201 : Espaces de fonctions : exemples et applications

I - Espaces de fonctions continues

1) Fonctions continues et convergence

Amrani : def de la CVS, de la CVU, CVU ⇒ CVS, contre ex, def de la norme de la CVU, prop sur eq CVU et $\|\cdot\|_\infty \to 0$, complétude de $\mathcal{B}(X,E)$ (si E complet), continuité de la limite, contre ex, $(\mathcal{C}_b^0(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ Banach si E complet.

2) Fonctions continues sur un compact

HL : Thm de Dini, rq et exemple

Gourdon : f(K) est un compact, appli homéo, thm des bornes atteintes, thm de Heine, appli : fct° C^0 et périodique (évanescente) est unif C^0 (Pommelet)

HL : def de équicontinue, unif équicontinue, équivalence dans le cas compact, exemples (fini, fct° lipschitz)

Bernis : $\boxed{\text{Thm d'Ascoli}}$

HL : ex d'application avec les opérateurs compacts, éventuellement Cauchy Peano

3) Théorèmes de densité

ZQ : $\boxed{\text{Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein}}$

Pommelet : limite unif de polynômes est un polynôme, deux applicat° : 1) $\int t^n f(t)dt = 0$ $\forall n \Rightarrow f = 0$ et 2) injectivité de la transfo de Laplace.

HL : thm de Stone Weierstrass réel, rq : on retrouve Weierstrass et exemple des fct° lipschitziennes, contre ex pour les $\mathbb{C}$: $z \mapsto \bar{z}$ pas limite U de $\mathbb{C}[X]$, thm de Stone Weierstrass complexe

II - Espaces L^p

1) Généralités

Briane-Pagès : def des $\mathcal{L}^p(\mu)$, de la "norme" $\mathcal{L}^p$, def de L^p, la même pour $p = +\infty$, inégalité de Hölder (inclure $p = +\infty$!), rq : généralisat° de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski ⇒ pour $p \in [1, +\infty]$, L^p est un EVN, inclusion dans le cas de mesure finie ou de mesure de comptage, contre ex sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{thm de Riesz-Fischer}}$, rq : pas de lien entre CV L^p et PP,

2) Parties denses et convolution

Briane-Pagès : les 3 résultats dans les L^p, rq : faux pour $p = +\infty$!

Amrani : application à la translation sur L^p

Amrani 2 : def convolution, bonne def $L^1 \star L^1$, rq algèbre de Banach, $L^p \star L^1$, $L^p \star L^q$, thm de dérivation, def d'approximat° de l'unité, exemples, thm d'approximat°, corollaire C_c^∞ dense dans L^p (faux pour $p=+\infty$!)

3) Cas particulier de L^2

Briane-Pagès : produit scalaire sur L^2 → c'est un Hilbert

OA : def de $L^2(I,\rho)$, polynômes orthogonaux, exemple, thm de densité, rq sur application à l'obtention d'une BH de $L^2(\mathbb{R})$, rq analyse numérique

---

Refs : Amrani : Suites et séries numériques, suites et séries de fct°, El Amrani

~~Pommelet : Maths pour l'agreg, Analyse & proba, Pommelet~~

Gourdon : Analyse, Gourdon

HL : Éléments d'analyse fonctionnelle, Hirsch & Lacombe

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 dev, Bernis & Bernis

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec.

Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet.

Briane-Pagès : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

Amrani 2 : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré.

203 : Utilisation de la notion de compacité

I - Espaces compacts : définition et propriétés

1) Définition et caractérisation

Gourdon : def d'un compact (B.L), def pour une partie compacte, ex ℝ n'est pas compact, BL "dual", contre ex dans ℝ, ppté de BW exemple : les intervalles de ℝ (Pommelet)

2) Propriétés

→ csq : compacts de ℝ = fermés bornés (Pommelet)

Gourdon : fermé dans un compact ⇒ compact, compact ⇒ fermé borné, rq : réciproque fausse en général : cf thm de Riesz ⊕ tard, prop sur les suites, on verra ⊕ tard que EVN de dim finie : compact ⇔ fermé borné et alors borné + unique VA ⇒ CV., produit de compacts → compacts de $\mathbb{R}^n$ (+ contre ex, $(n \sin 2n)$).

II - Continuité et compacité

1) Compacité et extremums

Gourdon : image d'un compact par fct° C° = compact, faux pour l'image réciproque : $\sin^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$, cro avec homéomorphisme, thm des bornes atteintes

Pommelet : distance à un compact

Marco : fct° coercive admet un minimum

Gourdon : thm de Rolle, des accroissements finis, équivalence des normes en dimension finie, csq : les compacts d'un EVN de dim finie sont les fermés bornés, rq : on verra qu'en dim infinie cela n'est plus vrai.

2) Uniformité grâce à la compacité

HL : thm de Dini, rq et exemple avec approximat° de $|x|$

Gourdon : thm de Heine   Pommelet : ex : C° + périodique ⇒ UC°, approx par des fct° affines

ZQ : module de continuité, thm de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Pommelet : applicat° → 1) $\int t^n f(t) = 0, \forall n \Rightarrow f = 0$ et 2) injectivité de la transfo de Laplace

BP : translat° dans L^p UC°

HL : def équicontinue, unif équicontinue, équivalence dans le cas compact, exemples.

III - Compacité en dimension infinie

1) Espaces vectoriels normés

Marco : thm de Riesz, ex pour $\mathbb{R}[X]$ ou $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

Li : corollaire sur les compacts en dim infini

rq : pour les Hilbert, on va obtenir une ppté de compacité de la boule [illegible]

2) Compacité faible dans les Hilberts

HL : déf CV faible, CV forte ⇒ CV faible, CV faible ⇒ $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$, CV faible ⇒ bornée, eq avec la CV forte.

Gourdon + Ciarlet : $\boxed{\text{CV faible et optimisation}}$, applicat° à $-u''+|u|^p u=f$

3) Compacité dans les espaces de fonctions

Bernis : $\boxed{\text{Thm d'Ascoli}}$, ex avec $\{f\in C^0([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty\le 1 \text{ et } \forall x,y\in[0,1],\ |f(x)-f(y)|\le M|x-y|^\alpha\}$

HL : appli avec les opérateurs compacts, Cauchy Peano ?

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet

Marco : Maths L3, Analyse, Marco

~~Rombaldi : Maths pour l'agreg, Analyse & Probas, Rombaldi~~

HL : Elts d'anaf, Hirsch & Lacombe

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

BP : Théorie de l'intégrat°, Briane & Pagès

Li : Cours d'anaf, Li

Ciarlet : Intro à l'anum matricielle et à l'opti, Ciarlet.

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 dev, Bernis x 2

204 : Connexité. Exemples d'applications

I - Espaces connexes

1) Définitions et caractérisations

Gourdon : eq des pptés et def d'un connexe, def d'une partie connexe, ex de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$, de $\{0,1\}$, prop sur $f(CNX) = CNX$, ⚠ réciproque fausse $x \mapsto x^2$, $f^{-1}([1,2]) = [1,2] \cup [-2,-1]$, caractérisat° des CNX, appliat° ; exemple fondamental : les CNX de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

$\bar{A}$ CNX si A CNX

⚠ $\mathring{A}$ faux

2) Propriétés

Gourdon : union de CNX (dessin en annexe), contre-exemple, produit de CNX est un CNX

Queff : passage des douanes (dessin en annexe), faux sans CNX.

3) Composantes connexes

Gourdon : relat° d'eq, def de composante connexe, eq CNX $\Leftrightarrow$ unique CC, CC fermé et nbr fini $\Rightarrow$ ouvertes, exemples de CC, $\boxed{\text{Thm de Sanyer i Balaguer}}$

Queff : homéo envoie CC sur CC, appli $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ non homéo

II - Raffinements de la connexité

1) Connexité par arcs

Gourdon : def d'un chemin, de la connexité par arcs, CNX PA $\Rightarrow$ CNX, rq sur not° pratique, contre ex, ex : CVX $\Rightarrow$ CNXPA donc CNX

2) Connexité par lignes brisées

Gourdon : def de segments et lignes brisées, de CNX PLB, rq CNXPLB $\Rightarrow$ CNX, thm eq CNX $\Leftrightarrow$ CNX PLB pour un ouvert d'un EVN, rq réciproque du thm précédent.

3) Application à l'algèbre linéaire

$SL_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices de transvect°, $GL_n(\mathbb{K})$ par les transvect° et les dilatat° $\Rightarrow$ $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont CNX PA, $GL_n(\mathbb{R})$ admet 2 CC : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

si I est fini, $\mathbb{C} \setminus I$ est CNX PA $\Rightarrow$ $GL_n(\mathbb{C})$ est CNX PA.

Barbenchon : $\boxed{\text{Surjectivité de l'exponentielle}}$

III - Applications à l'analyse

1) Analyse réelle

Dantzer : TVI, appliat°, $f : [0,1] \xrightarrow{C^0} [0,1]$ admet un PF, thm de Darboux, ex de fct° vérifiant la ppté des VI mais pas C^0.

Gourdon : inégalité des AF, df = 0 ⇒ f cste sur un CNX, contre-ex
Rouvière : Thm de Cauchy Lipschitz global

2) Analyse complexe

⊛ OA : thm des zéros isolés, du prolongement analytique, xq : anneau intègre
Tauvel : un exemple, le principe du maximum, un exemple parmi les exos OA : appli : prolongement de Γ
⊛ Tauvel : def de l'indice, thm qui va avec, xq sur interprétat°, thm de Cauchy, csq : analycité des fct° holo.

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Quef : Topologie, Queffélec

Barbenchon : 131 devs, Le Barbenchon et cie

Dantzer : Maths pour l'agreg, Analyse & probas, Dantzer

Rouvière : P.G.C.D, Rouvière

OA : Objectif agreg, B.H.P.

Tauvel : Analyse $\mathbb{C}$ pour la L3, Tauvel

205 : Espaces complets. Exemples et applications

I - Généralités

1) Suites de Cauchy

Marco : def d'une suite de Cauchy, CV ⇒ Cauchy ⇒ bornée, réciproque fausse de Cauchy ⇏ CV exemple. Cauchy + VA ⇒ CV, lemme sur existence de (x_{n_k}) tq $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \varepsilon_k$ pour toute suite (ε_k)

RDO3 : image d'une suite de Cauchy par f UC° = suite de Cauchy, thm chgt de distance, def d'espace complet, de Banach, premiers exemples : $\mathbb{R}$ est complet pour la distance usuelle, $\mathbb{Q}$ ne l'est pas, rq sur utilité de la complétude : mtq qqch CV sans connaître la limite
→ + contre exc

2) Propriétés des espaces complets

Marco : ppté des fermés emboîtés (RDO 3 : contre exc si $\delta(F_n) \not\to 0$), complet ⇒ fermé, dans un compact : fermé ⇔ complet, distances eq → eq des complétudes, espaces isométriques → eq des complétudes. produit de complets est complet → $\mathbb{R}^n$ complet et + généralement les EVN de dim finie, compact ⇒ complet ("⇐" fausse → $\mathbb{R}$)

Briane - Pagès : E EVN est un Banach ⇔ (CVA ⇒ CV)

II - Exemples importants d'espaces complets

1) Espaces de fonctions

Marco : $(\mathcal{B}(E,F), \|\cdot\|_\infty)$ si F est un Banach, $(\mathcal{C}^0_B(E,F), \|\cdot\|_\infty)$ si F est un Banach, $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ et + généralement $\mathcal{C}^0(K,F)$ si K est compact et F un Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ si F est un Banach → en particulier $E' = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$ est un Banach.

Gourdon : inverse de Id-u → appli : $GL_c(E)$ ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$ si E Banach.

2) Espaces L^p

Briane - Pagès : def L^p, L^∞, inégalités de Hölder et Minkowski

Li + Brezis : $\boxed{\text{Thm de Riesz Fischer}}$ et corollaire sur ss-suite qui CV μ-pp

3) Espaces de Hilbert

Li : def d'un Hilbert, exemples : dim finie et $L^2(\mu)$

Hirsch-Lacombe : $\boxed{\text{Projection sur un CVX fermé}}$, corollaire supplémentaire orthogonal, théorème de Riesz

OA : Applications : définition de l'adjoint et thm de Radon-Nikodym
↳ preuve complète dans Briane Pagès

III - Théorèmes fondamentaux utilisant la complétude

1) Prolongement d'applications

Marco : thm de prolongement des applicat° UC ; rq sur utilité pour les ALC vers un espace complet ⊳ ex typique des formes linéaires continues, ex avec l'intégrale de Riemann, ex de la transfo de Fourier sur L^2.

Dantzer : corollaire sur prolongement d'applicat° lipschitziennes

2) Point fixe

Quef : thm du point fixe, contre ex pour chaque hyp, thm du point fixe pour un itéré, point fixe à paramètre, appli : Cauchy lipschitz

3) Théorème de Baire

Li : thm de Baire

Gourdon : Sunyer i Balaguer

Li : thm de Banach Steinhaus, corollaire sur suite d'ALC, thm de l'applicat° ouverte, de l'isomorphisme de Banach, corollaire sur l'équivalence de normes, corollaire sur le fait que la transfo de Fourier n'est pas surjective

Refs : Marco : Maths L3, Analyse, Marco

RDO 3 : Le cours de maths, Tome 3, Topo et élts d'analyse, RDO.

