# Surjectivité de l'exponentielle matricielle

↳ Réf : 131 dev, p 178-184.

On rappelle que pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, bien définie car il s'agit d'une série normalement convergente dans $M_n(\mathbb{C})$ qui est complet. De plus, $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$ donc $e^A \in GL_n(\mathbb{C})$.

**Théorème :** L'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

**Corollaire :** On a $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\}$

**Preuve du théorème :** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Nous allons montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, ce qui permettra de conclure : si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors $A \in \mathbb{C}[A]^\times$, et donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$, ainsi $A \in \exp(M_n(\mathbb{C}))$.

Pour montrer le résultat, on va passer par plusieurs étapes :

**Étape 1 : Montrons que $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ et que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$**

Tout d'abord, l'inclusion $\mathbb{C}[A]^\times \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ est claire.

Réciproquement, si $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. On considère $\chi_M(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de $M$. Alors $\det(M) = a_0 \neq 0$ car $M \in GL_n(\mathbb{C})$. De plus le théorème de Cayley-Hamilton indique $\chi_M(M) = 0$, donc on en déduit $M\left(\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}\right) = -a_0 I_n$, ie $M^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}\right) \in \mathbb{C}[A]$ car $M \in \mathbb{C}[A]$. Ainsi $M \in \mathbb{C}[A]^\times$. On conclut donc $\boxed{\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})}$

Prenons maintenant $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Alors il existe $N \in \mathbb{C}[A]$ tel que $M = \exp(N)$. En particulier, on a directement $M \in GL_n(\mathbb{C})$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{N^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$, et $\mathbb{C}[A]$ est fermé en tant que SEV de dimension finie, donc $\exp(N) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{N^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$.

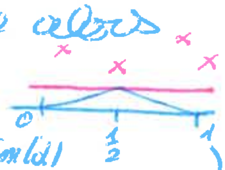
D'où $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$, donc $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times}$

**Étape 2 : Montrons que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe**

Nous allons pour cela montrer que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs. Soient $M_1$ et $M_2$ deux matrices distinctes de $\mathbb{C}[A]^\times$. On définit pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \det(z M_1 + (1-z) M_2) \in \mathbb{C}$. Alors $P$ est polynomiale en $z$, et ce polynôme est non nul car $P(0) = \det(M_2) \neq 0$, donc elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois. On note $Z$ l'ensemble de ses zéros. Alors $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs car $Z$ est fini. Il existe donc un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ reliant $0$ à $1$ en évitant les éléments de $Z$ ($0, 1 \notin Z$)

(Par exemple, on prend $\alpha \in Z$ tel que $\mathrm{Im}(\alpha)$ soit minimale non nulle (possible car $Z$ est fini), si $Z \subset \mathbb{R}$, on prend $\alpha = i$. On pose alors

$\gamma : t \mapsto \begin{cases} t + it\,\mathrm{Im}(\alpha) \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t + i(1-t)\,\mathrm{Im}(\alpha) \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$, alors $\forall t \in ]0,1[$, $0 < \mathrm{Im}(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha) < \mathrm{Im}(\alpha)$ donc $\gamma(t) \notin Z$ )



Alors le chemin continu $\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C}[A]^\times \\ t & \longmapsto & \gamma(t) M_1 + (1-\gamma(t)) M_2 \end{array}$ relie $M_1$ et $M_2$ dans $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs donc $\boxed{\mathbb{C}[A]^\times \text{ est connexe}}$

Étape 3 : Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$

Nous allons pour cela montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est voisinage de tous ses points, en commençant par $I_n$ grâce au TIL.
On considère $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]$. La différentielle de exp en $0$ est l'identité* (on le voit par exemple en regardant le développement en série entière) qui est bijective. Ainsi il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $0$ dans $\mathbb{C}[A]$ et un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $I_n$ dans $\mathbb{C}[A]$ tel que exp réalise un $C^1$-difféomorphisme entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, en particulier $\mathcal{V} = \exp(\mathcal{U}) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ contient $I_n$ (et c'est un ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$, car $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$, donc $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap \mathbb{C}[A]^\times$). * de $\mathbb{C}[A]$ dans $\mathbb{C}[A]$ pas $I_n$ !
Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Alors il existe $N \in \mathbb{C}[A]$ telle que $M = \exp(N)$.
On définit alors $\mathcal{V}_M = \{V \exp(N),\ V \in \mathcal{V}\}$. Alors $M = \exp(N) = I_n \exp(N) \in \mathcal{V}_M$, et $\forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U}$, $V = \exp(U)$, alors $V\exp(N) = \exp(U)\exp(N) = \exp(U+N)$ car $U$ et $N$ commutent en tant que polynômes en $A$, donc $V\exp(N) \in \exp(\mathbb{C}[A])$ d'où $\mathcal{V}_M \subset \exp(\mathbb{C}[A])$. Et enfin, l'application $\begin{array}{rcl} f_M : \mathbb{C}[A] & \to & \mathbb{C}[A] \\ V & \mapsto & V\exp(N) \end{array}$ est un homéomorphisme car $\exp(N) \in GL_n(\mathbb{C})$, donc en particulier une application ouverte, ainsi $f_M(\mathcal{V}) = \mathcal{V}_M$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]$ (et donc aussi dans $\mathbb{C}[A]^\times$ car $\mathcal{V}_M = \mathcal{V}_M \cap \mathbb{C}[A]^\times$).
Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ contient $\mathcal{V}_M$ ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$ qui contient $M$, et ce pour tout $M$, donc $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est ouvert dans } \mathbb{C}[A]^\times}$.

