$$u(x, y) = u_0 + u_1,$$

$$u(x, y) = u(0, y) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + L_x^{-1}(u_{yy}),$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + L_y^{-1}(u_{xx}),$$

Sendo que $u(0, y)$ é $k_1(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ é $k_2(y)$, $u(x, 0)$ é $k_3(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ é $k_4(x)$.

Como u_0 é

$$u_0 = C_2 \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} y.$$

$$u_0 = C_4 \frac{2}{\pi} y \operatorname{sen} x.$$

Basta integrar e encontra-se para x e para y

$$u_1 = - \int_0^x \int_0^x C_2 \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} y dx dx,$$

$$u_1 = -C_2 \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{6}.$$

$$u_1 = - \int_0^y \int_0^y C_4 \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} y dy dy,$$

$$u_1 = -C_4 \frac{2}{\pi} \frac{y^3}{6} \operatorname{sen} x.$$

Então:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_2 \left(x \operatorname{sen} y - \frac{x^3}{6} \operatorname{sen} y \right),$$

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_2 \operatorname{sen} y \left(x - \frac{x^3}{6} \right).$$

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_4 \operatorname{sen} x \left(y - \frac{y^3}{6} \right).$$

Substituindo-se as condições iniciais têm-se

$$u(0, y) = 0$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{2}{\pi} C_2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} y - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{6} \operatorname{sen} y \right).$$

Como $u\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ é $\operatorname{sen} y$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} y &= \frac{2}{\pi} C_2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \right) \operatorname{sen} y, \\ C_2 &= \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \right)}. \end{aligned}$$

O mesmo foi feito para C_4

$$C_4 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \right)}.$$

Logo, a segunda aproximação se resulta em

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{6}} \operatorname{sen} y \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{6}} \operatorname{sen} x \left(y - \frac{y^3}{6} \right) \right].$$

Para a terceira aproximação, ou seja, para achar u_2 , têm-se

$$u(x, y) = u_0 + u_1 + u_2.$$

$$u_2 = \int \int (u_1)_{yy} dx dx,$$

$$\int (u_1)_{xx} dy dy.$$

Fazendo as devidas substituições, obtêm-se:

$$u_2 = C_2 \operatorname{sen} y \frac{2}{\pi} \int_0^x \int_0^x \frac{x^3}{6} dx dx,$$

$$u_2 = C_2 \operatorname{sen} y \frac{2}{\pi} \frac{x^5}{5!}.$$

Da mesma forma,

$$u_2 = C_4 \operatorname{sen} x \frac{2}{\pi} \frac{y^5}{5!}.$$

Então

$$u(x, y) = C_2 \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} y - C_2 \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{6} \operatorname{sen} y + C_2 \operatorname{sen} y \frac{2}{\pi} \frac{x^5}{5!},$$

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_2 \operatorname{sen} y \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right),$$

$$u(x, y) = C_4 \frac{2}{\pi} y \operatorname{sen} x - C_4 \frac{2}{\pi} \frac{y^3}{3!} \operatorname{sen} x + C_4 \operatorname{sen} x \frac{2}{\pi} \frac{y^5}{5!},$$

$$u(x, y) = C_4 \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \right).$$

Como a condição inicial $u\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$,

$$\operatorname{sen} y = \frac{2}{\pi} C_2 \operatorname{sen} y \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right),$$

$$C_2 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right)}.$$

e

$$C_4 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right)}.$$

Para a terceira aproximação acha-se

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right)} \left[\operatorname{sen} y \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \operatorname{sen} x \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \right) \right].$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ encontra-se

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} \right) [\operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y],$$

ou

$$u(x, y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y.$$

3 Método da Decomposição para a Equação unidimensional estacionária de Pennes

Com base no artigo [Yue, Zhang e Yu 2004] será solucionado um modelo simplificado da Equação de Pennes, considerando o estado como estacionário e os tecidos analisados sendo em formato cilíndrico. Em primeiro momento, será considerada apenas a variação de uma dimensão, o raio.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T + \omega c_s (T_a - T) + Q_m. \quad (3.0)$$

Lembrando que ρ , c e k são a massa específica do tecido, o calor específico do tecido e a condutividade térmica do tecido, respectivamente. O ω é a taxa de perfusão sanguínea por unidade de volume; C_s é o calor específico do sangue; Q_m é a geração metabólica de calor por volume unitário; T_a simboliza a temperatura arterial sanguínea e T representa a temperatura do sangue.

