101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

I - Généralités sur les actions de groupe

1) Définitions, propriétés et exemples

Grand Combat : def d'une act° de groupe, la remarque qui suit et rq avec la donnée d'un morphisme $G \to S(E)$, def d'une action fidèle, transitive, ex de la translat° à gauche*, de la conjugaison, de l'act° de $S(E)$ sur E, de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$, def du stabilisateur, def d'une orbite, d'un point fixe, ex de la conjugaison, rq sur les équivalences exprimées avec orbite et stabilisateur * thm de Cayley !

2) Action d'un groupe fini sur un ensemble fini

Grand Combat : relat° orbite - stabilisateur

Rombaldi : équat° aux classes, ex dans le cas de l'act° par conjugaison (mettre en lemme ce qui concerne l'act° de gp) cardinal du cône nilpotent

CVA : appli au cardinal du cône nilpotent

Grand Combat : Formule de Burnside

3) Première application aux p-groupes

Rombaldi : def d'un p-groupe, équat° aux classes dans ce cas, thm de Cauchy, les 2 lemmes,

Combes : corollaire du thm de Cauchy pour un p-groupe, G d'ordre $p^2 \Rightarrow$ abélien (donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ ou $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$)

II - Exemple d'application en théorie des groupes : le groupe symétrique

Ulmer : act° de S_n sur $[\![1,n]\!]$, rq sur stabilisateurs, act° de $<\sigma>$ sur S_n et def de pts fixes, du support

Grand Combat : def d'une orbite, def d'un cycle, thm de décomposition en cycles à supports disjoints, (Ulmer) def du type, classe de conjugaison déterminées par le type, (Ulmer) ex dans S_4, rappel de la def de A_n, unique sous gp d'indice 2 de S_n, éventuellement les générateurs, simplicité de A_n, sous gp distingués de S_n

Perrin : def automorphismes intérieurs, $\boxed{\text{Automorphismes de } S_n}$ (lemme et thm), corollaire $Aut(S_n) \simeq S_n$, rq : $Aut(S_6) \neq Int(S_6)$.

III - Exemple d'application en algèbre linéaire : action sur les ensembles de matrices

+ Rombaldi

H2G2 : act° par translat° à gauche / à droite (⚠ à faire en sorte que ce soit une act° à gauche), équivalence et orbite, act° par équivalence, eq avec même rang, act° par congruence, interprétat° forme quad, thm sur les invariants, O_n = stab de l'identité, act° par congruence, rq sur la réduct° sur les invariants.

IV - Exemple d'application en géométrie : isométries préservant une figure

Ulmer : déf du groupe diédral, agit sur les sommets du polygone, donc on a un morphisme $D_n \hookrightarrow S_n$, générateurs

Rombaldi : $S_3 \simeq D_3$, et $S_3 = Is$ (triangle équilatéral)

$H_2G_2^1$: lemme $Is(\varphi(X)) \simeq Is(X)$, $\boxed{\text{Isométries du cube et du tétraèdre}}$ (lemme + 2 thm), appli au nbr de coloriages du cube.

Refs : Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géom, Rombaldi

CVA : Carnet de voyage en algèbre, Caldero & Peronnier

Combes : Algèbre et géométrie, Combes

Ulmer : Théorie des groupes, Ulmer

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

$H_2G_2^1$: Histoires hédonistes ..., Tome 1, Caldero & Germoni

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications

I - Le plan complexe

1) Fonctions trigonométriques

Arnaudiès : def de l'exponentielle, du cos et du sin, formules de Moivre, d'Euler, $\cos^2 + \sin^2 = 1$, appli : linéariser $\cos^n$ ou $\sin^n$, ou $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, appli : calcul du noyau de Dirichlet utile aux séries de Fourier

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2) Groupe des nombres complexes de module 1

Arnaudiès : def de $\mathbb{U}$ via noyau du module, rq sur identificat° à $\mathbb{S}^1$, iso de grp $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}^*$, puis morphisme de grp surj $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ de noyau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ csq : $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

+ $\mathbb{S}^1$ compact et connexe par arcs

3) Géométrie plane

Arnaudiès : def de l'argument et de la forme polaire, de l'argument principal, rq : utile pour def le log $\mathbb{C}$.

Combes : paramétrisat° de $\mathbb{S}^1$ avec $]-\pi,\pi[\to \mathbb{S}^1$, $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ appli aux triplet pythagoriciens ⚠ $d \in \mathbb{Z}$ et $(a,b,c) \in \mathbb{Z}$

Audin : prop unique rotat° qui envoie $u \in \mathbb{S}^1$ sur $v \in \mathbb{S}^1$, biject° entre et les angles et $SO_2(\mathbb{R})$, def de la mesure d'un angle

Rombaldi : def de la mesure principale, def de l'affixe d'un point, d'un vecteur, thm lien entre argument et angle, ex : de thm de Pythagore version complexe, rq : on verra d'autres applis en géom par la suite.

