

# Estudo da Equação de Biotransferência de Calor via Método da Decomposição de Adomian

---

Alice Fazzolino P. Barbosa

Data: 2018/06/27

Universidade de Brasília



1. Introdução
2. O método da Decomposição de Adomian
3. Aplicação do MDA na Equação de Pennes
4. Considerações Finais e Perspectivas

- ⦿ 33% dos diagnósticos de câncer no Brasil são de câncer de pele.
- ⦿ O Instituto Nacional do Câncer (INCA) registra, a cada ano, cerca de 180 mil novos casos.
- ⦿ As pessoas mais atingidas são pessoas de pele clara com mais de 40 anos e pessoa com doenças cutâneas prévias.

- ⊙ Provocado pelo crescimento anormal e descontrolado das células que compõem a pele.

# Tipos



Figure: Câncer de Pele do tipo Melanoma. FONTE: Wikipedia

© 4% dos casos registrados.



Figure: Câncer de Pele do tipo Carcinoma. FONTE: Wikipedia

© 30% dos casos registrados.

- ⊙ Exposição aos raios ultravioletas irradiados pelo sol.

- ⊙ Necessário que seja detectado precocemente.
- ⊙ Novos vasos sanguíneos gerados.
- ⊙ Aumento da temperatura no local que apresentam células cancerígenas.



- ⊙ Crescente aumento do número de novos casos de câncer.
- ⊙ Recursos insuficientes para dar conta das necessidades de diagnóstico, tratamento e acompanhamento.
- ⊙ Questão de saúde pública.

- ⊙ Compreender o Método da Decomposição de Adomian (MDA).
- ⊙ Solucionar a Equação de biotransferência de Calor de Pennes via MDA.
- ⊙ Dar início ao estudo de localizações de tumores de pele.

# Equação de Pennes

- ⊙ Profissionais da área da matemática, engenharia e saúde trabalhando juntos afim de criarem novos métodos de detecção e tratamento de doenças.
- ⊙ Modelo numérico apresentado por Harry Pennes em 1948, que descreve o processo de biotransferência de calor nos tecidos vivos.
- ⊙ Envolve diversos processos, como condução, radiação, convecção, evaporação, metabolismo e mudança de fases.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q. \quad (1)$$

onde:

$K_t$  = Condutividade térmica do tecido [ $W/m^\circ C$ ];

$\rho$  = Massa específica do tecido [ $kg/m^3$ ];

$c$  = Calor específico do tecido [ $J/kg^\circ C$ ];

$T$  = Temperatura [ $^\circ C$ ];

$t$  = Tempo [s];

$Q_p$  = Fonte de calor devido à perfusão sanguínea [ $W/m^3$ ];

$Q_m$  = Fonte de calor devido à geração de calor metabólico [ $W/m^3$ ];

$Q$  = Fonte externa de calor sobre o domínio [ $W/m^3$ ];

O termo  $Q_p$  é dado pela equação abaixo:

$$Q_p = \omega \rho_s c_s \rho (T_a - T). \quad (2)$$

Onde:

$\omega$  = Taxa de perfusão sanguínea [ $m^3$  de sangue/ $m^3$  de tecido.s];

$\rho_s$  = Massa específica do sangue [ $kg/m^3$ ];

$c_s$  = Calor específico do sangue [ $J/kg.^{\circ}C$ ]

$T_a$  = Temperatura arterial do sangue entrando no tecido [ $^{\circ}C$ ];

$T$  = Temperatura [ $^{\circ}C$ ];

Reescrevendo a Equação 1 em coordenadas cartesianas e desconsiderando o termo de geração de calor metabólico, temos

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q,$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_p + Q. \quad (3)$$

- ⊙ Métodos utilizados para resolver: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos ( MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

1. Introdução
2. O método da Decomposição de Adomian
3. Aplicação do MDA na Equação de Pennes
4. Considerações Finais e Perspectivas

# Método da Decomposição de Adomian

- ⊙ Foi apresentado pelo matemático americano George Adomian (1922-1996) na década de 80.
- ⊙ Ferramenta poderosa para solucionar equações diferenciais.
- ⊙ Tal método consiste em separar a equação em duas partes, a parte linear e a não-linear e em sequência aplicar o maior operador derivativo em ambos os lados do polinômio.
- ⊙ Solução obtida como uma série infinita em que cada termo depende do termo anterior.



