



Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Engenharia Eletrônica

# **Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian**

Autor: Alice Fazzolino Pinto Barbosa  
Orientador: Dr. Ronni Amorim

Brasília, DF  
2018





Alice Fazzolino Pinto Barbosa

## **Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian**

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Dr. Ronni Amorim

Brasília, DF

2018

---

Alice Fazzolino Pinto Barbosa

Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian/ Alice Fazzolino Pinto Barbosa. – Brasília, DF, 2018-  
67 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr.Ronni Amorim

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA , 2018.

1. Palavra-chave01. 2. Palavra-chave02. I. Dr.Ronni Amorim . II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian

CDU 02:141:005.6

---

# Errata

Elemento opcional da ?4.2.1.2]NBR14724:2011. **Caso não deseje uma errata, deixar todo este arquivo em branco.** Exemplo:

FERRIGNO, C. R. A. **Tratamento de neoplasias ósseas apendiculares com reimplantação de enxerto ósseo autólogo autoclavado associado ao plasma rico em plaquetas:** estudo crítico na cirurgia de preservação de membro em cães. 2011. 128 f. Tese (Livre-Docência) - Faculdade de Medicina Veterinária e Zootecnia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

Folha	Linha	Onde se lê	Leia-se
1	10	auto-conclavo	autoconclavo



Alice Fazzolino Pinto Barbosa

## **Estudo da Equação de Biotransferência de calor via Método da Decomposição de Adomian**

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 01 de junho de 2013:

---

**Dr. Ronni Amorim**  
Orientador

---

**Titulação e Nome do Professor**  
**Convidado 01**  
Convidado 1

---

**Titulação e Nome do Professor**  
**Convidado 02**  
Convidado 2

Brasília, DF  
2018





**A dedicatória é opcional. Caso não deseje uma, deixar todo este arquivo em  
branco.**

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*



# Agradecimentos

A inclusão desta seção de agradecimentos é opcional, portanto, sua inclusão fica a critério do(s) autor(es), que caso deseje(em) fazê-lo deverá(ão) utilizar este espaço, seguindo a formatação de *espaço simples e fonte padrão do texto (arial ou times, tamanho 12 sem negritos, aspas ou itálico*.

**Caso não deseje utilizar os agradecimentos, deixar toda este arquivo em branco.**



A epígrafe é opcional. Caso não deseje uma, deixe todo este arquivo em  
branco.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*



# Resumo

O resumo deve ressaltar o objetivo, o método, os resultados e as conclusões do documento. A ordem e a extensão destes itens dependem do tipo de resumo (informativo ou indicativo) e do tratamento que cada item recebe no documento original. O resumo deve ser precedido da referência do documento, com exceção do resumo inserido no próprio documento. (...) As palavras-chave devem figurar logo abaixo do resumo, antecidas da expressão Palavras-chave:, separadas entre si por ponto e finalizadas também por ponto. O texto pode conter no mínimo 150 e no máximo 500 palavras, é aconselhável que sejam utilizadas 200 palavras. E não se separa o texto do resumo em parágrafos.

**Palavras-chaves:** latex. abntex. editoração de texto.





# Abstract

This is the english abstract.

**Key-words:** latex. abntex. text editoration.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Agulha de aço inoxidável usada para introdução de termopar. FONTE: [Pennes 1948] . . . . .	30
Figura 2 – Carcinoma de mama esquerda.Mama direita negativa no mesmo paciente, mostrando diferencial de temperatura. FONTE: [LAWSON 1956]	31
Figura 3 – -Evaporógrafo de paciente com carcinoma de mama direita. FONTE: [LAWSON 1956] . . . . .	31
Figura 4 – Wavelets correlation coefficients . . . . .	49



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades obtidas após processamento . . . . .	50
--	----



# Lista de abreviaturas e siglas

LED Diodo Emissor de Luz *Lightning Emitting Diode*

CI Circuito Integrado

RAPHA Equipamento Médico para Tratamento de Neoformação tecidual

PIC *Programmable Interface Controller*





# Lista de símbolos

$\Gamma$	Letra grega Gama
$\Lambda$	Lambda
$\zeta$	Letra grega minúscula zeta
$\in$	Pertence



# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>27</b>
<b>1</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>29</b>
1.1	Câncer de pele	29
1.2	Harry H. Pennes e a Equação da Biotransferência de calor	32
1.2.1	Modelo físico-matemático	33
<b>2</b>	<b>MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO</b>	<b>35</b>
2.1	Introdução	35
2.2	Descrição do Método	35
2.3	Exemplos	37
2.3.1	Exemplo 1	37
2.3.2	Exemplo 2	40
2.4	Método da decomposição para várias dimensões	40
2.5	Aplicações em Física	40
<b>3</b>	<b>MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO E A EQUAÇÃO DO CALOR</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>SIMMETRY ANALITIC DIFFERENTIAL EQUATION (SADE)</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução	43
4.2	Desenvolvimento	43
4.3	Uso de editores de texto	44
<b>5</b>	<b>ESTUDO DA EQUAÇÃO DE CALOR VIA SIMETRIA DE LIE</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>ELEMENTOS DO TEXTO</b>	<b>47</b>
6.1	Corpo do Texto	47
6.2	Títulos de capítulos e seções	47
6.3	Notas de rodapé	47
6.4	Equações	48
6.5	Figuras e Gráficos	48
6.6	Tabela	49
6.7	Citação de Referências	50
<b>7</b>	<b>ELEMENTOS DO PÓS-TEXTO</b>	<b>53</b>
7.1	Referências Bibliográficas	53
7.2	Anexos	53

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>57</b>
APÊNDICE A – PRIMEIRO APÊNDICE . . . . .	59
APÊNDICE B – SEGUNDO APÊNDICE . . . . .	61
<b>ANEXOS</b>	<b>63</b>
ANEXO A – PRIMEIRO ANEXO . . . . .	65
ANEXO B – SEGUNDO ANEXO . . . . .	67

# Introdução

Este documento apresenta considerações gerais e preliminares relacionadas à redação de relatórios de Projeto de Graduação da Faculdade UnB Gama (FGA). São abordados os diferentes aspectos sobre a estrutura do trabalho, uso de programas de auxílio a edição, tiragem de cópias, encadernação, etc.



