



Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Eletrônica

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

Autor: Alice Fazzolino Pinto Barbosa
Orientador: Dr. Ronni Amorim

Brasília, DF
2018



Alice Fazzolino Pinto Barbosa

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Dr. Ronni Amorim

Brasília, DF

2018

Alice Fazzolino Pinto Barbosa

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian/ Alice Fazzolino Pinto Barbosa. – Brasília, DF, 2018-
71 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr.Ronni Amorim

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2018.

1. Palavra-chave01. 2. Palavra-chave02. I. Dr.Ronni Amorim . II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

CDU 02:141:005.6

Errata

Elemento opcional da ?4.2.1.2]NBR14724:2011. **Caso não deseje uma errata, deixar todo este arquivo em branco.** Exemplo:

FERRIGNO, C. R. A. **Tratamento de neoplasias ósseas apendiculares com reimplantação de enxerto ósseo autólogo autoclavado associado ao plasma rico em plaquetas:** estudo crítico na cirurgia de preservação de membro em cães. 2011. 128 f. Tese (Livre-Docência) - Faculdade de Medicina Veterinária e Zootecnia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

Folha	Linha	Onde se lê	Leia-se
1	10	auto-conclavo	autoconclavo

Alice Fazzolino Pinto Barbosa

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 01 de junho de 2013:

Dr. Ronni Amorim
Orientador

Titulação e Nome do Professor
Convidado 01
Convidado 1

Titulação e Nome do Professor
Convidado 02
Convidado 2

Brasília, DF
2018

**A dedicatória é opcional. Caso não deseje uma, deixar todo este arquivo em
branco.**

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

A inclusão desta seção de agradecimentos é opcional, portanto, sua inclusão fica a critério do(s) autor(es), que caso deseje(em) fazê-lo deverá(ão) utilizar este espaço, seguindo a formatação de *espaço simples e fonte padrão do texto (arial ou times, tamanho 12 sem negritos, aspas ou itálico*.

Caso não deseje utilizar os agradecimentos, deixar toda este arquivo em branco.

A epígrafe é opcional. Caso não deseje uma, deixe todo este arquivo em
branco.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

Neste trabalho foi estudado o Método da Decomposição de Adomian (MDA) e aplicada a Equação de Biotransferência de calor ou Equação de Pennes. Neste sentido, o MDA é explicado com detalhes e de forma pedagógica, bem como é apresentada uma discussão de sua convergência. Diversos exemplos da aplicação do MDA são apresentados. Na sequência, a Equação de Pennes unidimensional e estacionária foi analisada com o uso do MDA. As soluções obtidas foram plotadas e comparadas com casos da literatura.

Palavras-chaves: Método da Decomposição de Adomian, Equação da Biotransferência de Calor, Equação de Pennes

Abstract

This is the english abstract.

Key-words: latex. abntex. text editoration.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Agulha de aço inoxidável usada para introdução de termopar. FONTE: [Pennes 1948]	30
Figura 2 – Carcinoma de mama esquerda.Mama direita negativa no mesmo paciente, mostrando diferencial de temperatura. FONTE: [LAWSON 1956]	31
Figura 3 – -Evaporógrafo de paciente com carcinoma de mama direita. FONTE: [LAWSON 1956]	31
Figura 4 – Valores do parâmetros usados para análise Teórica. FONTE: [Yue, Zhang e Yu 2004]	57

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

LED Diodo Emissor de Luz *Lightning Emitting Diode*

CI Circuito Integrado

RAPHA Equipamento Médico para Tratamento de Neoformação tecidual

PIC *Programmable Interface Controller*

Lista de símbolos

Γ	Letra grega Gama
Λ	Lambda
ζ	Letra grega minúscula zeta
\in	Pertence

Sumário

	Introdução	27
1	REFERENCIAL TEÓRICO	29
1.1	Câncer de pele	29
1.2	Harry H. Pennes e a Equação da Biotransferência de calor	32
1.2.1	Modelo físico-matemático	33
2	MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO	35
2.1	Introdução	35
2.2	Descrição do Método	35
2.3	Exemplos	37
2.3.1	Exemplo 1 : Equação linear de primeira ordem	37
2.3.2	Exemplo 2 : Equação não-linear de primeira ordem	40
2.3.3	Exemplo 3 : Equação não-linear de primeira ordem	43
2.3.4	Exemplo 4: Equação linear de segunda ordem	45
2.4	Método da decomposição para várias dimensões	47
3	MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO PARA A EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL ESTACIONÁRIA DE PENNES	53
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICES	61
	APÊNDICE A – PRIMEIRO APÊNDICE	63
	APÊNDICE B – SEGUNDO APÊNDICE	65
	ANEXOS	67
	ANEXO A – PRIMEIRO ANEXO	69
	ANEXO B – SEGUNDO ANEXO	71

Introdução

Este documento apresenta considerações gerais e preliminares relacionadas à redação de relatórios de Projeto de Graduação da Faculdade UnB Gama (FGA). São abordados os diferentes aspectos sobre a estrutura do trabalho, uso de programas de auxílio a edição, tiragem de cópias, encadernação, etc.

1 Referencial Teórico

1.1 Câncer de pele

“O câncer de pele é provocado pelo crescimento anormal e descontrolado das células que compõem a pele. Essas células se dispõem formando camadas e, de acordo com as que forem afetadas, são definidos os diferentes tipos de câncer” [[Sociedade Brasileira de dermatologia 2018](#)].

Existem dois tipos de cânceres de pele, o melanoma e os carcinomas. O melanoma é o tipo mais agressivo, mas seus casos são relativamente raros. Já os carcinomas tem letalidade baixa, mas o número de casos é extremamente alto no Brasil.

Geralmente, o câncer de pele é o menos agressivo dentre os outros cânceres existentes, mas se houver um diagnóstico tardio, este pode levar a ferimentos, sérias deformidades físicas e até a morte.