Considerando a seguinte equação diferencial (4):

$$\mathbf{L}y + \mathbf{R}y + \mathbf{N}y = g, \quad (4)$$

Resolvendo para  $\mathbf{L}y$  e aplicando o operador inversor  $L^{-1}$ , têm-se

$$\mathbf{L}y = g - \mathbf{R}y - \mathbf{N}y,$$

,

$$L^{-1}\mathbf{L}y = L^{-1}g - L^{-1}\mathbf{R}y - L^{-1}\mathbf{N}y,$$

$L$  é definido como  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , sendo assim,  $L^{-1}$  é um operador integral de 0 até  $x$ ,

$$L^{-1} = \int_0^x (...)dt. \quad (5)$$

Caso  $L$  seja de segunda-ordem,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  por exemplo,  $L^{-1}$  será um operador de integração duplo . E a equação se resultará em

$$y = y(0) + xy'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny, \quad (6)$$

Então, a Equação final se resulta em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - RL^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (7)$$

Portanto, é possível escrever:

$$y_0 = y(0) \tag{8}$$

$$y_1 = -L^{-1}(Ry_0) - L^{-1}(A_0), \tag{9}$$

$$y_2 = -L^{-1}(Ry_1) - L^{-1}(A_1), \tag{10}$$

$$y_3 = -L^{-1}(Ry_2) - L^{-1}(A_2), \tag{11}$$

Generalizando para o  $y_n$  acha-se:

$$y_n = -L^{-1}(Ry_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}). \tag{12}$$

$$A_0 = f(y_0), \quad (13)$$

$$A_1 = y_1 \left( \frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0), \quad (14)$$

$$A_2 = y_2 \left( \frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + \left( \frac{y_1^2}{2!} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0), \quad (15)$$

$$A_3 = y_3 \left( \frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + y_1 y_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0) + \left( \frac{y_1^3}{3!} \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial y_0^3} \right) f(y_0), \quad (16)$$

Generalizando, obtêm-se:

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{v=1}^n c(v, n) \left( \frac{\partial^v f}{\partial y^v} \right). \quad (17)$$

## Exemplo

$$y' + y - y^2 = 0, y(0) = 2$$

Aplicando o operador inverso:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2), \\ \int_0^x \frac{\partial y}{\partial x} &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2), \\ y(x) &= y(0) + \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2).\end{aligned}$$

A partir daqui basta comparar o lado esquerdo com o lado direito da equação e aplicar as fórmulas (12) e (17),

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) - \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \mathbf{L}^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

$$y_0 = y(0).$$

$$y_1 = -\mathbf{L}^{-1}(y_0) + \mathbf{L}^{-1}(A_0).$$

$$y_2 = -\mathbf{L}^{-1}(y_1) + \mathbf{L}^{-1}(A_1).$$

$$y_3 = -\mathbf{L}^{-1}(y_2) + \mathbf{L}^{-1}(A_2).$$

$$A_0 = f y(0) = y^2 = 4.$$

$$A_1 = y_1.2y_0,$$

$$A_1 = 4y_1.$$

$$A_2 = y_2.2y_0 + \frac{y_1^2}{2}.2,$$

$$A_2 = 4y_2 + y_1^2.$$

$$A_3 = y_3.2y_0 + y_1y_2.2,$$

$$A_3 = 4y_3 + 2y_1y_2.$$



Fazendo as devidas substituições, temos:

$$y_0 = y(0) = 2$$

$$y_1 = -\mathbf{L}^{-1}(2) + \mathbf{L}^{-1}(4),$$

$$y_1 = -2 \int_0^x dx + 4 \int_0^x dx,$$

$$y_1 = -2 + 4x.$$

$$y_2 = -\mathbf{L}^{-1}(2x) + \mathbf{L}^{-1}(4(2x)),$$

$$y_2 = 2 \int_0^x x dx + 8 \int_0^x x dx,$$

$$y_2 = 3x^2.$$

$$y_3 = -\mathbf{L}^{-1}(3x^2) + \mathbf{L}^{-1}(4(3x^2) + (2^2x^2)),$$

$$y_3 = -\int_0^x 3x^2 dx + \int_0^x 14x^2 dx,$$

$$y_3 = \frac{13x^3}{3}.$$

Finalmente, encontra-se a série:

$$y(x) = 2 + 2x + 3x^2 + \frac{13x^3}{3} + \dots$$

- ⊙ O método da Decomposição de Adomian fornece uma forma fechada de solução.

