Estudo da Equação de Biotransferência de Calor via Método da Decomposição de Adomian

---

Alice Fazzolino P. Barbosa

Data: 2018/06/26

Universidade de Brasília

Sumário

Câncer de Pele

- 33% dos diagnósticos de câncer no Brasil são de câncer de pele.
- O Instituto Nacional do Câncer (INCA) registra,a cada ano, cerca de 180 mil novos casos.
- As pessoas mais atingidas são pessoas de pele clara com mais de 40 anos e pessoa com doenças cutâneas prévias.

- Provocado pelo crescimento anormal e descontrolado das células que compõem a pele.

Tipos

Figure: Câncer de Pele do tipo Melanoma. FONTE: Wikipedia

.

- 4% dos casos registrados.

Figure: Câncer de Pele do tipo Carcinoma. FONTE: Wikipedia

.

- 30% dos casos registrados.

Causa

- Exposição aos raios ultravioletas irradiados pelo sol.

Diagnóstico

- Novos vasos sanguíneos gerados.
- Aumento da temperatura no local que apresentam células cancerígenas.

Justificativa

- Crescente aumento do número de novos casos de câncer.
- Questão de saúde pública.

Objetivos

- Compreender o Método da Decomposição de Adomian (MDA).
- Solucionar a Equação de biotransferência de Calor de Pennes via MDA.
- Dar ínicio ao estudo de localizações de tumores de pele.

Equação de Pennes

- Pennes, em 1948, foi o primeiro a sugerir um modelo númerico que reproduzisse o processo de biotransferência de calor.
- Elaborou-se uma equação que descreve a propagação de calor no corpo humano, denominada de Equação da Bio-transferência de Calor.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q. \qquad (1)$$

onde:

K_t = Condutividade térmica do tecido $[W/m°C]$;

ρ= Massa específica do tecido $[kg/m^3]$;

c = Calor específico do tecido $[J/kg°C]$;

T = Temperatura $[°C]$;

t = Tempo [s];

Q_p= Fonte de calor devido à perfusão sanguínea $[W/m^3]$;

Q_m= Fonte de calor devido à geração de calor metábolico $[W/m^3]$;

Q = Fonte externa de calor sobre o domínio $[W/m^3]$;

O termo Q_p é dado pela equação abaixo:

$$Q_p = \omega \rho_s c_s \rho (Ta - T). \tag{2}$$

Onde:

ω = Taxa de perfusão sanguínea [m^3 de sangue/m^3 de tecido.s];

ρ_s= Massa específica do sangue [kg/m^3];

c_s= Calor específico do sangue [$J/kg.°C$]

T_a = Temperatura arterial do sangue entrando no tecido[$°C$];

T = Temperatura [$°C$];

Reescrevendo a Equação 1 em coordenadas cartesianas e desconsiderando o termo de geração de calor metábolico, temos

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q,$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_t \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_t \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_t \frac{\partial T}{\partial z}\right) + Q_p + Q. \quad (3)$$

- Métodos utilizados para resolver: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Sumário

Método da Decomposição de Adomian

- Ferramenta poderosa para solucionar equações diferenciais.
- Foi apresentado pelo matemático americano George Adomian (1922-1996) na década de 80.
- Tal método consiste em separar a equação em duas partes, a parte linear e a não-linear e em sequência aplicar o maior operador derivativo em ambos os lados do polinômio.
- Solução obtida como uma série infinita.

Considerando a seguinte equação diferencial (4):

$$\mathbf{L}y + \mathbf{R}y + \mathbf{N}y = g, \tag{4}$$

Resolvendo para **L**y e aplicando o operador inversor L^{-1} , têm-se

$$\mathbf{L}y = g - \mathbf{R}y - \mathbf{N}y,$$

,

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny,$$

L é definido como $\frac{d^n y}{dx^n}$, sendo assim, L^{-1} é um operador integral de 0 até x,

$$L^{-1} = \int_0^x (...)dt. \tag{5}$$

Caso L seja de segunda-ordem, $\frac{d^2y}{dx^2}$ por exemplo, L^{-1} será um operador de integração duplo . E a equação se resultará em

$$y = y(0) + xy'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny, \tag{6}$$