O Instituto Nacional do Câncer (INCA) afirma que

“Estima-se que no Brasil existem 85.170 casos recentes de câncer de pele não melanoma entre homens e 80.410 nas mulheres para cada ano do biênio 2018-2019. Esses valores correspondem a um risco estimado de 82,53 casos novos a cada 100 mil homens e 75,84 para cada 100 mil mulheres” [[Educação 2018](#), p.54].

Em seu estudo a Sociedade Brasileira de Dermatologia diz que o maior motivo para evolução do câncer de pele é devido a exposição aos raios ultravioletas irradiados pelo sol. Os horários mais perigosos são no período de 10 às 16 horas. Evitar a exposição intensa ao sol nesses horários e proteger a pele dos impactos da radiação ultravioleta são os melhores métodos para evitar os tumores de pele.

Há várias formas de tratamento atualmente, mas todos os casos precisam ser identificados antecipadamente para melhores chances de cura. Uma forma de realizar tal feito é detectar tumores através da temperatura da pele, utilizando-se de equipamentos médicos.

Em sua tese Fabrício [[Bueno 2008](#)] alega que diferentemente da trombose ou esclerose vascular que reduz o sangue fluído na pele e consequentemente diminui a temperatura superficial da mesma, os tumores de pele provocam um aumento de temperatura local, por essa razão a temperatura incomum da pele pode apontar circulação sanguínea irregular. Lawson [[LAWSON 1956](#)] consolida esse fato afirmando que sangue venoso que escoa

o tumor maligno é regularmente mais quente do que o fornecido pelo sistema arterial . Ele também menciona que foi realizada uma experiência com 26 pacientes portadores de câncer de mama que comprovou que a temperatura da pele sobre o tumor na mama era maior que a do tecido normal.

O aumento médio de temperatura detectável na área do tumor foi de $2.27^{\circ}F$. O máximo foi de $3.5^{\circ}F$ e o mínimo de $1.3^{\circ}F$. Em dois casos adicionais mostrando um aumento entre 1.5° e $2^{\circ}F$, o diagnóstico foi de malignidade duvidosa [LAWSON 1956, p.309].

Lawson afirma que:

“As propensões malignas são diretamente relacionadas à velocidade de divisão celular. Esta por sua vez é refletida pelo metabolismo local acelerado que é adequadamente apoiada pelo aumento da vascularização sanguínea e linfática. Essas biológicas alterações podem ser prontamente detectadas estimulando mudanças de temperatura no tumor ou seu ambiente imediato. A energia térmica é transferida pelo processo de convecção, condução e radiação” [LAWSON 1956, p.309] .

Logo, tal fato pode ser utilizado para diagnósticos de tumores em tecidos vivos.

Ao longo dos anos foram utilizados alguns métodos para medir essa temperatura corporal, como por exemplo o primeiro experimento de Pennes, em 1948, que com intuito de medir a temperatura do antebraço foi utilizado uma agulha de aço inoxidável para a introdução de um termopar(sensor utilizado para medição de temperatura).

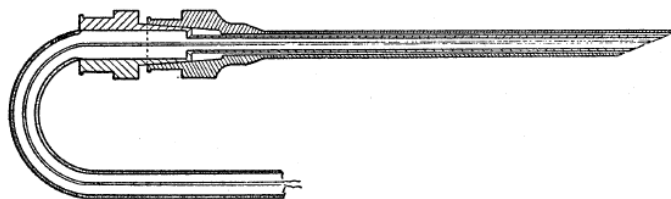


Figura 1 – Agulha de aço inoxidável usada para introdução de termopar. FONTE: [Pennes 1948]

De acordo com [LAWSON 1956], o termopar também foi usado em outras experiências, mas sem o uso de agulhas, a técnica simplesmente se resumia a aplicar o termopar na pele sobre o tumor, ou, no caso de uma neoplasia (massa anormal de tecido) profundamente enraizada, na aréola ipsilateral (pequena área circular que envolve o mamilo). Se o paciente portasse o câncer, haveria um diferencial de temperatura.

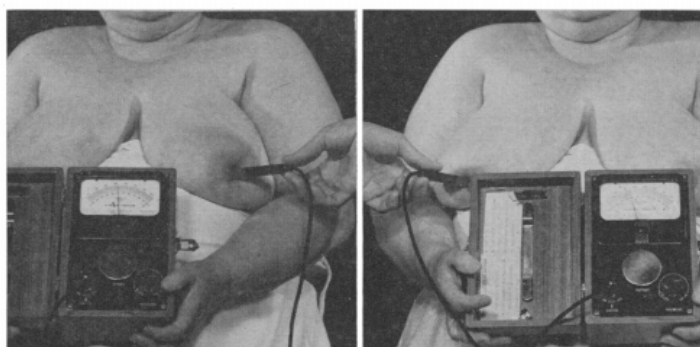


Figura 2 – Carcinoma de mama esquerda. Mama direita negativa no mesmo paciente, mostrando diferencial de temperatura. FONTE: [LAWSON 1956]

Outro método empregue foi o uso do Evaporógrafo Baird, um instrumento projetado para dar uma imagem térmica direta em um filme de óleo muito fino. “O princípio principal empregado neste aparelho é a evaporação diferencial de um filme de óleo em uma membrana transparente que pode ser observado ou fotografado em preto e branco ou colorido” [LAWSON 1956]. O equipamento dispõe-se de uma alta resolução em locais onde a temperatura é maior e má resolução onde a temperatura é menor.



Figura 3 – Evaporógrafo de paciente com carcinoma de mama direita. FONTE: [LAWSON 1956]

Atualmente detemos de técnicas e equipamentos mais modernos. Como já foi dito, a definição da temperatura em tecidos se dá por intermédio da transferência de calor nos

mesmos e utilizando a “equação biotérmica de Pennes é possível encontrar a distribuição de temperatura e o fluxo de calor em um maciço de pele” [Bueno 2008].

