Théorème d'Ascoli

↳ Refs : Bernis & Bernis p23-26 + poly de Karine

Théorème : (Ascoli) Soit (K, d_K) un espace métrique compact, (Y, d_Y) un espace métrique complet et A une partie de $(\mathcal{C}^0(K,Y), d_\infty)$. Alors il y a équivalence entre :

1) A est d'adhérence compact dans $(\mathcal{C}^0(K,Y), d_\infty)$

2) A est équicontinue ie $\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in K, d_K(x,y) < \delta \Rightarrow \forall f \in A, d_Y(f(x), f(y))$ et pour tout $x \in K$, $A(x)$ est d'adhérence compacte dans Y.
$\{f(x), f \in A\}$

Preuve du théorème : Montrons tout d'abord $2) \Rightarrow 1)$. Supposons 2)

* Tout d'abord, montrons que K est séparable : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on peut extraire du recouvrement $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{n})$ un sous recouvrement fini de K, donc il existe une famille $(x_{n,k})_{1 \leq k \leq K_n}$ avec $K_n < +\infty$ telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{K_n} B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$. Alors $D = \{x_{n,k}, k \in [\![1, K_n]\!], n \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable et dense dans K. On notera par la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite dense

* Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A. Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente dans $(\mathcal{C}^0(K,Y), d_\infty)$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_n(y_k))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\overline{A(y_k)}$ qui est compact dans (Y, d_Y). Ainsi par le procédé d'extraction diagonale, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_{\varphi(n)}(y_k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (Y, d_Y).
Grâce à cette convergence simple sur D et à l'équicontinuité de A, nous allons montrer que $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0(K,Y), d_\infty)$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue sur le compact K, elle est uniformément équicontinue (A). Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in K^2, d_K(x,y) < \delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon$.

• Par densité de $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans K, on a $K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(y_k, \delta)$. Or K est compact donc on peut extraire un recouvrement fini : il existe donc $z_1, \ldots, z_N$ dans $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, \delta)$.

• Soit $i \in [\![1, N]\!]$. La suite $(f_{\varphi(n)}(z_i))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc elle est de Cauchy. Il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_i$, on ait $d_Y(f_{\varphi(n)}(z_i), f_{\varphi(m)}(z_i)) \leq \varepsilon$. On définit $n_{max} = \max\{n_i, i \in [\![1, N]\!]\}$.

Soit $x \in K$. Soit $i_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que $x \in B(z_{i_0}, \delta)$. Alors pour tout $n, m \geq n_{max}$, on a par inégalité triangulaire :

$$d_Y(f_{\varphi(m)}(x), f_{\varphi(n)}(x)) \leq d_Y(f_{\varphi(m)}(x), f_{\varphi(m)}(z_{i_0})) \leq \varepsilon \text{ (équicontinuité unif.)}$$
$$+ d_Y(f_{\varphi(m)}(z_{i_0}), f_{\varphi(n)}(z_{i_0})) \leq \varepsilon \text{ (Cauchy)}$$
$$+ d_Y(f_{\varphi(n)}(z_{i_0}), f_{\varphi(n)}(x)) \leq \varepsilon \text{ (équicontinuité unif.)}$$
$$\leq 3\varepsilon.$$

Le n_{max} étant indépendant de x, il est possible de passer à la borne supérieure. Ainsi, pour tout $n, m \geq n_{max}$, on a $d_\infty(f_{\varphi(m)}, f_{\varphi(n)}) \leq 3\varepsilon$. Donc la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0(K,Y), d_\infty)$, qui est un espace complet car Y l'est, donc elle converge dans $(\mathcal{C}^0(K,Y), d_\infty)$. Cela conclut le premier sens.

Montrons maintenant $1) \Rightarrow 2)$. Supposons 1) ie A est d'adhérence compacte.

- Soit $x \in K$. Montrons que $\overline{A(x)}$ est compact. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A(x)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists f_n \in A, y_n = f_n(x)$. Or A est d'adhérence compacte donc il existe φ une extractrice φ telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{C}^0(K,Y), d_\infty)$. En particulier, $(y_{\varphi(n)} = f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.