Então, a Equação final se resulta em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - RL^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{7}$$

Portanto, é possível escrever:

$$y_0 = y(0) \tag{8}$$

$$y_1 = -L^{-1}(Ry_0) - L^{-1}(A_0), \tag{9}$$

$$y_2 = -L^{-1}(Ry_1) - L^{-1}(A_1), \tag{10}$$

$$y_3 = -L^{-1}(Ry_2) - L^{-1}(A_2), \tag{11}$$

Generalizando para o y_n acha-se:

$$y_n = -L^{-1}(Ry_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}). \tag{12}$$

$$A_0 = f(y_0), \tag{13}$$

$$A_1 = y_1 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0), \tag{14}$$

$$A_2 = y_2 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + \left(\frac{y_1^2}{2!} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0), \tag{15}$$

$$A_3 = y_3 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + y_1 y_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0) + \left(\frac{y_1^3}{3!} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3} \right) f(y_0), \tag{16}$$

Generalizando, obtêm-se:

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{v=1}^{n} c(v, n) \left(\frac{\partial^v f}{\partial y^v} \right). \tag{17}$$

Exemplo

$$y' + y - y^2 = 0, y(0) = 2$$

Aplicando o operador inverso:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2),\\
\int_0^x \frac{\partial y}{\partial x} &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2),\\
y(x) = \ y(0) &+ \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2).
\end{aligned}$$

A partir daqui basta comparar o lado esquerdo com o lado direito da equação e aplicar as fórmulas (12) e (17),

$$y_0+y_1+y_2+...+y_n=y(0)-\mathbf{L}^{-1}(y_0+y_1+y_2+...+y_n)+\mathbf{L}^{-1}(A_0+A_1+A_2+...+A_n).$$

$$y_0 = y(0).$$

$$y_1 = -\mathbf{L}^{-1}(y_0) + \mathbf{L}^{-1}(A_0).$$

$$y_2 = -\mathbf{L}^{-1}(y_1) + \mathbf{L}^{-1}(A_1).$$

$$y_3 = -\mathbf{L}^{-1}(y_2) + \mathbf{L}^{-1}(A_2).$$

$$A_0 = f\,y(0) = y^2 = 4.$$

$$A_1 = y_1.2y_0,$$

$$A_1 = 4y_1.$$

$$A_2 = y_2.2y_0 + \frac{y_1^2}{2}.2,$$

$$A_2 = 4y_2 + y_1^2.$$

$$A_3 = y_3.2y_0 + y_1y_2.2,$$

$$A_3 = 4y_3 + 2y_1y_2.$$

Fazendo as devidas substituições, temos:

$$y_0 = y(0) = 2$$

$$y_1 = -\mathbf{L}^{-1}(2) + \mathbf{L}^{-1}(4),$$
$$y_1 = -2\int_0^x dx + 4\int_0^x dx,$$
$$y_1 = -2 + 4x.$$

$$y_2 = -\mathbf{L}^{-1}(2x) + \mathbf{L}^{-1}(4(2x)),$$
$$y_2 = 2\int_0^x x dx + 8\int_0^x x dx,$$
$$y_2 = 3x^2.$$

$$y_3 = -\mathbf{L}^{-1}(3x^2) + \mathbf{L}^{-1}(4(3x^2) + (2^2x^2)),$$
$$y_3 = -\int_0^x 3x^2 dx + \int_0^x 14x^2 dx,$$
$$y_3 = \frac{13x^3}{3}.$$

Finalmente, encontra-se a série:

$$y(x) = 2 + 2x + 3x^2 + \frac{13x^3}{3} + \dots$$

- Forma fechada de solução.