1.2 Harry H. Pennes e a Equação da Biotransferência de calor

Pennes, em 1948, “foi o primeiro a propor um modelo matemático que representasse o processo de biotransferência de calor” [Souza 2009, p.28]. Realizou-se experimentos afim de estudar a difusão de calor no corpo humano.

“As temperaturas dos tecidos normais do antebraço humano e do sangue arterial braquial foram medidas para avaliar a aplicabilidade da teoria do fluxo de calor ao antebraço em termos básicos de taxa local de produção de calor tecidual e fluxo volumétrico de sangue ” [Pennes 1948].

Com esse conteúdo elaborou-se uma equação que descreve a propagação de calor no corpo humano, denominada de Equação da Biotransferência de Calor (Bioheat Transfer Equation - BHTE).

De acordo com (PENNES, 1948 apud SILVA; LYRA; LIMA, 2013)

“A transferência de calor nos organismos vivos é caracterizada por dois mecanismos importantes: metabolismo e fluxo sanguíneo. O sangue escoar, de forma não-newtoniana, através dos vasos sanguíneos que apresentam diferentes dimensões. Segundo a teoria de Pennes, a transferência líquida de calor entre o sangue e o tecido é proporcional à diferença entre a temperatura do sangue arterial, que entra no tecido, e a temperatura do sangue venoso que sai do tecido. Ele sugeriu que a transferência de calor devida ao escoamento sanguíneo pode ser modelada por uma taxa de perfusão sanguínea, com o sangue atuando como uma fonte/sumidouro escalar de calor. Apesar da sua simplicidade, uma das dificuldades encontradas no uso da BHTE reside na ausência de informação detalhada e precisa sobre as taxas volumétricas de perfusão sanguínea, especialmente para tecidos neoplásico” [Silva, Lyra e Lima 2013].

Houve vários estudos com o objetivo de aperfeiçoar a equação de biotransferência de calor de Pennes, porém, acabaram em modelos muito específicos e complexos. Por esses motivos e por sua clareza, a equação de Pennes ainda é a mais usada para caracterizar a transferência de calor e a disseminação da temperatura em tecidos biológicos vivos.

1.2.1 Modelo físico-matemático

Segundo [Guimarães 2003], a equação abaixo descreve a transferência de calor nos organismos vivos e é chamada de Equação de Pennes.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q. \quad (1.1)$$

onde:

K_t = Condutividade térmica do tecido [$W/m^\circ C$];

ρ = Massa específica do tecido [kg/m^3];

c = Calor específico do tecido [$J/kg^\circ C$];

T = Temperatura [$^\circ C$];

t = Tempo [s];

Q_p = Fonte de calor devido à perfusão sanguínea [W/m^3];

Q_m = Fonte de calor devido à geração de calor metabólico [W/m^3];

Q = Fonte externa de calor sobre o domínio [W/m^3];

O termo Q pode ser qualquer fonte de aquecimento externa, como sementes ferromagnéticas e radiação eletromagnética, como radiofrequência, microondas, ultra-som, e laser [Silva 2004, p.10]. Já o termo Q_m , conforme o estudo de Stureson & Andersson-Engels, “A fonte de calor devido à geração metabólica é normalmente muito menor do que o calor externo depositado, então este termo pode ser desconsiderado da expressão” (R.K, 1983 apud C.STURESSON; ANDERRSON-ENGELS, 1995, p.2039).

“O termo Q_p corresponde a fonte de calor devido à perfusão sanguínea que caracteriza-se pela transferência de calor efetuada pelo sangue através da vascularização capilar presente nos tecidos vivos” [Guimarães 2003]. De acordo com [Silva 2004], Q_p é dado pela equação abaixo:

$$Q_p = \omega \times \rho_s \times c_s \times \rho \times (T_a - T_v). \quad (1.2)$$

Onde:

ω = Taxa de perfusão sanguínea [$m^3 \text{desangue} / m^3 \text{detecido.s}$];

ρ_s = Massa específica do sangue [kg/m^3];

c_s = Calor específico do sangue [$J/kg.^\circ C$]

T_a = Temperatura arterial do sangue entrando no tecido [$^\circ C$];

T_v = Temperatura do sangue venoso saindo do tecido [$^\circ C$];

Reescrevendo a Eq.(1.1) em coordenadas cartesianas e desconsiderando o termo de geração de calor metabólico pelo motivo já explicado antes, temos:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_p + Q. \quad (1.3)$$

A dificuldade dessa equação diferencial é que ela não pode ser resolvida analiticamente, então é necessário utilizar-se de algum método numérico para se obter uma aproximação do resultado.

Os métodos numéricos mais utilizados para resolver esse tipo de equação é o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos (MVF), e o Método dos Elementos de Contorno (MEC);

O objetivo deste trabalho é alcançar essa solução utilizando um método diferente, o Método da Decomposição de Adomian.

2 Método da Decomposição de Adomian

2.1 Introdução

O Método da Decomposição de Adomian (ADM) não é uma técnica muito famosa em geral, mas é extremamente poderosa para solucionar equações diferenciais lineares ou não-lineares de diversos tipos. Tal método já foi utilizado com sucesso em diferentes estudos ao longo dos anos, dentre eles podemos citar o trabalho de Mustapha Azreg-Aïnou's - Developed Adomian method for quadratic Kaluza-Klein relativity, e de Antonio Goulat e Bodmann -An analytical solution for the nonlinear energy spectrum equation by the decomposition method.

De acordo com (SCHNEIDER, 2006 apud PEREIRA, 2010), o Método da Decomposição de Adomian foi apresentado pelo matemático americano George Adomian (1922-1996) na década de 80. Tal método consiste em separar a equação em duas partes, a parte linear e a não-linear e em sequência aplicar o operador inverso. De acordo com Goulart et.al(2013) as soluções das equações são calculadas como séries infinitas e cada termo dessas séries é um polinômio generalizado chamado polinômio de Adomian.

