Formule d'Euler - Maclaurin et applicat° à la série harmonique

↳ Refs : Gourdon p321-322 (+ Candel p64-76, Demailly p77-83 pour applis et rq culturelles)

Rappel : Il existe une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ B_n' = nB_{n-1} \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^1 B_n(t)dt = 0 \end{cases}$. On les appelle polynômes de Bernoulli et on note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$ les nombres de Bernoulli.

De plus, on va noter par la suite, pour $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{B}_n$ la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui coïncident avec B_n sur $[0,1[$.

Théorème : (formule d'Euler Maclaurin) Soient $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $m<n$, $r\in\mathbb{N}^*$ et $f:[m,n]\to\mathbb{C}$ de classe C^r. Alors

somme nulle si $r=1$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \underbrace{\sum_{k=2}^{r}\frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(m)\right)} + R_r$$

seuls les termes pairs sont présents en fait ! ($b_{2k+1}=0$, $k\geq 1$)

où $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)dt$

Application : (série harmonique) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. On a alors

de même ici

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{r}\frac{b_k}{k}\frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Preuve du théorème : Nous allons procéder par récurrence sur $r\in\mathbb{N}^*$. On note pour $r\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(r)$: "la formule est vraie pour toute fonction $f:[m,n]\to\mathbb{C}$ de classe C^r".

Initialisation : Soit $f:[m,n]\to\mathbb{C}$ une fonction de classe C^1.

Montrons que $R_1 = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(t)dt - \frac{1}{2}(f(m)+f(n))$.

On a $R_1 = \int_m^n \tilde{B}_1(t) f'(t)dt$. Or sur $B_1(x) = x-\frac{1}{2}$ sur $[0,1[$, donc pour tout $k\in[\![m,n-1]\!]$, une intégrat° par partie donne : (les fct° considérées étant bien de classe C^1 sur $[k,k+1[$)

$$\int_k^{k+1}\tilde{B}_1(t)f'(t)dt = [\tilde{B}_1(t)f(t)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)dt$$

Donc en sommant cette relat°, on obtient bien, grâce à la relat° de Chasles :

$R_1 = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) - \int_m^n f(t)dt$, d'où le résultat pour $r=1$.

<u>Hérédité</u> : Soit $r \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(r-1)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(r)$.
Soit $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^r. On a, par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\big(f(m)+f(n)\big) + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{b_k}{k!}\big(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(m)\big) + R_{r-1}$$

Il suffit donc de montrer que $R_{r-1} = \frac{b_r}{r!}\big(f^{(r-1)}(n)-f^{(r-1)}(m)\big) + R_r$.
Soit $k \in [\![m, n-1]\!]$. On réalise de nouveau une intégrat° par parties, les fonctions considérées étant toutes de classe C^1 sur $]k, k+1[$, avec avec sur cet intervalle $\tilde{B}_r' = r\tilde{B}_{r-1}$, et $\tilde{B}_r$ est C^0 sur $[k, k+1]$, avec $\tilde{B}_r(k+1) = \tilde{B}_r(k) = B_r(0) = B_r(1) = b_r$. Ainsi :

$$\frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_k^{k+1} \tilde{B}_{r-1}(t) f^{(r-1)}(t)\,dt = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left(\left[\frac{\tilde{B}_r(t)}{r} f^{(r-1)}(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \frac{\tilde{B}_r(t)}{r} f^{(r)}(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{(-1)^r b_r}{r!}\big(f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)\big) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_k^{k+1} \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,dt$$

Ainsi en sommant, de nouveau par relat° de Chasles, on obtient :

$$R_1 = \frac{(-1)^r b_r}{r!}\underbrace{\sum_{k=m}^{n-1}\big(f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)\big)}_{\text{somme télescopique}} + \underbrace{\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,dt}_{=R_r}$$

d'où $R_1 = \underbrace{\frac{(-1)^r b_r}{r!}}_{=\frac{b_r}{r!}}\big(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)\big) + R_r$ car $b_r = 0$ si r impair.

Cela conclut l'hérédité.
Ainsi, par récurrence, la formule est vérifiée pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

<u>Preuve de l'application</u> : Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on applique la formule du théorème à $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1,n]$. Or pour $k \in [\![1, r]\!]$, on a $f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^k k!}{t^{k+1}}$, ainsi :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \times \overbrace{(-1)^{k-1}}^{=-1 \text{ car } b_k=0 \text{ si } k \text{ impair}}\left(\frac{1}{n^k} - 1\right)$$

$$+ \underbrace{\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_1^n \tilde{B}_r(t) \frac{(-1)^r r!}{t^{r+1}}\,dt}_{= -\int_1^n \tilde{B}_r(t)\frac{dt}{t^{r+1}}}$$

D'où $H_n = \log(n) + \underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} - \int_1^{+\infty} \widetilde{B_r}(t)\frac{dt}{t^{r+1}}}_{=\gamma_r \text{ (indépendant de } n)} + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \times \frac{1}{n^k} + \varepsilon_r(n)$

où $\varepsilon_r(n) = \int_n^{+\infty} \widetilde{B_r} \frac{dt}{t^{r+1}}$ vérifie $|\varepsilon_r(n)| \leq M \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{r+1}} = \frac{M}{r n^r} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

$\widetilde{B_r}$ bornée car B_r bornée sur $[0,1]$

Ainsi $H_n = \log n + \gamma_r + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \times \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, et γ_r est indépendant de r par unicité de la limite car $\gamma_r = \lim_{n \to +\infty} H_n - \log n = \gamma$.