O laplaciano em coordenadas cilíndricas é

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 T}{d\theta^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \quad (3.1)$$

Mas como nesse caso a equação será resolvida em apenas 1D, o laplaciano se resume em

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr},$$

Ou seja

$$\nabla^2 T = -\frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K}$$

Com isso, a equação a ser solucionada terá a forma

$$\frac{d^2 T}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K} \quad (3.2)$$

Com as condições iniciais:

$$\frac{dT}{dr} = 0, \quad r=0.$$

$$-K \frac{dT}{dr} = h_A(T - T_\infty), \quad r=R.$$

A equação possui ponto singular, então é necessário realizar a substituição $r = 1 + z$. Logo,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n.$$

Substituindo na equação 3, obtêm-se

$$\frac{d^2T}{dr^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{dT}{dz} - \frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K}.$$

Aplicando o operador inverso L^{-1} em cada termo da equação, acha-se

$$T(z) - T(0) - \frac{dT(0)}{dz} z = -L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{dT}{dz} \right] - L^{-1} \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1}[T],$$

$$T(z) = T(0) + zT'(0) - L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{dT}{dz} \right] - L^{-1} \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1}[T],$$

,

A partir deste momento basta comparar os dois lados da equação e fazer as substituições.

Para T_0 , têm-se

$$T_0 = T(0) + zT'_0 - L^{-1} \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right],$$

Substituindo a condição inicial $\frac{dT}{dr} = 0$, $r=0$ e integrando duas vezes, T_0 se resume em

$$T_0 = T(0) - \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right] \frac{z^2}{2}.$$

Para T_1 têm-se

$$T_1 = -L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \left(\frac{-\omega c_s T_a - Q_m}{K} \right) z \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1} \left[T(0) - \left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{K} \right) \frac{z^2}{2} \right],$$

Para simplificar, o termo $\left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{K} \right)$ será chamado de β . Desse modo, T_1 se resume em

$$T_1 = L^{-1} \left[(1 - z + z^2) \beta z \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1} \left[T(0) - \frac{\beta z^2}{2} \right],$$

Aplicando o operador inverso L^{-1} em cada termo acha-se

$$T_1 = \beta \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} + \frac{z^5}{20} \right) + \frac{\omega c_s z^2}{2K} T(0) - \frac{\omega c_s \beta}{24K},$$

ou,

$$T_1 = \frac{\beta}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) z^4 + \frac{\beta z^5}{20} + \frac{\beta z^3}{6} + \frac{\omega c_s}{K} T(0) \frac{z^2}{2}.$$

Como $T(z) = T_0 + T_1$, têm-se:

$$T(z) = T(0) - \beta \frac{z^2}{2} + \frac{\beta}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) z^4 + \beta \frac{z^5}{20} + \beta \frac{z^3}{6} + \frac{\omega c_s}{K} T(0) \frac{z^2}{2}.$$

De forma mais organizada e colocando em função de r novamente, obtêm-se:

$$T(r) = \beta \frac{(r-1)^5}{20} + \frac{\beta}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (r-1)^4 + \beta \frac{(r-1)^3}{6} - \frac{(r-1)^2}{2} \left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m - \omega c_s T(0)}{K} \right) + T(0).$$

Como $\frac{dT}{dR}$ é

$$\frac{dT}{dR} = \frac{\beta}{4} (R-1)^4 + \frac{\beta}{3} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (R-1)^3 + \frac{\beta}{2} (R-1)^2 - \left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m - \omega c_s T(0)}{K} \right) (R-1).$$