Em seu livro, Adomian (1956) afirma que o maior objetivo desse método é tornar viável soluções realistas de sistemas complexos sem a obrigação de utilizar-se da modelagem usual.

Segundo Adomian (1988), a diferença é que o Método da Decomposição de Adomian pode fornecer aproximação analítica sem linearização, perturbação, aproximações de fechamento, ou métodos de discretização que podem resultar em complexos modelos computacionais. “Além disso, ao contrário da maioria dos métodos numéricos, o Método da Decomposição de Adomian fornece uma forma fechada da solução” (DEHGHAN, 2004 apud PEREIRA, 2010), ou seja, é capaz de ser representada analiticamente em termos de uma quantidade limitada de funções conhecidas.

2.2 Descrição do Método

Considerando a seguinte equação diferencial não-linear abaixo

$$\mathbf{L}y + \mathbf{R}y + \mathbf{N}y = g \quad (2.1)$$

,

O termo \mathbf{L} é o operador derivativo de maior grau da equação, $\mathbf{R}y$ representa o

termo linear, $\mathbf{N}y$ o termo não-linear e \mathbf{g} a condição inicial. Resolvendo para $\mathbf{L}y$ e aplicando o operador inversor L^{-1} , têm-se

$$\mathbf{L}y = g - \mathbf{R}y - \mathbf{N}y, \quad (2.2)$$

,

$$L^{-1}\mathbf{L}y = L^{-1}g - L^{-1}\mathbf{R}y - L^{-1}\mathbf{N}y, \quad (2.3)$$

L é definido como $\frac{d^n y}{dx^n}$, sendo assim, L^{-1} é um operador integral de 0 até x ,

$$L^{-1} = \int_0^x (...)dt. \quad (2.4)$$

Caso L seja de segunda-ordem, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ por exemplo, L^{-1} será um operador de integração duplo. E a equação se resultará em

$$y = y(0) + xy'(0) + L^{-1}g - L^{-1}\mathbf{R}y - L^{-1}\mathbf{N}y, \quad (2.5)$$

Analisando a equação é possível perceber que $y(0)$, $xy'(0)$ são as condições iniciais e $L^{-1}g$ o valor inicial conhecido. Então, y_0 se resume nos três primeiros termos do lado direito da equação. Também é possível perceber que a parte linear da equação são os termos $y(0)$, $xy'(0)$, $L^{-1}g$ e $L^{-1}\mathbf{R}y$ e sua decomposição é $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Já o último termo $L^{-1}\mathbf{N}y$ é a parte não-linear, decompondo-o têm-se $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Com essas considerações, a equação final se resulta em

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - L^{-1}\mathbf{R} \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.6)$$

Consequentemente, é possível escrever

$$y_1 = -L^{-1}(\mathbf{R}y_0) - L^{-1}(A_0), \quad (2.7)$$

$$y_2 = -L^{-1}(\mathbf{R}y_1) - L^{-1}(A_1), \quad (2.8)$$

$$y_3 = -L^{-1}(\mathbf{R}y_2) - L^{-1}(A_2), \quad (2.9)$$

Generalizando para o y_n acha-se:

$$y_n = -L^{-1}(\mathbf{R}y_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}). \quad (2.10)$$

De acordo com GOULART et.al (2013) os polinômios de Adomian A_n são obtidos a partir da expansão da série de Taylor do termo não-linear em torno do primeiro termo da série y_0 . Dependem apenas de y_0 à y_n :

$$A_0 = f(y_0), \quad (2.11)$$

$$A_1 = y_1 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0), \quad (2.12)$$

$$A_2 = y_2 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + \left(\frac{y_1^2}{2!} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0), \quad (2.13)$$

$$A_3 = y_3 \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + y_1 y_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0) + \left(\frac{y_1^3}{3!} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3} \right) f(y_0), \quad (2.14)$$

...

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{v=1}^n c(v, n) \left(\frac{\partial^v f}{\partial y^v} \right). \quad (2.15)$$

Quando a equação é linear, $f(y) = y$, o termo A_n reduz para y_n . Quando a equação é não-linear, $A_n = A_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Por exemplo $f(y) = y^3$, $A_0 = y_0^3$, $A_1 = 3y_0 y_1$, $A_2 = y_1^2 + 3y_0 y_2$, $A_3 = 3y_1 y_2 + 3y_0 y_3$.

2.3 Exemplos

Com o objetivo de simplificar o entendimento do Método de Decomposição de Adomian, alguns exemplos de fácil compreensão serão demonstrados a seguir.

2.3.1 Exemplo 1 : Equação linear de primeira ordem

Considere a equação linear abaixo com a condição linear $y(0) = 1$:

$$y' = y,$$

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

Pode-se escrever

$$\mathbf{L}y - \mathbf{R}y = g,$$

$$\mathbf{L}y = 1 + \mathbf{R}y,$$

Lembrando que \mathbf{L} é o operador derivativo de maior ordem, que nesse caso é $\frac{dy}{dx}$, portanto o operador inverso é $L^{-1} = \int_0^x \frac{dy}{dx} dx$. Aplicando o operador inverso nos termos da equação, obtêm-se:

$$\mathbf{L}^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \mathbf{L}^{-1}y,$$

$$\int_0^x \frac{dy}{dx} dx = \mathbf{L}^{-1}y,$$

Integrando o lado esquerdo,

$$y(x) - y(0) = \mathbf{L}^{-1}y,$$

$$y(x) = y(0) + \mathbf{L}^{-1}y,$$

De acordo com a equação (2.6) obtêm-se:

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) + \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

É importante notar que nesse exemplo não serão utilizados os polinômios de Adomian A_n devido ao fato da equação ser inteiramente linear. A partir deste momento basta comparar o lado esquerdo da equação acima com o lado direito da mesma e aplicar o operador inverso:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(y_0),$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(y_1),$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(y_2),$$

...

$$y_n = \mathbf{L}^{-1}(y_n - 1).$$

E agora aplicar o operador inverso para cada y_n , neste trabalho os exemplos se limitarão em três interações.