1. Introdução
2. O método da Decomposição de Adomian
3. Aplicação do MDA na Equação de Pennes
4. Considerações Finais e Perspectivas

# Aplicação do MDA na Equação de Pennes

- ⊙ Estado estacionário
- ⊙ Coordenadas Cilíndricas.
- ⊙ 1 dimensão

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T + \omega c_s (T_a - T) + Q_m. \quad (18)$$

A equação a ser solucionada terá a forma

$$\frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K} \quad (19)$$

Com as condições iniciais:

$$\frac{dT}{dr} = 0, \quad r = 0.$$

$$-K \frac{dT}{dr} = h_A (T - T_\infty), \quad r = R.$$

A equação possui ponto singular, então é necessário realizar a substituição  $r = 1 + z$ . Logo,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n. \quad (20)$$

Substituindo na equação 19, acha-se:

$$\frac{d^2T}{dr^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{dT}{dz} - \frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K}.$$

Para simplificar, o termo  $\left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{K}\right)$  será chamado de  $\beta$ .

Aplicando o operador inverso  $L^{-1}$  em cada termo da equação e fazendo as devidas substituições, obtêm-se:

$$T(r) = \beta \frac{(r-1)^5}{20} + \frac{\beta}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K}\right) (r-1)^4 \\ + \beta \frac{(r-1)^3}{6} - \frac{(r-1)^2}{2} \left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m - \omega c_s T(0)}{K}\right) + T(0).$$



Para achar  $T(0)$  basta utilizar a segunda condição inicial  $-K \frac{dT}{dr} = h_A(T - T_\infty)$ ,  $r=R$ . Para uma solução numérica, basta substituir os valores da figura 4.

$w_b$ Kg/(s· m <sup>3</sup> )	$c_b$ J/(Kg· °C)	$k$ W/(m· °C)	$h_A$ W/(m <sup>2</sup> · °C)	$q_m$ W/m <sup>3</sup>	$T_a$ K	$T_\infty$ K
3	3850	0.48	10.023	1085	310	298

Figure: Valores do parâmetros usados para análise Teórica. FONTE: Yue, Zhang e Yu (2004).

Dessa forma, acha-se  $T_0 = 498.644,11$ . Portanto, a função se resume em:

$$\begin{aligned}
 T(r) = & 373.081,77(r-1)^5 - 7.481.632.593(r-1)^4 + 1.243.556,157(r-1)^3 \\
 & + 2.875.938,917(r-1)^2 + 498.644,11.
 \end{aligned}$$

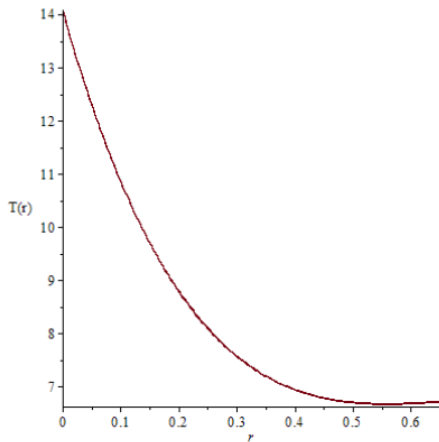


Figure: Gráfico da função  $T(r)$ . FONTE: Própria(2018)

⊙ Temperatura decresce até atingir um valor constante.

1. Introdução
2. O método da Decomposição de Adomian
3. Aplicação do MDA na Equação de Pennes
4. Considerações Finais e Perspectivas

# Considerações Finais e Perspectivas

- ⊙ A partir da análise dos efeitos da condutividade térmica, perfusão sanguínea, geração de calor metabólico e do coeficiente de transferência de calor é possível ter um conhecimento sobre a distribuição de temperatura nos tecidos vivos.
- ⊙ Aplicou-se o Método da Decomposição de Adomian com objetivo de solucionar de forma aproximada o modelo matemático de Pennes em regime permanente, unidimensional em coordenada cilíndricas, tal objetivo foi alcançado satisfatoriamente, mas como pôde ser observado, a resolução do problema sem o uso de algoritmos computacionais é bastante extenso e complexo.
- ⊙ Criar um algoritmo computacional que refaça os cálculos.
- ⊙ Solucionar a Equação de Pennes via MDA na forma não-linear e tridimensional.