# 1 Referencial Teórico

## 1.1 Câncer de pele

“O câncer de pele é provocado pelo crescimento anormal e descontrolado das células que compõem a pele. Essas células se dispõem formando camadas e, de acordo com as que forem afetadas, são definidos os diferentes tipos de câncer” [[Sociedade Brasileira de dermatologia 2018](#)].

Existem dois tipos de cânceres de pele, o melanoma e os carcinomas. O melanoma é o tipo mais agressivo, mas seus casos são relativamente raros. Já os carcinomas tem letalidade baixa, mas o número de casos é extremamente alto no Brasil.

Geralmente, o câncer de pele é o menos agressivo dentre os outros cânceres existentes, mas se houver um diagnóstico tardio, este pode levar a ferimentos, sérias deformidades físicas e até a morte.

O Instituto Nacional do Câncer (INCA),

“Estima-se que no Brasil existem 85.170 casos recentes de câncer de pele não melanoma entre homens e 80.410 nas mulheres para cada ano do biênio 2018-2019. Esses valores correspondem a um risco estimado de 82,53 casos novos a cada 100 mil homens e 75,84 para cada 100 mil mulheres” [[Educação 2018](#), p.54].

A SBD afirma que o maior motivo para evolução do câncer de pele é devido a exposição aos raios ultravioletas irradiados pelo sol. Os horários mais perigosos são no período de 10 às 16 horas. Evitar a exposição intensa ao sol nesses horários e proteger a pele dos impactos da radiação ultravioleta são os melhores métodos para evitar os tumores de pele.

Há várias formas de tratamento atualmente, mas todos os casos precisam ser identificados antecipadamente para melhores chances de cura. Uma forma de realizar tal feito é detectar tumores através da temperatura da pele, utilizando-se de equipamentos médicos.

Fabrizio [[Bueno 2008](#)], afirma que diferentemente da trombose ou esclerose vascular que reduz o sangue fluido na pele e consequentemente diminui a temperatura superficial da mesma, os tumores de pele provocam um aumento de temperatura local, por essa razão a temperatura incomum da pele pode apontar circulação sanguínea irregular, logo, este fato pode ser utilizado para diagnósticos.

De acordo com [LAWSON 1956] o sangue venoso que escoa o tumor maligno é regularmente mais quente do que o fornecido pelo sistema arterial .

Lawson afirma que:

“As propensões malignas são diretamente relacionadas à velocidade de divisão celular. Esta por sua vez é refletida pelo metabolismo local acelerado que é adequadamente apoiada pelo aumento da vascularização sanguínea e linfática. Essas biológicas alterações podem ser prontamente detectadas estimulando mudanças de temperatura no tumor ou seu ambiente imediato. A energia térmica é transferida pelo processo de convecção, condução e radiação” [LAWSON 1956, p.309] .

Em seu estudo [LAWSON 1956] também menciona que foi realizada uma experiência com 26 pacientes portadores de câncer de mama que comprovou que a temperatura da pele sobre o tumor na mama era maior que a do tecido normal.

O aumento médio de temperatura detectável na área do tumor foi de  $2.27^{\circ}F$  . O máximo foi de  $3.5^{\circ}F$  e o mínimo de  $1.3^{\circ}F$  . Em dois casos adicionais mostrando um aumento entre  $1.5^{\circ}$  e  $2^{\circ}F$  , o diagnóstico foi de malignidade duvidosa [LAWSON 1956, p.309].

Ao longo dos anos foram utilizados alguns métodos para medir essa temperatura corporal, como por exemplo o primeiro experimento de Pennes, em 1948, que com intuito de medir a temperatura do antebraço foi utilizado uma agulha de aço inoxidável para a introdução de um termopar(sensor utilizado para medição de temperatura).

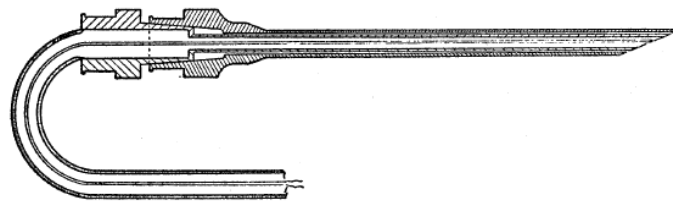


Figura 1 – Agulha de aço inoxidável usada para introdução de termopar. FONTE: [Pennes 1948]

De acordo com [LAWSON 1956], o termopar também foi usado em outras experiências, mas sem o uso de agulhas, a técnica simplesmente se resumia a aplicar o termopar na pele sobre o tumor, ou, no caso de uma neoplasia (massa anormal de tecido) profundamente enraizada, na aréola ipsilateral (pequena área circular que envolve o mamilo). Se o paciente portasse o câncer, haveria um diferencial de temperatura.



