École Normale Supérieure de Rennes

Lectures dirigées de recherche

Contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires en dimension finie

Matthias HOSTEIN, Alice MORINIÈRE

Encadrante : Mégane BOURNISSOU

Avril 2022

Table des matières

1 Introduction à la théorie du contrôle

1.1 Motivations

Nombreux sont les systèmes physiques modélisables par des équations différentielles ordinaires ou par des équations aux dérivées partielles. Beaucoup de ces systèmes sont contraints par des forces sur lesquelles nous ne pouvons pas agir. Par exemple pour un objet en chute libre, la seule force agissant sur le système est la gravitation, que l'on ne peut pas modifier. Ainsi, on se place dans un rôle d'observateur.

La théorie du contrôle intervient lorsque l'on change de point de vue et que l'on se pense comme ayant un moyen d'agir sur le système que l'on étudie. Par exemple,

— la position (dans $\mathbb{R}^2$) d'une voiture est modifiée par notre action sur le volant ou la pédale d'accélération,

— la température d'une pièce peut être modifiée à chaque instant en allumant ou éteignant un chauffage,

— l'état d'excitation d'une particule quantique dans un puits de potentiel infini peut être piloté par un champ électrique qu'on lui appliquerait.

La question que l'on se pose est alors de savoir si, grâce au contrôle que l'on possède sur le système, il est possible d'atteindre n'importe quel état final à partir de n'importe quel état initial en un temps fixé. On peut traduire cela mathématiquement.

Dans tout ce manuscrit, on étudiera des systèmes de contrôle de dimension finie. On suppose alors que le système est représenté par une équation différentielle de la forme

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

où à l'instant t, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $u = u(t) \in \mathbb{R}^k$ représente le contrôle. Le problème général de contrôlabilité revient alors à trouver des conditions sur le champ de vecteurs f pour que la propriété suivante soit vraie,

$$\forall T > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x_f \in \mathbb{R}^n, \quad \exists u \in L^\infty((0,T), \mathbb{R}^k), \text{ tel que } \quad x(T) = x_f$$
$$\text{avec } x \text{ solution de } \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(t,x,u), \\ x(0) & = & x_0. \end{array} \right.$$

Cette définition de la contrôlabilité étant assez large, l'énoncé doit parfois être modifié afin qu'il soit plus réaliste, et d'autres définitions de contrôlabilité existent.

— <u>Contrôlabilité en temps petit ou en temps long :</u> Pour certains systèmes physiques, il n'est pas possible d'envisager de rejoindre n'importe quel état final en un temps arbitrairement court (par exemple lorsque l'on étudie la position d'une voiture, la vitesse étant limitée, il ne sera pas possible d'aller de Paris à Marseille en 10 minutes), ainsi on passe d'un problème posé pour tout $T > 0$, à un problème où l'on se demande s'il existe un $T_0 > 0$ tel que pour tout $T > T_0$, l'énoncé est valable.

— Contrôlabilité locale ou globale : On peut s'intéresser à la contrôlabilité entre deux positions proches. En fixant un certain $x_e \in \mathbb{R}^n$, on se demande si pour tout $T > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x_0, x_f) \in B(x_e, \delta)$ l'énoncé est valable. Notons que la petitesse des états peut dépendre du temps.

— Contrôlabilité exacte ou approchée : Il est également possible de se laisser une incertitude sur la position finale, on parle alors de contrôlabilité approchée. Au lieu de demander d'atteindre la cible comme dans le cas de la contrôlabilité exacte, on cherche seulement à parvenir arbitrairement proche de la cible, c'est à dire à trouver un controle u tel que $\|x(T) - x_f\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

— Contrôlabilité à zéro : On se ramène parfois à atteindre seulement la cible $x_f = 0$ pour de multiples raisons, que ce soit pour simplifier le problème, parce que c'est la seule position finale envisageable au vu des contraintes du problème, ou encore parce que cela est équivalent à atteindre n'importe quelle autre condition finale (par exemple dans le cas linéaire).

En plus de toutes celles-ci, d'autres questions peuvent se poser, comme par exemple l'ensemble d'appartenance du contrôle u : il paraît intuitif de se dire que plus sa régularité est grande, plus ce sera dur de le trouver. On peut aussi demander à ce que la norme de u soit petite, ce qui correspond à une problématique de coût. Cette condition peut rendre la recherche d'un contrôle plus dure, car la petitesse est parfois dure à réaliser selon la norme choisie.

D'autre part, il ne faut pas confondre le problème de contrôlabilité avec le problème de contrôle optimal. Dans le cadre de ce dernier, pour un problème donné, on sait déjà qu'il existe des contrôles, et on se demande alors quel est le contrôle (à x_0 et x_f fixés) qui minimise une certaine fonction de coût, ce qui rend les questionnements très différents.

Enfin, il est essentiel de remarquer que le problème de contrôlabilité est lié à une question de surjectivité. Souvent il est difficile de construire explicitement un antécédent (contrôle u) et dans la plupart des cas, un critère abstrait de surjectivité (non constructif) sera plutôt utilisé.

1.2 Notations

Tout au long de ce manuscrit, on utilisera les notations suivantes :

— $n, k \in \mathbb{N}^*$,

— $0 \leq T_0 < T_1 \in \mathbb{R}$,

— $A \in \mathscr{C}^0\big([T_0, T_1], \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)$,

— $B \in \mathscr{C}^0\big([T_0, T_1], \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})\big)$,

— $u \in L^\infty\big([T_0, T_1], \mathbb{R}^k\big)$,

— A^{tr}, la transposée d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, $l, m \in \mathbb{N}^*$, en identifiant $\mathbb{R}^n$ à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

— $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}^*$ défini par :

$$\begin{array}{cccccc} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & (\mathbb{R}^m)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle = y^{tr} x \end{array},$$

— $|\cdot|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}^*$,

— $\|\cdot\|$ la norme d'algèbre subordonnée à $|\cdot|$ dans $\mathscr{M}_m(\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$,

— Enfin, si $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ est un espace vectoriel normé et I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, on munit $\mathscr{C}^0(I, E)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie comme :

$$\begin{array}{ccccc} \|\cdot\|_\infty & : & \mathscr{C}^0(I,E) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & f & \longmapsto & \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} \|f(x)\|_E \end{array}$$

et, pour $J \subset I$ intervalle fermé également, on notera, pour $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$, $\|f\|_{\infty,J} = \|f_{|J}\|_\infty$.