Étape 4 : Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$

Pour cela nous allons montrer $E = \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$, en montrant par double inclusion $E = \bigcup_{M \in E} M\exp(\mathbb{C}[A])$.

$\boxed{\subset}$ Si $M \in E$, $M = M\exp(0) \in \bigcup_{M \in E} M\exp(\mathbb{C}[A])$

$\boxed{\supset}$ Soient $M \in E$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $N = M\exp(P(A))$ (et alors $M = N\exp(-P(A))$). Si $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$, alors $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, ce qui est exclu car $M \in E$, donc $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ mais $N \in \mathbb{C}[A]^\times$, donc $N \in E$. D'où l'égalité des ensembles.

Or d'après l'étape 3, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$, donc pour tout $M \in E$, $M\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$ (par le même argument que (*)), donc $E$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$ en tant que réunion d'ouverts. Ainsi $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est fermé dans } \mathbb{C}[A]^\times}$.

Etape 5 : Conclusion ! :)

L'ensemble $\exp(\mathbb{C}[A])$ est non vide ($I_n = \exp(0) \in \exp(\mathbb{C}[A])$), ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$ connexe, donc $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times}$.

(Bonus) Preuve du corollaire : On veut montrer $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$. On a alors $M = \exp(B)$ pour $B \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $M = \exp(2\frac{B}{2}) = \exp(\frac{B}{2})^2$ et $\exp(\frac{B}{2})$ est inversible, donc $M$ est le carré d'une matrice inversible réelle.

$\boxed{\supset}$ Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in \mathbb{C}[A]^\times$, donc d'après le théorème, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. Le polynôme $P$ est dans $\mathbb{C}[X]$ mais $A$ est réelle donc $A = \overline{A} = \exp(\overline{P(A)})$, et ainsi
$A^2 = A\overline{A} = \exp(P(A))\exp(\overline{P(A)}) = \exp(P(A) + \overline{P(A)})$. Or le polynôme $P + \overline{P}$ est à coefficients réels donc $(P+\overline{P})(A) \in M_n(\mathbb{R})$, et donc $A^2 \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$

Remarques : * L'exponentielle matricielle n'est pas injective ni sur $M_n(\mathbb{C})$ : $\exp(2i\pi I_n) = \exp(0) = I_n$, ni sur $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$ : $\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

* On a montré un résultat plus fort via le théorème : toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ admet un antécédent par exp qui est un polynôme en $A$.

* On peut directement voir que $\exp(M_n(\mathbb{R})) \neq GL_n(\mathbb{R})$ puisque, grâce à $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$, on a $\exp(M_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$ (mais $\subsetneq$, car par exemple $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_n^+(\mathbb{R}) \setminus \exp(M_n(\mathbb{R}))$). Mais alors qu'est-ce qui ne marche pas ? L'égalité $\mathbb{R}[A]^\times = \mathbb{R}[A] \cap GL_n(\mathbb{R})$ est toujours ok, mais $\exp(\mathbb{R}[A]) = \mathbb{R}[A]^\times$ ne fonctionne plus, par exemple $-I_n \in \mathbb{R}[A]^\times$, mais $-I_n \notin \exp(M_n(\mathbb{R}))$. Le problème vient de l'argument "$\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs", qui n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$ !

* En utilisant la décomposition de DJC, on peut fournir une autre preuve du résultat : on trouve des antécédents aux matrices diagonalisables grâce à la surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ (dont on ne se sert pas ici :) ) et grâce aux polynômes de Lagrange, on trouve des antécédents aux matrices unipotentes ($I_n + \mathrm{Nilp}$) grâce au logarithme matriciel, et

on conclut via la décomposition de DJC.

* Pour un ouvert d'un EVN, connexe $\Leftrightarrow$ connexe par arcs.

* En restreignant l'exp, on peut obtenir de la surjectivité/injectivité, quelques exemples :
  * $D_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{exp} Gl_n(\mathbb{R})$ est injective
  * $S_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{exp} S_n^{++}(\mathbb{R})$ est bijective (et même un homéomorphisme)
  * $H_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{exp} H_n^{++}(\mathbb{C})$ est de même un homéomorphisme.