Briane-Pagès : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

Gourdon : Analyse, Gourdon

~~Rudin : Analyse réelle et complexe, Rudin~~

Brezis : Analyse fonctionnelle, Brezis

Li : Cours d'analyse fonctionnelle, Li

Hirsch-Lacombe : Elts d'analyse fonctionnelle, Hirsch-Lacombe

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré

Dantzer : Maths pour l'agreg, Analyse et probas, Dantzer

Quef : Topologie, Queffélec

206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

I - Espaces vectoriels normés de dimension finie

1) Normes et applications linéaires continues

Marco + Gourdon : def de normes équivalentes, équivalence des normes en dimension finie, contre ex en dim infinie, équivalence pour les ALC, $f : E \to F$ linéaire $\Rightarrow$ continue pour E de dim finie, contre ex sur $\mathbb{R}[X]$

2) Compacité

Gourdon : def d'une valeur d'adhérence, Bolzano-Weierstrass, prop sur unique VA dans un compact $\Rightarrow$ CV, dim finie $\Rightarrow$ (fermé borné = compact),
cor : suite bornée avec unique VA CV
Marco : thm de Riesz

3) Complétude

Gourdon : def d'une suite de Cauchy, d'un espace complet, dim finie $\Rightarrow$ complet, eq Banach $\Leftrightarrow$ (CVA $\Rightarrow$ CV), appli à l'inverse, l'exp. pas vrai en dim infinie,

II - Calcul différentiel et applications

1) Différentielle et dérivées partielles

rq sur avantage de dim finie, la diff ne dépend pas de la norme et $AL \Rightarrow C^0$

Amrani : def de la différentiabilité, de la différentielle, d'être de classe C^1, def de la dérivée partielle
à voir
Gourdon : f diff ssi les DP existent et sont C^0
Gourdon : def de la jacobienne, du jacobien, formule de composit° et de la chaîne
Amrani : def de la jacobien et utilité pour le CVAR, exemple, def de la formule d'inversion du jacobien et utilité pour le CVAR, exemple, def de la dérivée partielle, Schwarz, diff seconde, de classe C^2, rq sur bilinéaire, def de la Hessienne, elle est symétrique + comment l'utiliser + ex

2) Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

Rouvière : TIL, rq sur global et C^k
BP : chgt de var, ex de l'intégrale de Gauss
Rouvière : $\boxed{\text{Lemme de Morse}}$, appli aux courbes de niveau, dessin en annexe
Rouvière : TFI, rq version C^k
OA : appli aux polynômes.

3) Problèmes d'extremums

$\Rightarrow$ ex de $\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b \mid x\rangle$, min global = solut°

Rouvière : condit° 1er et 2e ordre (+ Amrani : exemple)
Gourdon : dans le cas de la dim 2 $\Rightarrow$ étude de det + Tr

Rouvière : extrema liés
Amrani : un exemple
OA : appli au thm spectral, interprétat° géom, appli à l'EMV d'une loi à support fini : $\hat{p} = (\hat{p}_i)_{i \in [\![1,r]\!]} = \left(\frac{N_i}{n}\right)_{i \in [\![1,r]\!]}$.

III - Equations différentielles linéaires

1) Structure de l'espace des solutions

thm de CL linéaire

Gourdon : def d'une EDL, rq sur le fait de se ramener à l'ordre 1.
Berthelin : structure de S_H et de S, def de wronskien
Gourdon : thm de Wronskien
FGN Analyse 4 : Equat° de Bessel

2) Résolution

Berthelin : cas $n=1$, solut° de $y' = Ay$ avec exponentielle, ~~cas~~ dans le cas diag, exemple
Gourdon : méthode de la variat° de la cste, ex pour $n=2$, exemples

3) Contrôlabilité

Coron : def du contrôle, $\boxed{\text{Critère de Kalmann}}$, exemple du livre, ex de l'oscillateur harmonique, indépendance de T_0, T_1, rq dans le cas non cst.

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon
Marco : Maths L3, Analyse, Marco
Rouvière : PGCD, Rouvière
Amrani : Calcul différentiel, El Amrani
BP : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès
OA : Objectif agreg, B.M.P
Berthelin : Equa diff, Berthelin
FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, F.G.N.
Coron : Control and nonlinearity, Coron

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

I - Généralités

1) Espaces vectoriels normés

Li : def d'une norme, quelques exemples : les L^p et l^p, $\mathcal{C}^0([a,b], K)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ ou $\|\cdot\|_p$

Marco : def de normes équivalentes, ex de normes non équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

Li : exemples d'équivalences en dim finie, rq : on verra qu'elles le sont toutes

2) Applications linéaires continues

Marco : équivalence $f \in \mathcal{L}(E,F)$ C^0 $\Leftrightarrow$ $\exists c>0$, $\|f(x)\| \leq c\|x\|$, rq pour mtq une applicat° n'est pas continue, définition de la norme subordonnée sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, exemples d'applications continues ou non, de calculs de norme, prop sur $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$, rq sur même chose pour les formes multilinéaires.

3) Cas de la dimension finie

Gourdon : équivalence des normes en dim finie, csq : compacts = fermés bornés

Marco : thm de Riesz

Gourdon : $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$ si E est de dim finie, contre ex avec une application sur $\mathbb{R}[X]$.

II - Espaces de Banach.

1) Définitions, propriétés et exemples

Marco : def d'une suite de Cauchy, CV $\Rightarrow$ Cauchy $\Rightarrow$ bornée, Cauchy + VA $\Rightarrow$ CV, def d'un espace de Banach, exemples : EVN de dim finie, $\mathcal{L}_c(E,F)$ si E est un EVN et F un Banach (en particulier $\mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$), $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, + généralement $\mathcal{C}^0_B(E,F)$ avec F Banach, $\mathcal{B}(E,F)$ avec F Banach.

Brézis + Li : $\boxed{\text{Thm de Riesz-Fischer}}$

2) Théorème de Baire et conséquences

Li : thm de Baire, thm de Banach Steinhaus, corollaire sur suites d'ALC, thm de l'applicat° ouverte, de l'isomorphisme de Banach, corollaire sur l'équivalence de normes, corollaire sur le fait que la transfo de Fourier n'est pas surjective.

III - Espaces de Hilbert

1) Propriétés fondamentales

Li : def d'un Hilbert, exemples : dim finie et $L^2(\mu)$.

Hirsch-Lacombe : Projection sur un CVX fermé, corollaire supplémentaire orthogonal, théorème de Riesz

OA : Applications : définition de l'adjoint et Radon-Nikodym
↳ preuve complète dans le Briane - Pagès

2) Convergence faible dans un Hilbert

Hirsch-Lacombe : def CV faible, CV forte => CV faible, CV faible => $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ et CV faible => (x_n) bornée, eq CV forte

Gourdon + Ciarlet : CV faible et corollaire sur optimisation

3) Bases hilbertiennes

→ exo sur l^2.

Brezis : def base hilbertienne, Hilbert séparable => base hilbertienne dnb.

OA : equivalence avec Bessel Parseval + $\forall x, y \in H, \langle x, y\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}$, isométrie avec $l^2(\mathbb{N})$ (H Hilbert séparable de dim infinie), exemple des séries de Fourier, des polynômes orthogonaux

---

Refs : Li : Cours d'analyse fonctionnelle, Li

Marco : Maths L3, Analyse

Gourdon : Analyse, Gourdon

Brezis : Analyse fonctionnelle, Brezis

~~Rudin : Analyse réelle et complexe, Rudin~~

Hirsch-Lacombe : Elts d'analyse fonctionnelle, Hirsch & Lacombe

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré

Ciarlet : Introduct° à l'anum matricielle et à l'opti, Ciarlet

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications

I - Approximation par des polynômes

1) Approximation locale

Gourdon : formule de Taylor-Lagrange, inégalité de Taylor-Lagrange, exemples, formule de Taylor-Young, exemples, formule de Taylor avec RI application : lemme d'Hadamard

(Rouvière : application : lemme de Morse)

2) Approximation des fonctions continues

ZQ : $\boxed{\text{Thm de Weierstrass par les polynômes de Bernstein}}$ (lemme sur module de C^0, inégalité de Kintchine)

Bonnelet : limite unif de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme, applications : 1) si $\forall n, \int_a^b f(t)t^n dt = 0$ alors $f \equiv 0$ si $f \in C^0([a,b])$, 2) injectivité de la transformée de Laplace

3) Approximation dans $L^2(I,\rho)$

OA : def de $L^2(I,\rho)$, rq : c'est un Hilbert et il contient $\mathbb{R}[X]$, existence des polynômes orthogonaux, csq : polynôme de meilleure approximation, thm sur base hilbertienne, exemples des polynômes de Hermite et de Legendre, exemples

Demailly : rq sur utilité de ces polynômes pour l'intégration numérique

II - Utilisation de la convolution

1) Rappels : premiers résultats de densité dans les L^p

Briane-Pagès : les 3 résultats de densité dans les L^p, rq faux pour $p=+\infty$!

Amrani : thm sur la translat° dans L^p, corollaire sur UC°

2) Définition de la convolution et propriétés

Amrani : def de la convolut°, bonne def $L^1 * L^1$ (rq L^1 algèbre de Banach), $L^p * L^1$, $L^p * L^q$, thm de dérivation.

3) Approximation de l'unité et régularisation

Amrani : def d'approximat° de l'unité, exemples, thm d'approximation, def d'approximat° de l'unité, rq : toujours faux pour $p=+\infty$

corollaire : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans L^p, $p \in [1,+\infty[$, rq : toujours faux pour $p=+\infty$

4) Application à la transformée de Fourier

Amrani : def de la transfo de Fourier, Riemann-Lebesgue, $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}^0$ linéaire, formule de dualité convolution et transfo de Fourier, Amrani : transfo de la gaussienne et injectivité, application ($f * f = f$), formule d'inversion, exemple, formule de Plancherel, application au calcul de $\int \frac{\sin^2 t}{t^2}$, extension de la transfo de Fourier sur L^2.

III - Approximation des fonctions périodiques

1) Définition et premières propriétés

Amrani : def de $L^p_{2\pi}$ et de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$, rappel : $L^p_{2\pi}$ est un Banach et $L^2_{2\pi}$ un Hilbert, def des e_n, des $c_n(f)$, Riemann Lebesgue, prop de base (et def de la convolution sur $L^1_{2\pi}$).

2) Noyaux et convergence

Amrani : def de D_N et K_N, pptés, thm de Fejer, csq : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ BH de $L^2_{2\pi}$, formule de Parseval, corollaire sur CVN si $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, thm de Dirichlet.

3) Applications

Amrani : calcul de séries

FGN Analyse 4 : calcul des $\zeta(2k)$

ZQ : $\boxed{\text{Equation de la chaleur}}$

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré

Demailly : Anum & équat° différentielles, Demailly

Briane - Pagès : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Rouvière : PGCD, Rouvière

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, FGN

213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

I - Généralités sur les espaces de Hilbert

1) Définitions et premières propriétés

Hirsch Lacombe : def produit scalaire, espaces préhilbertiens, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, $\sqrt{\langle .,. \rangle}$ norme, corollaire, identité du parallélogramme (dessin !), remarque : on fait un EVN qui la vérifie est un préhilbertien ! + formule de polarisation, def espace de Hilbert, exemples : dimension finie et $L^2(\mathbb{R})$.
↳ en particulier des Banach !

2) Orthogonalité

Hirsch-Lacombe : def elts orthogonaux, parties orthogonales, orthogonal d'une partie

OA : $A^\perp$ SEV fermé, $A^\perp = (\mathrm{Vect}\,A)^\perp$, $A \subset A^{\perp\perp}$ etc, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

Hirsch-Lacombe : thm de Pythagore, vrai pour n vecteurs, équivalence pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mais pas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (contre exe x et ix avec $x \neq 0$).

3) Projection sur un convexe fermé et conséquences

Hirsch Lacombe : Projection sur un CVX fermé, dessin, contreexe si pas CVX ($\{0,1\}$), rq complétude de C suffit, $E = F \oplus F^\perp$ si F fermé (TSO) et critère de densité

OA : Applicat° de la project° : Hahn-Banach géométrique

Hirsch Lacombe : Thm de Riesz et application : existence de l'adjoint

OA : Application : Radon Nikodym

Cas particulier : si F sev de dim finie : Gram Schmidt et expression du projeté (mélange OA / Hirsch Lacombe) (def orthonormée)

4) Convergence faible et optimisation

Hirsch Lacombe : def CV faible, CV forte ⇒ CV faible, contre exe, prop CV faible ⇒ (x_n) bornée (Banach Steinhauss) et lim inf $\|x_n\| \geq \|x\|$ et cq CV forte,

Banach Alaoglu (faible) et optimisation dans un Hilbert — Gourdon + Ciarlet

II - Bases hilbertiennes et exemples de Hilbert

1) Bases hilbertiennes

Brezis : Def base hilbertienne, exe sur ℓ^2, Hilbert séparable ⇒ base hilbertienne dnb.

OA : Equivalence base hilbertienne, Bessel Parseval + $\forall x, y \in H$, $\langle x,y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x,e_n\rangle \overline{\langle y,e_n\rangle}$

corollaire isométrie entre H et $\ell^2(\mathbb{N})$ (⚠ définir H c un Hilbert séparable de dim infinie

2) Polynômes orthogonaux

OA : def d'un poids, des polynômes orthogonaux, intérêt de ces polynômes pour faire le projeté sur $\mathbb{R}_n[X]$, polynômes orthogonaux = base hilbertienne, exemples des polynômes de Lagrange et de Hermite

3) Séries de Fourier

Amrani : def des e_n, des $c_n(f)$, remarque (e_n) famille orthonormée dans $L^2_{2\pi}$, et $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$, def de $S_n(f) = P_{Vect\{e_i, |i| \leq n\}} = \sum_{i=-n}^{n} c_n(f) e^{inx}$, def du noyau de Dirichlet, du noyau de Fejer, puis théorème de Fejer.
$\Rightarrow$ csq : (e_n) base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ et formule de Bessel, application au calcul de séries.
$\Leftrightarrow$ $L^2_{2\pi} \to \ell^2$, $f \mapsto c_n(f)$ isométrie bijective

4) Espérance conditionnelle

Ouvrard 2 : $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Hilbert muni du PS $(X, Y) \mapsto E(XY)$, lemme : $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ donc on peut définir le projeté orthogonal sur cet espace, remarque : unicité du projeté utile en pratique !, définition de l'espérance conditionnelle, théorème des trois perpendiculaires, remarque : vrai ⊕ généralement : Si $G \subset F \subset E$, alors $P_G(a) = P_G(P_F(a))$.

Refs : Hirsch-Lacombe : Eléments d'analyse fonctionnelle, Hirsch Lacombe.

OA : Objectif agrégation, Beck.

Brezis : Analyse fonctionnelle, Brezis

Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Ouvrard 2 : Probabilités 2, Ouvrard.