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(y_0)$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(1)$$

$$y_1 = \int_0^x 1dx$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(y_1)$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(x)$$

$$y_2 = \int_0^x xdx$$

$$y_2 = \frac{x^2}{2}$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(y_2)$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$y_3 = \int_0^x \frac{x^2}{2} dx$$

$$y_3 = \frac{x^3}{2.3}$$

Em seguida, de acordo com a equação(2.6) obtêm-se a série:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

2.3.2 Exemplo 2 : Equação não-linear de primeira ordem

Considere a seguinte equação não-linear, com a condição inicial $y(0) = 1$:

$$y' = y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

Pode-se escrever

$$\mathbf{L}y' = g - Ny$$

Aplicando o operador inverso nos termos da equação, acha-se:

$$\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathbf{L}^{-1}y^2$$

$$\int_0^x \frac{dy}{dx} = \mathbf{L}^{-1}y^2$$

Integrando o lado esquerdo, obtém-se

$$y(x) - y(0) = \mathbf{L}^{-1}(y^2)$$

$$y(x) = y(0) + \mathbf{L}^{-1}(y^2)$$

De acordo com a equação (2.6)

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) + \mathbf{L}^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

É possível observar que o lado direito da equação acima só apresenta a condição inicial e os polinômios de Adomian, isso é devido ao fato da equação não ter termo linear, diferentemente do exemplo 1.

A partir desse momento, basta comparar os dois lados e em seguida aplicar as fórmulas para cada y e para cada A .

$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(A_0)$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(A_1)$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(A_2)$$

...

$$y_n = \mathbf{L}^{-1}(A_n - 1)$$

Calculando os polinômios de Adomian têm-se

$$A_0 = fy(0) = y_0^2 = 1$$

$$A_1 = y_1 \cdot 2y_0$$

$$A_1 = 2 \cdot y_0 \cdot y_1$$

$$A_1 = 2y_1$$

$$A_2 = y_2 \cdot 2y_0 + \frac{y_1^2}{2} \cdot 2$$

$$A_2 = 2y_2 + y_1^2$$

$$A_3 = y_3 \cdot 2y_0 + y_1 \cdot y_2 \cdot 2$$

$$A_3 = 2y_3 + 2y_1y_2$$

Fazendo as devidas substituições dos polinômios de Adomian, obtém-se:

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(A_0)$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(1)$$

$$y_1 = \int_0^x 1 dx$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(A_1)$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(2y_1)$$

$$y_2 = \int_0^x 2y_1 dx$$

$$y_2 = 2 \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = x^2$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(A_2)$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(2y_2 + y_1^2)$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(2x^2 + x^2)$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(3x^2)$$

$$y_3 = \int_0^x 3x^2 dx$$

$$y_3 = x^3$$

Finalmente, encontra-se:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

No primeiro exemplo a equação demonstrada foi de natureza linear, já no segundo, não-linear e para o terceiro exemplo será empregue uma equação com termo linear e não-linear.

2.3.3 Exemplo 3 : Equação não-linear de primeira ordem

Considere a equação abaixo com condição inicial $y(0) = 2$:

$$y' + y - y^2 = 0$$

É possível notar que diferentemente do exemplo 1 e 2, essa equação possui termo linear e também termo não-linear, porém será demonstrado a seguir que o método é o mesmo.

Aplicando o operador inverso

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2) \\ \int_0^x \frac{\partial y}{\partial x} &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2) \\ y(x) - y(0) &= \mathbf{L}^{-1}(-y) + \mathbf{L}^{-1}(y^2)\end{aligned}$$

Com a equação (2.6) obtém-se:

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) - \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \mathbf{L}^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

A partir daqui basta comparar o lado esquerdo com o lado direito da equação e aplicar as fórmulas (2.10) e (2.15),

$$\begin{aligned}y_0 &= y(0) \\ y_1 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_0) + \mathbf{L}^{-1}(A_0) \\ y_2 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_1) + \mathbf{L}^{-1}(A_1) \\ y_3 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_2) + \mathbf{L}^{-1}(A_2)\end{aligned}$$

$$A_0 = fy(0) = y^2 = 4$$

$$A_1 = y_1 \cdot 2y_0$$

$$A_1 = 4y_1$$

$$A_2 = y_2 \cdot 2y_0 + \frac{y_1^2}{2} \cdot 2$$

$$A_2 = 4y_2 + y_1^2$$

$$A_3 = y_3 \cdot 2y_0 + y_1 y_2 \cdot 2$$

$$A_3 = 4y_3 + 2y_1 y_2$$

Agora fazendo as devidas substituições, temos:

$$\begin{aligned}y_1 &= -\mathbf{L}^{-1}(2) + \mathbf{L}^{-1}(4) \\y_1 &= -2 \int_0^x dx + 4 \int_0^x dx \\y_1 &= -2 + 4x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= -\mathbf{L}^{-1}(2x) + \mathbf{L}^{-1}(4(2x)) \\y_2 &= 2 \int_0^x x dx + 8 \int_0^x x dx \\y_2 &= -x^2 + 4x^2 \\y_2 &= 3x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3 &= -\mathbf{L}^{-1}(3x^2) + \mathbf{L}^{-1}(4(3x^2) + (2^2x^2)) \\y_3 &= -\int_0^x 3x^2 dx + \int_0^x 14x^2 dx \\y_3 &= -x^3 + 16\frac{x^3}{3} \\y_3 &= \frac{-3x^3 + 16x^3}{3} \\y_3 &= \frac{13x^3}{3}\end{aligned}$$