II - Racines de l'unité

1) Définition et premières propriétés

Arnaudiès : def des $\mathbb{U}_n$ via noyau du morphisme $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $z \mapsto z^n$

Gozard : grp cyclique iso à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, prop sur les générateurs, def de $\mathbb{U}_n^*$, 2ème prop sur les générateurs, ex de $\mathbb{U}_1^{(*)}$, $\mathbb{U}_2^{(*)}$, $\mathbb{U}_3^{(*)}$, $\mathbb{U}_4^{(*)}$, $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{U}_d^*$, rq sur représentat° dans le plan (cf annexe)

Combes : sous groupe compact de $(\mathbb{C}^*, \times) \Rightarrow \mathbb{U}$ ou un $\mathbb{U}_n$

2) Polynômes cyclotomiques

Perrin + Gozard : def des Φ_n, les 4 premiers, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, formule pour Φ_{p^n}, Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

<u>Gozard</u> : corollaire sur $(\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}) = \varphi(n)$, appli : si K est une extension finie de $\mathbb{Q}$, alors il y a un nbr fini de racines de l'unité dans K

III - Applications

1) Matrices circulantes

<u>Gourdon</u> : def et diagonalisation de la matrice

<u>CVA</u> : suite de polygones CV vers le barycentre

2) Application aux polynômes

<u>Queff-Queff</u> : def de la mesure de Mahler et de la hauteur, encadrement, multiplicativité, ex des polynômes cyclo, thm de Kronecker, prop sur calcul de la mesure

3) Constructibilité à la règle et au compas

<u>Gozard + Carrega</u> : def d'un pt constructible, qq constructᵒ de base (dessin en annexe), notᵒ de réel constructible, thm : E est un sous corps de $\mathbb{R}$ stable par $\sqrt{\ }$, thm de Wantzel et corollaire, ex avec π et $\sqrt[3]{2}$ → csq pour les pb historiques, def $\mathbb{C}$ constructible, eq entre $\underset{x+iy}{z} \in E(i) \Leftrightarrow x, y \in E$, csq : $E(i)$ sous corps de $\mathbb{C}$ stable par $\sqrt{\ }$, GW version $\mathbb{C}$, def polygone constructible (avec $e^{\frac{2i\pi}{n}}$), lemme $e^{\frac{2i\pi}{mn}} \in E(i) \Leftrightarrow e^{\frac{2i\pi}{m}}, e^{\frac{2i\pi}{n}} \in E(i)$, def nbr de Fermat, $\boxed{\text{Thm de Gauss Wantzel}}$, puis thm complet, exemple (dessin en annexe)

<u>Refs</u> : <u>Arnaudiès</u> : Cours de maths 1, Algèbre, Arnaudiès & Fraysse

<u>Combes</u> : Algèbre et géométrie, Combes

<u>Audin</u> : Géométrie, Audin

<u>Rombaldi</u> : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi

<u>Gozard</u> : Théorie de Galois, Gozard

<u>Perrin</u> : Cours d'algèbre, Perrin

<u>Gourdon</u> : Algèbre, Gourdon

<u>CVA</u> : Carnet de voyage en algèbre, Caldero & Peronnier

<u>Carrega</u> : Théorie des corps, la règle et le compas, Carrega

<u>Queff-Queff</u> : Analyse Complexe, Queffélec x 2.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous groupes distingués et groupes quotients. Applications

I - Définitions, premières propriétés et thm d'isomorphisme

1) Conjugaison dans un groupe

Grand Combat : def auto intérieur, groupes / élts conjugués + exemples

Ulmer : Act° par conjugaison (définie par $G \hookrightarrow Int(G) \subset Aut(G)$)
+ Equation aux classes $|G| = |Z(G)| + \sum_i [G : G_{x_i}]$

Perrin : Contre ex gp distingué $\Rightarrow$ on ne peut pas définir l'act° sur n'importe quel sous groupe

2) Sous groupes distingués

Perrin : def sous gp distingué, rq + prop Ker f distingué (réciproque $\Rightarrow$ + tard)
+ exemples basiques + $f : G \to G'$ morphisme $\Rightarrow$ ($H \lhd G \Rightarrow f(H) \lhd f(G)$) et ($H' \lhd G' \Rightarrow f^{-1}(H') \lhd G$)

Grand Combat : indice 2 $\Rightarrow$ distingué, ex : $\langle r \rangle \lhd D_n$

3) Groupes quotients et thm d'isomorphisme

Ulmer : def G/H, thm G/H gp $\Leftrightarrow$ H distingué, ex, prop $H \lhd G \Leftrightarrow H = Ker(f)$

Grand Combat : rq gp abélien + $\bar{x} = \bar{1}_G \Leftrightarrow x \in H$ + prop correspondance sous gp $\supset H$ et ss gp de G/H, factorisation des morphismes, 1er thm d'isomorphisme + ex (autre ex : $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$)

II - Groupes et sous groupes remarquables

1) Groupes simples

Perrin : def groupe simple, ex $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Grand Combat : gp abélien simple $\Leftrightarrow$ cyclique d'ordre premier ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier)
Rq : morphisme au départ d'un gp simple = trivial ou injectif.