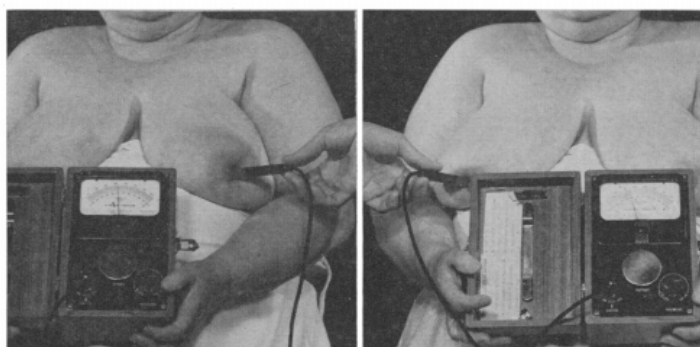


Figura 2 – Carcinoma de mama esquerda. Mama direita negativa no mesmo paciente, mostrando diferencial de temperatura. FONTE: [LAWSON 1956]

Outro método empregue foi o uso do Evaporógrafo Baird, um instrumento projetado para dar uma imagem térmica direta em um filme de óleo muito fino. “O princípio principal empregado neste aparelho é a evaporação diferencial de um filme de óleo em uma membrana transparente que pode ser observado ou fotografado em preto e branco ou colorido” [LAWSON 1956]. O equipamento dispõe-se de uma alta resolução em locais onde a temperatura é maior e má resolução onde a temperatura é menor.



Figura 3 – Evaporógrafo de paciente com carcinoma de mama direita. FONTE: [LAWSON 1956]

Atualmente detemos de técnicas e equipamentos mais modernos. Como já foi dito, a definição da temperatura em tecidos se dá por intermédio da transferência de calor nos

mesmos e utilizando a “equação biotérmica de Pennes é possível encontrar a distribuição de temperatura e o fluxo de calor em um maciço de pele” [Bueno 2008].

## 1.2 Harry H. Pennes e a Equação da Biotransferência de calor

Pennes, em 1948, “foi o primeiro a propor um modelo matemático que representasse o processo de biotransferência de calor” [Souza 2009, p.28]. Realizou-se experimentos afim de estudar a difusão de calor no corpo humano.

“As temperaturas dos tecidos normais do antebraço humano e do sangue arterial braquial foram medidas para avaliar a aplicabilidade da teoria do fluxo de calor ao antebraço em termos básicos de taxa local de produção de calor tecidual e fluxo volumétrico de sangue ” [Pennes 1948].

Com esse conteúdo elaborou-se uma equação que descreve a propagação de calor no corpo humano, denominada de Equação da Biotransferência de Calor ( Bioheat Transfer Equation - BHTE).

De acordo com (PENNES, 1948 apud SILVA; LYRA; LIMA, 2013)

“A transferência de calor nos organismos vivos é caracterizada por dois mecanismos importantes: metabolismo e fluxo sanguíneo. O sangue escoar, de forma não-newtoniana, através dos vasos sanguíneos que apresentam diferentes dimensões. Segundo a teoria de Pennes, a transferência líquida de calor entre o sangue e o tecido é proporcional à diferença entre a temperatura do sangue arterial, que entra no tecido, e a temperatura do sangue venoso que sai do tecido. Ele sugeriu que a transferência de calor devida ao escoamento sanguíneo pode ser modelada por uma taxa de perfusão sanguínea, com o sangue atuando como uma fonte/sumidouro escalar de calor. Apesar da sua simplicidade, uma das dificuldades encontradas no uso da BHTE reside na ausência de informação detalhada e precisa sobre as taxas volumétricas de perfusão sanguínea, especialmente para tecidos neoplásico” [Silva, Lyra e Lima 2013].

Houve vários estudos com o objetivo de aperfeiçoar a equação de biotransferência de calor de Pennes, porém, acabaram em modelos muito específicos e complexos. Por esses motivos e por sua clareza, a equação de Pennes ainda é a mais usada para caracterizar a transferência de calor e a disseminação da temperatura em tecidos biológicos vivos.

### 1.2.1 Modelo físico-matemático

Segundo [Guimarães 2003], a equação abaixo descreve a transferência de calor nos organismos vivos e é chamada de Equação de Pennes.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K_t \nabla^2 T + Q_p + Q_m + Q. \quad (1.1)$$

onde:

$K_t$  = Condutividade térmica do tecido [ $W/m^\circ C$ ];

$\rho$  = Massa específica do tecido [ $kg/m^3$ ];

$c$  = Calor específico do tecido [ $J/kg^\circ C$ ];

$T$  = Temperatura [ $^\circ C$ ];

$t$  = Tempo [s];

$Q_p$  = Fonte de calor devido à perfusão sanguínea [ $W/m^3$ ];

$Q_m$  = Fonte de calor devido à geração de calor metabólico [ $W/m^3$ ];

$Q$  = Fonte externa de calor sobre o domínio [ $W/m^3$ ];

O termo  $Q$  pode ser qualquer fonte de aquecimento externa, como sementes ferromagnéticas e radiação eletromagnética, como radiofrequência, microondas, ultra-som, e laser [Silva 2004, p.10]. Já o termo  $Q_m$ , conforme o estudo de Sturesson & Andersson-Engels, “A fonte de calor devido à geração metabólica é normalmente muito menor do que o calor externo depositado, então este termo pode ser desconsiderado da expressão” (R.K, 1983 apud C.STURESSON; ANDERRSON-ENGELS, 1995, p.2039).