Gourdon : Analyse, Gourdon

Ciarlet : Introduct° à l'anum matricielle et à l'opti.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie

I - Théorème d'inversion locale

1) Énoncé et exemples

Amrani : def d'un C^1 difféo, rq sur la diff inversible
Rouvière : thm d'inversion locale (dessin en annexe), rq sur généralisable sur un Banach, les contre exc pour la globalité et le cas sans C^1, def d'un chgt de cordonnées, thm qui va avec (?), thm d'inversion globale, rq sur Hadamard-Lévy, rq sur version C^k,
BP : rq sur utilité de ces thm pour le chgt de variable, énoncé du thm, exc des coordonnées polaires, exc de l'intégrale de Gauss

2) Applications à l'algèbre linéaire et à la géométrie

Barbendon : $\boxed{\text{Surjectivité de l'exponentielle}}$
OA : prop sur la racine k-ième d'une matrice
Rouvière : $\boxed{\text{Lemme de Morse}}$ (avec lemme qui précède et rq sur le fait qu'on retrouve la prop précédente pour $k=2$), applicat° à l'étude de la position d'une surface p/r à son plan tangent, aux courbes de niveau.

II - Théorème des fonctions implicites

1) Énoncé et exemples

Rouvière : thm des fct° implicites (dessin en annexe), rq sur aussi généralisable sur un Banach, exemple, différentielle de la fct° implicite, retour à l'exemple, version C^k.

2) Applications aux polynômes et à l'optimisation

OA : dépendance C^∞ des racines aux polynômes, rq sur ouvert des polynômes SARS
Rouvière : thm des extrema liés
Amrani : exemple sur une fct°
OA : applicat° à la diagonalisat° des endo sym, appli à l'EMV d'une loi à support fini : $\hat{p} = (p_i)_{i\in[\![1,r]\!]} = \left(\frac{N_i}{n}\right)_{i\in[\![1,r]\!]}$.

III - Sous variétés de $\mathbb{R}^n$

1) Définitions, caractérisations

Amrani + Rouvière : def d'une sous variété, ex du cercle / de la sphère, thm avec caractérisat° équivalentes, contre exemples (dans les exos)

2) Espaces tangents

Rouvière : def d'un vecteur tangent, dim de l'EV = dim de la SV, prop sur expression de l'espace tangent en fonction de la def
Amrani : exc de la boule unité
Rouvière : exc dans les matrices : $SL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ avec espaces tangents.   OA : interprétat° des extrema liés avec les espaces tangents.

Refs : Amrani : Calcul différentiel, El Amrani
Rouvière : P.G.C.D., Rouvière
OA : Objectif agreg, B.M.P
Barbedon : 131 dev, le Barbedon et cie
BP : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

I - Généralités sur la différentiabilité

1) Définition de la différentielle et propriétés

Amrani : def de différentiabilité, de la différentielle
Rouvière : rq sur idée : fct ≃ son linéarisé
Amrani : ex dans le cas réel, ex de $\langle x,x \rangle$, ex de fct° bilinéaire avec ex, diff => C^0, somme de diff, composit° de diff, exemple avec $\|\cdot\|$
Rouvière : def de classe C^1, diff de l'inverse, contre ex, ex de calcul de diff avec l'inverse et l'exp en 0.

2) Dérivées directionnelles, dérivées partielles

Amrani : def de la dérivée selon un vecteur, diff => dérivée vecteur, réciproque fausse contre ex, def de la dérivée partielle, f diff => DP existent + formules, réciproque fausse
Rouvière : la réciproque partielle
Amrani : def de la mat. jacobienne, du jacobien, prop sur la composit° (avec la formule), ex de calcul (un random et les coordonnées polaires) → formule d'inversion.
jacobienne et la formule d'inversion
Rouvière : appli aux fct° holo avec condit° de C.R et interprétat° géom
Amrani : def du gradient, formule, exemple, interprétat° géom (dessin en annexe)

II - A l'ordre supérieure

1) Différentielles à l'ordre supérieure

Amrani : def de la diff seconde, classe C^2 etc, rq sur $\mathcal{L}c(E;\mathcal{L}c(F;G)) = \mathcal{L}c^2(E,F;G)$, def dérivée partielle, thm de Schwarz, def Hessienne* → elle est symétrique, dérivées partielles contre ex, def de la diff à un ordre qcq, classe C^k et classe C^∞, et thm de Schwarz
* comment l'utiliser

2) Formules de Taylor

Gourdon : inégalité des accroissements finis, appli : df = 0 => f cste, rq sur égalité fausse.
Rouvière : formule de Taylor Young, de Taylor avec reste intégral
Gourdon : exemple, appli : lemme d'Hadamard

III - Théorèmes fondamentaux

1) Théorème d'inversion locale

Rouvière : TIL, rq sur le global et le cas C^k
BP : chgt de var, ex de l'intégrale de Gauss
Beulenchon : surject° de l'exponentielle
Rouvière : $\boxed{\text{Lemme de Morse}}$, éventuellement appli aux courbes de niveau (dessin en annexe).

2) Théorème des fonctions implicites

<u>Rouvière</u> : TFI (dessin en annexe), $\mathcal{C}^k$ version C^k

<u>OA</u> : dépendance C^∞ des racines en le polynôme et corollaire sur polynôme SARS.

IV - Problèmes d'extremums

1) Extrema libres

<u>Amrani</u> : extremum => pt critique, contre ex

<u>Rouvière</u> : condit° N pas S et S pas N   <u>Amrani</u> : contre ex

<u>Gourdon</u> : cas de la dim 2 → étude de det + Tr.

2) Extrema liés

<u>Rouvière</u> : thm des extrema liés

<u>OA</u> : interprétat° géom, appli au thm spectral, appli à l'EMV d'une loi à support fini $\hat{p} = (\hat{p}_i)_{i \in [1,r]} = \left(\frac{N_i}{n}\right)_{i \in [1,r]}$

3) Une méthode numérique : gradient à pas optimal

<u>Gourdon</u> : déf fct° α-CVX, carac dans le cas diff

<u>FGN Analyse 4</u> : $\boxed{\text{Gradient à pas optimal}}$, appli à la résolut° de $Ax = b$

<u>Refs</u> : <u>Rouvière</u> : PGCD, Rouvière

<u>Amrani</u> : Calcul différentiel, El Amrani

<u>Gourdon</u> : Analyse, Gourdon

<u>BP</u> : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

<u>Barbenchon</u> : 131 dévs, Le Barbenchon et cie

<u>OA</u> : Objectif agreg, B.M.P

<u>FGN Analyse 4</u> : Oraux X-ENS, Analyse 4, FGN.

213 : Formules de Taylor. Exemples et applications

I - Formulaires

1) Motivations

Gourdon : thm des accroissements finis, contre ex si pas valeurs réelles, applicat° avec thm de Darboux, applicat° pour mtq certaines fct° n'admettent pas de primitive : la marche, et aux fct° de Darboux : fct° qui vérifient le TVI sur tout intervalle mais continue sur aucun.
+ thm fondamental de l'analyse.

2) Inégalité : Taylor Lagrange

Gourdon : Formule de Taylor-Lagrange, rq : $n=0 \rightarrow$ les accroissements finis, inégalité de Taylor Lagrange sur $\mathbb{R}$, inégalité des accroissements sur un $\mathbb{R}$-evn + remarque : inégalité de T.L. s'étend à des $\mathbb{R}$-evn, exemple : encadrement du log.

3) Formule locale : Taylor Young

Gourdon : Formule de Taylor Young, remarque : lien entre Taylor Young et interpolat° de Lagrange : si P_f^x poly interpolateur qui envoie $x=(x_0, \dots, x_n)$ sur $(f(x_0), \dots, f(x_n))$, alors lorsque $x \longrightarrow (a, a, \dots, a)$, $P_f^x \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ si f C^n.

Rouvière : Formule de Taylor avec différentielles (entre 2 EVN).
applicat° : DL à venir.

4) Formule exacte : Taylor avec reste intégral

Gourdon : Taylor reste intégral

Rouvière : Taylor reste intégral avec différentielles (entre 2 EVN)

Rq : Meilleur contrôle du reste que dans Taylor Young, $n=0 \rightarrow$ thm fond. analyse

Gourdon : Applicat° au lemme d'Hadamard.

II - Premières implications théoriques

1) Développements limités

Gourdon : Def des DL, unicité, DL à l'ordre $n \geq 1 \Leftrightarrow$ dub, contre ex de fct° avec DL à l'ordre 2 non dub 2 fois, DL grâce à Taylor Young, DL classiques, règles de calculs, dérivat°, intégration, applicat° au calcul de limites

2) Développements en série entière

Gourdon : Def fct° DSE, équivalence pour $f \in C^\infty$ entre DSE et reste $\xrightarrow{\text{simplement}} 0$, rq : en pratique, Taylor RI, exemple avec exp, contre ex $x \mapsto e^{-1/x}$: série CV et fct° C^∞ mais pas DSE, méthode de calcul, exemple d'équa diff pour obtenir le DSE.

OA : def fct° analytique, holo => analytique, analytique réelle => restrict° d'une fct° holo.

3) Caractérisation pour la convexité et les extremums

OA : Caractérisat° de la CVX par les tangentes, caractérisat° des extremums locaux, rq : Taylor Young donne des critères aux ordres supérieurs selon la parité de l'eq de $f(x) - f(x^*)$.

ZQ : Méthode de Laplace, application à Stirling

III - Applications

1) Courbes et surfaces

Rouvière : Etude affine locale d'une courbe plane, $\boxed{\text{lemme de Morse}}$, étude de la posit° d'une surface p/r à son plan tangent.

2) Méthodes numériques de résolution d'équat° différentielles

Demailly : Def de la méthode d'Euler, consistance pour cette méthode, rq sur méthode de Taylor à l'ordre p, def de la méthode du point milieu, consistance

3) En probabilité

Ouvrard 2 : def de la fct° caractéristique, lien avec les moments

ZQ : $\boxed{\text{Thm de Levy et TCL}}$

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Rouvière : Petit guide du calcul différentiel, Rouvière

OA : Objectif agrégation, Beck Malick et Peyré.

ZQ : Analyse pour l'agrégation, Zuily & Queffélec.

Demailly : Analyse numérique et équation différentielle, Demailly

Ouvrard 2 : Probabilités 2, Ouvrard.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

I- Existence et unicité d'extremums

1) Utilisation de la compacité

Gourdon : thm des bornes atteintes, applicat° : équivalence des normes en dim finie

Pommelet : applicat° : distance à un compact

Marco : def d'une fct° coercive, thm : possède un minimum

2) Utilisation de la convexité d'une fonction

Amrani : def (strict CVX), thm local -> global, rq : pas nécessairement d'existence : ex avec $x \mapsto e^x$ strict CVX

OA : unicité du minimum pour strict CVX, contre ex pour CVX : $x \mapsto$

Gourdon : def fct° α-CVX, existence d'un unique minimum

-> en annexe, tableau récap

	Exist.	Uni.	loc -> glob
CVX	×	×	✓
SCVX	×	✓	✓
α-CVX	✓	✓	✓

3) Dans un Hilbert

HL : project° sur un CVX fermé, appli : TSO et Riesz

Rouvière : appli : moindres carrés

HL : def de CV faible

Gourdon + Ciarlet : CV faible et optimisation, rq : on a obtenu une propriété de compacité faible qui a permis d'adapter les résultats précédents

II- Différentiabilité et caractérisations des extremums

1) Conditions du premier ordre

Amrani : def pt critique, extremum => pt critique, contre-exemples × 2

Gourdon : appli : thm de Rolle, thm des accroissements finis

OA + Rouvière : réciproque vraie pour une fonction convexe.

2) Conditions du second ordre

Rouvière + Amrani : condit° nécessaire pas suffisante et suffisante non nécessaire, contre exemple, exemple où on ne peut rien dire et rq qui va avec (dessin en annexe)
un exemple d'étude pour une fct°.

Gourdon : cas de la dimension 2 -> étude de det + Tr

OA : possibilité d'étudier l'ordre supérieur

OA + Rouvière : réciproque pour une fct° CVX. (?)

Rouvière : lemme de Morse et applicat° aux lignes de niveau

3) Optimisation sous contraintes

Rouvière : thm des extrema liés

Amrani : exemple sur une fonction.

OA : contre-ex sans une hypothèse, interprétat° géométrique, applicat° à la diagonalisation, appli à l'EMV d'une loi à support fini $\hat{p} = (\hat{p}_i)_{i \in [\![1,r]\!]} = \left(\frac{N_i}{n}\right)_{i \in [\![1,r]\!]}$

III - Recherche numérique

1) Méthode de Newton

Rouvière : méthode de Newton

OA : pb de la méthode : nécessite f', donne seulement des points critiques, se généralise à la dim supérieure

2) Méthode du gradient à pas optimal

Gourdon : caractérisat° de la α-CVX dans le cas différentiable

FGN Analyse 4 : $\boxed{\text{Gradient à pas optimal}}$, application à la résolut° de $Ax = b$

Refs :
Gourdon : Analyse, Gourdon
Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet
Marco : Maths L3, Analyse, Marco
Amrani : Calcul différentiel, El Amrani
OA : Objectif agrégation
HL : Elts d'analyse fonctionnelle, Hirsch & Lacombe
Rouvière : PGCD, Rouvière
Ciarlet : Intro à l'anum matricielle et à l'optimisat°, Ciarlet
FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, F.G.N.