1.3 Caractère bien posé du problème de contrôlabilité

Dans tout ce manuscrit, on s'intéressera au système de contrôle linéaire suivant :

$$(C) : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad \forall t \in [T_0, T_1], \\ x(T_0) & = & x^0. \end{array} \right.$$

Avant de donner la définition précise de contrôlabilité que l'on étudiera, on énonce le caractère bien posé d'un tel problème.

Proposition 1.3.1. *Soit $u \in L^\infty\big([T_0, T_1], \mathbb{R}^k\big)$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy (C) admet une unique solution x qui est dans $\mathscr{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Comme cette proposition n'est pas une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz car a priori, la fonction u n'est pas continue, il est nécessaire de réappliquer un théorème de point fixe à la formulation intégrale. Posons l'application suivante :

$$\begin{array}{ccccc} F & : & \Big(\mathscr{C}^0\big([T_0,T_1], \mathbb{R}^n\big), \|\cdot\|_\infty\Big) & \longrightarrow & \Big(\mathscr{C}^0\big([T_0,T_1], \mathbb{R}^n\big), \|\cdot\|_\infty\Big) \\ & & x & \longmapsto & \left| \; t \;\mapsto\; x^0 + \displaystyle\int_{T_0}^t (A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))\mathrm{d}\tau \right. \end{array}.$$

L'application F est bien à valeurs dans $\mathscr{C}^0\big([T_0, T_1], \mathbb{R}^n\big)$ car une primitive d'une fonction L^∞ (L^1 suffirait) sur un segment est continue.
On remarque que x est solution de (C) si et seulement si x est un point fixe de F. Nous allons alors montrer que F possède une itérée contractante et conclure en utilisant le théorème du point

fixe par complétude de $\Big(\mathscr{C}^0\big([T_0,T_1],\mathbb{R}^n\big),\|\cdot\|_\infty\Big)$.

Soient $x,y\in\mathscr{C}^0\big([T_0,T_1],\mathbb{R}^n\big)$ et soit $t\in[T_0,T_1]$. On a :

$$\begin{aligned}\forall s\in[T_0,t],\quad |F(x)(s)-F(y)(s)| &= \left|\int_{T_0}^{s}(A(\tau)\big(x(\tau)-y(\tau)\big)\mathrm{d}\tau\right|\\ &\leq \|A\|_\infty\big(s-T_0\big)\|x-y\|_\infty\\ &\leq \|A\|_\infty\big(t-T_0\big)\|x-y\|_\infty.\end{aligned}$$

Prouvons alors par récurrence la proposition suivante :

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad \forall t\in[T_0,T_1],\quad \|F^m(x)-F^m(y)\|_{\infty,[T_0,t]}\leq\frac{\|A\|_\infty^m}{m!}\big(t-T_0\big)^m\|x-y\|_\infty.$$

Le cas $m=0$ est trivial, et nous venons de montrer le cas $m=1$. Supposons alors la propriété vraie pour $m\in\mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall t\in[T_0,T_1],\quad \forall s\in[T_0,t],\quad |F^{m+1}(x)(s)-F^{m+1}(y)(s)| &= \left|\int_{T_0}^{s}(A(\tau)\big(F^m(x)(\tau)-F^m(y)(\tau)\big)\mathrm{d}\tau\right|\\ &\leq \frac{\|A\|_\infty^m}{m!}\left(\int_{T_0}^{s}\|A(\tau)\|\big(\tau-T_0\big)^m\mathrm{d}\tau\right)\|x-y\|_\infty\\ &\leq \frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{(m+1)!}\big(s-T_0\big)^{m+1}\|x-y\|_\infty\\ &\leq \frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{(m+1)!}\big(t-T_0\big)^{m+1}\|x-y\|_\infty,\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. On obtient alors

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad \|F^m(x)-F^m(y)\|_\infty\leq\frac{\|A\|_\infty^m}{m!}\big(T_1-T_0\big)^m\|x-y\|_\infty.$$

Et donc, étant donné que la suite $\left(\dfrac{\|A\|_\infty^m}{m!}\big(T_1-T_0\big)^m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, l'application F^m est bien contractante à partir d'un certain $m_0\in\mathbb{N}$, ce qui conclut la preuve. □

Maintenant que nous nous sommes assurés de la bonne définition de cet objet mathématique, nous pouvons énoncer la définition de contrôlabilité que nous allons utiliser.

Définition 1.3.2. *On dit que le système linéaire $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$ est* ***contrôlable*** *si pour tout $(x^0,x^1)\in(\mathbb{R}^n)^2$, il existe $u\in L^\infty\big([T_0,T_1],\mathbb{R}^k\big)$ tel que la solution du problème de Cauchy (C) vérifie $x(T_1)=x^1$.*

1.4 Un critère de surjectivité dans les espaces de Hilbert

La contrôlabilité est très liée à la surjectivité d'une certaine application (qu'il est difficile à expliciter dans le cas général, mais dont on peut avoir l'intuition grâce à la définition : "pour tous x^0, x^1 dans $\mathbb{R}^n$, il existe u dans $L^\infty\big([T_0,T_1],\mathbb{R}^k\big)$ ..."). Le but de ce paragraphe est donc d'arriver à énoncer un critère abstrait de surjectivité dans les espaces de Hilbert. Pour se faire, on montre d'abord un théorème intermédiaire qui sera utile par la suite.

Théorème 1.4.1. ***dit du graphe fermé :*** *Soient $\big(E,\|\cdot\|_E\big)$, $\big(F,\|\cdot\|_F\big)$ des Banach et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est continue si et seulement si son graphe $\Gamma(f) = \big\{\big(x,f(x)\big) : x \in E\big\}$ est une partie fermée de $E\times F$ pour la topologie produit.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons f continue sur $\big(E,\|\cdot\|_E\big)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma(f)^{\mathbb{N}}$. Alors, il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \big(y_n, f(y_n)\big)$. Supposons que la suite (x_n) converge vers $(y,z) \in E\times F$ pour la topologie produit. On a alors :

$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_E} y,$$
$$f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_F} z.$$

Or, puisque f est continue, on a donc :

$$f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_F} f(y).$$

Ainsi, $z = f(y)$, donc $(y,z) \in \Gamma(f)$. $\Gamma(f)$ est donc une partie fermée de $E\times F$ pour la topologie produit.

