Décomposition de JDC et exponentielle de matrices

↳ Réf : Gourdon (dém), Algèbre p194 + Rombaldi (application) p634.

Théorème : (Décomposition de JDC) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de polynôme caractéristique χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que 1) d est diagonalisable et n nilpotent 2) $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Application : On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u = d + n$ est la décomposition de DJC de u, alors celle de e^u est donnée par $e^u = e^d + e^d(e^n - \mathrm{Id})$ avec e^d diagonalisable et $e^d(e^n - \mathrm{Id})$ nilpotent.

Corollaire : u est diagonalisable ssi e^u est diagonalisable.

Preuve du théorème : Posons $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $M_i := (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $N_i := \mathrm{Ker}(M_i(u)) = \mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{Id})^{\alpha_i})$. Nous allons tout d'abord montrer le lemme des noyaux dans notre cas, en mettant l'accent sur les projecteurs qui nous seront utiles pour la suite.

Lemme : On a la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et le projecteur p_i sur N_i est un polynôme en u.

Preuve du lemme : On définit pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $Q_i = \frac{\chi_u}{M_i} = \prod_{j \neq i} M_j$.
Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i donc les Q_i sont premiers entre eux. Ainsi d'après le théorème de Bézout, il existe $U_1, \dots, U_r$ dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $U_1 Q_1 + \dots + U_r Q_r = 1$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on définit $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u)$. Alors (*) $\sum_{i=1}^{r} P_i$ et pour tout $j \neq i$, χ_u divise $Q_i Q_j$ donc par Cayley-Hamilton, donc
(**) $p_i \circ p_j = \underbrace{Q_i Q_j (u)}_{=0} \circ U_i U_j(u) = 0$. Ainsi pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $p_i = \sum_{j=1}^{r} p_i \circ p_j$ donc $p_i = p_i^2$. Ainsi les p_i sont des projecteurs.
De plus, les $\mathrm{Im}(p_i)$ sont en somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(p_i)$ d'après (*) et (**). ((*) nous donne $E = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(p_i)$, et si $x_1 + \dots + x_r = 0$ où $x_i \in \mathrm{Im}(p_i)$, on applique p_i à l'égalité et on obtient $x_i = 0$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$). Il reste donc à montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$. Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
▶ $\boxed{\subset}$ Soit $y = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$, alors $M_i(u)(y) = \underbrace{M_i Q_i}_{\chi_u(u)} U_i(u)(x) = 0$ par Cayley Hamilton. Donc $y \in N_i$.

▶ $\boxed{\supset}$ Soit $x \in N_i$, alors d'après ⊛, $x = \sum_{j=1}^{r} p_j(x)$, et pour $j \neq i$, $p_j(x) = U_j Q_j(u)(x) = 0$ car $M_i | Q_j$, donc $x = p_i(x) \in Im(p_i)$.
Cela conclut car les p_i sont des polynômes en u par construction.

Retour au théorème : Existence : Reprenons les notations précédentes, et posons $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. Dans une base adaptée à la décomposit° $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ la matrice de d est diagonale, ainsi d est diagonalisable. Reste à poser $n = u - d = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i Id) \circ p_i$ et vérifier qu'il est nilpotent.

En utilisant le fait que $p_i^2 = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ $\forall i \neq j$, et le fait que p_i commute avec u (car polynôme en u), on obtient par récurrence sur k : $n^k = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i Id)^k \circ p_i$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi en prenant $k = \sup(\alpha_i)$, $n^k = 0$ donc n est nilpotent.
Ainsi construits, d et n sont des polynômes en u vérifiant 1) et 2).

Unicité : Soit (d', n') un autre couple vérifiant 1) et 2). Les endomorphismes d' et n' commutent avec $u = d' + n'$ et donc avec d et n qui sont des polynômes en u. On a $d - d' = n' - n$, avec $d - d'$ diagonalisable car d et d' commutent et sont diagonalisables (donc codiagonalisables), et $n' - n$ est nilpotent car n et n' commutent (on utilisant le binôme de Newton à la puissance égale à la somme des indices de nilpotence). Or un endo diagonalisable et nilpotent est nul donc $d = d'$ et $n = n'$.

On se place sur $\mathbb{C}$, χ_u scindé donc la déc existe !!

Preuve de l'application : Comme d et n commutent, on a $e^u = e^d e^n$, avec $e^n = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} n^k$ où $q \geq 1$ est l'indice de nilpotence de n

$$\text{Donc } e^u = e^d \times \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} n^k = e^d \left(Id + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} n^k \right)$$

$$= e^d + e^d \underbrace{\sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} n^k}_{=: v}$$

(v et e^d commutent puisque v et d commutent)

$$= e^d + e^d v$$

L'endomorphisme v est nilpotent en tant que somme de nilpotents qui commutent donc $e^d v$ l'est ($(e^d v)^q = (e^d)^q v^q = 0$) L'endomorphisme e^d est diagonalisable puisque d l'est ($D = PAP^{-1}$, $e^D = Pe^A P^{-1}$) ⊛ On a ainsi obtenu la décomposit° de DJC de e^u puisque celle ci est unique, et $e^u = e^d + e^d (\underbrace{e^n - Id}_{v})$.

Preuve du corollaire : Remarque préalable : si $u = n + d$ est la décomposition de Dunford de u, u est diagonalisable ssi $n = 0$.
Tout d'abord, si l'on suppose $u = d$ diagonalisable, e^u l'est aussi (même argument que ⊛)

Réciproquement, dire que e^u est diagonalisable équivaut à dire que $e^d(e^n - Id) = 0$ ie $e^n = Id$ puisque e^d est inversible. On a donc $\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} n^k = Id$, où q est l'indice de nilpotence de n, soit $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} n^k = 0$, ie $P = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} X^k$ est un polynôme annulateur de n, et X^q qui est le polynôme minimal de n va diviser P, ce qui impose $q = 1$ ie $n = 0$ donc u est diagonalisable.

<u>Remarques</u> : * Attention à l'unicité : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais pas de commutativité, sa décomposition est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

* Faux sur $\mathbb{R}$ si le polynôme χ_u n'est pas scindé !

ex : $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ alors $e^A = I_2$ diag mais A non diag sur $\mathbb{R}$!

* $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$ Réciproque fausse !!

* Méthode effective pour calculer la déc de DJC : (en car 0)

On pose $P = \chi_A / \mathrm{pgcd}(\chi_A, \chi_A')$ → idée : résoudre $P(M) = 0$ dans $\mathbb{K}[A]$ en utilisant la méthode de Newton et alors M = partie diag de la déc !

on montre par rec que c'est inv.

→ $\begin{cases} M_0 = A \\ M_{k+1} = M_k - P'(M_k)^{-1} P(M_k) \end{cases}$ → CV de façon exacte (suite stationnaire).

(ou calculer $d = \sum \lambda_i p_i$, si $\frac{1}{\chi_u} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{x_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}$ → $U_i = \sum_{j=1}^{d_i} x_{i,j} (X - \lambda_i)^{d_i - j}$

et alors $\frac{1}{\chi_u} = \sum_{i=1}^{r} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$ ie $1 = \sum_{i=1}^{r} U_i Q_i$ où $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$.

→ $p_i = P_i(f)$ où $P_i = U_i Q_i$

→ on peut aussi faire la m chose avec Π_f).