2) Sous groupes caractéristiques

Ulmer : def sous gp caractéristique, caractéristique $\Rightarrow$ distingué mais $\Leftarrow$ faux : $\{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais $\alpha : (x,y) \mapsto (y,x)$ ne stabilise pas + ss gp car/dis de groupe car (contreex : $\langle (12)(34) \rangle \lhd V_4 \lhd A_4$ mais pas $\lhd A_4$)

Grand Combat : Def du centre $\Rightarrow$ caractéristique, $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ abélien, ex de centres
+ rq : $Int(G) \simeq G/Z(G)$

Combes : $H < Z(G)$ et G/H cyclique $\Rightarrow G$ abélien + corollaire pour p groupes

Ulmer : Def gp dérivé $\Rightarrow$ caractéristique, $D(G) = \{e\} \Leftrightarrow G$ abélien + ex
+ $G/D(G)$ abélien (abélianisé) et G/H abélien $\Leftrightarrow D(G) \subset H$.

3) Produit direct

Combes : Prop/déf du produit direct, rq produit direct ne peut être simple + prop caractérisation du produit direct

Ulmer : Applicat° $\to$ si $|G|=4$, $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, thm chinois $\to$ système

III - Applications de la conjugaison

1) Groupe symétrique

Ulmer : thm produit de cycles, déf type, prop σ et ρ conjugués $\Leftrightarrow$ m type + nbr de classes de conjugaison $= \mathcal{P}(n)$ + exo

Grand Combat : S_n engendré par... + A_n engendré par..., $n \geq 5 \Rightarrow$ 3-cycles conjugués dans A_n $\to$ + Rombaldi

Perrin : $\boxed{A_n \text{ simple}}$, $D(A_n)$ et $D(S_n)$, $D(A_4) \simeq V_4 \lhd A_4$, $n \geq 3$, $Z(S_n) = \{id\}$, $n \geq 5$, grp distingués de S_n, $\boxed{Aut(S_n) = Int(S_n)}$, $Aut\, S_6 \neq Int(S_6)$

2) Conjugaison sur $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

H_2G_2[1] : • Act° par conjugaison de $Gl_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, thm + corollaire $\to$ χ est un invariant de similitude, A diag $\Leftrightarrow$ O_A est fermée

• Action par conjugaison de $Gl_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ $\to$ blocs de Jordan sont des invariants de similitude

---

Refs : Grand Combat : Algèbre le grand combat, Berhuy

Perrin : Cours d'algèbre

Ulmer : Théorie des groupes

Combes : Algèbre et géométrie

H_2G_2[1] : Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Caldero et Germoni, Tome 1.

Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi

104 : Groupes finis. Exemples et applications

I - Généralités sur les groupes finis

1) Ordre et théorème de Lagrange

Grand Combat : def de l'ordre d'un groupe, exemple, def de l'indice, exemple, indice 2 ⇒ distingué, thm de Lagrange, def de l'ordre d'un elt, thm qui suit, contre ex à la réciproque, corollaire sur $o(x^d)$, appli à l'ordre d'un elt dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, prop sur $xy=yx + o(x) \wedge o(x) = 1 \Rightarrow o(xy) = o(x)o(y)$, contre ex importance des hyp : x et x^{-1}, def d'un groupe cyclique.

2) Actions de groupe

Grand Combat : def d'une action de gp, rq eq à la def avec le morphisme, def du stab et de l'orbite, des points fixes, relat° orbite stabilisateur
Rombaldi : équat° aux classes, cas particulier de la conjugaison

3) Application aux p-groupes

Rombaldi : def d'un p-groupe, corollaire de l'équat° aux classes, théorème de Cauchy
Combes : corollaire du thm de Cauchy pour p-groupe, ordre p premier ⇔ cyclique et simple, les 2 lemmes qui suivent, G d'ordre p^2 est abélien, rq : on pourra conclure $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ ou $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

II - Cas des groupes abéliens

1) Groupes cycliques

Rombaldi : groupe cyclique iso à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ex : $\mathbb{U}_n$ les racines de l'unité, iso $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, sous groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ex de $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$, thm chinois et csq sur les inversibles et sur $\varphi(n)$
Grand Combat : def de $\varphi(n)$, $= |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$,
Perrin + Rombaldi : $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique, $\boxed{\text{Condition de cyclicité de } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$
appli aux groupes d'ordres pq.

2) Théorème de structure des groupes abéliens finis

Combes : lemme puis thm de structure, def des invariants, coro sur dec primaire, def, exemples x 2, csq : gp d'ordre p^2 ⇒ $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$
Ulmer : classificat° des groupes jusqu'à l'ordre 8 → tableau à mettre en annexe.

III - Exemples importants de groupes non abéliens

1) Groupes symétriques et alternés

Ulmer : def de S_n, rq : non abélien si $n \geq 3$, thm de Cayley, $\langle\sigma\rangle$ agit sur $\{1,…,n\}$ S_n (def de pts fixes, de support)

Grand Combat + Ulmer : (def de cycle), thm de décomposit°, générateurs de S_n, def du type, conjugués $\Leftrightarrow$ m type, (def signature), def de A_n (distingué), générateurs, Simplicité de A_n pour $n=3$ ou $n \geq 5$

Perrin : + Rombaldi , csq sur ss-gp distingués de S_n, $D(A_n)$ et $D(S_n)$, $V_4 \lhd S_4$.