$\Leftarrow$: Réciproquement, supposons $\Gamma(f)$ fermée dans $E\times F$ pour la topologie produit. Cette topologie est définie en particulier par la norme suivante sur $E\times F$:

$$\|\cdot\|_{E\times F} \quad : \quad \begin{array}{ccc} E\times F & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x\|_E + \|y\|_F \end{array}.$$

On introduit la norme du graphe sur E définie comme suit :

$$\|\cdot\|_{\Gamma} \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_E + \|f(x)\|_F \end{array}.$$

De cette façon, les espaces $\big(E,\|\cdot\|_\Gamma\big)$ et $\big(\Gamma(f),\|\cdot\|_{E\times F}\big)$ s'identifient naturellement l'un l'autre par l'isomorphisme isométrique suivant :

$$\Phi \quad : \quad \begin{array}{ccc} \big(E,\|\cdot\|_\Gamma\big) & \longrightarrow & \big(\Gamma(f),\|\cdot\|_{E\times F}\big) \\ x & \longmapsto & (x,f(x)) \end{array}.$$

En effet, Φ est bien linéaire par linéarité de f et il s'agit de la fonction réciproque de la projection sur E. De plus, par définition de la norme du graphe, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|\Phi(x)\|_{E\times F} = \|x\|_\Gamma.$$

Puisque $\Gamma(f)$ est une partie fermée de $\big(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F}\big)$ qui est complet, $\big(\Gamma(f), \|\cdot\|_{E\times F}\big)$ est un Banach. Ainsi, $\big(E, \|\cdot\|_\Gamma\big)$ est un Banach également. Or, puisqu'on a que $\|\cdot\|_E \leq \|\cdot\|_\Gamma$ sur E, alors :

$$id \quad : \quad \big(E, \|\cdot\|_\Gamma\big) \quad \longrightarrow \quad \big(E, \|\cdot\|_E\big),$$

est une application linéaire continue et bijective entre deux Banach. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, sa réciproque (qui est aussi l'identité) est continue. Ainsi :

$$\exists C \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in E, \quad \|x\|_\Gamma \leq C\|x\|_E.$$

Les normes $\|\cdot\|_\Gamma$ et $\|\cdot\|_E$ sont donc équivalentes sur E. Ainsi, f est continue sur $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ si et seulement si f est continue sur $\big(E, \|\cdot\|_\Gamma\big)$. Or :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq \|x\|_E + \|f(x)\|_F = \|x\|_\Gamma.$$

Ainsi f est continue sur $\big(E, \|\cdot\|_\Gamma\big)$. Donc f est continue sur $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$. □

Ce théorème du graphe fermé nous sert pour la preuve du résultat de surjectivité ci-dessous.

Théorème 1.4.2. *Soient $\big(H_1, \|\cdot\|_{H_1}\big)$ et $\big(H_2, \|\cdot\|_{H_2}\big)$ deux espaces de Hilbert et soit $\mathscr{F} \in \mathscr{L}_c(H_1, H_2)$. Alors, il y a équivalence entre les propriétés suivantes.*

1. *$\mathscr{F}$ est surjective.*

2. *$\exists \mathscr{G} \in \mathscr{L}_c(H_2, H_1)$, $\mathscr{F} \circ \mathscr{G} = id_{H_2}$. De plus, $\mathrm{Im}\,\mathscr{G} \subset \ker \mathscr{F}^\perp$.*

3. *$\exists c > 0$, $\forall y \in H_2$, $\|\mathscr{F}^*(y)\|_{H_1} \geq c\|y\|_{H_2}$.*

Démonstration. (1) ⇒ (2) :
Soit $y \in H_2$. Par surjectivité de $\mathscr{F}$, il existe x dans H_1 tel que $y = \mathscr{F}(x)$. Puisque $\mathscr{F}$ est continue, $\ker \mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H_1. Par le théorème du supplémentaire orthogonal, on a donc $H_1 = \ker \mathscr{F} \oplus \ker \mathscr{F}^\perp$. On écrit donc $x = x_1 + x_2$ avec x_1 dans $\ker \mathscr{F}$ et x_2 dans $\ker \mathscr{F}^\perp$ et on obtient que $y = \mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(x_2)$. On pose alors :

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{G} & : & H_2 & \longrightarrow & \ker \mathscr{F}^\perp \\ & & y & \longmapsto & x \end{array},$$

où x est tel que $y = \mathscr{F}(x)$. Montrons que $\mathscr{G}$ est bien définie et que $\mathscr{G} \in \mathscr{L}_c(H_2, H_1)$.
Soit $y \in H_2$ et soient $x, x' \in \ker \mathscr{F}^\perp$ tels que $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(x') = y$. On a alors :

$$x - x' \in \ker \mathscr{F}.$$

Or,

$$x, x' \in \ker \mathscr{F}^\perp.$$

Donc :

$$x - x' \in \ker \mathscr{F}^\perp \cap \ker \mathscr{F}.$$

Donc :

$$x - x' = 0_{H_1} \quad \text{i.e.} \quad x = x'.$$

Ainsi, $\mathscr{G}$ est bien définie et, de fait, vérifie :

$$\mathscr{F} \circ \mathscr{G} = id_{H_2}.$$

De plus, $\mathscr{G}$ est bien linéaire.
En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $y, y' \in H_2$, on a, par linéarité de $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F}(\lambda \mathscr{G}(y) + \mathscr{G}(y')) = \lambda \mathscr{F}(\mathscr{G}(y)) + \mathscr{F}(\mathscr{G}(y')) = \lambda y + y'.$$

