Lemme de Morse

↳ Ref : Rouvière p 209 et p 345

Lemme : (Réduction des formes quadratiques, version différentiable).
Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que :

$$\forall A \in V, \quad A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$$

Théorème : (Lemme de Morse) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U$. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, c'est à dire que $Df(0) = 0$, et que la forme quadratique hessienne $D^2f(0)$ est non dégénérée (ie inversible) de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe $\varphi : V \to W$ C^1 difféomorphisme entre 2 voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in V$, $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

Preuve du lemme : Étape 1 : Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMA_0M \end{array}$. Cette fonction est polynomiale donc C^1. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\cdot\|$ sous multiplicative.
Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\varphi(I_n + H) = {}^t(I_n + H) A_0 (I_n + H) = A_0 + A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H$$
$$= \varphi(I_n) + A_0H + {}^tHA_0 + o(\|H\|) = \varphi(I_n) + A_0H + {}^t(A_0H) + o(\|H\|).$$

Ainsi, $D\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$ (car linéaire continue).
Et $H \in \mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) \Leftrightarrow A_0H \in A_n(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) = A_0^{-1}A_n(\mathbb{R})$
($D\varphi(I_n)$ n'est donc pas injective, elle est en revanche surjective : si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $D\varphi(I_n)(\frac{1}{2}A_0^{-1}A) = A$ (se voit aussi grâce aux dimensions))

→ Problème : $D\varphi(I_n)$ n'est pas bijective, on ne peut pas appliquer le TIL ⇝ idée : Essayons de restreindre φ pour obtenir une diff. bijective !

Étape 2 : On a vu que $\mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in A_n(\mathbb{R})\}$, et on pose de même $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$. Alors $F \simeq S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) \simeq A_n(\mathbb{R})$ par l'isomorphisme $H \mapsto A_0^{-1}H$. Donc $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Ker}(D\varphi(I_n))$.
Soit $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F. (on remarque que $I_n \in F$).
Par construction, $D\psi(I_n)$ est injective : $\mathrm{Ker}(D\psi(I_n)) = \mathrm{Ker}(D\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}$, et donc bijective (encore par le même argument ou en constatant $\dim(F) = \dim(S_n(\mathbb{R}))$).
Ainsi, par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F, que l'on peut supposer inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$ (car $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert (det continue) donc on peut trouver U' voisinage ouvert de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ et on peut alors prendre $U \cap U'$) tel que ψ soit un C^1 difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$.

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in V$, $A = {}^t\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A)$, d'où le résultat avec $\rho = \psi^{-1}$ qui est bien une fct° $C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$.

Preuve du théorème : On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0 :

$$f(x) - f(0) = Df(0)(x) + \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)(x,x)\, dt$$

$$= {}^t x Q(x) x \quad \text{avec } Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)\, dt$$

Q est une fct° de classe C^1. De plus $Q(0) = \frac{D^2 f(0)}{2} \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ (non dégénérée par hypothèse).

Donc d'après le lemme, il existe un voisinage V de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que $\forall A \in V$, $A = {}^t\rho(A) Q(0) \rho(A)$.

Or Q est continue, donc il existe un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$. Ainsi, $\forall x \in V_0$, $Q(x) \in V$ donc

$Q(x) = {}^t\rho(Q(x)) Q(0) \rho(Q(x))$ ie en posant $M(x) = \rho(Q(x))$, on obtient

$\underline{Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)}$.

D'autre part, en utilisant le théorème d'inertie de Sylvester sur $Q(0)$, qui est de signature $(p, n-p)$, on sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(0) = {}^t P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P$

Finalement, $f(x) - f(0) = {}^t x\, {}^t M(x)\, {}^t P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} P M(x) x$,

donc en posant $\varphi(x) = P M(x) x$, on a

$f(x) - f(0) = {}^t\varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x)$,

et donc si l'on note $u = \varphi(x)$, on a bien * $\varphi(0) = 0$

* $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

Il reste maintenant à montrer que φ est un C^1 difféomorphisme entre 2 voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Tout d'abord, φ est bien de classe C^1 car M l'est (M est C^1 car Q est C^1, d'où la nécessité d'avoir pris f C^3).