Finalmente, encontra-se a série:

$$y(x) = 2 + 2x + 3x^2 + \frac{13x^3}{3} + \dots$$

2.3.4 Exemplo 4: Equação linear de segunda ordem

Considere a equação abaixo com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$:

$$y'' + y = 0$$

É possível notar que agora o operador derivativo de maior ordem é $\frac{d^2y}{dx^2}$ e por isso o operador inverso \mathbf{L}^{-1} será

$$\int_0^x \int_0^x \frac{d^2y}{dx^2} dx$$

Ou seja,

$$\mathbf{L}^{-1} \int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = -\mathbf{L}^{-1}(y)$$

Integrando o lado esquerdo, acha-se

$$\begin{aligned} y(x) - y(0) - xy'(0) &= -\mathbf{L}^{-1}(y) \\ y(x) &= y(0) + xy'(0) - \mathbf{L}^{-1}(y) \end{aligned}$$

De acordo com a equação (2.6), obtém-se

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_n = y(0) + xy'(0) - \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_n)$$

É possível notar a falta dos polinômios de Adomian na equação, isso é devido ao fato da equação não possuir termo não-linear.

Comparando o lado esquerdo com o lado direito da equação acima, acha-se

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) + xy'(0) \\ y_1 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_0) \\ y_2 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_1) \\ y_3 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_2) \\ y_4 &= -\mathbf{L}^{-1}(y_3) \end{aligned}$$

Para finalizar basta fazer as apropriadas substituições, como demonstrado a seguir

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + x.0 \\ y_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$y_1 = - \int_0^x \int_0^x 1 dx dx$$

$$y_1 = \frac{-x^2}{2!}$$

$$y_2 = - \int_0^x \int_0^x \frac{-x^2}{2} 1 dx dx$$

$$y_2 = \frac{-x^4}{4!}$$

$$y_3 = - \int_0^x \int_0^x \frac{-x^4}{4!}$$

$$y_3 = \frac{-x^6}{6!}$$

A série então se resume em

$$y(x) = 1 - x + \frac{-x^2}{2!} \frac{-x^4}{4!} - \frac{-x^6}{6!}$$

2.4 Método da decomposição para várias dimensões

exemplos..

...

Considerando a equação de onda abaixo:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, com as condições iniciais

$$u(x, 0) = 0$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$$

$$u(0, y) = 0$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \operatorname{sen} y$$

Como é uma equação de duas dimensões é possível perceber que os operadores derivativos serão

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Então, seus respectivos operadores inversos serão

$$L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x dx dx$$

$$L_y^{-1} = \int_0^y \int_0^y dy dy$$

Integrando, obtém-se:

$$u(x, y) - u(0, y) - x \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = L_x^{-1}(u_{yy}) \quad (2.15)$$

$$u(x, y) - u(x, 0) - y \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = L_y^{-1}(u_{xx}) \quad (2.15)$$

Sabendo que,

$$u(x, y) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

A partir deste momento, basta comparar o lado esquerdo com o direito da equação acima e assim calcular u_0 , u_1 e u_2 .

$$u_0 = u(0, y) + xu_x(0, y)$$

$$u_0 = u(x, 0) + yu_y(x, 0)$$

Chamando $u(0, y)$ de $k_1(y)$, $u_x(0, y)$ de $k_2(y)$, $y(x, 0)$ de $k_3(x)$ e $u_y(x, 0)$ de $k_4(x)$, para a primeira aproximação, substituindo as condições iniciais abaixo nas equações (2.15)

e (2.16)

$$\begin{aligned}u(0, y) &= 0 \\u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) &= \operatorname{sen} y\end{aligned}$$

acha-se:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= u(0, y) + xu_x(0, y) \\u(0, y) &= u(0, y) + 0 \\k_1(y) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) &= \frac{\pi}{2}u_x(0, y) = \operatorname{sen} y \\k_2 &= \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x, y) &= u(x, 0) + yu_y(x, 0) \\k_3(x) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen} x \\ \frac{\pi}{2}u_y(x, 0) &= \operatorname{sen} x \\u_y(x, 0) &= \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} x \\k_4(x) &= \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Somando as equações encontra-se

$$u(x, y) + u(x, y) = \frac{2}{\pi}x\operatorname{sen} y + \frac{2}{\pi}y\operatorname{sen} x$$

Portanto, em primeira aproximação resulta-se em

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}(xseny + ysenx)$$

Para a segunda aproximação têm-se

$$u(x, y) = u_0 + u_1$$

$$u(x, y) = u(0, y) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + L_x^{-1}(u_{yy})$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + L_y^{-1}(u_{xx})$$

Sendo que $u(0, y)$ é $k_1(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ é $k_2(y)$, $u(x, 0)$ é $k_3(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ é $k_4(x)$.

Como u_0 é

$$u_0 = C_2 \frac{2}{\pi} xseny$$

$$u_0 = C_4 \frac{2}{\pi} ysenx$$

Basta integrar e encontra-se para x e para y

$$u_1 = - \int_0^x \int_0^x C_2 \frac{2}{\pi} xseny dx dx$$

$$u_1 = -C_2 \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{6}$$

$$u_1 = - \int_0^y \int_0^y C_4 \frac{2}{\pi} xseny dy dy$$

$$u_1 = -C_4 \frac{2}{\pi} \frac{y^3}{6} senx$$

Então:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_2 \left(xseny - \frac{x^3}{6} seny \right)$$

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_4 seny \left(x - \frac{x^3}{6} \right)$$

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_4 \operatorname{sen} x \left(y - \frac{y^3}{6} \right)$$

Substituindo-se as condições iniciais têm-se

$$u(0, y) = 0$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{2}{\pi} C_2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} y - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{6} \operatorname{sen} y \right)$$