Ainsi :

$$\lambda \mathscr{G}(y) + \mathscr{G}(y'), \mathscr{G}(\lambda y + y') \in \ker \mathscr{F}^{\perp} \quad \text{et}$$
$$\mathscr{F}(\lambda \mathscr{G}(y) + \mathscr{G}(y')) = \mathscr{F}(\mathscr{G}(\lambda y + y')) = \lambda y + y'.$$

Ainsi :

$$\mathscr{G}(\lambda y + y') = \lambda \mathscr{G}(y) + \mathscr{G}(y').$$

Donc :

$$\mathscr{G} \in \mathscr{L}(H_2, H_1).$$

Montrons désormais que $\mathscr{G}$ est continue en montrant que $\Gamma(\mathscr{G})$ est fermée dans $H_2 \times \ker \mathscr{F}^{\perp}$ (par le théorème du graphe fermé, qu'il est légitime d'appliquer car $\ker \mathscr{F}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H_1 Hilbert, donc $\ker \mathscr{F}^{\perp}$ est un Banach).
Soit $(y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma(\mathscr{G})^{\mathbb{N}}$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \mathscr{G}(y_n).$$

Supposons en outre :

$$y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_{H_2}} y,$$
$$z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_{H_1}} z.$$

Le but est de montrer que $z = \mathscr{G}(y)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \mathscr{F} \circ \mathscr{G}(y_n) = \mathscr{F}(z_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_{H_2}} \mathscr{F}(z) \text{ par continuité de } \mathscr{F}.$$

Alors on a : $y = \mathscr{F}(z)$ avec $z \in \ker \mathscr{F}^{\perp}$. Ainsi, par définition de $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}(y) = z$. Donc $(y, z) \in \Gamma(\mathscr{G})$.
$\Gamma(\mathscr{G})$ est donc une partie fermée de $H_2 \times \ker \mathscr{F}^{\perp}$. On obtient finalement $\mathscr{G} \in \mathscr{L}_c(H_2, H_1)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) :
Immédiat : $\forall y \in H_2, \mathscr{G}(y)$ vérifie $y = \mathscr{F}(\mathscr{G}(y))$.

(2) $\Rightarrow$ (3) :
Si $\mathscr{F} \circ \mathscr{G} = id_{H_2}$, alors, en passant à l'adjoint, on a $\mathscr{G}^* \circ \mathscr{F}^* = id_{H_2}$ et donc :

$$\forall y \in H_2, \quad \|y\|_{H_2} = \|\mathscr{G}^* \circ \mathscr{F}^*(y)\|_{H_2} \leq \|\mathscr{G}^*\|_{\mathscr{L}_c(H_1,H_2)} \|\mathscr{F}^*(y)\|_{H_1},$$

et donc,

$$\forall y \in H_2, \quad \|\mathscr{F}^*(y)\|_{H_1} \geq \frac{1}{\|\mathscr{G}^*\|_{\mathscr{L}_c(H_1,H_2)}} \|y\|_{H_2},$$

ce qui conclut la preuve.

(3) $\Rightarrow$ (2) :
Supposons que,

$$\exists c > 0, \quad \forall y \in H_2, \quad \|\mathscr{F}^*(y)\|_{H_1} \geq c\|y\|_{H_2},$$

alors $\mathscr{F}^*$ est injective. En effet, on a,

$$y \in \ker(\mathscr{F}^*) \quad \text{donc} \quad \|y\|_{H_2} \leq \frac{1}{c}\|\mathscr{F}^*(y)\|_{H_1} = 0 \quad \text{et donc} \quad y = 0_{H_2}.$$

Ainsi, $\mathscr{F}^*$ est un isomorphisme de H_2 dans $\mathrm{Im}(\mathscr{F}^*)$. Donc :

$$\exists \mathscr{K} \in \mathscr{L}\Big(\mathrm{Im}(\mathscr{F}^*), H_2\Big), \mathscr{K} \circ \mathscr{F}^* = id_{H_2}.$$

De plus

$$\forall y \in H_2, \|\mathscr{K}(\mathscr{F}^*(y))\|_{H_2} = \|y\|_{H_2} \leq \frac{1}{c}\|\mathscr{F}^*(y)\|_{H_1}.$$

Donc :

$$\mathscr{K} \in \mathscr{L}_c\Big(\mathrm{Im}(\mathscr{F}^*), H_2\Big) \quad \text{et} \quad \|\mathscr{K}\|_{\mathscr{L}_c\left(\mathrm{Im}(\mathscr{F}^*), H_2\right)} \leq \frac{1}{c}.$$

Puisque H_2 est un espace complet, on peut prolonger $\mathscr{K}$, par le théorème de prolongement des applications uniformément continues, en $\tilde{\mathscr{K}} \in \mathscr{L}_c\Big(\overline{\mathrm{Im}(\mathscr{F}^*)}, H_2\Big) = \mathscr{L}_c(\ker \mathscr{F}^\perp, H_2)$. On peut donc étendre $\tilde{\mathscr{K}}$ en une fonction $\bar{\mathscr{K}} \in \mathscr{L}_c(H_1, H_2)$ en la posant nulle sur $\ker \mathscr{F}$. Ainsi, en posant $\mathscr{G} = \bar{\mathscr{K}}^*$, on a :

$$\mathscr{F} \circ \mathscr{G} = id_{H_2} \text{ avec } \mathscr{G} \in \mathscr{L}_c(H_2, H_1),$$

et :

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{G} = \mathrm{Im}\,\bar{\mathscr{K}}^* \subset \ker \bar{\mathscr{K}}^\perp \subset \ker \mathscr{F}^\perp \quad \text{car} \quad \ker \mathscr{F} \subset \ker \bar{\mathscr{K}} \text{ par construction.}$$

$\square$

Cela conclut cette section définissant la notion de contrôlabilité, et exhibant des résultats en rapport avec l'objectif de caractériser les systèmes contrôlables. Le chapitre suivant s'appuiera donc sur ces résultats pour énoncer des critères de contrôlabilité des systèmes linéaires.

2 Critères de contrôlabilité

Avant de s'intéresser à des critères de contrôlabilité pour les systèmes linéaires, on rappelle ici quelques propriétés concernant la résolvante qui nous seront utiles pour la suite.

2.1 Rappel sur la résolvante

Effectuons quelques rappels concernant la résolvante d'un système linéaire.