220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires

I - Théorie des équations différentielles ordinaires

1) Théorèmes d'existence et d'unicité

Gourdon : def d'une EDO, fait qu'on peut se ramener à l'ordre 1.
Demailly : def d'une solut°, d'un pb de Cauchy, de prolongement, solut° maximale, solut° globale, exemple, eq avec la formule intégrable
Berthelin : def de loc/glob lipschitz (à modifier), thm de CL (global et local).
ZQ : contre ex sans lipschitz, rq $C^1 \Rightarrow$ loc lipschitz

2) Outils pour l'étude de solutions

Gourdon : lemme de Grönwall + coro cas simple
Berthelin : thm de sortie de tout compact, thm des bouts, exemple, borné ⇒ globale
Gourdon : appli au cas linéaire

II - Exemples de résolutions explicites

1) Cas linéaire

Berthelin : prop sur structure, cas n-1, solut° de $y' = Ay$ avec exp, un exemple, def de la résolvante, formule de Duhamel) à voir
Gourdon : ex de l'ordre 2, un exemple, des exemples qu'on résout sans sa (exp et sin/cos)
FGN Analyse 4 : $\boxed{\text{Equation de Bessel}}$

2) Cas non linéaire

Gourdon + Berthelin : équat° de Bernoulli, de Ricatti, exemples
Demailly + Berthelin : équat° à variables séparées, exemple(s)

III - Etude qualitative

1) Etude qualitative et portraits de phase

Berthelin : *def pt d'équilibre, stable, asympt. stable, *def d'eq autonome, def champ de vecteurs, rq sur utilité du tracé, méthode de tracé de portrait de phase, ex avec dessin en annexe, def intégrale première, prop sur les courbes de niveau ⇒ intérêt, ex
Lotka-Volterra, intégrale première, unique solut° périodique, portrait de phase
Pendule, portrait de phase

2) Stabilité

Berthelin : thm de stabilité en fct° de VP dans le cas linéaire, rq sur le thm de Liapounov (cf Rouvière)

Demailly : illustrat° dans le cas $n = 2$, dessins en annexe.

IV - Introduct° à la contrôlabilité

Coron : def du contrôle, $\boxed{\text{Critère de Kalmann}}$, ex du livre, osc de l'oscillateur harmonique, rq sur indé de T_0, T_1, rq sur le cas $A(t)$.

Refs :
- Gourdon : Analyse, Gourdon
- Berthelin : Equa diff, Berthelin
- Demailly : Anum & equa diff, Demailly
- ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec
- Rouvière : PGCD, Rouvière
- FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, F.G.N.
- Coron : Control and nonlinearity, Coron

221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications

I - Théorie des équations différentielles linéaires

1) Existence et unicité des solutions

→ exemple

Gourdon : def d'une équat° linéaire, rq sur le fait de se ramener à l'ordre 1, def de système diff linéaire VS EDL scalaire, thm de C.L. linéaire, rq sur le caractère global des solut°, contrairement au non linéaire, ex de $y' = y^2$

2) Structure de l'espace des solutions

Berthelin : prop de structure de S_H, puis de S, exemple

Gourdon : rq sur ED d'ordre p → dim np

Berthelin : def d'un système fondamental, du wronskien, exemple, forme des solut°

Gourdon : ex du wronskien pour ED d'ordre p, thm du Wronskien, équat° diff du wronskien

II - Résolutions explicites

1) Recherche d'une base de solutions homogènes

Berthelin : ex dans le cas de la dim 1 (juste le terme constant), rq sur en général pour A non cst, aucune formule, il faut tester des fct° particulières, thm cf ⊕ tard avec séries entières, def de l'expo, éventuellement ppés, thm sur mat fondamentale et solut° de l'équat°, un exemple, corollaire pour les eq scalaire, rq sur cas réel, rq sur le fait qu'on retrouve le cas bien connu de l'ordre 2, un exemple.

2) Méthode de la variation de la constante

Gourdon : idée de la variat° de la cste

Berthelin : ex dans le cas de la dim 1 (toute la formule)

Caron : def de la résolvante, ppté, ex dans le cas autonome et dans le cas scalaire + rq sur généralisat° → exp($\int A(z)dz$) ok si $A(z)$ commutent, Duhamel

Gourdon : rq sur en fait on bricole au cas par cas et la formule pour l'ordre 2, des exemples

3) Utilisation des séries entières

Dantzer : des exemples pas trop durs de résolut° grâce à des fct° DSE

FGN Analyse 4 : $\boxed{\text{Equation de Bessel}}$

III - Etude des solutions

1) Stabilité des solutions

Berthelin : def de stabilité, d'asymptotique stabilité, rq sur il suffit d'étudier 0, thm sur la stabilité avec les valeurs propres rq sur thm de Liapounov. (cf Rouvière)

2) Étude qualitative dans le cas constant en dimension 2

Demailly : étude en fonction des valeurs propres, dessins en annexe

3) Contrôlabilité

Coron : déf du contrôle, $\boxed{\text{Critère de Kalmann}}$, exemple du livre, rq sur indépendant de T_0, T_1, rq sur critère dans le cas $A(t)$

Refs : Berthelin : Equations différentielles, Berthelin

Gourdon : Analyse, Gourdon

~~Bonzoni : Calcul diff et équa diff, Bonzoni Cassage~~

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, F. G. N

Rouvière : P.G.C.D, Rouvière

Demailly : Anum & équa diff, Demailly

Coron : Control and nonlinearity, Coron

Dantzer : Maths pour l'agreg : Analyse & probas, Dantzer.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

I- Généralités sur la convergence

1) limite d'une suite

Amrani : def de la limite, exemple, def de suite CV et DV, def majorée/minorée/bornée, CV => bornée, contre exc : $(-1)^n$, opérat° sur les limites, réciproque fausse à $u_n \to l \Rightarrow |u_n| \to |l|$ ($(-1)^n$)

Rombaldi : caractérisat° séquentielle de la continuité, exemples

Amrani : def de la CV au sens de Cesaro, CV => CVC mais réciproque fausse

2) Valeurs d'adhérence

Amrani : def sous suite, valeur d'adhérence, CV => unique VA, contre exemples

Gourdon : def équivalente d'une VA, ensemble des VA est fermé

Amrani : Bolzano-Weierstrass, cor : bornée + unique VA => CV

ZQ : def lim inf, lim sup, $l \leq L$, CV $\Leftrightarrow l = L$, passage à la lim sup/inf dans une inégalité, exc

Amrani : $l = \inf(Adh(x_n))$, $L = \sup(Adh(x_n))$

3) Suites de Cauchy

Amrani : def suite de Cauchy, CV => Cauchy => bornée, Cauchy + VA => CV, contre exc dans $\mathbb{Q}$: $\sum \frac{1}{n!} \to e \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ complet + Cauchy $\Leftrightarrow$ CV, exc : suite harmonique DV.

4) Théorèmes de convergence

Gourdon : suite croissante majorée CV / décroissante minorée, thm des gendarmes, appli à $\frac{\sin n}{n}$, thm de comparaison dans le cas divergent, thm de CV, exemple.

Rombaldi : def suites adjacentes, thm de CV, exemple

II- Comportement asymptotique

1) Comparaison de suites

Amrani : def o, O, ~, prop qui vont avec sur les lim, exemples, compatibilité avec $\times$, $\div$, $\square^k$, ⚠ pas de compatibilité avec + :

~ => m limite, réciproque fausse,

FGN Analyse 2 : Equivalent du nbr de partit° d'un entier en parts fixes

2) Sommation des relations et lien avec les séries

Amrani : sommat° des relations de comparaison

Gourdon : exc avec la série harmonique

Amrani : CV d'une série télescopique ssi CV de la suite.

Gourdon : $\boxed{\text{Formule de Stirling par les intégrales de Wallis}}$

III - Exemples de suites particulières

1) Suites "classiques"

Gourdon : suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, suites homographiques, suites récurrentes linéaires.

2) Suites récurrentes et convergence

→ méthode de Héron

Gourdon : def suites rec, CV vers PF, pp de monotonie, exemple

Rouvière : point fixe attractif / répulsif etc, exemple, applicat° à la méthode de Newton

→ dessin en annexe (+ Demailly)

Bernis : $\boxed{\text{Développement asymptotique d'une suite récurrente}}$, exemples et dessins en annexe.

Refs : Amrani : Suites & séries numériques, suites & séries de f°, El Amrani

Rombaldi : Elts d'analyse réelle, Rombaldi

Gourdon : Analyse, Gourdon

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Rouvière : PGCD, Rouvière

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 dvps, Bernis × 2

FGN Analyse 2 : Oraux X-ENS, Analyse 2, F.G.N.

Demailly : Anum et équa diff, Demailly

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

I - Développements asymptotiques de fonctions

1) Relations de comparaison

Gourdon : def O, o, ~, opérat° compatibles, def valable pour des suites,
Rombaldi : équivalence avec les limites, ex de l'exp, d'autres ex. début

2) Développements limités

Gourdon : def d'un DL, unicité, DL₀ ⟺ C⁰, DL₁ ⟺ D¹, Taylor-Young,
appli : TCL, opérat°/dérivat°/intégrat° (rapidement), DL usuels,
appli au calcul de limites
Rouvière : Applicat° à l'étude affine locale d'une courbe plane

3) Fonctions définies par une intégrale

Gourdon : intégrat° des relat° de comparaison, exemple de ln, de Li,
$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$ (Bernis)
ZQ : Méthode de Laplace, applicat° à Stirling
Gourdon : éventuellement un autre exemple

4) Fonctions définies par une série

Gourdon : équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$, exemple, dev de ζ en 1.

II - Développements asymptotiques de suites

1) Suites définies implicitement

FGN Analyse 1 : 4 exemples de devs de suites définies implicitement

2) Suites récurrentes

Bernis : $\boxed{\text{Développement asymptotique d'une suite récurrente}}$, l'autre applicat°, exemple sur le sinus, dessins en annexe.

3) Sommation des relations de comparaisons

Amrani : sommation des relations de comparaison
Gourdon : série harmonique, formule de Stirling

4) Comparaison séries intégrales

Amrani : Comparaison séries intégrales, ex des séries de Bertrand, on retrouve H_n.
Gourdon : $\boxed{\text{Formule d'Euler Maclaurin + appli à } H_n}$ + formule de Stirling (Demailly au besoin)

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Rombaldi : Elts d'analyse réelle, Rombaldi

Rouvière : PGCD, Rouvière

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

FGN Analyse 1 : Oraux X-ENS, Analyse 1, F.G.N

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 devs

Amrani : Suites & séries num, suites & séries de fct°, El Amrani

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations

I - Généralités sur les suites récurrentes

1) Définition et premiers exemples

Gourdon : définition d'une suite rec, prop de CV vers un point fixe, ex : on exo une suite DV car pas de PF., ex des suites arithmétiques, géométriques, arithmetico-géométriques, homographiques

2) Suites récurrentes linéaires

Gourdon : def d'une suite rec linéaire d'ordre h, rq : on peut se ramener à $U_{n+1} = f(U_n)$ en vectorialisant, A = matrice compagnon, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n-h+1} \end{pmatrix}$, thm sur équat° caractéristique, rq sur obtent° des coef en pratique (dire que c'est dur), ex dans le cas de l'ordre 2, exemple de Fibonacci (Amrani)

3) Cas réel : propriétés et étude asymptotique

Gourdon : prop lien entre monotonie et croissante de la suite, exemple d'une suite

Bernis : Développement asymptotique d'une suite récurrente, autre application, dessin en annexe (cf Demailly)

II - Suites récurrentes et points fixes

1) Théorèmes de points fixes

Queff : thm du point fixe, contre ex pour chaque hyp, thm pour un itéré

Gourdon : thm sur un compact, contre ex sans l'hypothèse de compacité

2) Classification des points fixes dans le cas réel

Demailly + Rouvière : def pt fixe attractif, super attractif, répulsif, prop qui va avec, dessins en annexe, exemples, ex : suite de Héron $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ $\sqrt{a}$ super-attracteur

III - Application à la résolution d'équations

1) Méthode de Newton

Rouvière : Idée en lien avec les pts fixes superattractifs (dessin en annexe), thm, exemple

Demailly : comparaison avec une méthode de pt fixe (c'est mieux) OA : méthode se généralise

2) Méthode du gradient à pas optimal

Gourdon : def d'une fct° α-CVX, caractérisat° dans le cas diff

FGN Analyse 4 : Gradient à pas optimal, applicat° à la résolution de $Ax = b$.

3) Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

Demailly : déf de la méthode d'Euler, consistance, déf de la méthode du point milieu (dessin en annexe), consistance, rq sur méthode à l'ordre p.

4) Méthode de la puissance

Rombaldi : déf de la méthode, thm de CV, rq sur méthode de la puissance inverse, rq sur méthode de déflation

---

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 dev, Bernis x 2

Demailly : Anum & équa diff, Demailly

Quef : Topologie, Queffélec

Rouvière : PGCD, Rouvière

OA : Objectif agrégation, B. M. P

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, F. G. N

Rombaldi : Analyse matricielle, Rombaldi

Amrani : Suites & séries num, suites & séries de fct°, El Amrani

228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications

I - Notions de continuité et de dérivabilité

1) Continuité

Rombaldi : def continuité, continuité => bornée, exemples simples, continuité séquentielle, exemple, prolongement par C^0, exemple, opérat° (rapidement)
↳ appli : $u_{n+1} = f(u_n)$ CV vers PF (exemple dans le Gourdon)

2) Dérivabilité

Gourdon : définition de dérivabilité, eq avec DL d'ordre 1, ex de dérivée pas continue, def de dérivée n-ième, de classe C^1, C^n, opérat° (rapidement), dérivée de l'inverse, exemple : dérivée de arcsin.

admettre un DL d'ordre n ⇏ d'être C^n si $n \geq 2$, exemple

3) Lien entre les deux notions

Rombaldi : dblté => continuité, contre ex avec les fonctions de Van der Waerden et de Weierstrass, rq : thm impliquant leur continuité seront vus + tard, rq sur en fait les fct° C^∞ ∖ $\mathcal{D}$ sont denses dans les fct° C^0 (grâce à Baire)

II - Théorèmes fondamentaux

1) Continuité et compacité

Gourdon : thm des bornes atteintes, appli : fct° coercive admet un min global, def UC°, UC° => C°, thm de Heine, ex : C° + périodique / évanescente => UC° Pommelet,
BP : appli : translat° dans L^p UC°
ZQ : module de C°, Thm de Weierstrass par les polynômes de Bernstein
Pommelet : appli : $\int t^n f(t) = 0 \Rightarrow f = 0$ et injectivité transfo de Laplace

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Rombaldi : TVI et reformulat°, exemple : un polynôme de deg max impair admet une racine, rq : réciproque fausse ∖ on verra + tard avec Darboux, thm d'équivalence. Thm de Sunyer i Balaguer

3) Théorème de Rolle et conséquences

Gourdon : extremum => pt critique, thm de Rolle, contre ex dans le cas $\mathbb{C}$, thm des accroissements finis, applicat° au thm de Darboux, appli : certaines fct° n'admettent pas de primitives : fct° en escalier, et aux fct° de Darboux : vérifient le TVI sur tout intervalle et C° sur aucun, inégalité des accroissements finis, appli au thm de prolongement de la dérivée

4) Formules de Taylor

Gourdon : formules de Taylor-Lagrange, Taylor Young, Taylor avec RI.

