Injectivité de la transformée de Fourier

↳ Réf : El Amrani, p156-157 (lemme) et p115-116 (thm)

Pour f dans $L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par : $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$. On sait que l'application $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$ est bien définie, linéaire et continue.

Lemme : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout ξ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$
ie si l'on note $\gamma_a : t \mapsto e^{-at^2}$, alors $\hat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \gamma_{\frac{1}{4a}}(\xi)$ pour tout ξ dans $\mathbb{R}$.

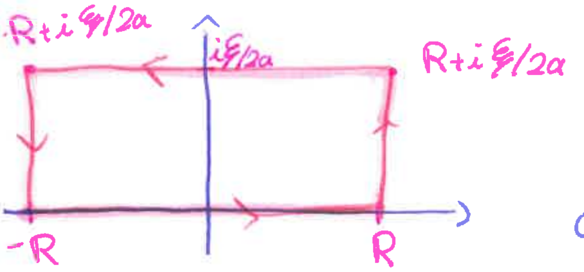
Théorème : L'application $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$ est injective.

Preuve du lemme : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\gamma_a : x \mapsto e^{-ax^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, elle admet donc une transformée de Fourier. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a donc $\hat{\gamma_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ix\xi} dx$. Or en mettant sous forme canonique, on a, pour $\xi \in \mathbb{R}$, $ax^2 + ix\xi = a\left(x^2 + i\frac{x\xi}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)$.

Ainsi pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\hat{\gamma_a}(\xi) = e^{-\xi^2/4a} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2} dx}_{I}$.

Calculons maintenant I grâce au théorème de Cauchy.

On considère la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \\ z \mapsto e^{az^2} \end{array}$. Soit $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. On considère le lacet $\Gamma(R)$ défini par le rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + i\frac{\xi}{2a}$ parcouru en sens direct :



Puisque f est holomorphe ($\subset$ composée de fct° holomorphes) sur $\mathbb{C}$, et que le lacet $\Gamma(R)$ est fermé, d'image contenue dans $\mathbb{C}$ convexe, on a d'après le théorème de Cauchy : $\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = 0$

Ainsi, en décomposant l'intégrale on obtient :

$$0 = \int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} dx + \int_0^{\xi/2a} e^{-a(R+ix)^2} dx - \int_{-R}^{R} e^{-a(x + i\xi/2a)^2} dx - \int_0^{\xi/2a} e^{-a(-R+ix)^2} dx$$

(*)

$$=: I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R).$$

Tout d'abord, on sait que $I_1(R)$ admet une limite en $[R \to +\infty]$ qui est $\lim_{R \to +\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \text{ CVAR } u = \sqrt{a}\, x\right)$

Ensuite, pour $I_2(R)$, on a, par inégalité triangulaire :

$|I_2(R)| \leq \int_0^{\xi/2a} |e^{-a(R+ix)^2}| dx$. Or $|e^{-a(R+ix)^2}| = |e^{-aR^2 - 2iaxR + ax^2}|$
$= |e^{-a(R^2-x^2)}| = e^{-a(R^2-x^2)}$

Donc $|I_2(R)| \leq \int_0^{\xi/2a} e^{-a(R^2-x^2)} dx = e^{-aR^2} \int_0^{\xi/2a} e^{ax^2} dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

Donc $\lim_{R\to+\infty} I_2(R) = 0$. De la même manière, on montre $\lim_{R\to+\infty} I_4(R) = 0$

Enfin, on a $\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx$ (intégrale absolument convergente).

Ainsi, en faisant $(R \to +\infty]$ dans (*), on obtient donc

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, d'où $\hat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/4a}$.

<u>Preuve du théorème</u> : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$. On note pour $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\chi_s : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$ le noyau de Gauss ($\chi_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \gamma_{\frac{1}{2s}}$)

et on définit $g_s : x \mapsto \chi_s(x) e^{iax}$ pour $a \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \hat{\chi}_s = \gamma_{\frac{s}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \chi_{s^{-1}}$

Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}$. On a d'après la formule de dualité :
(Fubini)

$\int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}_s(u) du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) g_s(u) du$.

Or d'une part, $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) g_s(u) du = 0$

Et d'autre part, $\int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}_s(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{\chi}_s(u-a) du$ (car $\hat{g}_s = \tau_a \hat{\chi}_s$)

$= \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{\chi}_s(a-u) du$ (car $\hat{\chi}_s$ est paire)

$= f * \hat{\chi}_s(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} f * \chi_{s^{-1}}(a)$.

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$f * \chi_{s^{-1}}(a) = 0$, donc pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, $f * \chi_{s^{-1}} = 0$.