2) Isométries de figures

Ulmer : def de D_n, thm sur les générateurs et sur $D_n = \{id, r, \dots, r^{n-1}\} \cup \{s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$ et la relation sur les elts

Rombaldi : thm sur iso avec les autres gp "de type D_n", csq : d'après la prop en fin II-1), gp d'ordre $2q$ $\to$ soit $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ si abélien soit D_{2q} si pas abélien, csq : $S_3 \simeq D_6$; les 2 thm sur iso du cube, iso du tétraèdre

Refs : Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre & géom, Rombaldi

Combes : Algèbre & géométrie, Combes

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Ulmer : Théorie des groupes, Ulmer

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini - Applications

I - Généralités sur S_n

1) Définitions et premières propriétés

Grand Combat : def de $S(E)$ et S_n, $\mathfrak{S}(E) \simeq \mathfrak{S}(E')$ si même card $\to$ csq : si $|E| = n$, $S(E) \simeq S_n$, card$(S_n) = n$, S_n pas abélien pour $n \geq 3$.

Ulmer : Thm de Cayley

2) Supports, orbites et cycles : action de S_n sur $[\![1, n]\!]$

Ulmer : act° de S_n sur $[\![1, n]\!]$, remarque sur les stabilisateurs, action de $\langle \sigma \rangle$ sur S_n, def des points fixes et du support

Grand Combat : propriétés du support, 2 permutat° à sup disjoints commutent, def de l'orbite, d'un cycle, exemple et notation, thm de décomposition en cycles, exemple, S_n engendré par les cycles, par les transpos, p cycle d'ordre p

Ulmer : def du type, exemple, ordre(σ) = ppcm(type)

3) Conjugaison dans S_n

Grand Combat : conjugaison cycle, permutat° conjuguées ssi même type, exemple

Corollaire : $p(n)$ classes de conjugaison dans S_n

Ulmer : exemple des classes de conjugaison dans S_4

II - Structure de A_n et S_n

1) Signature et groupe alterné

Ulmer : def de la signature, différentes façons de calculer $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{Im}(\varepsilon) = \{\pm 1\}$,

Grand Combat : ε unique morphisme non trivial $S_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.

Ulmer : def permutat° paire, impaire, def de A_n et propriétés, ex avec A_4

Grand Combat : A_n = unique sous grp d'indice 2 de A_n

2) Générateurs et conséquences

Grand combat : S_n engendré par les $\{(1\ i)\}$, les $\{(i\ i+1)\}$, par $(1\ 2)$ et $(1\ 2 \dots n)$, rq : il s'agit du plus petit système de générateurs car S_n non abélien si $n \geq 3$, rq 2 : ces générateurs sont sympas car tous conjugués et bcp de points fixes, A_n engendré par les doubles transpo, les 3 cycles, 3 cycles conjugués dans A_n si $n \geq 5$.

Perrin : $\boxed{\text{Simplicité de } A_n \text{, pour } n \geq 5 \text{ et } n = 3}$, sous grp distingués de S_n / $D(A_n)$ et $D(S_n)$, sous grp d'indice n de S_n, $V_4 \triangleleft A_4$.

+ Rombaldi

3) Automorphismes de S_n

Perrin : def automorphisme intérieur, si φ(transpo) = transpo, φ est intérieur,
Automorphismes de S_n, corollaire : $Aut(S_n) \simeq S_n$, rq : $Aut(S_6) \neq Int(S_6)$

III - Applications

1) Déterminant

Gourdon : def appli n-linéaire, appli alternée, antisymétrique, équivalence si $car(K) \neq 2$, ensemble des formes linéaires alternées de dim 1, def du déterminant, ppté det d'une famille de vecteurs.

2) Matrices de permutation

Rombaldi : def d'une matrice de permutation, injection de S_n dans GL_n.
thm de Brauer : $\sigma, \tau \in S_n$ sont conjuguées ssi P_σ et P_τ sont semblables (dans $GL_n(K)$ avec K de car. nulle)

3) Polynômes symétriques

Gourdon : def polynôme symétrique, exemple, polynômes symétriques élémentaires, thm de décomposit° en poly. sym. élém., exemple.

Refs : Grand Combat : Algèbre : le grand combat, Berhuy

Ulmer : Théorie des groupes, Ulmer

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Gourdon : Algèbre, Gourdon

Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie, Rombaldi

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications

I- Groupes linéaire et spécial linéaire

1) Généralités

Rombaldi : def de $GL(E)$, de $GL_n(\mathbb{K})$, iso entre les 2 en fixant une base, def de $SL(E)$, de $SL_n(\mathbb{K})$, thm qui suit (ss-grp distingué),
$GL(E) \simeq SL(E) \rtimes \mathbb{K}^*$
Perrin : cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $SL_n(\mathbb{F}_q)$.

2) Générateurs et opérations élémentaires

Grand Combat : def d'une transvect°, prop avec équivalences, rq sur $\in SL(E)$ et inversible d'inverse une transvect°, def mat. de transvect°, opérat° élémentaires (en annexe), def d'une dilatat° prop avec équivalence, def d'une matrice de dilatat°, opérat° élémentaires (en annexe), $\boxed{\text{Générateurs de } GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } SL_n(\mathbb{K})}$ (dev 1, partie 1), corollaire sur $GL_n(\mathbb{K})$ engendré par les dilatat°, rq sur le pivot de Gauss, rq sur faire attent° au lien matrice / endo.
Perrin : les 3 propositions sur les classes de conjugaison des dilat / transv.