“O termo  $Q_p$  corresponde a fonte de calor devido à perfusão sanguínea que caracteriza-se pela transferência de calor efetuada pelo sangue através da vascularização capilar presente nos tecidos vivos” [Guimarães 2003]. De acordo com [Silva 2004],  $Q_p$  é dado pela equação abaixo:

$$Q_p = \omega \times \rho_s \times c_s \times \rho \times (T_a - T_v). \quad (1.2)$$

Onde:

$\omega$  = Taxa de perfusão sanguínea [ $m^3 \text{ de sangue} / m^3 \text{ de tecido} \cdot s$ ];

$\rho_s$  = Massa específica do sangue [ $kg/m^3$ ];

$c_s$  = Calor específico do sangue [ $J/kg \cdot ^\circ C$ ];

$T_a$  = Temperatura arterial do sangue entrando no tecido [ $^\circ C$ ];

$T_v$  = Temperatura do sangue venoso saindo do tecido [ $^\circ C$ ];

Reescrevendo a Eq.(1.1) em coordenadas cartesianas e desconsiderando o termo de geração de calor metabólico pelo motivo já explicado antes, temos:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_p + Q. \quad (1.3)$$

A dificuldade dessa equação diferencial é que ela não pode ser resolvida analiticamente, então é necessário utilizar-se de algum método numérico para se obter uma aproximação do resultado.

Os métodos numéricos mais utilizados para resolver esse tipo de equação é o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos (MVF), e o Método dos Elementos de Contorno (MEC);

O objetivo deste trabalho é alcançar essa solução utilizando um método diferente, o Método da Decomposição de Adomian.

## 2 Método da Decomposição de Adomian

### 2.1 Introdução

O Método da Decomposição de Adomian (ADM) não é uma técnica muito famosa em geral, mas é extremamente poderosa para solucionar equações diferenciais lineares ou não-lineares de diversos tipos. Tal método já foi utilizado com sucesso em diferentes estudos ao longo dos anos, dentre eles podemos citar o trabalho de Mustapha Azreg-Aïnou's - Developed Adomian method for quadratic Kaluza-Klein relativity, e de Antonio Goulat e Bodmann -An analytical solution for the nonlinear energy spectrum equation by the decomposition method.

De acordo com (SCHNEIDER, 2006 apud PEREIRA, 2010), o Método da Decomposição de Adomian foi apresentado pelo matemático americano George Adomian (1922-1996) na década de 80. Tal método consiste em separar a equação em duas partes, a parte linear e a não-linear e em sequência aplicar o operador inverso. De acordo com Goulart et.al(2013) as soluções das equações são calculadas como séries infinitas e cada termo dessas séries é um polinômio generalizado chamado polinômio de Adomian.

Em seu livro, Adomian (1956) afirma que o maior objetivo desse método é tornar viável soluções realistas de sistemas complexos sem a obrigação de utilizar-se da modelagem usual.

Segundo Adomian (1988), a diferença é que o Método da Decomposição de Adomian pode fornecer aproximação analítica sem linearização, perturbação, aproximações de fechamento, ou métodos de discretização que podem resultar em complexos modelos computacionais. “Além disso, ao contrário da maioria dos métodos numéricos, o Método da Decomposição de Adomian fornece uma forma fechada da solução”(DEHGHAN, 2004 apud PEREIRA, 2010).

### 2.2 Descrição do Método

Considerando a seguinte equação diferencial não-linear:

$$\mathbf{L}y + \mathbf{R}y + \mathbf{N}y = g \quad (2.1)$$

Sendo que  $\mathbf{L}$  é o operador derivativo de maior ordem,  $\mathbf{R}y$  representa o termo linear,

$\mathbf{N}y$  o termo não- linear e  $\mathbf{g}$  o valor inicial. Resolvendo para  $\mathbf{L}y$ ,

$$\mathbf{L}y = g - \mathbf{R}y - \mathbf{N}y \quad (2.2)$$

Utilizando o operador inversor  $L^{-1}$  , obtemos:

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (2.3)$$

$L$  é definido como  $L = \frac{\partial^n}{\partial t^n}$  , então  $L^{-1}$  é um operador integral de 0 até  $t$ ,

$$L^{-1} = \int_0^t \dots dt \quad (2.4)$$

Se  $L$  for de segunda-ordem,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  por exemplo,  $L^{-1}$  será um operador de integração duplo . E a equação se resultará em:

$$y = y(0) + ty'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (2.5)$$

Os dois primeiros termos são as condições iniciais, os três primeiros termos são identificados como  $y_0$  e os quatro primeiros termos são identificados como a parte linear da equação, sua decomposição é  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ . Já  $Ny$ , o termo não-linear, é decomposto como  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, \dots y_n)$ . A equação se torna:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.6)$$

Consequentemente, podemos escrever,

$$y_1 = -L^{-1}(Ry_0) - L^{-1}(A_0) \quad (2.7)$$

$$y_2 = -L^{-1}(Ry_1) - L^{-1}(A_1) \quad (2.8)$$

$$y_3 = -L^{-1}(Ry_2) - L^{-1}(A_2) \quad (2.9)$$

$$y_n = -L^{-1}(Ry_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}) \quad (2.10)$$