ZQ : appli au TCL (Taylor Young)
Rombaldi : appli aux inégalités de Kolmogorov (Taylor Lagrange)
Gourdon : eq quand on est C^∞ pour être DSE, contre exemple, (Taylor avec RI).
lemme de Borel (pour mtq les fct° C^∞ sont ⊕ "souples")

III - Etude de classes de fonctions particulières

1) Fonctions convexes

Rombaldi : def de fct° CVX, inégalité des 3 pentes (dessin en annexe), thm sur la dérivabilité, sur la C^0, contre ex, caractérisat° dans le cas dif

2) Suites de fonctions

Amrani : C^0 de la limite CVU, ex, CVU et classe C^1, rq sur classe C^p
Gourdon : ex de l'exp de classe C^∞

3) Intégrales à paramètre

BP+ZQ : thm de C^0 et dblté sous l'$\int$, exemple : Γ est de classe C^∞
FGN Analyse 4 : Equat° de Bessel.

Refs : Rombaldi : Elts d'analyse réelle, Rombaldi
Gourdon : Analyse, Gourdon
Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet
BP : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès
ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec
Amrani : Suites & séries num, suites & séries de fct°, El Amrani
FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, F.G.N.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

I - Fonctions monotones

1) Définitions et premières propriétés

RDO3 : def de fct° (strict) croissante / décroissante / monotone, exemples détaillés, prop d'injectivité, toutes les prop de stabilité etc, rq sur pas de structure d'e
Gourdon : appli : étude de la monotonie de $u_{n+1} = f(u_n)$ en fct° de f. un exe

2) Régularité

Rombaldi : thm de limite à gauche et à droite, thm sur nbr dnb de discontinuités, thm des fct° réciproques,
RDO3 : $f : I \to \mathbb{R}$ monotone ssi $f(I)$ est un intervalle, thm de monotonie et sa "réciproque", exemple avec sin et arcsin etc, thm de monotonie et dvbté, cas des fct° strictement monotones, exemple qui suit

3) Un cas particulier : les fonctions de répartition

Ouvrard 1 : def de la fct° de répartit°, détermine la loi, ppté de la fdr
Barbe : def de la CV en loi, équivalence avec la CV des fdr
Garet : thm de Dini, thm de Glivenko - Cantelli, appli : estimateur de la f

II - Fonctions convexes

1) Définitions et premières propriétés

Rombaldi : def d'une fct° CVX, strict CVX, lien avec l'épigraphe et avec les cordes (dessin), des exemples, rq sur la somme / composée / lim
Gourdon : inégalité avec une somme de n termes avec des poids

2) Caractérisations et régularité

Rombaldi : inégalité des 3 pentes, csq sur la dvbté et la C°
OA : généralisat° dans $\mathbb{R}^n$
Rombaldi + OA : condit° sur $\mathbb{R}$ d'ordre 1 et 2, rq sur la stricte CVX, généralisation sur $\mathbb{R}^n$, exe avec forme quad + plein d'exe de fct° usuelles

3) Inégalités de convexité

Rombaldi : inégalités sur l'exp, le log, le sinus, comparaison de moyennes, inégalité de Young
BP : inégalité de Hölder, de Minkowski, csq : L^p est un EVN
Barbe : inégalité de Jensen, appli à $x^2 \to$ variance ≥ 0, appli avec $\frac{1}{x} \to$ l'EMV d'une expo est biaisé.
Bernis : $\boxed{\text{Inégalité de Hoeffding}}$ + les 2 appli
ZQ : $\boxed{\text{Inégalité de Kintchine}}$ + utilisat° pour le thm de Bernstein

III – Optimisation et convexité

1) Extrema et convexité

OA : CVX ⇒ min local ⇒ global, contre ex d'existence : $x \mapsto e^x$, unicité pour strict CVX, contre ex pour CVX : $x \mapsto 1$.

OA + Rouvière : réciproque des condit° du 1er (et 2ème ordre) vraies pour une fct° CVX, ex avec min de $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ ⇒ solut° de $Ax = b$.

2) Méthode du gradient à pas optimal

Gourdon : def de fct° α-CVX, caractérisat°, existence d'un unique min

⇒ tableau en annexe

	Exi	Uni	Cv glob
CVX	×	×	✓
SCVX	×	✓	✓
α-CVX	✓	✓	✓

FGN Analyse 4 : $\boxed{\text{Gradient à pas optimal}}$, appli à $\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ ($\alpha = \min(Sp(A))$) pour trouver la solut° de $Ax = b$.

Refs : RDO 3 : le cours de maths, Tome 3, Topo & ells d'analyse, RDO.

Rombaldi : Ells d'analyse réelle, Rombaldi

Gourdon : Analyse, Gourdon

Ouvrard 1 : Probabilités 1, Ouvrard.

Barbe : Probabilité, Barbe

Garet : De l'intégrat° aux probas, Garet & Kurtzmann

OA : Objectif agreg, B. H. P

BP : Théorie de l'intégrat°, Briane & Pagès

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 devs

Rouvière : P.G.C.D,

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, F.G.N.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

I - Généralités sur les séries

1) Séries, restes et sommes partielles

Gourdon : def d'une série, de la somme partielle, du reste, exemple des séries arithmétique, géométriques.

Amrani : nbr fini de termes ne change pas la nature d'une série, $\sum u_n$ CV $\Rightarrow u_n \to 0$, réciproque fausse, DV grossière, exemple, série télescopique, exemple, structure d'EV des séries CV.

2) Critère de Cauchy et convergence absolue

Amrani : Critère de Cauchy, exemple à la série harmonique, def CVA, CVA ⇒ CV, contre-exemple, rq : motive la partie suivante, produit de Cauchy, thm de bonne def, ex et contre ex

II - Séries à termes positifs

1) Critères de convergence et comparaisons de séries

Amrani : CV ⟺ S_n est majorée, contre ex $\begin{cases} u_{2n+1} = a \\ u_{2n} = -a \end{cases}$, règle de comparaison, exemple, rq sur opér, règle d'équivalence, de dominat°, de négligeable, rq sur cas complexe

Gourdon : ex de la série harmonique, de la formule de Stirling par Wallis, les "quelques recettes" qui suivent (3).

2) Comparaison séries - intégrales

Amrani : thm de comparaison, rq : on retrouve la série harmonique, séries de Riemann, corollaire, séries de Bertrand.

Gourdon : Formule d'Euler Maclaurin et appli à la série harmonique

III - Séries à termes quelconques

1) Critères de convergence absolue

rq : 1ère méthode, mtq $\sum |u_n|$ CV grâce aux méthodes précédentes.

Amrani : règle de Cauchy, de D'Alembert, exemples, comparaison des 2 méthodes, estimat° des restes dans les 2 cas.

2) Séries semi convergentes

Amrani : def semi CV, exemple, def série commutativement CV, thm sur CVA ⇒ CCV

FGN Analyse 1 : thm de réarrangement de Riemann, rq : on peut prendre $a \in \overline{\mathbb{R}}$

3) Critères de semi-convergence

Amrani : Critère de Leibniz, ex, contre ex, critère d'Abel, corollaire.

IV - Utilisation des séries de Fourier

Amrani 2 : def des coef, des séries de Fourier, thm de Dirichlet, formule de Parseval, quelques exemples de calcul de séries

FGN Analyse 2 : $\boxed{\text{Calcul des } \zeta(2k)}$

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Amrani : Suites & séries numériques, suites & séries de fct, El Amrani

~~Candelpergher : Calcul intégral, Candelpergher~~

FGN Analyse 1 : Oraux X-ENS, Analyse 1, F.G.N.

Amrani 2 : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

FGN Analyse 2 : Oraux X-ENS, Analyse 2, F.G.N.

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

I - Autour de l'intégrale de Lebesgue

1) Intégrale sur un espace mesuré

Briane-Pagès : def de l'intégrale pour une fct° étagée positive, exc pour la mesure de Dirac, de comptage, de Lebesgue, propriétés, def pour une fct° mesurable positive, rq : pptés toujours valable mais nécessitant le thm de CV monotone que l'on verra ⊕ tard, prop sur intégrale nulle, coro sur égalité d'$\int$ si égalité de fct° PP, inégalité de Markov, rq : très utile en proba, corollaire sur intégrable ⇒ finie PP, def d'une fct° qq intégrable, def de $\mathcal{L}^1(\mu)$, inégalité triangulaire, $f=g$ PP ⇒ $\int f d\mu = \int g d\mu$, notat° pour λ, lien avec l'intégrale de Riemann, contre exc avec $1\!\!1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$

2) Théorèmes d'inversion

Briane-Pagès : thm de Beppo-Levi, CSQ sur inversion $\int$ et Σ, thm de Fatou, inégalité stricte : $f_n = \begin{cases} 1\!\!1_A & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1\!\!1_{A^c} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, où $\mu(A)>0$, $\mu(A^c)>0$, thm de CV dom, exemple, contre-exc avec $1\!\!1_{[n,n+1]}$, applicat° : C° et dvlté sous l'$\int$ (en duo avec ZQ) ⊳ exc de la fct° Γ, applicat° aux séries de fct°, thm de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue, exc, contre exc.

II - Espaces L^p

1) Définitions et premières propriétés

Briane-Pagès : def de $\mathcal{L}^p(\mu)$, exc pour la mesure de comptage, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-ev, def de la "norme" $\mathcal{L}^p$ ⊳ on verra qu'en adaptant l'espace c'est bien une norme, def de L^p, def de $\mathcal{L}^\infty$, c'est un EV, def de L^∞, inégalité de Hölder (inclure $+\infty$!), rq : généralisat° de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski, pour $p \in [1,+\infty]$ ⊳ L^p est un EVN, rq : $L^2(\mu)$ est muni d'une structure de pré-Hilbertien grâce à $\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}\,d\mu$.

2) Structure

Briane-Pagès : inclusion dans le cas d'une mesure finie, de la mesure de comptage, contre-exemple sur $\mathbb{R}$

Li + Brezis : Thm de Riesz-Fischer

Briane-Pagès : lien entre CV L^p et CV pp (ou plutôt absence de lien, contre exc dans les deux sens), rq : Riesz Fischer implique que L^2 est un Hilbert, densité des fct° étagées dans $L^p(\mu)$ et dans $L^\infty(\mu)$, densité des fct° C_c^0 et des fct° indéfiniment différentiables à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$ ⊳ Ammari : translat° dans L^p

III - Convolution et transformée de Fourier

1) Convolution

Amrani : def de la convolut°, bonne def $L^1 * L^1$, $L^p * L^1$, $L^p * L^q$, thm de dérivation (cas C_c^∞), def approximation, thm d'approximation, corollaire : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans L^p, $p \in [1, +\infty[$.

2) Transformée de Fourier

Amrani : def de la transf de Fourier, Riemann-Lebesgue, $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0$ linéaire continue, convolut° et transformée de Fourier, formule de dualité, $\boxed{\text{Injectivité de la transformée de Fourier}}$, ex d'applicat° ($f * f = f$)

+ éventuellement formule d'inversion et exemples

Refs : Briane-Pagès : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Li : Cours d'analyse fonctionnelle, Li

Brézis : Analyse fonctionnelle, Brézis

Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani.

235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse

I - Interversion dans le cas de suites et séries de fonctions

1) Rappels sur les convergences

Amrani : def CVS, CVU, CVU ⇒ CVS, contre exe, def pour les séries de CVS, CVU, CVA, CVN, lien entre toutes, contre exe de réciproque

2) Utilisation de la convergence uniforme

Amrani : thm de continuité, contre exe, thm de la double limite, exe de $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$, (Hauchecorne : contre exe), thm de dérivabilité, contre exe, corollaire classe C^p

Gourdon : exemple de l'exponentielle de classe C^∞, interversion lim - intégrale (Hauchecorne : contre exe)

OA : thm de Weierstrass (fct° holo), appli : ζ est holo sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 1\}$

II - Interversion limite - intégrale

1) Utilisation des théorèmes de convergence

Briane-Pagès : thm de Beppo-Levi, lemme de Fatou, inégalité stricte avec $f_n = \begin{cases} \mathbb{1}_A & n \text{ pair} \\ \mathbb{1}_{A^c} & n \text{ impair} \end{cases}$, début de l'appli au calcul de $I_n(\alpha)$ pour $\alpha \leq 1$, thm de CV dom, contre exe $\mathbb{1}_{[n, n+1]}$, fin de l'applicat° sur $I_n(\alpha)$

Gourdon : fct° Γ et formule d'Euler Gauss

2) Intégrales à paramètres

Briane-Pagès (+ZQ) : thm de C^0 sous l'$\int$, C^0 de $\hat{f}$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, thm de dvbté sous l'intégrale, thm C^k, exe : Γ de classe C^∞

FGN Analyse 4 : Equat° de Bessel

ZQ : thm d'holo sous l'$\int$, exe : Γ est holo sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$

III - Interversion intégrale - intégrale

1) Théorèmes de Fubini

Briane-Pagès : thm de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue, contre exe, exe du thm pour $m \otimes \lambda$ aplicat° au calcul de l'intégrale de Gauss

FGN Analyse 2 : Calcul des $\zeta(2k)$

2) Application à la transformée de Fourier

Amrani² : def de la transfo de Fourier, Fourier et convolution, formule de dualité, formule d'inversion, exemple

ZQ + Bernis : Thm de Lévy et TCL (rappel def de l'avant)

IV - Permutation de quantificateurs

1) Par la compacité

HL : thm de Dini, rq et exemple.

Gourdon : thm de Heine, applicat° : C° + périodique => UC° (Pommelet)
évanescente

HL : def équicontinue, unif équicontinue, eq dans le cas compact, Ascoli (Bernis), appli opérateur compact.