Définition 2.1.1. *On appelle résolvante R du système d'équations différentielles linéaires $\dot{x} = A(t)x$ l'application*

$$\begin{aligned} R : [T_0, T_1]^2 &\longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ (t_1, t_2) &\longmapsto R(t_1, t_2), \end{aligned}$$

telle que pour tout $t_2 \in [T_0, T_1]$, l'application

$$\begin{aligned} R(\cdot, t_2) : [T_0, T_1] &\longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ t_1 &\longmapsto R(t_1, t_2), \end{aligned}$$

est la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{M}(t) & = & A(t)M, \quad \forall t \in [T_0, T_1], \\ M(t_2) & = & Id_n, \end{array} \right. \quad (\textit{avec } Id_n \textit{ la matrice identité de } \mathbb{R}^n).$$

Proposition 2.1.2. *La résolvante R vérifie les propriétés suivantes.*

1. $R \in \mathscr{C}^0([T_0, T_1]^2, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$.
2. $\forall t_1 \in [T_0, T_1], \quad R(t_1, t_1) = Id_n$.
3. $\forall (t_1, t_2, t_3) \in [T_0, T_1]^3, \quad R(t_1, t_2)R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3)$.
4. *En particulier,* $\forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2, \quad R(t_1, t_2)R(t_2, t_1) = Id_n$.

Exemple 2.1.1. *On considère le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1} & = & u, \\ \dot{x_2} & = & x_1 + tu. \end{array} \right. \tag{1}$$

Le système se met sous la forme $\dot{X} = AX + Bu$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Comme A est indépendante du temps, on obtient que la résolvante de $\dot{X} = AX$ est donnée par :

$$\forall (t, s) \in [T_0, T_1], \quad R(t, s) = e^{A(t-s)}.$$

Or $A^2 = 0$, donc :

$$e^{A\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n \tau^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$R(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}.$$

Une propriété importante de la résolvante est donnée par la formule de Duhamel, énoncée ci-dessous.

Proposition 2.1.3. *(Formule de Duhamel) L'unique solution du problème de Cauchy suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x + b(t), \quad \forall t \in [T_0, T_1] \\ x(T_0) & = & x^0, \end{array} \right.$$

est donnée par

$$\forall t \in [T_0, T_1], \qquad x(t) = R(t, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{t} R(t,\tau)b(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Démonstration. On sait que si $\tilde{x}$ est une solution particulière de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, alors l'ensemble des solutions de ce système est un espace affine $\tilde{x} + H$ où H est l'espace vectoriel des solutions du système homogène donnée par $\dot{x} = A(t)x$. De plus, H est donné par

$$H = \{t \longmapsto R(t, T_0)x^0 \ : \ x^0 \in \mathbb{R}^n\}.$$

Donc il ne nous reste qu'à trouver une solution particulière. Utilisons pour cela la méthode de la variation de la constante. Soit $x_p : t \longmapsto R(t, T_0)y(t)$ solution particulière de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Soit $t \in [T_0, T_1]$. En injectant x_p dans l'équation, on a

$$R(t, T_0)\dot{y}(t) + \dot{R}(t, T_0)y(t) = A(t)R(t, T_0)y(t) + b(t).$$

Or par définition,

$$\dot{R}(t, T_0) = A(t)R(t, T_0),$$

et on obtient donc (la résolvante étant inversible grâce au point 4. de la Proposition 2.1.2)

$$\tilde{y} = (R(t, T_0))^{-1}b(t) = R(T_0, t)b(t).$$

On intègre ensuite entre T_0 et t, et on obtient

$$y(t) = y(T_0) + \int_{T_0}^{t} R(T_0, \tau)b(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Et alors en réinjectant y dans l'expression de x_p, on obtient

$$x_p(t) = R(t, T_0)y(T_0) + \int_{T_0}^{t} R(t, T_0)R(T_0, \tau)b(\tau)\mathrm{d}\tau = R(t, T_0)y(T_0) + \int_{T_0}^{t} R(t,\tau)b(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Enfin, si l'on impose $x_p(T_0) = x^0$, alors on obtient $y(T_0) = x^0$ et on retrouve ainsi la formule de Duhamel. □

Remarque 2.1.4. *Grâce à cette formule, nous allons pouvoir expliciter le lien entre la contrôlabilité et la surjectivité. En effet, si l'on considère le système $\dot{x} = Ax + Bu$, alors si l'on se donne $T > 0$, demander que le système soit contrôlable équivaut à demander que l'application suivante soit surjective :*

$$\begin{aligned} L^\infty((0,T),\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_0^T R(T,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

en notant R la résolvante du système $\dot{x} = Ax$.
En effet, les propositions suivantes sont équivalentes.

1. *Le système est contrôlable.*
2. $\forall x_0, x_f \in \mathbb{R}^n, \quad \exists u \in L^\infty, \quad x_f - R(T,0)x^0 = \int_0^T R(T,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \exists u \in L^\infty, \quad x = \int_0^T R(T,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$

Les résultats énoncés ci-dessus seront utiles pour expliciter les solutions du système de contrôle, et pour énoncer le critère de contrôlabilité qui suit.

2.2 Critère intégral de la Gramienne

Dans cette partie, nous allons énoncer un premier critère de contrôlabilité basé sur l'étude de la résolvante du système homogène.

Définition 2.2.1. *On appelle matrice Gramienne la matrice symétrique suivante :*

$$\mathfrak{C} = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,\tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T_1,\tau)^{tr}\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Théorème 2.2.2. *Le système $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ est contrôlable si et seulement si la matrice $\mathfrak{C}$ est inversible.*

Dans un premier temps, on présente une preuve de ce critère basée sur la construction explicite d'un contrôle atteignant les données que l'on se fixe. Comme cette preuve n'est pas généralisable à des contextes plus complexes, dans un deuxième temps, on présentera une seconde preuve s'appuyant sur le critère abstrait de surjectivité donné dans le Théorème 1.4.2.