De acordo com GOULART et.al (2013) os polinômios de Adomian  $A_n$  são obtidos a partir da expansão da série de Taylor do termo não-linear em torno do primeiro termo da série  $y_0$ . Dependem apenas de  $y_0$  à  $y_n$ :

$$A_0 = f(y_0) \quad (2.11)$$

$$A_1 = y_1 \left( \frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) \quad (2.12)$$

$$A_2 = y_2 \left( \frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + \left( \frac{y_1^2}{2!} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0) \quad (2.13)$$

$$A_3 = y_3 \left( \frac{\partial}{\partial y_0} \right) f(y_0) + y_1 y_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) f(y_0) + \left( \frac{y_1^3}{3!} \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial y_0^3} \right) f(y_0) \quad (2.14)$$

$$\dots \quad (2.15)$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{v=1}^n c(v, n) \left( \frac{\partial^v f}{\partial y^v} \right) \quad (2.16)$$

Quando a equação é linear,  $f(y) = y$ , o termo  $A_n$  reduz para  $y_n$ . Quando a equação é não-linear,  $A_n = A_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$ . Por exemplo  $f(y) = y^3$ ,  $A_0 = y_0^3$ ,  $A_1 = 3y_0 y_1$ ,  $A_2 = y_1^2 + 3y_0 y_2$ ,  $A_3 = 3y_1 y_2 + 3y_0 y_3, \dots$

explicar  $c(v, n), \dots$

## 2.3 Exemplos

Com o objetivo de simplificar o entendimento desse método, alguns exemplos de fácil compreensão serão demonstrados a seguir.

### 2.3.1 Exemplo 1

Considere a equação linear

$$y' = y$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y$$

com a condição linear  $y(0) = 1$ , então

$$\mathbf{L}y - \mathbf{R}y = g$$

$$\mathbf{L}y = 1 + \mathbf{R}y$$

Lembrando que  $\mathbf{L}$  é o operador derivativo de maior ordem, que nesse caso é  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , então o operador inverso é  $L^{-1} = \int_0^x \frac{\partial y}{\partial x} dx$ . Aplicando o operador inverso nos termos da equação, obtêm-se:

$$\mathbf{L}^{-1} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \mathbf{L}^{-1}y$$

$$\int_0^x \frac{\partial y}{\partial x} = \mathbf{L}^{-1}y$$

Integrando o lado esquerdo,

$$y(x) - y(0) = \mathbf{L}^{-1}y$$

$$y(x) = y(0) + \mathbf{L}^{-1}y$$

De acordo com a equação (2.6) obtêm-se:

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = y(0) + \mathbf{L}^{-1}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

É possível observar que não será utilizado os polinômios de Adomian  $A_n$  devido ao fato da equação ser inteiramente linear. A partir deste momento basta comparar o lado esquerdo da equação acima com o lado direito da mesma e aplicar o operador inverso:

$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(y_0)$$

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(y_1)$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(y_2)$$

...



$$y_n = \mathbf{L}^{-1}(y_n - 1)$$

Aplicando o operador inverso para o  $y_1$ ,

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(y_0)$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(1)$$

$$y_1 = \int_0^x 1 dx$$

$$y_1 = x$$

Aplicando o operador inverso para o  $y_2$ ,

$$y_2 = \mathbf{L}^{-1}(y_1)$$

$$y_1 = \mathbf{L}^{-1}(x)$$

$$y_1 = \int_0^x x dx$$

$$y_2 = \frac{x^2}{2}$$

Aplicando o operador inverso para o  $y_3$ ,

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}(y_2)$$

$$y_3 = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$y_3 = \int_0^x \frac{x^2}{2} dx$$

$$y_3 = \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$

Em seguida, obtêm-se a série:

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

### 2.3.2 Exemplo 2

Considere a seguinte equação não-linear:

$$y' = y^2$$

Com a condição inicial  $y(0) = 1$ .

## 2.4 Método da decomposição para várias dimensões

exemplos..

## 2.5 Aplicações em Física

pegar do primeiro livro

### 3 Método da Decomposição e a Equação do calor



## 4 Symmetry Analitic Differential Equation (SADE)

### 4.1 Introdução

A regra mais rígida com respeito a Introdução é que a mesma, que é necessariamente parte integrante do texto, não deverá fazer agradecimentos a pessoas ou instituições nem comentários pessoais do autor atinentes à escolha ou à relevância do tema.

A Introdução obedece a critérios do Método Científico e a exigências didáticas. Na Introdução o leitor deve ser colocado dentro do espírito do trabalho.

Cabe mencionar que a Introdução de um trabalho pode, pelo menos em parte, ser escrita com grande vantagem uma vez concluído o trabalho (ou o Desenvolvimento e as Conclusões terem sido redigidos). Não só a pesquisa costuma modificar-se durante a execução, mas também, ao fim do trabalho, o autor tem melhor perspectiva ou visão de conjunto.

Por seu caráter didático, a Introdução deve, ao seu primeiro parágrafo, sugerir o mais claramente possível o que pretende o autor. Em seguida deve procurar situar o problema a ser examinado em relação ao desenvolvimento científico e técnico do momento. Assim sendo, sempre que pertinente, os seguintes pontos devem ser abordados:

- Contextualização ou apresentação do tema em linhas gerais de forma clara e objetiva;
- Apresentação da justificativa e/ou relevância do tema escolhido;
- Apresentação da questão ou problema de pesquisa;
- Declaração dos objetivos, gerais e específicos do trabalho;
- Apresentação resumida da metodologia, e
- Indicação de como o trabalho estará organizado.