- Montrons que A est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\overline{A}$ est compacte, il existe, par la propriété de Borel-Lebesgue, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $f_1, \dots, f_{N_\varepsilon} \in \overline{A}$ tels que $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(f_i, \varepsilon)$.

Soit $i \in [\![1, N_\varepsilon]\!]$. Puisque f_i est continue sur le compact K, d'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Donc il existe $\delta_i > 0$ tel que $\forall (x,y) \in K^2, d_K(x,y) \leq \delta_i \Rightarrow d_Y(f_i(x), f_i(y)) \leq \varepsilon$.
Posons $\delta = \min\{\delta_i, i \in [\![1, N_\varepsilon]\!]\}$.

Soit $(x,y) \in K^2$ tels que $d_K(x,y) < \delta$. Soit $f \in A$, et soit $i_0 \in [\![1, N_\varepsilon]\!]$ tel que $f \in B(f_{i_0}, \varepsilon)$. Alors par inégalité triangulaire, on a

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \underbrace{d_Y(f(x), f_{i_0}(x))}_{\leq \varepsilon \text{ car } f \in B(f_{i_0}, \varepsilon)} + \underbrace{d_Y(f_{i_0}(x), f_{i_0}(y))}_{\leq \varepsilon \text{ car } d_K(x,y) \leq \delta} + \underbrace{d_Y(f_{i_0}(y), f(y))}_{\leq \varepsilon \text{ car } f \in B(f_{i_0}, \varepsilon)}$$
$$\leq 3\varepsilon \text{ (δ indépendant de f car indépendant de i)}$$

Ainsi A est équicontinue, ce qui conclut le deuxième sens

(*) Bonus : Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue.
Soit $\varepsilon>0$. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, pour tout $x\in K$, il existe $\delta_x>0$ tel que
$\forall y\in K$, $d_K(x,y)\leq\delta_x \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$, $d_Y(f_n(x),f_n(y))\leq\varepsilon$.
On peut alors extraire du recouvrement $K\subset\bigcup_{x\in K}B(x,\frac{\delta_x}{2})$ un sous recouvrement fini : il existe $N\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots x_N$ dans K tels que $K\subset\bigcup_{i=1}^{N}B(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2})$. On définit $\delta=\min\{\delta_{x_i}, i\in[\![1,N]\!]\}$.
Soit $(x,y)\in K^2$ tel que $d_K(x,y)\leq\frac{\delta}{2}$ et soit $i_0\in[\![1,N]\!]$ tel que $x\in B(x_{i_0},\frac{\delta_{x_{i_0}}}{2})$. On a alors par inégalité triangulaire :
$d_K(x_{i_0},y)\leq d_K(x_{i_0},x)+d_K(x,y)\leq\frac{\delta_{x_{i_0}}}{2}+\frac{\delta}{2}\leq\delta$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a également par inégalité triangulaire :
$d_Y(f_n(x),f_n(y))\leq d_Y(f_n(x),f_n(x_{i_0}))+d_Y(f_n(x_{i_0}),f_n(y))\leq 2\varepsilon$.
Donc la suite est uniformément équicontinue.
(Théorème de Heine, cas équicontinu, même idée de preuve que le théorème de Heine classique).

Avant de commencer les remarques, quelques rappels :
(*) $\overline{A}$ est compact dans (E,d) $\Leftrightarrow$ de toute suite de A, on peut extraire une sous suite qui converge dans (E,d)
on dit alors que A est relativement compact
(mais on ne va pas utiliser ce terme parce que ça ne sert à rien, et que ça peut être confondu avec "précompact" $=\forall\varepsilon>0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon ε, et on a des équivalences comme précompact + complet $\Leftrightarrow$ compact, ou encore dans un complet, RC $\Leftrightarrow$ PC)
Revenons-en à nos moutons : preuve de l'équivalence.
"$\Rightarrow$" ok car $A\subset\overline{A}$ compact
"$\Leftarrow$" Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\overline{A}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists y_n\in A$, $d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$.
Par hypothèse, il existe $x\in E$ et φ extractrice tels que $d(x,y_{\varphi(n)})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$
Alors $x\in\overline{A}$ comme limite d'une suite de A, et par inégalité triangulaire
$d(x,x_{\varphi(n)})\leq d(x,y_{\varphi(n)})+d(y_{\varphi(n)},x_{\varphi(n)})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et c'est gagné !