II- Quelques sous groupes de $GL(E)$

1) Centre et groupe dérivé

Rombaldi + Perrin : def d'une homothétie, lemme sur laisse stable toutes les droites, centre de $GL(E)$ et $SL(E)$ (et iso), def de $PGL(E)$ et $PSL(E)$ (et $PGL_n(\mathbb{K})$ et $PSL_n(\mathbb{K})$), rq dans le cas algébriquement clos, cardinal pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, simplicité de $PSL_n(K)$, thm sur dérivé de $GL(E)$ et $SL(E)$ éventuellement les isos exceptionnels ?

2) Groupe orthogonal

Grand Combat + Perrin : def de $O(E)$, $SO(E)$, de $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$, lien entre les 2, exemples, (Rombaldi) réduct° des isométries, ex en dim 3, lemme sur $u^2 = id \Rightarrow \ker(u-id) \oplus \ker(u+id) = E$, def de réflexion, de renversement, $O(E)$ engendré par les réflexions, $SO(E)$ engendré par les renversements,
éventuellement centre et grp dérivé ?

3) Quelques sous groupes finis

OA : def d'une matrice de permutation, $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$, morphisme de grp $S_n \to GL_n(\mathbb{K})$, $\sigma \mapsto P_\sigma$ $\Rightarrow$ sous grp d'ordre n, thm de Brauer, Cayley $\Rightarrow G \hookrightarrow S_{\#G} \hookrightarrow GL_{\#G}$
Perrin : les matrices triangulaires supérieures strictes = p Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$, thm : existence d'un p-Sylow (éventuellement rappel def Sylow avant.

III - Actions de GL(E)

1) Actions sur les sous-espaces vectoriels

CVA : act° de GL(E) sur E par $f \cdot x = f(x)$, et sur les SEV par $f \cdot V = f(V)$ (orbite = m̄ dim), act° transitive, $stab_F \simeq \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ dim F, codim F, def de l'action sur une somme directe avec dim fixée (généralisé), $stab_{E_1 \oplus \dots \oplus E_n} \simeq \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, appli au dnb et au cône nilpotent

Mansuy : def d'un drapeau, d'un drapeau complet, act° de GL(E) sur les drapeaux (orbite = m̄ dim), act° transitive, stab de $F_1, \dots, F_k \simeq$ matrice triangulaire par blocs, stab d'un drapeau complet iso aux gp des mat. triang sup.
+ (H2G2^1 pour tout ça où il y a un peu des choses)

2) Actions sur les espaces de matrices

H2G2^1 : def de l'act° par équivalence, invariant = le rang, rq sur pivot de Gauss, def de l'act° par conjugaison, interprétat° et intérêt pour la réduction, thm réduct° de Frobenius et définit° des invariants, def de l'act° par congruence, interprétat° forme quad, thm sur les invariants, O_n = stabilisateur de l'identité

dev 1, partie 2

IV - Topologie pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

FGN Algèbre 2 + CVA : $\boxed{\text{Connexité de } SL_n(\mathbb{K}), GL_n(\mathbb{K}) \text{ et c.c. de } GL_n(\mathbb{R})}$

Rouvière : $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert dense dans $M_n(\mathbb{K})$, appli : diff du déterminant

H2G2^1 : lemmes : $O_n(\mathbb{R})$ compact, $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^{+}(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{Décomposition polaire}}$ les 2 corollaires ($|||A|||_2$ et sg compacts de $GL_n(\mathbb{R})$), exp : $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéo et csq sur homéo pour $GL_n(\mathbb{R})$. (un peu long...)

Refs :
- Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre & géométrie, Rombaldi
- Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy
- Perrin : Cours d'algèbre, Perrin
- OA : Objectif agrégation, B.M.P
- CVA : Carnet de voyage en algèbrie, Caldero & Peronnier
- Mansuy : Algèbre linéaire, réduct° des endos, Mansuy & Mneimné
- H2G2^1 : Histoires hédonistes..., Tome 1 Caldero & Germoni
- FGN Algèbre 2 : Oraux X-ENS, Algèbre 2, F.G.N.
- Rouvière : PGCD, Rouvière

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications

I - Sous-groupe engendré par une partie

Rombaldi : intersect° de sous groupes = sous gp, def du sous groupe engendré par une partie, notation, def d'une partie génératrice, de type fini, théorème qui suit (et l'autre d'après), exemple du groupe dérivé et thm qui va avec

Grand Combat : prop $f(<P>) = <f(P)>$, ex de $<x>$, def de l'ordre, csq : $<x> = \{1_G, x, \dots x^{n-1}\}$.