Sumário

Aplicação do MDA na Equação de Pennes

- Estado estacionário
- Coordenadas Cilíndricas.
- 1 dimensão

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T + \omega c_s (T_a - T) + Q_m. \tag{18}$$

A equação a ser solucionada terá a forma

$$\frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} - \frac{\omega c_s}{k}(T_a - T) - \frac{Q_m}{K} \tag{19}$$

Com as condições iniciais:

$\frac{dT}{dr} = 0$, r = 0 .

$-K\frac{dT}{dr} = h_A(T - T_\infty)$, r = R.

A equação possui ponto singular, então é necessário realizar a substituição $r = 1 + z$. Logo,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n.$$

$$. \tag{20}$$

Substituindo na equação 19, acha-se:

$$\frac{d^2T}{dr^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n \frac{dT}{dz} - \frac{\omega c_s}{k}(T_a - T) - \frac{Q_m}{K}.$$

Para simplificar, o termo $\left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{K}\right)$ será chamado de β.

Aplicando o operador inverso L^{-1} em cada termo da equação e fazendo as devidas substituições, obtêm-se:

$$T(r) = \beta\frac{(r-1)^5}{20} + \frac{\beta}{12}\left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K}\right)(r-1)^4$$
$$+\beta\frac{(r-1)^3}{6} - \frac{(r-1)^2}{2}\left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m - \omega c_s T(0)}{K}\right) + T(0).$$

Para achar T(0) basta utilizar a segunda condição inicial $-K\frac{dT}{dr} = h_A(T - T_\infty)$, r=R. Para uma solução númerica, basta substituir os valores da figura 4.

w_b Kg/(s· m³)	c_b J/(Kg·°C)	k W/(m·°C)	h_A W/(m²·°C)	q_m W/m³	T_a K	T_∞ K
3	3850	0.48	10.023	1085	310	298

Figure: Valores do parâmetros usados para análise Teórica. FONTE: Yue, Zhang e Yu (2004).

Dessa forma, acha-se $T_0 = 498.644,11$. Portanto, a função se resume em:

$$\begin{aligned} T(r) &= 373.081{,}77(r-1)^5-7.481.632.593(r-1)^4+1.243.556{,}157(r-1)^3 \\ &+ 2.875.938{,}917(r-1)^2+498.644{,}11. \end{aligned}$$

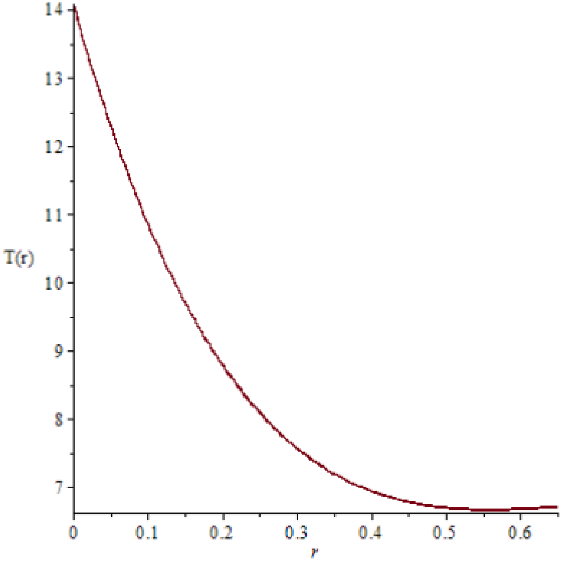

Figure: Gráfico da função T(r). FONTE: Própria(2018)

Considerações Finais e Perspectivas

- Conhecimento da distribuição de temperatura nos tecidos vivos a partir da análise dos efeitos da condutividade térmica, perfusão sanguínea, geração de calor metábolico e do coeficiente de transferência de calor.
- Aplicou-se o Método da Decomposição de Adomian com objetivo de solucionar de forma aproximada o modelo matemático de Pennes em regime permanente, unidimensional em coordenada cílindricas, tal objetivo foi alcançado satisfatoriamente, mas como pôde ser observado, a resolução do problema sem o uso de programas é bastante extenso e complexo.
- Criar um algoritmo computacional que refaça os cálculos.
- Solucionar a Equação de Pennes via MDA na forma não-linear e tridimensional.