2) Par le théorème de Baire

Li : thm de Baire

Gourdon : Thm de Sunyer i Balaguer

Li : Thm de Banach Steinhaus, corollaires : ∃f C° dont la série de Fourier DV en 0, CV faible => borné

Refs : Amrani : Suites et séries numériques, suites et séries de fct ; El Amrani

Hauchecorne : Contre ex en maths, Hauchecorne

Gourdon : Analyse, Gourdon

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré

Briane - Pagès : Théorie de l'agrégat°, Briane & Pagès

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, FGN

FGN Analyse 2 : Oraux X-ENS, Analyse 2, FGN

Amrani 2 : Analyse de Fourier dans les analyses fonctionnels, El Amrani

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 devs, Bernis & Bernis

~~Pommelet 2 : Analyse pour l'agreg : Analyse & proba, Pommelet~~

HL : Elts d'analyse fonctionnelle, Hirsch & Lacombe

Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet

Li : Cours d'analyse fonctionnelle, Li

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

I - Intégrale de Riemann

1) Primitives

Gourdon : existence d'une primitive et $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, exemples de calculs direct grâce à ça, ex de décomposition en éléments simples, pb : bcp de fct° n'ont pas de primitive évidente.

2) Intégration par parties et changement de variables

Gourdon : formule d'IPP, Formule de Stirling par les intégrales de Wallis, exemple pour la primitive de ln (avant le dev), formule de changement de variables, exemples d'intégrales calculées grâce à des CVAR.

3) Sommes de Riemann

Gourdon : thm sur les sommes de Riemann, cas particuliers utilisés souvent, application, rq sur pratique pour approcher une intégrale → méthode des rectangles (dessin !)

II - Intégrale de Lebesgue

1) Application des théorèmes de convergence

inégalité stricte avec $f_n = \begin{cases} \mathbb{1}_A \\ \mathbb{1}_{A^c} \end{cases}$

Briane-Pagès : thm de Beppo-Levi, lemme de Fatou, début de l'applicat° au calcul de $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}$ pour $\alpha \leq 1$, thm de CV dom, fin de l'applicat° pour $\alpha < 1$.

contre ex avec $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$

Gourdon : fct° Γ et formule d'Euler Gauss

2) Changement de variables et théorèmes de Fubini

Briane-Pagès : thm de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue, contre-exemple, thm de changement de variables, exemple dans le cas des coordonnées polaires, applications au calcul de l'intégrale de Gauss, application au calcul du volume de la boule.

3) Intégrales à paramètres

Briane-Pagès (+ ZQ) : thm de C° et de dvbté sous l'intégrale

Gourdon : ex de calcul d'intégrale par dérivat° sous l'$\int$

FGN Analyse 4 : Equation de Bessel

III- Utilisation d'autres domaines de l'analyse

1) Intégration de fonctions holomorphes

Queff-Queff : thm de Cauchy

Amrani : Transfo de Fourier de la gaussienne et injectivité de $\mathcal{F}$

Queff-Queff : thm des résidus, exc de $\frac{\sin x}{x}$, de fract° rationnelle, de transfo de Fourier

2) Transformée de Fourier

Amrani : formule d'inversion de Fourier, exc avec la fct° caractéristique d'une Cauchy, formule de Plancherel, intégrale de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

3) Utilisation des probabilités : Monte-Carlo

Toulouse : déf de la méthode, convergence, intervalle de confiance (σ connu ou non), rq sur les limites liées à la variance et les améliorations possibles, rq sur les avantages : pas de dépendance en la régularité de la fct°

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Briane-Pagès : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS Analyse 4, FGN

Queff-Queff : Analyse complexe et applications, Queffélec & Queffélec

Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Toulouse : Thèmes de proba et stats, Toulouse

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I - Etude de la régularité

1) Continuité

BP+ZQ : thm de C^0 sous l'intégrale, rq sur hyp de dominat° sur tout compact, ex : fct° Γ bien définie et C^0

Hauchecorne : contre ex sans C^0, sans domination.

2) Dérivabilité

BP+ZQ : thm de dblté sous l'$\int$, rq sur dom sur tout compact, thm C^k, exemple : Γ est de classe C^∞

FGN Analyse 4 : solution de l'équation de Bessel.

Hauchecorne : contre-ex sans domination.

3) Holomorphie

ZQ : thm d'holo sous l'$\int$, $\boxed{\text{Prolongement de la fonction } \Gamma}$ (avec OA)

4) Comportement asymptotique

Gourdon : intégration des équivalents, exemple du log

ZQ : méthode de laplace, formule de Stirling

II - Convolution

1) Définitions et propriétés

→ ex de VA à densité, $f_{X+Y} = f_X * f_Y$

Amrani : def de la convolution, bonne def $L^1 * L^1$ (Algèbre de Banach), bonne def $L^1 * L^p$, bonne def $L^p * L^q$ (UC^0 etc), thm de dérivation x 2 (avec φ C^p et φ C_c^∞)

2) Approximation de l'unité et régularisation

Amrani : motivat° → pas de neutre dans $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$ → d'où l'introduction d'approximations de l'unité, def d'approximation, exemples, thm d'approximation ⊛, def de suite régularisante, exemple, rq : suite régularisante ⇒ approx de l'unité, thm de convergence, corollaire : C_c^∞ dense dans L^p ($1 \leq p < +\infty$), rq : ⚠ faux pour $p = +\infty$!

⊛ Applications : le résultat sera utilisé par la suite pour obtenir des thm sur la transfo de Fourier ⊕

Gourdon : thm de Weierstrass par la convolution

III - Transformée de Fourier

1) Définitions et propriétés essentielles

Amrani : déf de la transfo de Fourier, Riemann-Lebesgue, $\hat{f}$ est C^0, exemple de transfo de Fourier, convolut° et transformée, formule de dualité, ~~Injectivité de la transformée de Fourier~~, exemple d'application ($f * f = f$), formule d'inversion, pptés de dérivée de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}$ de la dérivée. → + exemple

2) Application aux probabilités : la fonction caractéristique

Barbe-Ledoux : déf de la fct° caractéristique, rq sur cas à densité → transfo de Fourier (sinon transfo de la mesure), thm : caractérise la loi, qq exemples, thm d'inversion

Ouvrard 2 : liens avec l'indépendance, avec les moments

ZQ : thm de Lévy et TCL.

Refs : BP : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Hauchecorne : Contre-exemples en maths, Hauchecorne

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, FGN

Gourdon : Analyse, Gourdon

Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Barbe Ledoux : Probabilité, Barbe & Ledoux

Ouvrard 2 : Probabilités 2, Ouvrard.

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

I - Modes de convergence

1) Suites de fonctions

Amrani : déf de CV simple, exemple de x^n (→ nécessité d'une CV ⊕ forte, déf de la CV uniforme), CVU ⇒ CVS, réciproque fausse (Hauchecorne : contre exc)
HC : thm de Dini, rq et exemple.

Amrani : caractérisat° de la CVU, exemple, critère de Cauchy, norme de la CVU, déf et prop, complétude de $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$, produit de 2 fct° bornées CVU, contre exc

(Rombaldi : CVU de $g \circ f_n$, de $g_n \circ f_n$, contre-exemples) ou pas

ZQ : thm de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.

2) Séries de fonctions

Amrani : déf CV simple, uniforme, CVU de f_n si $\sum f_n$ CVU, contre-exc, eq CVU et CVS + CVU des restes → exc d'une CVS non CVU, critère de Cauchy, déf de la CVN, déf CV absolue, entraine CV simple, contre exc réciproque, séries alternées uniformes
CVN ⇒ CVU si E complet, contre exc réciproque,

(Rombaldi : thm de Dini, critère d'Abel uniforme) ou pas

II - Propriétés de la limite

rq : tous les résultats sur les suites s'adaptent aux séries en considérant S_n

Amrani : continuité de la limite si CVU, contre-exc, cor : $(\mathcal{C}_b(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet si E est complet, thm de la double limite (Hauchecorne : contre exc), CVU et classe C^1, prop sur classe C^p, exemple de l'exponentielle de classe C^∞, thm d'interversion

Gourdon : exemple de l'exponentielle de classe C^∞, thm d'interversion lim & intégrale, corollaire sur interversion série intégrale, rq : on veut obtenir des résultats avec des hypothèses moins fortes, objectif de la suite.
(Hauchecorne : contre-exemples)

III - Convergence en théorie de l'intégration

1) Théorème de permutation

Briane-Pagès : Beppo Levi, lemme de Fatou, thm de CV dominée, exemple, application aux séries

2) Convergence dans les L^p

Li + Brezis : déf de la CV dans L^p, $\boxed{\text{thm de Riesz - Fischer}}$ et corollaire sur sous suite qui CV μ-PP

Briane - Pagès : lien entre CV L^p et CV μpp, Hauchecorne : contre ex dans les deux sens

IV - Séries entières

Gourdon : def série entière, lemme d'Abel, def du rayon de CV (idée grossière à l'extérieur)

(Amrani : ex de CV/DV sur le cercle d'incertitude)

Pommelet : rq sur CVU, cas R fini ou infini

Gourdon : classe C^∞ et expression des coeff $\Rightarrow$ unicité

FGN Analyse 4 : Equat° de Bessel

Appel : def fct° génératrice, rayon de CV, caractérise la loi

V - Séries de Fourier

Amrani 2 : def des coef, des noyaux, thm de Fejer et Dirichlet

ZQ & Bernis : $\boxed{\text{Equation de chaleur}}$

Refs : Amrani : Suites et séries numériques, suites et séries de fct°, El Amrani

HL : Elts d'analyse fonctionnelle, Hirsch & Lacombe

Hauchecorne : Contre-exemples en maths, Rombaldi

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffelec

Gourdon : Analyse, Gourdon

Briane - Pagès : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

Li : Cours d'analyse fonctionnelle, Li

Brezis : Analyse fonctionnelle, Brezis

Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, FGN

Appel : Proba pour les non probabilistes, Appel

Amrani 2 : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Bernis : Analyse pour l'agreg, 40 dev, Bernis & Bernis.

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

I - Généralités et manipulations techniques

1) Définitions et premières propriétés

Gourdon : def série entière, lemme d'Abel, définit° du rayon de CV (DV grossière à l'extérieur du disque !)

Amrani : exemple de CV/DV sur le cercle d'incertitude.

Pommelet : cas R infini, CVU ssi suite de polynômes

2) Calcul pratique du rayon de convergence

Pommelet : utilisation du lemme d'Abel.

Amrani : règles de d'Alembert, de Hadamard, de Cauchy, exemples, puis comparaison des rayons, corollaire sur les séries avec $a_n = F(n)$, $F \in \mathbb{R}(X)$

3) Opérations sur les séries entières

Amrani : def de la somme, du produit de Cauchy, thm de convergence et contre-exemples aux égalités de rayon de convergence.

II - Propriétés de la somme

1) Régularité

Gourdon : continuité, dérivabilité de la somme, classe C^∞ et expression des coefficients $\to$ unicité des coeffs, holomorphie, principe des zéros isolés, corollaire, formule de Cauchy.

Amrani : intégration d'une série entière

2) Comportement au bord du disque de convergence

Gourdon : thm d'Abel radial, théorème taubérien faible

ZQ : thm des lacunes de Hadamard.

III - Fonctions DSE, analytique, holomorphe

Gourdon : def fct° DSE,* critère de DSE pour les fct° C^∞, rq sur Taylor reste intégral, contre exc $C^\infty \not\Rightarrow$ DSE en général, DSE des fct° classiques

* déduire de la def de DSE en 0 la def de DSE en z_0 ou utiliser une autre def, comme celle de (par exemple) Rombaldi

OA : def d'une fct° analytique, principe des zéros isolés, prolongement analytique, principe du maximum, $H(\Omega) = A(\Omega)$ pour Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et donc les fct° holo profitent des pptés des analytiques (cf Queff Queff)

IV - Applications

1) Calcul de séries et combinatoire

Dantzer : calcul du nombre de dérangements

FGN Analyse 2 : définition des nombres de Bernoulli et $\boxed{\text{calcul des } \zeta(2k)}$

2) Equations différentielles

Dantzer : calcul des solut° DSE d'une équadiff

FGN Analyse 4 : $\boxed{\text{Equat° de Bessel}}$

3) Fonctions génératrices en probabilité

Appel : def fct° génératrice, rayon de CV, caractérise la loi, obtention des moments, exemple de fct° génératrices pour les lois usuelles, $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Amrani : Suites et séries numériques, suites et séries de fct°, El Amrani

Pommelet : Cours d'analyse, Pommelet

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

~~Rombaldi : Maths pour l'agreg, Analyse et probas, Rombaldi~~

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré

Dantzer : Maths pour l'agreg, Analyse et probas, Dantzer

FGN Analyse 2 : Oraux X-ENS Analyse 2, F.G.N.

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS Analyse 4, F.G.N.

Appel : Probas pour les non probabilistes, Appel

244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

I - Fonctions usuelles

1) La fonction exponentielle

Tauvel : def de l'exp, pptés de base, homomorphisme surjectif, pas injectif, périodique, rq : par principe de prolongement analytique, c'est le prolongement de l'exp sur $\mathbb{R}$ où elle est d'ailleurs bijective, autres caractérisat° : unique morphisme C^0 $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^*_+, \times)$ valant 1 en 0, unique solut° de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

2) Les fonctions trigonométriques et hyperboliques

⚠ $\cos^2 + \sin^2 = 1$ toujours vrai mais pas borné !

Tauvel : def de cos et sin, pptés de base
RDO 3 : thm d'homéomorphisme et réciproques, quelques dessins en annexe (éventuellement mentionner dans le § Dvet KN et l'analyse de Fourier)

3) Les fonctions logarithmes

RDO 3 : def et pptés du log népérien
Amar : def arg & log, déterminat° principale, rq sur restrict° à $\mathbb{R}^*_+ = \ln$, éventuellement rq sur pb de C^0, holomorphie de log sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, dse du log, def de la fct° puissance sur $\mathbb{C}$. pq sur autre déterminat°, appli de tout ça : def de la fct° puissance sur $\mathbb{C}$.