II - Groupes monogènes et groupes cycliques

1) Définitions et propriétés

Rombaldi : def d'un groupe monogène, d'un gp cyclique, csq qui suivent, des exemples, thm : iso à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, générateurs, card premier $\Rightarrow$ cyclique, thm qui suit qui donne la réciproque, def de sous gp d'un gp cyclique, $\varphi(d)$ $(= |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Perrin : csq : tout sous-gp fini du gp multiplicatif d'un corps fini est cyclique
$\Rightarrow$ en particulier $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique iso à $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

2) Conditions de cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Rombaldi : iso $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ (motivat° à étudier $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$)

Grand Combat : thm chinois, csq sur les inversibles et sur multiplicativité de φ

Perrin + Rombaldi : $\boxed{\text{Condition de cyclicité de } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$, éventuellement appli aux gp d'ordre pq

III - Groupe symétrique et groupe alterné

1) Groupe symétrique

Ulmer : def de S_n, $<\sigma>$ agit sur S_n, def de pts fixes support, def de cycle, thm de décomposit°

Grand Combat : générateurs de S_n : cycles, transpositions, exemples

Rombaldi : ex pour les permutations, rq sur pas de partie ⊖ petite car pas abélien

Grand Combat : autres exemples,

2) Groupe alterné

Ulmer : def de la signature, def A_n et pptés

Grand Combat : A_n engendré par les doubles transpo, les 3 cycles, 3 cycles sont conjugués dans A_n si $n \geq 5$

Perrin + Rombaldi : $\boxed{\text{Simplicité de } A_n \text{ pour } n \geq 5 \text{ et } n = 3}$, sous gp distingués de S_n, $D(A_n)$, $D(S_n)$, sous gp d'indice n de S_n, $V_4 \triangleleft A_4$.

3) Automorphismes de S_n

Perrin : def automorphismes intérieurs, si φ(transpo) = transpo, φ intérieur, automorphismes de S_n, csq : $Aut(S_n) \simeq S_n$, rq : $Aut(S_6) \neq Int(S_6)$

IV - Groupe linéaire et groupe orthogonal

1) Groupe linéaire et spécial linéaire

Grand Combat : def de $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, def de matrices de dilatat° et de transvect°, act° sur les lignes et les colonnes, pivot de Gauss, csq : calculer le rang d'une matrice, thm : $SL_n(K)$ engendré par les transvect° et $GL_n(K)$ engendré par transvect° + dilatat°, csq : $SL_n(K)$ pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, CNX PA, et $GL_n(\mathbb{R})$ 2 CC : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ (cf FGN Algèbre 2 au besoin)

éventuellement : Rombaldi : groupes dérivés de $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$

2) Groupes orthogonal et spécial orthogonal

Grand Combat : def de $O(E)$, $SO(E)$, (+ Perrin), def de réflexion, de renversement, $O(E)$ engendré par les réflexions, $SO(E)$ engendré par les renversements, appli : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

---

Refs : Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi

Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Ulmer : Théorie des groupes, Ulmer

FGN Algèbre 2 : Oraux X-ENS, Algèbre 2, F.G.N.

120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications

I - Structure de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1) Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Gourdon + Rombaldi : rappel division euclidienne, def de la relation $x \equiv y [n]$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de $\bar{x}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, en biject° avec les restes par la DE, structure de groupe, $o(\bar{k}) = \frac{n}{pgcd(k,n)}$, sous groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, rappel Bézout, générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, grp cyclique iso à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2) L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Rombaldi : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est muni d'une structure d'anneau
Grand Combat : elts inversibles, diviseur de zéro, nilpotents, idempotents,
Rombaldi : idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ▷ idéaux principaux : $p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $p|n$ premier
automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ iso à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

3) Cas particulier : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ intègre $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ corps $\Leftrightarrow$ p est premier
Rombaldi : $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique
Gourdon : théorèmes de Fermat et de Wilson
Perrin : def sous-corps premier, caractéristique ▷ car p $\Rightarrow$ $\mathbb{F}_p$ sous corps premier et $\# = p^n$, thm d'existence et d'unicité, $\mathbb{F}_p[X]/\langle P \rangle$ iso à $\mathbb{F}_{p^n}$, des exemples pour $\mathbb{F}_8$, $\mathbb{F}_{16}$
Rombaldi : si P irred de deg n,

4) Théorème chinois et applications

Grand Combat : def de $\varphi(n)$, $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$, ex de $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$, thm chinois, csq sur iso $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ et $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$, et sur $\varphi(n)$ en général selon sa décomposition.
Perrin + Rombaldi : $\boxed{\text{Condition de cyclicité de } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$

II - Applications pratiques

1) Résolutions d'équations

Rombaldi : méthode pour obtenir la réciproque dans le thm chinois, exemple d'équation
Gourdon : thm de Liouville.
Combes : l'équat° $x^2 + y^2 = pz^2$ avec $p \equiv 3 [4]$

2) Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec p premier)

Rombaldi + Grand Combat : a carré $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} = 1 [p]$, def du symbole de Legendre, morphisme de grp, 3 lois de réciprocité, rq sur "en pratique"

Grand Combat : def du symbole de Jacobi, csq sur $\triangle$ $\left(\frac{m}{m}\right) = 1 \not\Rightarrow m$ est un carré mod m ! + utilité pour les tests

3) Tests de primalité et RSA

Demazure : def d'un nbr de Carmichael, exc, $\boxed{\text{Tests de primalité}}$ (critère de Korselt, prop Solovay Strassen, prop sur $\# \leq \frac{\varphi(n)}{2}$, algo qui va avec) $\Rightarrow$ avec Perrin