### 4.2 Desenvolvimento

O Desenvolvimento (Miolo ou Corpo do Trabalho) é subdividido em seções de acordo com o planejamento do autor. As seções primárias são aquelas que resultam da primeira divisão do texto do documento, geralmente correspondendo a divisão em capítulos. Seções secundárias, terciárias, etc., são aquelas que resultam da divisão do texto de uma seção primária, secundária, terciária, etc., respectivamente.

As seções primárias são numeradas consecutivamente, seguindo a série natural de números inteiros, a partir de 1, pela ordem de sua sucessão no documento.

O Desenvolvimento é a seção mais importante do trabalho, por isso exige-se organização, objetividade e clareza. É conveniente dividi-lo em pelo menos três partes:

- Referencial teórico, que corresponde a uma análise dos trabalhos relevantes, encontrados na pesquisa bibliográfica sobre o assunto.
- Metodologia, que é a descrição de todos os passos metodológicos utilizados no trabalho. Sugere-se que se enfatize especialmente em (1) População ou Sujeitos da pesquisa, (2) Materiais e equipamentos utilizados e (3) Procedimentos de coleta de dados.
- Resultados, Discussão dos resultados e Conclusões, que é onde se apresenta os dados encontrados a análise feita pelo autor à luz do Referencial teórico e as Conclusões.

### 4.3 Uso de editores de texto

O uso de programas de edição eletrônica de textos é de livre escolha do autor.

## 5 Estudo da equação de calor via simetria de Lie





## 6 Elementos do Texto

### 6.1 Corpo do Texto

O estilo de redação deve atentar a boa prática da linguagem técnica. Para a terminologia metrological usar o Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia [?] (Instituto Nacional de Metrologia, 2003).

Grandezas dimensionais devem ser apresentadas em unidades consistentes com o Sistema Internacional de Unidades (SI). Outras unidades podem ser usadas como unidades secundárias entre parênteses se necessário. Exceções são relacionadas a unidades não-SI usadas como identificadores comerciais como por exemplo “disquete de 3<sup>1</sup>/<sub>2</sub> polegadas”.

Na apresentação de números ao longo do texto usar vírgula para separar a parte decimal de um número. Resultados experimentais devem ser apresentados com sua respectiva incerteza de medição.

### 6.2 Títulos de capítulos e seções

Recomendações de formatação de seções

**1 SEÇÃO PRIMÁRIA - MAIÚSCULAS; NEGRITO; TAMANHO 12;**

**1.1 SEÇÃO SECUNDÁRIA – MAIÚSCULAS; NORMAL; TAMANHO 12;**

**1.1.1 Seção terciária - Minúsculas, com exceção da primeira letra; negrito; tamanho 12;**

**1.1.1.1 Seção quaternária - Minúsculas, com exceção da primeira letra; normal tamanho 12;**

**1.1.1.1.1 Seção quinária - Minúsculas, com exceção da primeira letra; itálico; tamanho 12.**

### 6.3 Notas de rodapé

Notas eventualmente necessárias devem ser numeradas de forma sequencial ao longo do texto no formato 1, 2, 3... sendo posicionadas no rodapé de cada página na qual a nota é utilizada.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Como, por exemplo, esta nota

## 6.4 Equações

Equações matemáticas devem ser numeradas sequencialmente e alinhadas a esquerda com recuo de 0,6 cm. Usar numerais arábicos entre parênteses, alinhado a direita, no formato Times New Roman de 9 pts. para numerar as equações como mostrado na Eq. (6.1).

Referências a equações no corpo do texto devem ser feitas como “Eq. (6.1)” quando no meio de uma frase ou como “Equação (6.1)” quando no início de uma sentença. Um espaçamento de 11 pontos deve ser deixado acima, abaixo e entre equações subsequentes. Para uma apresentação compacta das equações deve-se usar os símbolos e expressões matemáticos mais adequados e parênteses para evitar ambigüidades em denominadores. Os símbolos usados nas equações citados no texto devem apresentar exatamente a mesma formatação usada nas equações.

$$\frac{d\mathbf{C}}{dw} = \frac{du}{dw} \cdot \mathbf{F}_u + \frac{dv}{dw} \cdot \mathbf{F}_v \quad (6.1)$$

O significado de todos os símbolos mostrados nas equações deve ser apresentado na lista de símbolos no início do trabalho, embora, em certas circunstâncias o autor possa para maior clareza descrever o significado de certos símbolos no corpo do texto, logo após a equação.

## 6.5 Figuras e Gráficos

As figuras devem ser centradas entre margens e identificadas por uma legenda alinhada a esquerda com recuo especial de deslocamento de 1,8 cm, com mostrado na Fig. (6.5). O tamanho das fontes empregadas nos rótulos e anotações usadas nas figuras deve ser compatível com o usado no corpo do texto. Rótulos e anotações devem estar em português, com todas as grandezas mostradas em unidades do SI (Sistema Internacional de unidades).

Todas as figuras, gráficos e fotografias devem ser numeradas e referidas no corpo do texto adotando uma numeração sequencial de identificação. As figuras e gráficos devem ser claras e com qualidade adequada para eventual reprodução posterior tanto em cores quanto em preto-e-branco.

As abscissas e ordenadas de todos os gráficos devem ser rotuladas com seus respectivos títulos em português seguida da unidade no SI que caracteriza a grandeza entre colchetes.