Démonstration. Tout d'abord, on constate que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} x^{tr}\mathfrak{C}x &= \int_{T_0}^{T_1} x^{tr}R(T_1,\tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T_1,\tau)^{tr}x\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{T_0}^{T_1} (B(\tau)^{tr}R(T_1,\tau)^{tr}x)^{tr}B(\tau)^{tr}R(T_1,\tau)^{tr}x\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{T_0}^{T_1} |B(\tau)^{tr}R(T_1,\tau)^{tr}x|^2\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

ce qui va nous servir à prouver l'équivalence.
Supposons premièrement que $\mathfrak{C}$ est inversible. Soit $(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$\tilde{u}(\tau) = B(\tau)^{tr} R(T_1, \tau)^{tr} \mathfrak{C}^{-1}(x^1 - R(T_1, T_0)x^0). \tag{3}$$

Soit $\tilde{x}$ l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} & = & A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u}(t) \quad \forall t \in [T_0, T_1] \\ \tilde{x}(T_0) & = & x^0 \end{cases}$$

Alors, par la formule de Duhamel, on a

$$\begin{aligned} \tilde{x}(T_1) &= R(T_1, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)\tilde{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= R(T_1, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr} \times \mathfrak{C}^{-1}(x^1 - R(T_1, T_0)x^0))\mathrm{d}\tau \\ &= R(T_1, T_0) + x^1\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1} - R(T_1, T_0)x^0\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1}, \end{aligned}$$

d'où $\tilde{x}(T_1) = x^1$. Ainsi, le système $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ est contrôlable.

Supposons désormais que $\mathfrak{C}$ n'est pas inversible et montrons que le système n'est alors pas contrôlable.
Comme $\mathfrak{C}$ n'est pas inversible, il existe y dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $\mathfrak{C}y = 0$.
En particulier,

$$0 = y^{tr}\mathfrak{C}y = \int_{T_0}^{T_1} |B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}y|^2\mathrm{d}\tau.$$

Comme la fonction intégrée est positive, d'intégrale nulle, elle est nulle presque partout.
Ainsi :

$$\forall \tau \in [T_0, T_1], \quad y^{tr}R(T_1, \tau)B(\tau) = (B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}y)^{tr} = 0.$$

Soit $u \in L^\infty((T_0, T_1), \mathbb{R}^k)$ et x une solution de $\dot{x} = A(t)x+B(t)u$. Considérons le cas où la condition initiale x^0 est nulle. Alors la solution du problème doit vérifier :

$$x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Ainsi,

$$y^{tr}x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} y^{tr}R(T_1, \tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

Or si on choisit x^1 tel que $y^{tr}x^1 \neq 0$ (ce qui est possible par exemple en choisissant $x^1 = y$), alors

$x(T_1) \neq x^1$ et alors $x^0 = 0$ et x^1 ne sont pas reliables, ie il n'existe aucun $u \in L^\infty((T_0, T_1), \mathbb{R})$ tel que la solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x + B(t)u(t), \quad \forall t \in [T_0, T_1], \\ x(T_0) & = & 0, \end{array} \right.$$

vérifie $x(T_1) = x^1$.
Ainsi le système n'est pas contrôlable. $\square$

Exemple 2.2.1. *Reprenons le cas de l'exemple* (1). *On pose* $T_0 = 0$ *et* $T_1 = T > 0$ *On a vu précédemment que la résolvante était donnée par*

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad R(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t - s & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut calculer explicitement la Gramienne de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \int_0^T R(T, \tau) B(\tau) B(\tau)^{tr} R(T, \tau)^{tr} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T - \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T - \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \tau & \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T \\ T & T^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\det(\mathfrak{C}) = 0$*, donc* $\mathfrak{C}$ *n'est pas inversible, et le système* (1) *n'est pas contrôlable.*

En fait, le contrôle $\tilde{u}$ construit dans la preuve du Théorème 2.2.2 est un contrôle qui minimise la norme L^2, c'est à dire que tout autre contrôle du problème a une norme supérieure.

Proposition 2.2.3. *Soit* $(x^0, x^1) \in (\mathbb{R}^n)^2$ *et soit* $u \in L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^k)$ *tel que la solution du problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u \\ x(T_0) & = & x^0, \end{array} \right.$$

vérifie $x(T_1) = x^1$.
Alors si $\tilde{u}$ *désigne le contrôle défini par* (3)*, on a*

$$\int_{T_0}^{T_1} |\tilde{u}(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

avec égalité si et seulement si

$$u(t) = \tilde{u}(t) \text{ pour presque tout } t \in (T_0, T_1).$$

Démonstration. Soit $v = u - \tilde{u}$. Soient x et $\tilde{x}$ les solutions des problèmes de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(T_0) & = & x^0, \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}}(t) & = & A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u}, \\ \tilde{x}(T_0) & = & x^0. \end{array}\right.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,t)B(t)v(t)\mathrm{d}t &= \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,t)B(t)u(t)\mathrm{d}t - \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,t)B(t)\tilde{u}(t)\mathrm{d}t \\ &= (x(T_1) - R(T_1,T_0)x(T_0)) - (\tilde{x}(T_1) - R(T_1,T_0)\tilde{x}(T_0)) \\ &= (x^1 - R(T_1,T_0)x^0) - (x^1 - R(T_1,T_0)x^0) = 0. \end{aligned}$$

Or on sait d'une part que

$$\int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{T_0}^{T_1} |v(t)+\tilde{u}(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{T_0}^{T_1} |\tilde{u}(t)|^2\mathrm{d}t + \int_{T_0}^{T_1} |v(t)|^2\mathrm{d}t + 2\int_{T_0}^{T_1} \tilde{u}^{tr}(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Et d'autre part, on a par définition,

$$\forall t \in [T_0,T_1], \quad \tilde{u}(t) = B(t)^{tr}R(T_1,t)^{tr}\mathfrak{C}^{-1}(x^1 - R(T_1,T_0)x^0),$$

et donc, sachant que $\mathfrak{C}^{tr} = \mathfrak{C}$, on obtient

$$\int_{T_0}^{T_1} \tilde{u}^{tr}(t)v(t)\mathrm{d}t = (x^1 - R(T_1,T_0)x^0)^{tr}\mathfrak{C}^{-1}\int_{T_0}^{T_1} R(T_1,t)B(t)v(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{T_0}^{T_1} |\tilde{u}(t)|^2\mathrm{d}t + \int_{T_0}^{T_1} |v(t)|^2\mathrm{d}t \geq \int_{T_0}^{T_1} |\tilde{u}(t)|^2\mathrm{d}t.$$

□

Construison ce contrôle minimal sur un exemple.