Gozard : test de Pépin

Gourdon : chiffrement RSA

III - Applications théoriques

1) Classification des groupes abéliens finis

Combes : lemme puis classificat° des gp abéliens finis, csq sur $G \simeq (\mathbb{Z}/p_1^{r_1}\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/p^{r_k}\mathbb{Z})$, def de invariants et de déc. primaire, un exemple

2) Structures de quelques groupes finis

Combes : G d'ordre p^2 $\Rightarrow$ abélien iso à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$

Rombaldi : morphismes de gp et d'anneaux entre $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Perrin : appli à l'étude de gp d'ordre pq, exc avec $2q$

Refs : Gourdon : Algèbre, Gourdon

Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre & géométrie, Rombaldi

Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Combes : Algèbre & géométrie, Combes

Demazure : Cours d'algèbre, Demazure

Gozard : Théorie de Galois, Gozard

121 : Nombres premiers. Applications

I - Nombres premiers et résultats fondamentaux

1) Définition et propriétés arithmétiques

*crible d'Ératosthène

Rombaldi : définition d'un nombre premier, des exemples simples, tout entier de $\mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$ a un diviseur premier, et au ⊖ 1 tq $2 \leq p \leq \sqrt{n}$, * p premier $\Rightarrow p \wedge n = 1$ ou $p \mid n$, lemme d'Euclide, thm fonda. de l'arithm. csq pour les pgcd et ppcm, def de la valuation, rq : $\mathbb{Z}$ est factoriel,

2) Répartition des nombres premiers

Rombaldi : $\mathcal{P}$ est infini, $\sum \frac{1}{p}$ diverge $\Rightarrow$ pour la preuve cf Gourdon

Gourdon : thm de Dirichlet faible et fort (admis)

Rombaldi : thm des nbr premiers (admis), corollaire (raréfact° de Legendre), thm de Bertrand (admis)

II - Applications aux groupes

1) Les p-groupes

Combes : *ordre premier $\Leftrightarrow$ cyclique et simple, pour un p-grp, $Z(G) \neq \{e\}$, si $\# G = p^2$, G est abélien ($\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$)

thm de Cauchy et corollaire

2) Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

csq $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ corps $\Leftrightarrow p$ premier

Rombaldi : iso $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, caractérisat° des inversibles, def de $\varphi(n)$,

Grand Combat : thm chinois, csq sur les inversibles, csq du thm chinois et expression de $\varphi(n)$ $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$, $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$, en général.

Perrin + Rombaldi : $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique, lemme $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k \geq 1$, $\boxed{\text{condition de cyclicité de } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$, appli aux grp d'ordre pq

III - Corps finis

1) Construction et propriétés

Perrin : def du sous corps premier, de la caractéristique, si $\mathrm{car}(K) = p$, sous corps premier $= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\# K = p^n$, def du Frob $\Rightarrow$ automorphisme, thm d'existence et d'unicité, $\mathbb{F}_q^*$ cyclique, des exemples

Rombaldi : si P est irred de deg n, $\frac{\mathbb{F}_p}{\langle P \rangle}$ iso à $\mathbb{F}_{p^n}$

2) Carrés dans $\mathbb{F}_q$

Perrin : x carré dans $\mathbb{F}_q \Leftrightarrow x^{\frac{q-1}{2}} = 1$, exemple, (-1) carré $\Leftrightarrow q \equiv 1 [4]$, appli : infinité de nbr premiers de la forme $4n+1$

Rombaldi + Grand Combat : def du symbole de Legendre, morph de gr1, loi de réciprocité, rq sur "en pratique", def du symbole de Jacobi, rq sur $\triangle$ $\left(\frac{n}{m}\right)=1 \not\Rightarrow$ n est un carré mod m (contre ex) + utilité pour les lg

IV - Polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$

1) Critères d'irréductibilité

Perrin : Critère d'Eisenstein, exemples, thm de réduction (direct avec $\mathbb{F}_p$), exemples, contre ex de la réciproque, thm d'irred avec racines dans les extensions de deg $\leq \frac{n}{2}$, exemple.

2) Polynômes cyclotomiques

Gozard + Perrin : def de U_n, U_n^*, des polynômes cyclotomiques, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, cas des Φ_{p^n} irréductibilité des polynômes cyclo, corollaire : $[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}]=\varphi(n)$

csq : l'extension finie de $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ nbr fini de racines de l'unité

V - Tests de primalité et RSA

Demazure : def d'un nbr de Carmichael, ex, $\boxed{\text{Tests de primalité}}$ (critère de Korselt, prop Solovay Strassen, prop sur $\# \leq \frac{\varphi(n)}{2}$, algo qui va avec), éventuellement test de Miller Rabin   thm de Fermat :

Gozard : test de Pépin

Gourdon : chiffrement RSA

Refs : Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géom., Rombaldi

Gourdon : Algèbre, Rombaldi

Combes : Algèbre et géométrie, Combes

Grand combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Gozard : Théorie de Galois, Gozard

Demazure : Cours d'algèbre, Demazure

122 : Anneaux principaux - Exemples et applications

I - Notion de primalité

1) Idéaux et anneaux principaux

Ulmer : def d'idéal, d'idéal principal, ex sur $\mathbb{Z}$, contre ex avec $\langle 2, X\rangle$ dans $\mathbb{Z}[X]$, def d'un anneau principal