Para achar $T(0)$ basta utilizar a segunda condição inicial $-K \frac{dT}{dr} = h_A (T - T_\infty)$, $r=R$. Para uma solução numérica, basta substituir os valores da figura 4. Assim, acha-se:

$$\begin{aligned}
T(0) = & \frac{-\beta \left[\frac{K}{4}(R-1)^4 + \frac{K}{3} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (R-1)^3 + \frac{K}{2}(R-1)^2 + \frac{h_A}{20}(R-1)^5 \right]}{\omega c_s(R-1) + \frac{h_A}{2K}(R-1)^2 \omega c_s} \\
& + \frac{-\beta \left[\frac{h_A}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (R-1)^4 + \frac{h_A}{6}(R-1)^3 - \frac{h_A}{2}(R-1)^2 \right]}{\omega c_s(R-1) + \frac{h_A}{2K}(R-1)^2 \omega c_s} \\
& + \frac{\omega c_s T_a(R-1) + Q_m(R-1) + h_A T_\infty}{\omega c_s(R-1) + \frac{h_A}{2K}(R-1)^2 \omega c_s}.
\end{aligned}$$

w_b Kg/(s · m ³)	c_b J/(Kg · °C)	k W/(m · °C)	h_A W/(m ² · °C)	q_m W/m ³	T_a K	T_∞ K
3	3850	0.48	10.023	1085	310	298

Figura 4 – Valores dos parâmetros usados para análise Teórica. FONTE: [Yue, Zhang e Yu 2004]

Diante disso, acha-se $T_0 = 498.644, 11$. Portanto, a função se resume em:

$$\begin{aligned}
T(r) = & 373.081, 77(r-1)^5 - 7.481.632.593(r-1)^4 + 1.243.556, 157(r-1)^3 \\
& + 2.875.938, 917(r-1)^2 + 498.644, 11.
\end{aligned}$$

Na figura 5 é possível observar que a temperatura decresce até atingir um valor constante. Ou seja, enquanto o raio aumenta (a distância do ponto até a origem) a temperatura do tecido diminui até atingir um limite.

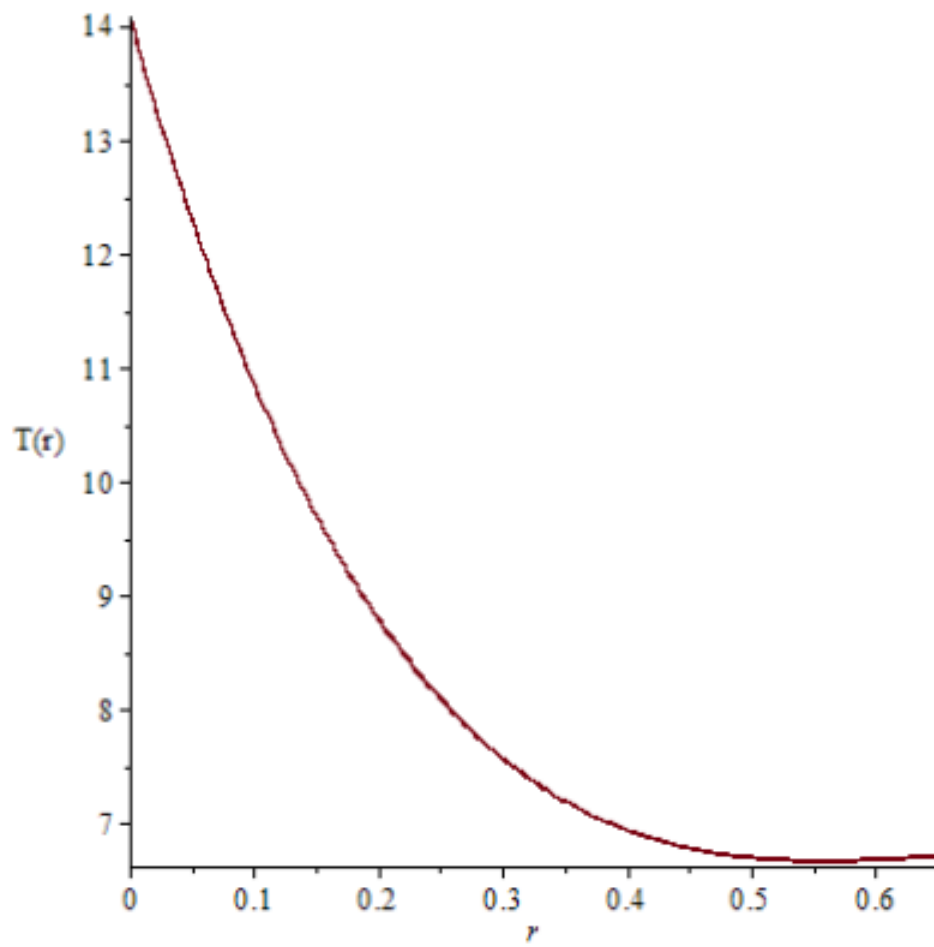


Figura 5 – Gráfico da função $T(r)$. FONTE: Própria(2018)