Exemple 2.2.2. *Considérons le système autonome suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = u. \end{cases} \tag{4}$$

Le système est équivalent au système

$$\dot{X} = AX + Bu \quad \textit{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \textit{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $T_0 = 0$ et $T_1 = T > 0$. Comme la matrice A ne dépend pas du temps et est nilpotente, la résolvante est donnée par

$$\forall t \in [0,T], \quad R(t,s) = e^{A(t-s)} = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et alors, la Gramienne est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} &= \int_0^T R(T,\tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T,\tau)^{tr}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^T \begin{pmatrix} (T-\tau)^2 & T-\tau \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(\mathfrak{C}) = \frac{T^4}{3} - \frac{T^4}{4} = \frac{T^4}{12} \neq 0$ *car* $T > 0$. *Ainsi, le système est contrôlable.*

On cherche maintenant à construire le contrôle minimal en norme L^2 *qui permet de relier les données suivantes :* $X^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Grâce aux calculs précédents, on trouve que*

$$\mathfrak{C}^{-1} = \frac{12}{T^4} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T}{2} \\ -\frac{T}{2} & \frac{T^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Soit t *dans* $[0,T]$. *On a alors, en utilisant la définition de* $\tilde{u}$ *:*

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= \frac{12}{T^3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T}{2} \\ -\frac{T}{2} & \frac{T^2}{3} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{12}{T^3} \begin{pmatrix} T-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T}{2} \\ -\frac{T}{2} & \frac{T^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{12}{T^3} \begin{pmatrix} T-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{T}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\tilde{u}(t) = \frac{12}{T^3} \left(\frac{T}{2} - t \right).$$

En intégrant le système d'équation différentielle obtenu, en tenant compte de la condition initiale $X(0) = X^0$, *on obtient les trajectoires suivantes :*

$$\forall t \in [0,T], \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{T^3}(\frac{T}{4}t - \frac{t^3}{6}) - 1 \\ \frac{12}{T^3}(\frac{T}{2}t - \frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}$$

et on vérifie alors bien que $X(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X^1$.

Nous allons maintenant réaliser une seconde preuve plus abstraite du Théorème 2.2.2 s'appuyant sur le Théorème 1.4.2. Prouvons tout d'abord un lemme concernant l'inversibilité de la matrice gramienne.

Proposition 2.2.4. *La matrice $\mathfrak{C}$ est inversible si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y^{tr}\mathfrak{C}y \geq c|y|^2$*

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\mathfrak{C}$ est inversible. Comme $\mathfrak{C}$ est symétrique positive, elle est diagonalisable en base orthonormée, et elle a donc des valeurs propres réelles strictement positives. On pose alors $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de $\mathfrak{C}$ et $e_1, ..., e_n$ une base orthonormée de vecteurs propres asociés. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On peut alors poser $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ avec $y_1, ...y_n \in \mathbb{R}$. Et alors, en posant $c = \min_{i \in [\![1,n]\!]} \lambda_i$: on a,

$$
\begin{aligned}
y^{tr}\mathfrak{C}y &= \langle y, \mathfrak{C}y \rangle \\
&= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, \mathfrak{C} \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j \langle e_i, \mathfrak{C} e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j \langle e_i, \lambda_j e_j \rangle \\
&\geq c \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j \langle e_i,\ e_j \rangle.
\end{aligned}
$$

On obtient alors

$$y^{tr}\mathfrak{C}y \geq c|y|^2$$

ce qui conclut le sens direct.

Réciproquement, supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y^{tr}\mathfrak{C}y \geq c|y|^2$. On sait que $\mathfrak{C}$ est diagonalisable en base orthonormée, de valeurs propres réelles positives ou nulles. Soit λ une valeur propre de $\mathfrak{C}$ et x un vecteur propre associé. Alors

$$\lambda|x|^2 = x^{tr}\lambda x = x^{tr}\mathfrak{C}x \geq c|x|^2.$$

Ainsi, comme x est non nul, on obtient $\lambda \geq c > 0$. Donc $\mathfrak{C}$ possède des valeurs propres strictement positives et est inversible. □

Nous pouvons désormais construire la seconde preuve du Théorème 2.2.2 à l'aide de la Proposition 1.4.2.

Démonstration. Pour réaliser cette preuve, nous devons tout d'abord affiner les hypothèses en supposant $u \in L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^k)$ afin de se placer dans un espace de Hilbert.

<u>**Etape 1 :**</u> Lien avec la surjectivité.

Comme nous l'avons vu lors de la Remarque 2.1.4, la contrôlabilité du système équivaut à la surjectivité de l'application $\mathscr{F} \in \mathscr{L}_c(L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k),\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$\forall u \in L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k), \quad \mathscr{F}(u) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,t)B(t)u(t)\mathrm{d}t.$$

Etape 2 : Déterminons maintenant $\mathscr{F}^*$, l'adjoint de $\mathscr{F}$ pour le produit scalaire de $L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k)$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $u \in L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}(u), y\rangle &= \int_{T_0}^{T_1} u(t)^{tr}B(t)^{tr}R(T_1,t)^{tr}y\mathrm{d}t \\ &= \langle u, t \mapsto B(t)^{tr}R(T_1,t)^{tr}y\rangle_{L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{F}^*(y)(t) = B(t)^{tr}R(T_1,t)^{tr}y$ pour tout $t \in [T_0,T_1]$.

Etape 3 : Montrons que $\mathscr{F}$ est surjective grâce au Théorème 1.4.2.
Soit $c > 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\|\mathscr{F}^*(y)\|_{L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k)} \geq c|y|$.
2. $\|\mathscr{F}^*(y)\|^2_{L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k)} \geq c^2|y|^2$.
3. $\int_{T_0}^{T_1} |B(t)^{tr}R(T_1,t)^{tr}y|^2\mathrm{d}t \geq c^2|y|^2$.
4. $y^{tr}\mathfrak{C}y \geq c^2|y|^2$.