Como $u\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ é $\operatorname{sen} y$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} y &= \frac{2}{\pi} C_2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \right) \operatorname{sen} y \\ C_2 &= \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \right)} \end{aligned}$$

O mesmo foi feito para C_4

$$C_4 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \right)}$$

Logo, a segunda aproximação se resulta em

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{6}} \operatorname{sen} y \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{6}} \operatorname{sen} x \left(y - \frac{y^3}{6} \right) \right]$$

Para a terceira aproximação, ou seja, para achar u_2 , têm-se

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_0 + u_1 + u_2 \\ u_2 &= \int \int (u_1)_{yy} dx dx \\ &\quad \int (u_1)_{xx} dy dy \end{aligned}$$

Fazendo as devidas substituições, obtêm-se:

$$u_2 = C_2 \text{sen} y \frac{2}{\pi} \int_0^x \int_0^x \frac{x^3}{6} dx dx$$

$$u_2 = C_2 \text{sen} y \frac{2}{\pi} \frac{x^5}{5!}$$

Da mesma forma,

$$u_2 = C_4 \text{sen} x \frac{2}{\pi} \frac{y^5}{5!}$$

Então

$$u(x, y) = C_2 \frac{2}{\pi} x \text{sen} y - C_2 \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{6} \text{sen} y + C_2 \text{sen} y \frac{2}{\pi} \frac{x^5}{5!}$$

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} C_2 \text{sen} y \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)$$

$$u(x, y) = C_4 \frac{2}{\pi} y \text{sen} x - C_4 \frac{2}{\pi} \frac{y^3}{3!} \text{sen} x + C_4 \text{sen} x \frac{2}{\pi} \frac{y^5}{5!}$$

$$u(x, y) = C_4 \frac{2}{\pi} \text{sen} x \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \right)$$

Como a condição inicial $u\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$

$$\text{sen} y = \frac{2}{\pi} C_2 \text{sen} y \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right)$$

$$C_2 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right)}$$

$$C_4 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right)}$$

Para a terceira aproximação acha-se

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \right)} \left[\text{sen} y \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \text{sen} x \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \right) \right]$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ encontra-se

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) [\text{sen} y \cdot \text{sen} x + \text{sen} x \cdot \text{sen} y]$$

$$u(x, y) = \text{sen} x \cdot \text{sen} y$$

3 Método da Decomposição para a Equação unidimensional estacionária de Pennes

Com base no artigo [Yue, Zhang e Yu 2004] será solucionado um modelo simplificado da Equação de Pennes, considerando o estado como estacionário e os tecidos vivos em formato cilíndrico. Em primeiro momento, será considerada apenas a variação de uma dimensão, o raio.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T + \omega c_s (T_a - T) + Q_m. \quad (3.0)$$

Lembrando que ρ , c e k são a massa específica do tecido, o calor específico do tecido e a condutividade térmica do tecido, respectivamente. O ω é a taxa de perfusão sanguínea por unidade de volume; C_s é o calor específico do sangue; Q_m é a geração metabólica de calor por volume unitário; T_a simboliza a temperatura arterial sanguínea e T representa a temperatura do sangue.

O laplaciano em coordenadas cilíndricas é

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 T}{d\theta^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \quad (3.0)$$

Mas como nesse caso a equação será resolvida em apenas 1D, o laplaciano se resume em

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr}, \quad (3.0)$$

Ou seja

$$\nabla^2 T = -\frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K} \quad (3.0)$$

Com isso, a equação a ser solucionada terá a forma

$$\frac{d^2 T}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K} \quad (3.0)$$

Com as condições iniciais:

$$\frac{dT}{dr} = 0, \quad r=0.$$

$$-K \frac{dT}{dr} = h_A (T - T_\infty), \quad r=R.$$

Como já foi explicado, a equação possui ponto singular, então é necessário realizar a substituição $r = 1 + z$. Logo,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

Substituindo na equação 3, obtêm-se

$$\frac{d^2 T}{dr^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{dT}{dz} - \frac{\omega c_s}{k} (T_a - T) - \frac{Q_m}{K}$$

Aplicando o operador inverso L^{-1} em cada termo da equação, acha-se

$$T(z) - T(0) - \frac{dT(0)}{dz} z = -L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{dT}{dz} \right] - L^{-1} \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1}[T]$$

,

$$T(z) = T(0) + zT'(0) - L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{dT}{dz} \right] - L^{-1} \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1}[T]$$

,

A partir deste momento basta comparar os dois lados da equação e fazer as substituições.

Para T_0 , têm-se

$$T_0 = T(0) + zT'_0 - L^{-1} \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right],$$

Substituindo a condição inicial $\frac{dT}{dr} = 0$, $r=0$ e integrando duas vezes, T_0 se resume em

$$T_0 = T(0) - \left[\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{k} \right] \frac{z^2}{2}.$$

Para T_1 têm-se

$$T_1 = -L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \left(\frac{-\omega c_s T_a - Q_m}{K} \right) z \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1} \left[T(0) - \left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{K} \right) \frac{z^2}{2} \right]$$

Para simplificar, o termo $\left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m}{K} \right)$ será chamado de β . Desse modo, T_1 se resume em

$$T_1 = L^{-1} \left[(1 - z + z^2) \beta z \right] + \frac{\omega c_s}{K} L^{-1} \left[T(0) - \frac{\beta z^2}{2} \right]$$

Aplicando o operador inverso L^{-1} em cada termo acha-se

$$T_1 = \beta \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} + \frac{z^5}{20} \right) + \frac{\omega c_s z^2}{2K} T(0) - \frac{\omega c_s \beta}{24K}$$

ou,

$$T_1 = \frac{\beta}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) z^4 + \frac{\beta z^5}{20} + \frac{\beta z^3}{6} + \frac{\omega c_s}{K} T(0) \frac{z^2}{2}$$