II - Les fonctions Γ et B d'Euler

1) Définitions et propriétés

ZQ : def de Γ, classe C^∞, relat° $\Gamma(z+1) = \Gamma(z)$, comportement asymptotique (tracé de la courbe en annexe), la formule de Gauss (vrai pour z)
Gourdon : Γ est CVX et log CVX, la formule de Gauss (vrai pour z)
ZQ : formule de Stirling
OA + ZQ : $\boxed{\text{Prolongement de la fct° } \Gamma}$ rq : $\mathrm{Res}_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!}$.
Quef Quef : formule des compléments
définit° de B, lien avec Γ
Gourdon : équa fct, équivalent en $+\infty$

2) Applications aux probabilités

Chabanol + Appel + Barbe : def loi Γ, lien avec $\mathcal{E}$, interprétation sinon, rq sur importance de cette loi, espérance, lien avec la loi du χ^2, variance, stabilité par convolut°, def loi B, interprétat° min / max de uniformes, dessin de la densité en annexe avec rq, espérance, variance, lien avec la loi Γ

III - La fonction ζ de Riemann

Gourdon : def de ζ, classe C^∞ et expression des dérivées, dev asymp en 1^+ et lim en $+\infty$

ZQ : holo sur $\{Re(z)>1\}$, équat° fonctionnelle, prolongement à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

FGN Analyse 2 : $\boxed{\text{Calcul des } \zeta(2k)}$, rq sur $\zeta(2k+1)$

Gourdon + Garet : fonction ζ et nombres premiers

Refs : Tauvel : Analyse $\mathbb{C}$ pour la L3, Tauvel

RDO3 : Cours de maths, Tome 3, Topo et elts d'analyse, R.D.O.

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec.

Gourdon : Analyse, Gourdon

OA : Objectif agreg, B.M.P

Quef-Quef : Analyse $\mathbb{C}$, Queffélec $\times 2$

Chabanol : Proba & stats, Chabanol & Ruch

Appel : Proba pour les non probabilistes, Appel

Barbe : Probabilité, Barbe & Ledoux

Garet : De l'intégrat° aux proba, Garet & Kurtzmann

FGN Analyse 2 : Oraux X-ENS, Analyse 2.

Amar : Analyse $\mathbb{C}$, Amar & Matheron

245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

I - Introduction aux fonctions holomorphes

1) Définitions et propriétés élémentaires

Amar : def de la $\mathbb{C}$-dbté, ex / contre ex, stabilité avec les opérations, def de l'holomorphie, notat° $\mathcal{H}(\Omega)$, d'autre ex : les polynômes, les séries entières, def de analytique, analytique => holo, rq sur réciproque ⊕ tard, exemple de l'exponentielle

2) Holomorphie et différentiabilité

Amar : lien $\mathbb{C}$-dbté et diff, contre ex diff ⇏ $\mathbb{C}$-dob avec $\overline{z}$, équation de Cauchy-Rieman, rq sur Jac = mat de similitude, def de $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$, équat° de CR équivaut à $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

OA : contre ex sans supposer la diff.

Tauvel : expression de la dérivée

II - Intégration et formules de Cauchy

1) Intégration complexe

Tauvel : def d'un chemin, de lacet exemple, def de l'intégrale sur un chemin, def de la longueur et inégalité qui va avec, définition de l'indice et thm qui va avec

Amar : un dessin (+ un cercle tout simple)

2) Formules de Cauchy

Tauvel : les 2 thm intermédiaires, le thm de Goursat, puis le thm de Cauchy sur un CVX et la formule de Cauchy, exemple pour un cercle en paramétrisant.

Amrani : Transformée de Fourier de la gaussienne et injectivité de la TF

Tauvel : analycité d'une fct° holo et formule de Cauchy pour la dérivée n-ième

coro : holo => C^∞, thm de Morera, corollaire

III - Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes

1) Conséquences de l'analycité

Tauvel : inégalité de Cauchy, thm de Liouville, thm de D'Alembert

OA : principe des zéros isolés, appli au prolongement analytique, rq anneau intègre

Tauvel : un ex d'application.

2) Principe du maximum

Tauvel : f holo => ppté de moyenne => principe du max, corollaire

OA : contre ex pour le min, cq sur 1/f.

3) Stabilité de l'holomorphie

Amar : thm de Weierstrass, csq pour ζ

OA : holo sous l'$\int$, appli : $f \in L^1(\mathbb{R})$ à supp compact $\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

IV - Fonctions méromorphes

1) Singularités et fonctions méromorphes

OA : thm/def du dev en série de Laurent, def des ≠ singularités, ex de singularité essentielle

Amar : def de fct° méro, exemple de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}$, ex de ζ sur $\{Re(s)>0\}$ avec un pôle en 1 (en donnant l'expression

Tauvel : $\frac{f}{g}$ si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$

2) Théorème des résidus

OA : def du résidu, le thm des résidus, thm de Rouché (avec Tauvel), exemple

Quef-Quef : ex de calcul d'intégrales

3) Séries de fonctions méromorphes

Tauvel : thm de méromorphie d'une série, l'exemple qui suit

OA+ZQ : Prolongement de la fonction Γ

Refs : Amar : Analyse $\mathbb{C}$, Amar & Matheron

OA : Objectif agreg, B.M.P

Tauvel : Analyse $\mathbb{C}$ pour la L3, Tauvel

Quef-Quef : Analyse $\mathbb{C}$ et applicat°, Queffélec × 2

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications

I - Définitions et premières propriétés

1) Définition des coefficients de Fourier

Amrani : def de $L^p_{2\pi}$, norme associée, rappel : $L^2_{2\pi}$ est un Hilbert, def des e_n, rq : famille orthonormée, def des $c_n(f)$, def des $a_n(f)$ et $b_n(f)$ (coef réels), rq sur utilité dans le cas de fct° à valeurs réelles, et pour l'utilisation de la parité, def de la série de Fourier, rq sur adaptat° à une autre période

2) Propriétés des coefficients

$L^1_{2\pi} \to C_0(\mathbb{Z})$

Amrani : pptés de base des coef, Riemann-Lebesgue, csq sur $\gamma : f \mapsto (c_n(f))_n$, exemple de calculs de coeffs, décroissance des coeff ($c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$ si $f \in C^k_{2\pi}$), thm sur série trigo CV vers $f \Rightarrow$ série trigo = série de Fourier.

II - Noyaux et convergence

1) Définition des noyaux

Amrani : def de D_N, expression avec les sinus, $S_N(f) = f * D_N$, intégrale égale à 1 mais $\|D_N\|_1 \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$, def de K_N, expression avec les sinus, $\sigma_N(f) = f * K_N$, $\|K_N\|_1 = 1$, K_N approximat° de l'unité

2) Théorème de Féjer et conséquences

Amrani : thm de Féjer, coro : densité des polynômes trigo, coro : Weierstrass, contre exc : si $f \in C_{2\pi}$ a sa série de Fourier qui CV simplement, alors c'est vers f, $\exists f \in C^0_{2\pi}$ tq $S_N(f)$ DV en 0, $c_n(f) = c_n(g) \Rightarrow \begin{cases} f = g \text{ si } f, g \in C^0_{2\pi} \\ f = g \text{ dans } L^1_{2\pi} \text{ si } f, g \in L^1_{2\pi} \end{cases}$

en particulier γ est injective

3) Aspects hilbertiens

Amrani : (e_n) est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, csq : formule de Parseval, rq avec coeff réels, corollaire sur CVN dans le cas $f \in C_{2\pi} \cap C^1_{pm}$

$\hookrightarrow$ $\begin{array}{l} L^2_{2\pi} \to \ell^2 \\ f \mapsto c_n(f) \end{array}$ isométrie

4) Théorème de Dirichlet

Amrani : thm de Dirichlet, coro : si $f \in C^1_{pm}$, $S_N(f)$ CV simplement

III - Applications des séries de Fourier

1) Calcul de séries

Amrani : différents exemples de calculs de séries grâce aux coeffs déjà calculés

FGN Analyse 2 : Calcul clés $\zeta(2k)$

Amrani : formule sommatoire de Poisson

Gourdon : application (elle est faite plus précisément que dans le El Amrani)

2) Inégalités

ZQ : inégalité isopérimétrique, rq : interprétation, inégalité de Bernstein, rq : interprétation

Amrani : inégalité de Wirtinger, corollaire (OA pour interprétation)

3) Equation de la chaleur

ZQ + Bernis : Equation de la chaleur, rq sur thm peut s'étendre à $h \in C^0$, rq sur méthode valable pour d'autres équations

---

Refs : Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

FGN Analyse 2 : Oraux X-ENS, Analyse 2, F.G.N.

Gourdon : Analyse, Gourdon

ZQ : Analyse pour l'agreg, ZQ

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick & Peyré

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 dev, Bernis & Bernis.

250 : Transformation de Fourier. Applications

I - Transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

1) Définitions et premières propriétés

Amrani : def de la transfo de Fourier pour $f \in \mathcal{L}^1$, Riemann-Lebesgue, thm/def de $\hat{\mathcal{F}}_e : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to C_0^0(\mathbb{R})$, appli linéaire, continue, exemples de calculs, rq $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ pas intégrable !, prop sur transfo de Fourier et translat° / homothétie.

2) Convolution et dérivation

Amrani : def de $f * g$ pour $f, g \in \mathcal{L}^1$, ⊕ $f * g$ intégrable et $\leq$ sur normes, prop sur $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, rq : pas de neutre pour $*$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, puis formule d'échange, def d'approximation de l'unité et thm d'approximation, Injectivité de la transformée de Fourier, formule de dérivée d'une TDF et formule de TDF d'une dérivée.

3) Transformée de Fourier inverse

Amrani : Formule d'inversion dans $\mathcal{L}^1$, application : calcul de la TDF d'une Cauchy, remarque sur condition restrictive pour inverser !, prop $\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{f} * \hat{g}$

II - Extensions de la transformée de Fourier

1) Extension dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Amrani : Fourier-Plancherel, et version produit scalaire, thm de densité de $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ dans $\mathcal{L}_2$, def de la transfo de Fourier $\mathcal{L}^2$, la transfo ainsi def coïncide avec la précédente sur $\mathcal{L}^1$, prop approximat° $\hat{f}$ pour $f \in \mathcal{L}^2$, formule de dualité, formules de convolution dans $\mathcal{L}^2$, def de l'cgie Fourier et thm d'inversion, application au calcul de $\int \frac{\sin x}{x}$ (intégrale de Dirichlet).

2) Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Amrani : def fct° à décroissance rapide, exemple, prop sur $\hat{f}$ pour f $\mathcal{L}^1$ à DR, def classe de Schwartz, exemple : $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, prop stabilité par dérivée, produit, etc, stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par TDF, définit° de la CV dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, thm d'inversion dans la classe de Schwartz, prop densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, rq : peut également permettre la construction de Fourier sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

III - Applications de la transformée de Fourier

1) En probabilité : la fonction caractéristique

Barbe-Ledoux : déf de la fonct° caractéristique, thm : caractérise la loi, quelques exemples, thm d'inversion

Ouvrard 2 : liens avec l'indépendance, lien avec les moments

Z.Q. : $\boxed{\text{Thm de Levy et TCL}}$

2) En analyse : les équations différentielles et EDP

Amrani : équation de Laplace, problème de Dirichlet, cordes vibrantes

---

Refs : Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani

Barbe Ledoux : Probabilité, Barbe et Ledoux

Ouvrard 2 : Probabilités 2, Ouvrard

Z.Q. : Analyse pour l'agrégation, Zuily et Queffélec

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse

I - Ensembles et fonctions convexes

1) Ensembles convexes

Gourdon : def d'un segment, d'un convexe, (dessin) xq sur def qui s'étend à des espaces affines, exc : un SEV, prop : CVX => connexe par arcs donc connexe, def / prop de l'enveloppe convexe, thm de Carathéodory, appli : conv(K) est compact si K est compact.

2) Fonctions convexes

Rombaldi : def d'une fct° CVX, strict CVX, lien avec l'épigraphe, avec les cordes, (dessin) des exemples, xq sur somme / composée / lim

Gourdon : inégalité avec une somme de n termes avec des poids

Rombaldi : inégalité des 3 pentes (dessin), csq sur la dérivabilité et la C°

OA : généralisat° dans $\mathbb{R}^n$.

Rombaldi + OA : condit° sur $\mathbb{R}$ d'ordre 1 et 2, xq sur la stricte CVX, et généralisat° sur $\mathbb{R}^n$, exc avec forme quad + plein d'ex de fct° usuelles

II - Inégalités de convexité

1) Quelques inégalités classiques

Rombaldi : inégalités sur l'exp, le log, le sinus, comparaison des moyennes, inégalité de Young.

2) Inégalités dans les espaces L^p

BP : inégalité de Hölder, inégalité de Minkowski, csq : L^p est un EVN, Riesz - Fischer, inégalité de Jensen.

3) Inégalités en probabilité

Barbe : inégalité de Jensen (version $\mathbb{E}$), appli avec x^2 ▷ variance ≥ 0, appli avec $\frac{1}{x}$ ▷ l'EMV d'une expo est biaisé

Bernis : Inégalité de Hoeffding avec les 2 appli

ZQ : Inégalité de Kintchine et utilisat° pour le thm de Bernstein

III - Convexité et optimisation

1) Fonctions convexes et optimisation

OA : CVX ▷ min local => global, contre exc d'existence : $x \mapsto e^x$, unicité pour strict CVX, contre ex : pour CVX : $x \mapsto 1$

Gourdon : def α-CVX, caractérisat°, existence d'un unique min

en annexe :

	exi	uni	lo->gl
CVX	×	×	✓
SCVX	×	✓	✓
αCVX	✓	✓	✓

OA + Rouvière : réciproque des condit° du 1er et 2ème ordre) vraies pour une fonction CVX

OA : Exo avec min de $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ = solut° de $Ax = b$.

FGN Analyse 4 : $\boxed{\text{Gradient à pas optimal}}$, appli à $\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ ($\alpha = \min(Sp(A))$) pour trouver la solut° de $Ax = b$.