Mais la famille $(\chi_{s^{-1}})_{s>0}$ est une approximation de l'unité,
donc $f * \chi_{s^{-1}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Ainsi, $0 = \lim_{s \to +\infty} \| f * \gamma_{s^{-1}} - f \|_1 = \lim_{s \to +\infty} \| f \|_1 = \| f \|_1$.

Donc $f = 0$ presque partout. Ainsi, puisque $\mathcal{F}$ est linéaire, on en déduit que $\mathcal{F}$ est injective.

Avant de passer aux remarques, quelques rappels sur les approximations de l'unité :

On appelle approximation de l'unité (ou unité approchée) dans $L^1(\mathbb{R})$, toute suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de fct° mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = 1$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi_n(x)\,dx = 0$

(on peut aussi indexer par $t \in \mathbb{R}_+^*$)

Exemples : Laplace $\varphi_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x|}$, Cauchy $\varphi_n(x) = \frac{n}{\pi} \times \frac{1}{1+n^2x^2}$,

Gauss $\varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2x^2}{2}}$

$\hookrightarrow$ $\varphi_n \geq 0$ et $\int \varphi_n = 1$ ok et $\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi_n(x)\,dx = 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2x^2}{2}}\,dx$ $\quad t = nx$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{2\pi} \text{ CV dom.}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Thm d'approximation : Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une approximat° de l'unité.

1) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée, alors $(f * \varphi_n)_{n \geq 1}$ CV uniformément vers f.

2) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $(f * \varphi_n)_{n \geq 1}$ CV vers f dans $L^p(\mathbb{R})$

(pour le montrer, on passe d'abord par les fct° $C_c(\mathbb{R})$ et on étend par densité)

Remarques : * la formule d'inversion permet de retrouver le résultat : si $\hat{f} = 0$, la formule nous donne $f = 0$ pp (on peut d'ailleurs obtenir la formule avec le même type d'outils : convolut°, approximat° d'unité etc + Riesz-Fischer). (*)

* L'application $\mathcal{F}$ n'est en revanche pas surjective (dur, utilise le thm d'isomorphisme de Banach), mais $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$

(en effet, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, et $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dense dans $C_0(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ également)

* Exemple d'application : les équations de convolution : par exemple résoudre $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$: pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $(x \mapsto e^{-a|x|}) \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{\xi^2 + a^2}$, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * e^{-2|x|}$ bien déf et $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|} \iff \mathcal{F}(f * e^{-2|x|}) = \mathcal{F}(e^{-3|x|})$ par injectivité, or $\mathcal{F}(f * e^{-2|x|}) = \hat{f}\,\widehat{e^{-2|x|}}$, donc $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{3}{2}\frac{\xi^2+4}{\xi^2+9}$, $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = \frac{3}{2} \neq 0$ (Riemann Lebesgue) $\to$ pas de solut° dans $L^1(\mathbb{R})$
(*)

(*) Pour χ_s, la formule (que l'on rappelle : $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, ie $\hat{\hat{f}} = 2\pi f(-\cdot)$ pp) est claire : $\hat{\chi_s} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\chi_{s^{-1}}$, donc $\hat{\hat{\chi_s}} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\hat{\chi}_{s^{-1}} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \times \sqrt{2\pi s}\,\chi_s = 2\pi\chi_s$, et ensuite si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on écrit pour $a \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{\widehat{f * \chi_s}}(-a) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f * \chi_s}(\xi) e^{ia\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{\chi_s}(\xi) e^{ia\xi} d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathcal{F}(\hat{\chi_s}(\xi) e^{ia\xi})(x) dx \quad (\text{dualité})$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{\hat{\chi_s}}(x-a) dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_s(a-x) dx$$
$$= 2\pi\, f * \chi_s(a)$$

$\to$ la formule est vraie pour $f * \chi_s$ et ensuite on s'en sert par approximation (mais + subtile, utilisat° de Riesz-Fischer pour extraire une sous suite avec CV pp etc etc).

(*) Autre exemple d'équation de convolution : $f * f = f$
Si f dans $L^1(\mathbb{R})$ vérifie ($f * f$ bien déf et dans L^1) $f * f = f$, alors $\hat{f}^2 = \hat{f}$, d'où $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi)(\hat{f}(\xi) - 1) = 0$, or $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f} = 0$ ou $\hat{f} = 1$. Comme $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, on en déduit $\hat{f} = 0$, et par injectivité $f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$, donc l'équation admet $f = 0$ comme unique solution.

(sympa pour éventuellement combler en fin de dev si je suis encore allé trop vite)