Calculons la différentielle de φ en 0 : soit $h \in U$, alors

$\varphi(h) - \varphi(0) = P M(h) h$

$= P(M(0) + DM(0)\cdot h + o(\|h\|)) h$ car $M = \rho \circ Q$ est différentiable en 0.

$= \underline{P M(0) h} + o(\|h\|)$

linéaire continue donc $D\varphi(0)\cdot h$

Or $PH(0) \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $D\Psi(0)$ est inversible.
Ainsi d'après le théorème d'inversion locale, il existe deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ (en fait de 0 et $\Psi(0)=0$) tels que Ψ soit un C^1-difféo entre ces deux voisinages.

<u>Remarques</u> : * le lemme nous dit que toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente, qui plus est par un changement de base dont la matrice de passage est C^1 en fct° de la matrice considérée ! En particulier, cela montre que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signature donnée forme un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

* En appliquant le lemme à $A_0 = I$, on voit que toute matrice symétrique A suffisamment proche de I admet une racine carrée symétrique : il existe $M \in S_n(\mathbb{R})$ tq $A = M^2$.

→ formule de Taylor à l'ordre 2 exacte !!

* le théorème nous dit qu'à changement de coordonnées près, f est une forme quadratique au voisinage de 0 ! On peut étendre le résultat au cas où $Df(0) \neq 0$ en remplaçant f par $g(x) = f(x) - f(0) - Df(0)\cdot x$.

* Les hypothèses minimales du thm sont f C^1, ($Df(0)=0$) et existence de $D^2f(0)$ non dégénérée.

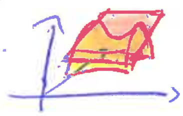
(Rouvière)

* Une première application : Soit S la surface d'équat° $z = f(x,y)$ où f est C^3 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, et $D^2f(a)$ est non dégénérée. Étudions la position relative de S p/r à son plan tangent au point $(a, f(a))$:
On pose $S(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a).h$ la distance entre S et le plan tangent au point $a+h$. Quitte à translater, qs $a=0$ et avec Morse,
$S(h) = \varepsilon_1 u_1^2(h) + \varepsilon_2 u_2^2(h)$ avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\pm 1, \pm 1)$ la signature de $D^2f(0)$.

→ si $\mathrm{sign}(D^2f(0)) = (2,0)$: f est au dessus du plan tangent localement

→ si $\mathrm{sign}(D^2f(0)) = (0,2)$: f est en dessous du plan tangent.

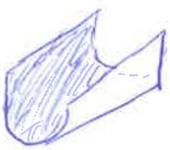
→ si $\mathrm{sign}(D^2f(0)) = (1,1)$: ($h \mapsto (u_1(h), u_2(h))$ C^1 difféo, u_1 et u_2 ne peuvent s'annuler simultanément qu'en $h=0$, utile pour ce qui précède aussi).
La surface traverse son plan tangent en une courbe admettant un point double en $(a, f(a))$ → dans l'idée (project°) courbes : $u_1 = +u_2$ et $u_1 = -u_2$.
(il faudrait détailler un peu ⊕).



Mais on peut direct le voir avec Taylor :
$S(h) = \frac{1}{2} D^2f(a).(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
et on peut se débrouiller à partir de ça.

(Si $D^2f(a)$ dégénérée, il faut aller ⊕ loin dans le développement de Taylor)
→ plein de comportements différents
→ x^2, x^2y^3, $x(x^2-3y^2)$

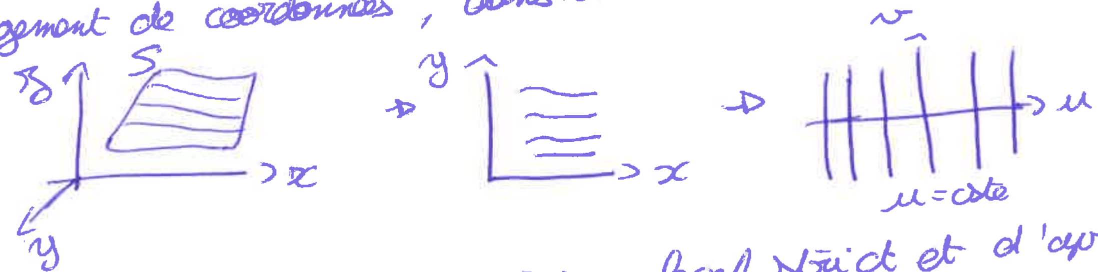
* Applications pour la théorie de Morse
→ histoires de variétés, pour les approcher, les classifier.
(Berger et Gostiaux)