4 Considerações Finais

A quantidade de novas pessoas afetadas por câncer de pele a cada ano foi o que motivou esse estudo. Ainda que seu índice de mortalidade não seja alto em comparação com outros tipos de tumores malignos, a sua ocorrência é extremamente elevada no Brasil, o que faz dessa doença um distúrbio grave de saúde pública.

No presente trabalho aplicou-se o Método da Decomposição de Adomian com objetivo de solucionar de forma aproximada o modelo matemático de Pennes em regime permanente, unidimensional em coordenada cilíndricas, tal objetivo foi alcançado satisfatoriamente, mas como pôde ser observado, a resolução do problema sem o uso de programas é bastante extenso e complexo.

Diante disso, como perspectiva, é pretendido criar um algoritmo computacional que refaça tais cálculos. Com isso será possível uma solução numérica mais próxima da realidade, com mais iterações. Também é desejado solucionar a Equação de Pennes via MDA na forma não-linear e tridimensional, tal como é a pele humana.

Referências

- ADOMIAN, G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1956. Citado na página 23.
- ADOMIAN, G. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, n. 135, p. 501–544, 1988. Citado na página 23.
- BUENO, F. R. *Análise inversa com uso de algoritmo genético para localização de tumores de pele discretizados em elementos de contorno com reciprocidade dual*. 2008. 76 p. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.
- C.STURESSON; ANDERRSON-ENGELS, S. mathematical model for predicting the temperature distribution in laser-induced hyperthermia. experimental evaluation and applications. p. 18, 1995. Citado na página 21.
- DEHGHAN, M. Application of the adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications. *Applied Mathematics and Computation*, n. 157, p. 549–560, 2004. Citado na página 23.
- EDUCAÇÃO, M. da. *Estimativa-2018 Incidência de Câncer no Brasil*. [S.l.], 2018. 126 p. Citado na página 17.
- GUIMARÃES, C. S. C. *Modelagem computacional da biotransferência de calor no tratamento por hipertermia em tumores de duodeno através do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas*. 2003. 80 p. Citado na página 21.
- LAWSON, R. *IMPLICATIONS OF SURFACE TEMPERATURES IN THE DIAGNOSIS OF BREAST CANCER*. [S.l.]: Clinical and Laboratory Notes, 1956. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.
- PENNES, H. H. *Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm*. Volume 1. [S.l.]: Journal of APPLIED PHYSIOLOGY, 1948. 34 p. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- PEREIRA, A. E. L. *O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo*. 2010. 178 p. Citado na página 23.
- RAY, S. S. New approach for general convergence of the adomian decomposition method. *World Applied Sciences Journal*, p. 2264–2268, 2014. Citado na página 23.
- R.K, J. *Bioheat transfer: mathematical models of thermal systems Hyperthermia in Cancer Therapy*. [S.l.: s.n.], 1983. Citado na página 21.
- SCHNEIDER, E. da S. *Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian*. 2006. Citado na página 23.
- SILVA, G. M. L. L. da. *Análise da biotransferência de calor nos tecidos oculares devido à presença de implantes retinianos através da utilização do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas*. 2004. 59 p. Citado na página 21.

SILVA, J. D. da; LYRA, P. R. M.; LIMA, R. de Cássia Fernandes de. Análise computacional do dano térmico no olho humano portador de um melanoma de coroide quando submetido à termoterapia transpupilar a laser. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, p. 69, 2013. Citado na página [20](#).

SOUZA, M. V. C. de. *Otimização de termos fontes em problemas de biotransferência de calor*. 2009. 170 p. Citado na página [20](#).

YUE, K.; ZHANG, X.; YU, F. An analytic solution of one-dimensional steady-state pennes' bioheat transfer equation in cylindrical coordinates. *Journal of Thermal Science*, v. 13, n. 3, p. 255–258, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [43](#) e [47](#).