Ainsi, il existe $c > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n, \|\mathscr{F}^*(y)\|_{L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k)} \geq c|y|$ si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y^{tr}\mathfrak{C}y \geq c^2|y|^2$, et donc d'après la Proposition 2.2.4 si et seulement si $\mathfrak{C}$ est inversible. □

2.3 Critère de Kalman

Dans cette section, on considère que les fonctions A et B sont en fait constantes. Dans cette situation, un critère, plus simple que celui de la Gramienne, existe.

Théorème 2.3.1. *Le système (C) est contrôlable si et seulement si :*

$$E := Vect\left\{A^iBu \colon i \in [\![0,n-1]\!], u \in \mathbb{R}^k\right\} = \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Pour montrer l'équivalence de ce critère avec la contrôlabilité, nous allons en fait montrer l'équivalence avec le critère d'inversibilité de la Gramienne.
Dans ce cadre, où A est indépendante du temps, la résolvante est alors donnée par :

$$\forall t_1,t_2 \in [T_0,T_1], \quad R(t_1,t_2) = e^{(t_1-t_2)A}.$$

Ainsi, dans ce cadre, la matrice Gramienne est donnée par

$$\mathfrak{C} = \int_{T_0}^{T_1} e^{(T_1-\tau)A} B B^{tr} e^{(T_1-\tau)A^{tr}} \mathrm{d}\tau.$$

$\Leftarrow$: Nous raisonnons par contraposée.
Supposons que le système n'est pas contrôlable. Dans ce cas, par le Théorème 2.2.2 :

$$\mathfrak{C} \notin GL_n(\mathbb{R})$$

i.e.

$$\exists y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \mathfrak{C} y_0 = 0.$$

Ainsi :

$$\exists y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad y_0^{tr} \mathfrak{C} y_0 = 0,$$

et donc :

$$\exists y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \int_{T_0}^{T_1} |B^{tr} e^{(T_1-\tau)A^{tr}} y_0|^2 \mathrm{d}\tau = 0.$$

On a alors :

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad k(t) := y_0^{tr} e^{(T_1-t)A} B = 0.$$

Or $k \in \mathscr{C}^\infty([T_0, T_1])$ et :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad k^{(i)}(T_1) = (-1)^i y_0^{tr} A^i B$$

et, puisque k est la fonction nulle :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad y_0^{tr} A^i B = 0.$$

Et donc :

$$E \neq \mathbb{R}^n.$$

En effet, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifie $y_0^{tr} y_0 \neq 0$ donc y_0 ne peut être combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble $\left\{ A^i B u \colon i \in [\![0, n-1]\!], u \in \mathbb{R}^k \right\}$.

$\Rightarrow$: Là encore, nous raisonnons par contraposée. Supposons $E \neq \mathbb{R}^n$. Dans ce cas :

$$E^\perp \neq \{0\}, \text{ en considérant le produit scalaire canonique de } \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, en choisissant $y_0 \in E^\perp \setminus \{0\}$:

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \forall u \in \mathbb{R}^k, \quad y_0^{tr} A^i B u = 0.$$

En prenant alors $u = B^{tr} (A^{tr})^i y_0$, on a :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad |y_0^{tr} A^i B|^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad y_0^{tr} A^i B = 0.$$

Or, le théorème de Cayley-Hamilton donne que :

$$\forall i \geq n, \quad A^i \in Vect\{A^j : j \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Ainsi, par linéarité, on a donc :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad y_0^{tr} A^i B = 0.$$

Ainsi, en réutilisant les notations précédentes :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad k^{(i)}(T_1) = 0.$$

Or, l'expression de k montre qu'elle est développable en série entière sur tout $[T_0, T_1]$. Donc :

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad k(t) = 0.$$

Ainsi :

$$\int_{T_0}^{T_1} k(\tau)k(\tau)^{tr} \mathrm{d}\tau = \int_{T_0}^{T_1} y_0^{tr} e^{(T_1-\tau)A} BB^{tr} e^{(T_1-\tau)A^{tr}} y_0 \mathrm{d}\tau = 0.$$

On reconnaît alors la matrice $\mathfrak{C}$ et on a :

$$y_0^{tr} \mathfrak{C} y_0 = 0.$$

Or, l'application

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^{tr} \mathfrak{C} y \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique et postive puisque $\mathfrak{C}$ est une matrice symétrique positive. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour cette forme bilinéaire, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left|x^{tr} \mathfrak{C} y_0\right| \leq \left(x^{tr} \mathfrak{C} x\right)^{\frac{1}{2}} \left(y_0^{tr} \mathfrak{C} y_0\right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^{tr} \mathfrak{C} y_0 = 0.$$

En prenant alors $x = \mathfrak{C} y_0$, on a alors :

$$|\mathfrak{C} y_0|^2 = 0 \text{ i.e. } \mathfrak{C} y_0 = 0.$$

Ainsi, puisque $y_0 \neq 0$:

$$\mathfrak{C} \notin GL_n(\mathbb{R}).$$

□

Remarque 2.3.2. *Vérifier la contrôlabilité d'un système via le critère de la Gramienne est, dans le cas général, impossible à faire : pour calculer la Gramienne, il faut déterminer au préalable la résolvante du système adéquat. Or, quand celui-ci n'est pas autonome, la résolvante est souvent impossible à déterminer avec exactitude. En outre, le calcul d'intégrale peut lui aussi être impossible à effectuer avec exactitude. Le critère de Kalman permet donc de restreindre grandement les calculs en ne se ramenant qu'à des "simples" calculs de produit de matrices.*

Exemple 2.3.1. *Reprenons l'exemple du système autonome* (4)*, qui rappelons le, est équivalent au système*

$$\dot{X} = AX + Bu \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } A^0 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^1 B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$Vect\{\, A^i Bu \,:\, i \in \{0,1\},\, u \in \mathbb{R} \,\} = \mathbb{R}^2.$$

Et on retrouve donc que le système est contrôlable. On voit par ailleurs que ce critère permet en effet de simplifier les calculs.

Références

[1] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[2] Frédéric Marbach. Polycopié du cours *"Contrôlabilité et mécanique des fluides"* de M2 Mathématiques.