Como $T(z) = T_0 + T_1$, têm-se:

$$T(z) = T(0) - \beta \frac{z^2}{2} + \frac{\beta}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) z^4 + \beta \frac{z^5}{20} + \beta \frac{z^3}{6} + \frac{\omega c_s}{K} T(0) \frac{z^2}{2}$$

De forma mais organizada e colocando em função de r novamente, obtêm-se:

$$T(r) = \beta \frac{(r-1)^5}{20} + \frac{\beta}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (r-1)^4 + \beta \frac{(r-1)^3}{6} - \frac{(r-1)^2}{2} \left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m - \omega c_s T(0)}{K} \right) + T(0)$$

Como $\frac{dT}{dR}$ é

$$\frac{dT}{dR} = \frac{\beta}{4} (R-1)^4 + \frac{\beta}{3} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (R-1)^3 + \frac{\beta}{2} (R-1)^2 - \left(\frac{\omega c_s T_a + Q_m - \omega c_s T(0)}{K} \right) (R-1)$$

Para achar $T(0)$ basta utilizar a segunda condição inicial $-K \frac{dT}{dr} = h_A (T - T_\infty)$, $r=R$. Assim, acha-se:

$$T(0) = -\beta \frac{\left[\frac{K}{4} (R-1)^4 + \frac{K}{3} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (R-1)^3 + \frac{K}{2} (R-1)^2 + \frac{h_A}{20} (R-1)^5 + \frac{h_A}{12} \left(-1 - \frac{\omega c_s}{2K} \right) (R-1)^4 + \frac{h_A}{6} (R-1)^3 \right]}{\omega c_s (R-1) + \frac{h_A}{2K} (R-1)^2 \omega c_s}$$

Utilizando os valores da Figura 4, obtêm-se $T_0 = -253.793$.

Portanto, a função se resume em:

$$373.081,77(r-1)^5 - 7.481.688.555(r-1)^4 + 1.243.556,157(r-1)^3 - 3.730.817,70(r-1)^2 - 1.465.654,57(r-1) - 253,793$$

w_b Kg/(s· m ³)	c_b J/(Kg· °C)	k W/(m· °C)	h_A W/(m ² · °C)	q_m W/m ³	T_a K	T_∞ K
3	3850	0.48	10.023	1085	310	298

Figura 4 – Valores do parâmetros usados para análise Teórica. FONTE: [Yue, Zhang e Yu 2004]

xdxfxcvvxcvxcvlxjncvkxjnvkxjlvxkjavlvkjavkxclkejlkcxjvelkvcxjlkxjvxlkvxjlkxjvelkvxjl

Referências

- BUENO, F. R. *Análise inversa com uso de algoritmo genético para localização de tumores de pele discretizados em elementos de contorno com reciprocidade dual*. 2008. 76 p. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 32.
- C.STURESSON; ANDERRSON-ENGELS, S. mathematical model for predicting the temperature distribution in laser-induced hyperthermia. experimental evaluation and applications. p. 18, 1995. Citado na página 33.
- DEHGHAN, M. Application of the adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications. *Applied Mathematics and Computation*, n. 157, p. 549–560, 2004. Citado na página 35.
- EDUCAÇÃO, M. da. *Estimativa-2018 Incidência de Câncer no Brasil*. [S.l.], 2018. 126 p. Citado na página 29.
- GUIMARÃES, C. S. C. *Modelagem computacional da biotransferência de calor no tratamento por hipertermia em tumores de duodeno através do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas*. 2003. 80 p. Citado na página 33.
- LAWSON, R. *IMPLICATIONS OF SURFACE TEMPERATURES IN THE DIAGNOSIS OF BREAST CANCER*. [S.l.]: Clinical and Laboratory Notes, 1956. Citado 4 vezes nas páginas 17, 29, 30 e 31.
- PENNES, H. H. *Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm*. Volume 1. [S.l.]: Journal of APPLIED PHYSIOLOGY, 1948. 34 p. Citado 3 vezes nas páginas 17, 30 e 32.
- PEREIRA, A. E. L. *O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo*. 2010. 178 p. Citado na página 35.
- R.K, J. *Bioheat transfer: mathematical models of thermal systems Hyperthermia in Cancer Therapy*. [S.l.: s.n.], 1983. Citado na página 33.
- SCHNEIDER, E. da S. *Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian*. 2006. Citado na página 35.
- SILVA, G. M. L. L. da. *Análise da biotransferência de calor nos tecidos oculares devido à presença de implantes retinianos através da utilização do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas*. 2004. 59 p. Citado na página 33.
- SILVA, J. D. da; LYRA, P. R. M.; LIMA, R. de Cássia Fernandes de. Análise computacional do dano térmico no olho humano portador de um melanoma de coróide quando submetido à termoterapia transpupilar a laser. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, p. 69, 2013. Citado na página 32.
- Sociedade Brasileira de dermatologia. 2018. Disponível em: <<http://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/doencas-e-problemas/cancer-da-pele/64/>>. Citado na página 29.

SOUZA, M. V. C. de. *Otimização de termos fontes em problemas de biotransferência de calor*. 2009. 170 p. Citado na página [32](#).

YUE, K.; ZHANG, X.; YU, F. An analytic solution of one-dimensional steady-state pennes' bioheat transfer equation in cylindrical coordinates. *JJournal of Thermal Science*, v. 13, n. 3, p. 255–258, 2004. Citado 3 vezes nas páginas [17](#), [53](#) e [57](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Primeiro Apêndice

Texto do primeiro apêndice.

APÊNDICE B – Segundo Apêndice

Texto do segundo apêndice.

Anexos

ANEXO A – Primeiro Anexo

Texto do primeiro anexo.

ANEXO B – Segundo Anexo

Texto do segundo anexo.