2) Dans les espaces de Hilbert : projection sur un convexe fermé et conséquences

HL : Project° sur un CVX fermé : appli : TSO et Riesz → appli : l'adjoint
→ critère de densité qui va avec.

Rouvière : appli aux moindres carrés

OA : appli de Riesz : Radon-Nikodym, appli de FCF : Hahn Banach géom

ZQ : Enveloppe CVX de $O_n(\mathbb{R})$. (+ S_n points extrémaux)

HL : def de CV faible (CV forte ⇒ CV faible, CV faible ⇒ bornée, eq avec CV forte) à voir.

Gourdon + Ciarlet : $\boxed{\text{CV faible et optimisation}}$, appli à $-u'' + |u|^p u = f$

Refs : Gourdon : Analyse, Gourdon

Rombaldi : Elts d'analyse réelle, Rombaldi

OA : Objectif agrég, B.H.P

BP : Théorie de l'intégration, Briane & Pagès

Barbe : Probabilités, Barbe Ledoux

Bernis : Analyse pour l'agrég : 40 devs, Bernis × 2

ZQ : Analyse pour l'agrég, Zuily & Queffélec

Rouvière : PGCD, Rouvière

FGN Analyse 4 : Oraux X-ENS, Analyse 4, FGN.

HL : Elts d'anaf, Hirsch & Lacombe

Ciarlet : Intro à l'anum matricielle et à l'opti, Ciarlet.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications

I - Loi d'une variable aléatoire : définitions et premières caractérisations

1) Notion de loi, cas discret et à densité

Barbe : def d'une VA, de la loi d'une VA (dessin en annexe).
Appel : def d'une VA discrète, caractérisation de la loi par les probas atomiques, exemples
Barbe : contre ex de Ω pas dnb pour la Bernoulli
Appel : def des lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson et ex d'utilisation (tableau en annexe).
Barbe : def de absolument C°, thm de Radon Nykodym, def de VA à densité, caractérise la loi
Appel : def des lois usuelles : uniforme, exponentielle, normale, Cauchy, éventuellement Γ et χ^2

2) Caractérisation grâce à l'espérance

→ cas discret et à densité

Barbe : def de l'espérance, thm de transfert, ex avec l'espérance et espérance de lois usuelles
Ouvrard 2 : caractérisat° de la loi par $E(f(X))$ pour $f \in C_c^\circ(\mathbb{R})$, rq : ok avec C_b°, C_c^∞, C_0°, exemples qui suivent

3) Vecteurs aléatoires et indépendance

Chabanol : (adapter à n variables ?) def de loi marginale, calcul cas à densité et discret, corollaire : $(X_1, X_2, \dots X_n)$ à densité $\Rightarrow$ X_i à densité, réciproque fausse, rq : connaître la loi du vecteur permet de connaître les lois marginales, réciproque fausse → manque l'indépendance
Barbe : def indépendance, prop sur indé $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}_{(X_1, \dots X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$
Appel : formule de convolut° cas discret, ex : $\mathcal{B}(n,p) = \sum b(p)$, stabilité de la Poisson, de la binomiale, formule dans le cas à densité, ex de la loi normale, eq : si $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$, utile pour les intervalles de conf en stats.

II - Caractérisations par des fonctions remarquables

1) Fonction de répartition

Barbe : def de fct° de répartition, propriétés, caractérise la loi, exemple de fctr usuelles, rq : se généralise pour des vecteurs, def de la fct° de quantile
Appel : ex pour simuler une expo.

2) Fonction caractéristique

Barbe : déf de la fct° caractéristique, rq transfo de Fourier, caractérise la loi, des exemples, formule d'inversion, exemple

Ouvrard 2 : lien avec les moments, lien avec l'indépendance

3) Fonction génératrice d'une V.A. à valeurs dans $\mathbb{N}$

Appel : déf de la fct° génératrice, pptés dont caractérise la loi, récupérat° des moments, ex de lois usuelles, lien avec l'indépendance

Gourdon : appli aux dés pipés

III - Concentration, convergence en loi et applications

1) Inégalités de concentrations

Barbe : inégalité de Markov, de Tchebytchev, appli : thm de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Chabanol : appli : intervalle de conf pour le p d'une Bernoulli

Bernis : $\boxed{\text{Inégalité de Hoeffding et appli à l'intervalle de conf}}$, amélioration possible avec la version + précise de Hoeffding (cf Cadre & Froment)

2) Convergence en loi

Barbe : déf CV en loi, rq avec la CV des fdr

Garet : lemme de Scheffé, ex des VA discrètes, exemples)

ZQ + Bernis : $\boxed{\text{Théorème de Lévy et TCL}}$

Chabanol : appli aux intervalles de conf asymptotique.

Refs :

Barbe : Probabilité, Barbe & Ledoux

Appel : Proba pour les non probabiliste, Appel

Ouvrard 2 : Probabilités 2, Ouvrard

Gourdon : Algèbre & probas, Gourdon

Chabanol : Proba & stats, Chabanol & Ruch

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 devs, Bernis × 2

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Cadre & Froment : Stats maths, Cadre & Vial

Garet : De l'intégrat° aux probas, Garet & Kurtzmann

262 : Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications

I - Modes de convergence

1) Convergence presque sûre

Barbe : def CV P.S, rq : événement mesurable, critère de Cauchy, lemme de Borel - Cantelli, exemple

Bernis : $\boxed{\text{Inégalité de Hoeffding}}$ (dev 1)

Garet : stabilité de la CV PS par applicat° d'une fct° C°.

2) Convergence en probabilité

Barbe : def de la CV en proba, exemple, def de la distance qui métrise la CV en proba, prop qui va avec, stabilité de la CV en proba par fct° continue, critère de Cauchy, rq : cela signifie que l'espace est complet pour la mesure définie et l'utilité

3) Convergence dans L^p

→ contre exc de la réciproque dans Hauchecorne

Barbe : def de la CV L^p, CV $L^q \Rightarrow$ CV L^p si $1 \leq p \leq q$, rq : on verra les liens avec la CV, mais pas de lien avec la CV PS, contre exc dans un sens (PS $\not\Rightarrow L^p$)

Hauchecorne : contre-exc dans l'autre sens ($L^p \not\Rightarrow$ PS)

4) Convergence en loi

Barbe : def de la CV en loi, équivalence avec la CV des fct° de répartition

ZQ + Bernis : $\boxed{\text{thm de Lévy}}$ (dev 2, 1ère partie)

Garet : lemme de Scheffé, exc des VA discrètes, exc de CV de binomiale et d'hypergéométrique.

Hauchecorne : contre exc de la réciproque de Scheffé

II - Liens entre les différentes convergences

1) Implications directes

Appel : schéma en annexe.

Barbe : CV PS $\Rightarrow$ CV $\mathbb{P}$, contre exc de la réciproque, CV $L^p \Rightarrow$ CV $\mathbb{P}$, contre exc de la réciproque, CV $\mathbb{P} \Rightarrow$ CV $\mathcal{L}$ (et a fortiori CV PS $\Rightarrow$ CV $\mathcal{L}$) contre exc

2) Réciproques sous conditions

Barbe : sous suite d'une suite qui CV $\mathbb{P} \Rightarrow$ CV PS, def de suite unif intégrable, prop équivalente, thm de Vitali, corollaire, $(\xrightarrow{\mathcal{L}} c) \Rightarrow (\xrightarrow{\mathbb{P}} c)$

Barbe : lemme de Slutsky, rq : très utile en stats

III - Théorèmes limites et applications

1) Théorèmes limites

→ contre ex : loi de Cauchy

Barbe : loi faible des grands nombres, loi forte des grands nombres

Toulouse : application : méthode de Monte-Carlo

Chabanol : ex de la fct° de répartit° empirique qui CVPS, rq : on a ⊕ grâce à Glivenko-Cantelli

ZQ + Bernis : $\boxed{\text{TCL}}$ (dev 2, 2ème partie)

Barbe : exemple (historique)

2) Applications en statistiques

Chabanol : def d'un estimateur consistant, fortement consistant, sans biais, estimateurs de moyenne, de variance, rq sur méthode des moments en général, def d'une région de confiance (asymptotique), ex pour la moyenne si σ est connue, si σ est inconnue grâce à Slutsky

---

Refs : Barbe : Probabilité, Barbe & Ledoux

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 dev, Bernis & Bernis

Garet : De l'intégrat° aux proba, Garet & Kurtzmann

Hauchecorne : Les contre-exemples en maths, Hauchecorne

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Appel : Probas pour les non probabilistes, Appel

Toulouse : Thèmes de proba et stat, Toulouse

Chabanol : Proba et stats (...), Chabanol & Ruch

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

I - Généralités

1) Définitions

Appel : def d'une VA discrète, exemple du pile ou face, du dé, caractérisat° de la loi par les probas atomiques ($\mathbb{P}_X = \sum \mathbb{P}(X = x_k)\,\delta_{x_k}$), exemple du dé

Gourdon : rq sur espace Ω pas nécessairement dénombrable, avec contre exemple

2) Lois usuelles

Appel + Gourdon : def loi uniforme, exemple, def Bernoulli, exemple, rq sur Rademacher, def binomiale, exemple, def géométrique, exemple, prop sans mémoire, rq sur nbr d'échecs, def Poisson, exemple, def hypergéométrique, exemple, rq formule de Vandermonde.

3) Indépendance et sommes de variables aléatoires

Appel : def de l'indépendance, de la mutuelle indépendance, lemme de coalit° ; formule de convolut° pour la somme, exemple $\mathcal{B}(n,p) = \sum_{n} b(p)$, stabilité de la loi binomiale et de Poisson

II - Moments et fonction génératrice

1) Espérance et moments

Appel : def de l'espérance, rq sur l'importance de la CV absolue, exemples sur les lois usuelles, linéarité de l'espérance, formules de transfert, exemple, def des moments, de la variance, exemple sur les lois usuelles, König-Huygens et prop de la variance, inégalité de Markov, inégalité de Tchebychev, Chabanol : applicat : intervalle de confiance pour le p d'une Bernoulli

ZQ : $\boxed{\text{Thm de Weierstrass par les polynômes de Bernstein}}$ (en mettant Kintchine en avant), corollaire : densité de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

Bonus : $\boxed{\text{Inégalité de Hoeffding et applicat° à un intervalle de conf}}$
rq : comparaison avec Tchebychev, améliorat° possible avec la version plus précise de Hoeffding (cf Caabre & Fromont)

2) Fonction génératrice

Appel : def de la fct° génératrice, propriétés dont caractérise la loi, récupération des moments, exemple sur les lois usuelles, lien avec l'indépendance → Gourdon : application aux dés pipés

III - Théorèmes limites

1) Convergence en loi pour les variables discrètes

Garet : déf CV en loi, corollaire de Scheffé pour la CV des VA discrètes, application à la CV de binom vers Poisson

Ouvrard 1 : explicat° pratique et exemple

Garet : autre applicat° à la CV d'une hypergéom vers une binom

2) Théorèmes plus généraux

Barbe : loi des grands nombres, ex d'une Bernoulli, estim fortement consistant de p, TCL, exemple de la Bernoulli, Jcq intervalle de conf asymptotique.

Refs : Appel : Proba pour les non-probabilistes, Appel

Gourdon : Algèbre, Probabilités, Gourdon

Chabanol : Proba & stats, Chabanol & Ruch

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec

Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 devs, Bernis

Cadre & Froment : Stats maths, Cadre & Vial

Garet : De l'intégration aux proba, Garet & Kurtzmann

Ouvrard 1 : Probabilités 1, Ouvrard

Barbe : Probabilité, Barbe & Ledoux

266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités

I - Notions d'indépendance

1) Indépendance d'évènements

Ouvrard 1 + Barbe : def d'évènements indépendants, exemple, def de mutuellement indépendants, mutuellement $\Rightarrow$ 2 à 2, réciproque fausse, exemple.
Appel : A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, prop sur les complémentaires
Barbe : def de tribus indé

2) Indépendance de variables aléatoires

Ouvrard 1 + Barbe : def de variables aléatoires indépendantes, exemples, caractérisation avec $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$
Appel : indépendance des images et lemme des coalitions

II - Caractérisations et conséquences de l'indépendance

1) Critères d'indépendance

Ouvrard 2 : critère d'indépendance avec produit d'espérances, csq sur caractérisat° dans le cas à densité, dans le cas discret, avec la fdr
Barbe : critère avec la f.c.

2) Conséquences de l'indépendance

Barbe (+ Ouvrard 2) : indépendance $\Rightarrow$ non corrélat°, contre-ex à la réciproque
exemple pour la LGN faible
formule de convolut° cas discret, ex : $\mathcal{B}(n,p) = \sum b(p)$,
Appel : formule de stabilité de la Poisson, de la binomiale, fct° génératrice, formule de convolut° cas à densité, exemple de la loi normale, csq : Si $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ utile pour les intervalles de conf en stats.

3) Vecteurs gaussiens

Barbe : def d'un vecteur gaussien, de sa moyenne et sa matrice de cov, contre ex avec seulement marginales gaussiennes
Appel : f et φ, équivalence indépendance et décorrélation, applicat° : thm de Cochran, rq sur utilité en stats

III - Indépendance et théorèmes limites

1) Loi du 0-1 et lemme de Borel Cantelli

Barbe : loi du 0-1 de Kolmogorov, ex dans le cas de la lim sup, lemme de Borel-Cantelli, exemple avec la pièce, corollaire avec la CV PS, exemple.

Bernis : Inégalité de Hoeffding et application à la CV PS,
rq sur utile car ne nécessite pas des VA i.d.

2) Théorèmes limites classiques

Barbe : LfGN, LFGN, appli : estim fortement consistant de μ (Chabanol)
ZQ + Bernis : Thm de Lévy + TCL, appli : exemple d'intervalle de conf asymptotique pour μ (Chabanol).

Refs : Ouvrard 1 : Probabilités 1, Ouvrard
Ouvrard 2 : Probabilités 2, Ouvrard
Barbe : Probabilité, Barbe & Ledoux
Appel : Proba pour les non probabilistes, Appel
Bernis : Analyse pour l'agreg : 40 devs, Bernis & Bernis
ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec
Chabanol : Proba & stats, Chabanol & Ruch.