(*) Dans un EVN de dimension finie, $\overline{A}$ compact $\Leftrightarrow$ A borné.
Preuve : $\overline{A}$ compact $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ fermé borné $\Leftrightarrow$ A borné
En particulier, dans 2), $\overline{A(x)}$ compacte $\Leftrightarrow$ $\overline{A(x)}$ borné si Y evn de dim finie

(*) Pour le procédé d'extraction diagonale :

- $(f_n(y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A(y_0)$ d'adhérence compact, donc il existe φ_0 telle que $(f_{\varphi_0(n)}(y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- récursivement, si on a construit $\varphi_0, \dots, \varphi_k$ telles que pour tout $p\in[\![0,k]\!]$, $(f_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_k(n)}(y_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(f_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_k(n)}(y_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $A(y_{k+1})$ d'adhérence compacte donc il existe φ_{k+1} telle que $(f_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_{k+1}(n)}(y_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (et $\forall p\in[\![0,k]\!]$, $(f_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_{k+1}(n)}(y_p))_{n\in\mathbb{N}}$ CV en tant que sous suite d'une suite CV). On définit alors $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n\mapsto\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(n)$, l'extraction et $\forall k\in\mathbb{N}$, $(f_{\varphi(n)}(y_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (car $(f_{\varphi(n)}(y_k))_{n\geq k}$ sous suite de $(f_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_k(n)}(y_k))_{n\in\mathbb{N}}$).

$\rhd$ moyen simple de vérifier les hyp : équicontinue + bornée

<u>Remarques</u> : * Voici un exemple d'ensemble vérifiant les hypothèses : soit $M>0$, $\alpha\in\,]0,1]$, alors $\{f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty\leq 1 \text{ et } \forall x,y\in[0,1],\ |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^\alpha\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

* Contre exemple sans compacité au départ : la bosse glissante. Soit $f\in\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non nulle. Alors la suite $(\tau_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et bornée dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais elle n'admet pas de sous suite convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$.

* En fait, on n'a même pas besoin de supposer Y complet pour avoir le résultat (ni même K métrique, seulement compact) : 1) ⇒ 2) se fait pareil, et pour 2) ⇒ 1) c'est globalement la même chose, on se sert, pour remplacer l'utilisation de la complétude de $\mathcal{C}^0(K,Y)$, de la complétude des $\overline{A(x)}$ (complets car compacts).

* Différentes applications du théorème d'Ascoli :
  - <u>le théorème de Montel</u> : $\Omega\subset\mathbb{C}$ ouvert, $A\subset\mathcal{H}(\Omega)$, alors on a équivalence entre A est bornée sur tout compact de Ω et A est relativement compact (pour la topologie de la CVU sur tout compact !)
  - <u>le théorème de Cauchy-Peano</u> : existence d'une solution à $\begin{cases}x'=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ où f est seulement continue (par ex en régularisant f par convolut° ⇒ f_n et prendre les solut° x_n associées (Cauchy-Lipschitz) puis en extrayant grâce à Ascoli OU en trouvant des solut° approchées (par la méthode d'Euler) et de nouveau en extrayant),
    (contre ex unicité : $\begin{cases}x'=3x^{2/3}\\ x(0)=0\end{cases}$ $\rhd$ $x\equiv 0$ ou $x(t)=0$ si $t\leq 0$ et t^3 si $t\geq 0$)
  - <u>le théorème de Fréchet Kolmogorov</u> : pour trouver les parties RC des L^p, $p\geq 1$
  - montrer que des <u>opérateurs sont compacts</u> = envoie les parties bornées sur les parties relativement compactes