A referência explícita no texto à uma figura deve ser feita como “Fig. (6.5)” quando no meio de uma frase ou como “Figura (6.5)” quando no início da mesma. Referências implícitas a uma dada figura devem ser feitas entre parênteses como (Fig. 6.5). Para

referências a mais de uma figura as mesmas regras devem ser aplicadas usando-se o plural adequadamente. Exemplos:

- “Após os ensaios experimentais, foram obtidos os resultados mostrados na Fig. (6.5), que ...”
- “A Figura (6.5) apresenta os resultados obtidos, onde pode-se observar que ...”
- “As Figuras (1) a (3) apresentam os resultados obtidos, ...”
- “Verificou-se uma forte dependência entre as variáveis citadas (Fig. 6.5), comprovando ...”

Cada figura deve ser posicionada o mais próxima possível da primeira citação feita à mesma no texto, imediatamente após o parágrafo no qual é feita tal citação, se possível, na mesma página.

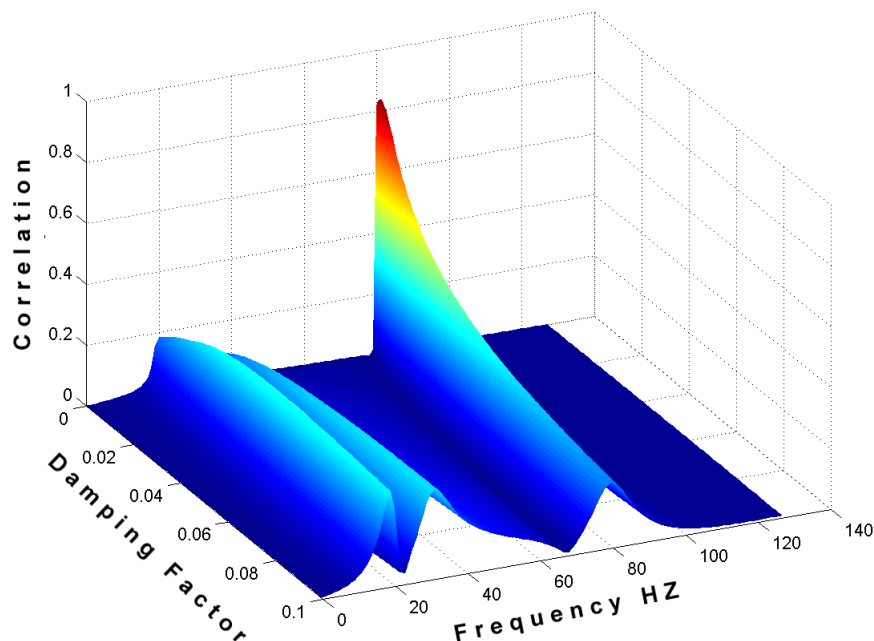


Figura 4 – Wavelets correlation coefficients

## 6.6 Tabela

As tabelas devem estar centradas entre margens e identificadas por uma legenda alinhada a esquerda, com recuo especial de deslocamento de 1,8 cm, posicionada acima da tabela com mostrado nas Tabs. (6.6) e (2), a título de exemplo. O tamanho das fontes

empregadas nos rótulos e anotações usadas nas tabelas deve ser compatível com o usado no corpo do texto. Rótulos e anotações devem estar em português. Um espaçamento de 11 pts deve ser deixado entre a legenda e a tabela, bem como após a tabela.

As grandezas dimensionais mostradas em cada tabela devem apresentar unidades consistentes com o SI. As unidades de cada variável devem ser mostradas apenas na primeira linha e/ou coluna da tabela, entre colchetes

A referência explícita no texto à uma dada tabela deve ser feita como “Tab. (6.6)” quando no meio de uma frase ou como “Tabela (6.6)” quando no início da mesma. Referências implícitas a uma dada tabela devem ser feitas entre parênteses como “(Tab. 6.6). Para referências a mais de uma tabela as mesmas regras devem ser aplicadas usando-se o plural adequadamente. Exemplos:

- “Após os ensaios experimentais, foram obtidos os resultados mostrados na Tab. (6.6), que ...”
- “A Tabela (6.6) apresenta os resultados obtidos, onde pode-se observar que ...”
- As Tabelas (1) a (3) apresentam os resultados obtidos, ...”
- Verificou-se uma forte dependência entre as variáveis citadas (Tab. 6.6), comprovando ...”

Cada tabela deve ser posicionada o mais próxima possível da primeira citação feita à mesma no texto, imediatamente após o parágrafo no qual é feita a citação, se possível, na mesma página.

Processing type	Property 1 (%)	Property 2 [ $\mu m$ ]
Process 1	40.0	22.7
Process 2	48.4	13.9
Process 3	39.0	22.5
Process 4	45.3	28.5

Tabela 1 – Propriedades obtidas após processamento

## 6.7 Citação de Referências

Referências a outros trabalhos tais como artigos, teses, relatórios, etc. devem ser feitas no corpo do texto devem estar de acordo com a norma corrente ABNT NBR 6023:2002 (ABNT, 2000), esta última baseada nas normas ISO 690:1987:

- “[?], mostraram que...”

- “Resultados disponíveis em [?], [?] e [?], mostram que...”

Para referências a trabalhos com até dois autores, deve-se citar o nome de ambos os autores, por exemplo: “[?], mostraram que...”



## 7 Elementos do Pós-Texto

Este capítulo apresenta instruções gerais sobre a elaboração e formatação dos elementos do pós-texto a serem apresentados em relatórios de Projeto de Graduação. São abordados aspectos relacionados a redação de referências bibliográficas, bibliografia, anexos e contra-capá.