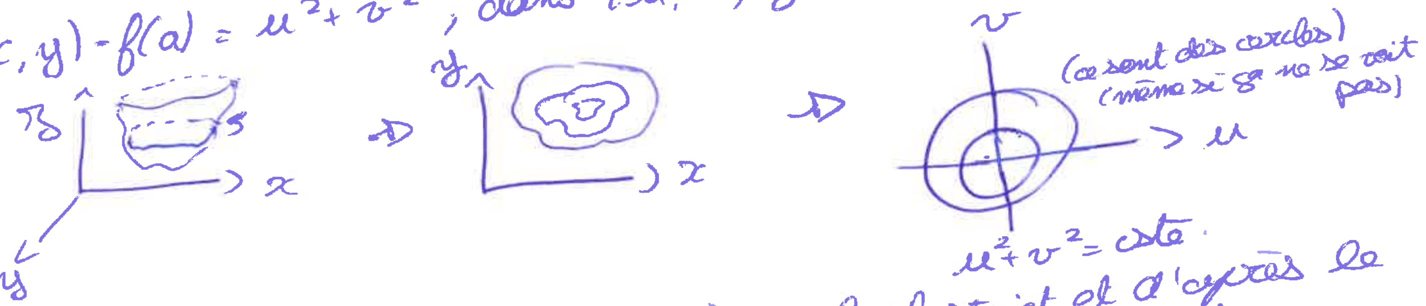
* Une deuxième application (où on utilise un peu + le thm) est dans le Bernis et Bernis : on utilise le lemme de Morse pour montrer la stabilité d'un point d'équilibre d'une équa diff.

* Une troisième application (toujours dans le Rouvière) : étudier les courbe de niveau d'une surface au niveau d'un point critique :

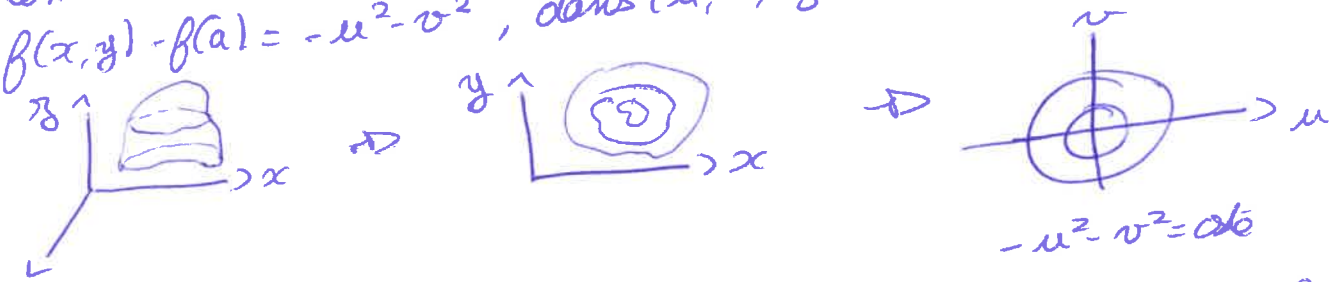
• si a n'est pas un point critique, $(x,y) \mapsto (u,v) = (f(x,y), y)$ est un changement de coordonnées, dans les coordonnées (u, v, z), on a un plan



• si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ ++ ⇒ minimum local strict et d'après le lemme de Morse, il existe un chgt de coord local $(x,y) \mapsto (u,v)$ tel que $f(x,y) - f(a) = u^2 + v^2$, dans (u, v, z), on a une paraboloïde :



• si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ −− ⇒ maximum local strict et d'après le lemme de Morse, il existe un CDC local $(x,y) \mapsto (u,v)$ tel que $f(x,y) - f(a) = -u^2 - v^2$, dans (u, v, z), on a une paraboloïde :



• si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ +− ⇒ point selle, et d'après le lemme de Morse, il existe un CDC local $(x,y) \mapsto (u,v)$ tel que $f(x,y) - f(a) = u^2 - v^2$, dans (u, v, z), on a une paraboloïde hyperbolique.