D'où $\boxed{H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \times \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)}$

Bonus : Idées derrière le rappel : Construire les $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est facile :

$B_0 = 1$, $B_1 = X + C_1 \Rightarrow C_1$ est déterminé par $\int_0^1 B_1(x)dx = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$

$B_2 = X^2 - X + C_2 \Rightarrow C_2$ est déterminé par $\int_0^1 B_2(x)dx = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{6}$ etc etc

Et ensuite idée derrière la formule :

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)B_0(x)\,dx = [f(x)B_1(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx$, et on itère ça en se servant de $B_n' = nB_{n-1}$ et $B_n(0) = B_n(1), \forall n \geq 2$.

$\Leftrightarrow \left(B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 nB_{n-1}(t)dt = 0\right)$

⊕ Pourquoi $b_{2k+1} = 0$ si $k \geq 1$?

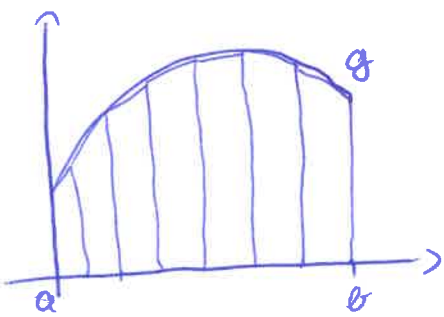
$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ (vérifie les mêmes propriétés donc ok par unicité)

et alors pour $k \geq 1$, $B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0)$ et $B_{2k+1}(1) = (-1)^{2k+1}B_{2k+1}(0) = -B_{2k+1}(0)$

d'où $B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0$.

Remarques : * On peut montrer que pour f quelconque infiniment dérivable sur $[1, +\infty[$, la constante $C = \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!} f^{(k-1)}(1) + (-1)^{r+1}\int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B_r}(t)}{r!} f^{(r)}(t)dt$ est indépendante de r (elle est appelée constante de Ramanujan).

* On peut aussi se servir de la formule pour étudier l'asymptotique de la méthode des trapèzes : on pose $f(x) = g(a + xh)$ sur $[0, N]$ où $h = \frac{b-a}{N}$, et on obtient la différence entre



$\int_a^b g(t)dt$ et $T_h(g) = h\left(\frac{g(a)}{2} + g(a+h) + \cdots + g(a+(N-1)h) + \frac{g(b)}{2}\right)$

(et ça peut permettre de raffiner la méthode !

* On peut aussi se servir de la formule pour étendre ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$!

* On peut également s'en servir pour préciser la formule de Stirling en étudiant la formule pour $f = \log$.

* Pour retrouver l'équivalent le plus simple de H_n, une comparaison série-intégrale suffit :

On pose pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$

$$a_n = \frac{1}{n} - \left[\ln(t)\right]_{n-1}^{n} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et par télescopage, $\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

$$= H_n - 1 - \ln(n)$$

Par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$; convergente, on en déduit que : $H_n = \ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = \underbrace{\ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k}_{= \gamma} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$

* Le calcul des premiers nombres de Bernoulli ($b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, $b_5 = 0$, $b_6 = \frac{1}{42}$, $b_7 = 0$, $b_8 = -\frac{1}{30}$, $b_9 = 0$, $b_{10} = \frac{5}{66}$), on obtient

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} - \frac{1}{132n^{10}} + O\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$$

* On peut définir les nombres de Bernoulli de manières différentes, comme les nombres tels que $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$, ou comme les nombres tels que $\sum_{k=0}^{m-1} k^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} \frac{b_k}{p+1} m^{p+1-k}$.

Pour montrer l'équivalence des définitions, il faut mtq les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient dans chaque cas la relat° $\left[b_0 = 1 \text{ et pour } n \geq 1,\ b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k\right]$

Pour la 1ère def $\Rightarrow$ produit de Cauchy, pour la deuxième def $\Rightarrow$ beaucoup de calculs et pour notre def :

Puisque $B_n' = n B_{n-1}$, $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$, donc $B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Formule de Taylor : $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{n!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

Donc pour $n \geq 2$, $\underset{\substack{\parallel \\ b_n}}{B_n(0)} = B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$, d'où $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$

d'où $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$ et ainsi $b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$.