### 7.1 Referências Bibliográficas

O primeiro elemento do pós-texto, inserido numa nova página, logo após o último capítulo do trabalho, consiste da lista das referências bibliográficas citadas ao longo do texto.

Cada referência na lista deve ser justificada entre margens e redigida no formato Times New Roman com 11pts. Não é necessário introduzir uma linha em branco entre referências sucessivas.

A primeira linha de cada referência deve ser alinhada à esquerda, com as demais linhas da referência deslocadas de 0,5 cm a partir da margem esquerda.

Todas as referências aparecendo na lista da seção “Referências Bibliográficas” devem estar citadas no texto. Da mesma forma o autor deve verificar que não há no corpo do texto citação a referências que por esquecimento não foram incluídas nesta seção.

As referências devem ser listadas em ordem alfabética, de acordo com o último nome do primeiro autor. Alguns exemplos de listagem de referências são apresentados no Anexo I.

Artigos que ainda não tenham sido publicados, mesmo que tenham sido submetidos para publicação, não deverão ser citados. Artigos ainda não publicados mas que já tenham sido aceitos para publicação devem ser citados como “in press”.

A norma [?], que regulamenta toda a formatação a ser usada na elaboração de referências a diferentes tipos de fontes de consulta, deve ser rigidamente observada. Sugere-se a consulta do trabalho realizado por [?], disponível na internet.

### 7.2 Anexos

As informações citadas ao longo do texto como “Anexos” devem ser apresentadas numa seção isolada ao término do trabalho, após a seção de referências bibliográficas. Os anexos devem ser numerados seqüencialmente em algarismos romanos maiúsculos (I,

II, III, ...). A primeira página dos anexos deve apresentar um índice conforme modelo apresentado no Anexo I, descrevendo cada anexo e a página inicial do mesmo.

A referência explícita no texto à um dado anexo deve ser feita como “Anexo 1”. Referências implícitas a um dado anexo devem ser feitas entre parênteses como (Anexo I). Para referências a mais de um anexo as mesmas regras devem ser aplicadas usando-se o plural adequadamente. Exemplos:

- “Os resultados detalhados dos ensaios experimentais são apresentados no Anexo IV, onde ...”
- “O Anexo I apresenta os resultados obtidos, onde pode-se observar que ...”
- “Os Anexos I a IV apresentam os resultados obtidos ...”
- “Verificou-se uma forte dependência entre as variáveis citadas (Anexo V), comprovando ...”



# Referências

- BUENO, F. R. *Análise inversa com uso de algoritmo genético para localização de tumores de pele discretizados em elementos de contorno com reciprocidade dual*. 2008. 76 p. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 32.
- C.STURESSON; ANDERRSON-ENGELS, S. mathematical model for predicting the temperature distribution in laser-induced hyperthermia. experimental evaluation and applications. p. 18, 1995. Citado na página 33.
- DEHGHAN, M. Application of the adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications. *Applied Mathematics and Computation*, n. 157, p. 549–560, 2004. Citado na página 35.
- EDUCAÇÃO, M. da. *Estimativa-2018 Incidência de Câncer no Brasil*. [S.l.], 2018. 126 p. Citado na página 29.
- GUIMARÃES, C. S. C. *Modelagem computacional da biotransferência de calor no tratamento por hipertermia em tumores de duodeno através do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas*. 2003. 80 p. Citado na página 33.
- LAWSON, R. *IMPLICATIONS OF SURFACE TEMPERATURES IN THE DIAGNOSIS OF BREAST CANCER*. [S.l.]: Clinical and Laboratory Notes, 1956. Citado 3 vezes nas páginas 17, 30 e 31.
- PENNES, H. H. *Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm*. Volume 1. [S.l.]: Journal of APPLIED PHYSIOLOGY, 1948. 34 p. Citado 3 vezes nas páginas 17, 30 e 32.
- PEREIRA, A. E. L. *O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo*. 2010. 178 p. Citado na página 35.
- R.K, J. *Bioheat transfer: mathematical models of thermal systems Hyperthermia in Cancer Therapy*. [S.l.: s.n.], 1983. Citado na página 33.
- SCHNEIDER, E. da S. *Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian*. 2006. Citado na página 35.
- SILVA, G. M. L. L. da. *Análise da biotransferência de calor nos tecidos oculares devido à presença de implantes retinianos através da utilização do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas*. 2004. 59 p. Citado na página 33.
- SILVA, J. D. da; LYRA, P. R. M.; LIMA, R. de Cássia Fernandes de. Análise computacional do dano térmico no olho humano portador de um melanoma de coróide quando submetido à termoterapia transpupilar a laser. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, p. 69, 2013. Citado na página 32.
- Sociedade Brasileira de dermatologia. 2018. Disponível em: <<http://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/doencas-e-problemas/cancer-da-pele/64/>>. Citado na página 29.

SOUZA, M. V. C. de. *Otimização de termos fontes em problemas de biotransferência de calor*. 2009. 170 p. Citado na página [32](#).

## Apêndices



# APÊNDICE A – Primeiro Apêndice

Texto do primeiro apêndice.



## APÊNDICE B – Segundo Apêndice

Texto do segundo apêndice.





# Anexos



## ANEXO A – Primeiro Anexo

Texto do primeiro anexo.



## ANEXO B – Segundo Anexo

Texto do segundo anexo.