Rombaldi : des exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$, les nombres décimaux

2) Un cas particulier important : les anneaux euclidiens

Ulmer : def d'un anneau euclidien, euclidien => principal

Rombaldi : les mêmes exemples, ex $\mathbb{K}[X]$ principal <=> $\mathbb{K}$ corps, contre ex avec $\mathbb{K}[X,Y]$, éventuellement ex de principal non euclidien

II - Arithmétique dans les anneaux principaux

1) Divisibilité, éléments premiers et irréductibles

Ulmer : def divisibilité, elts associés, prop qui suit, def elts irréductible et premier, prop a premier <=> $\langle a\rangle$ premier, premier => irred, réciproque dans le cas principal* (+ Rombaldi les 4 équivalences), ex d'idéal premier mais non maximal dans $\mathbb{Z}[X]$ * Euclide

2) Théorème de Bézout et conséquences

Ulmer : def du PGCD, du PPCM (+ Rombaldi : def d'elts premiers entre eux (dans leur ensemble)), thm de Bézout, corollaire (ou version Rombaldi, avec associativité du pgcd et corollaire au ppcm), rq sur le cas euclidien avec algo d'Euclide étendu (ex en annexe), lemmes de Gauss et Euclide

3) Théorème chinois

Rombaldi + Ulmer : $\boxed{\text{Théorème chinois et appli aux systèmes de congruence}}$ autres applis : pour les $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, multiplicativité de φ, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique ssi $n = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, éventuellement RSA (OA)

4) Lien avec la factorialité

Ulmer : def de factoriel, rq sur Gauss et Euclide toujours vrai, thm def système de représentants, prop avec divisibilité / pgcd / ppcm, principal => factoriel, rq corps => euclidien => principal => factoriel, $\mathbb{Z}[X]$ factoriel mais pas principal

III - Applications

1) Entiers de Gauss

Perrin : def de Σ et motivat°, def de $\mathbb{Z}[i]$, de la norme, prop sur les inversibles, $\mathbb{Z}[i]$ euclidien, ses irréductibles et le théorème des 2 carrés avec des exemples

2) Facteurs invariants d'une matrice

131 devs : $\boxed{\text{Forme normale de Smith}}$

OA + Grand Combat : algo et exemples (en annexe), xq sur utilité pour les invariants de Frobenius, cas sur un corps, xq sur utile pour les systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}$, xq sur vrai sur principal

3) Algèbre linéaire

Grand Combat + Rombaldi : def du morphisme d'évaluat°, de $Ann(u)$, c'est un idéal → def de μ_u, dim de $K[u]$ et base, eq avec $K[u]$ corps, lemme de décomposit° des noyaux → les projecteurs sont des polynômes en u, csq : critère de diag, décomposition de DJC

Refs : Ulmer : Anneaux, corps, résultants, Ulmer

Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi

OA : Objectif agrégation, B. M. P

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

131 devs : 131 devs, le Barbenson et cie

Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

123 : Corps finis. Applications

I - Construction et généralités sur les corps finis

1) Extension de corps

Gozard + Perrin : def d'une extension, du degré, rq : si K, L finis, $|L|=|K|^n$, thm de la base télescopique, corollaire sur les degrés, def corps de rupture, thm existence et unicité, def corps de décomposition, thm existence et unicité.

2) Construction des corps finis : existence et unicité

Perrin : def du sous corps premier, de la caractéristique, rq : car $=0 \Rightarrow$ corps infini, et car $p \Rightarrow \mathbb{F}_p$ sous corps premier, cardinal d'un corps fini $=p^n$, rq : par ex, pas de corps de card 6, def du Frobenius, propriétés, thm d'existence et unicité des corps finis

3) Premières propriétés des corps finis

Gozard : prop sur les sous corps de $\mathbb{F}_q$, en d'autres termes, $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m} \Leftrightarrow n \mid m$

Perrin : $\mathbb{F}_q^*$ groupe cyclique (iso à $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$), exemple $\mathbb{F}_8^* \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, tout le monde sauf 1 est un générateur !, rq : en général, on ne sait pas trouver directement un générateur csq : thm de l'élément primitif.

Gozard : $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ cyclique d'ordre n, engendré par le Frobenius.

II - Les carrés dans les corps finis

1) Généralités

Perrin : def de $\mathbb{F}_q^2$ et $\mathbb{F}_q^{*2}$, leurs cardinaux, $x \in \mathbb{F}_q^{*2} \Leftrightarrow x^{\frac{q-1}{2}}=1$, exemple, $(-1) \in \mathbb{F}_q^{*2} \Leftrightarrow q \equiv 1 \bmod 4$, applicat° : infinité de nbr premiers de la forme $4m+1$

2) Symbole de Legendre

Gozard : def du symbole de Legendre, c'est un morphisme non trivial, csq de ce qu'il précède : $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=p \bmod 4$, loi de réciprocité quadratique, interprétat°, $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, exemples

III - Polynômes sur les corps finis

1) Lien entre polynômes irréductibles et corps finis

Rombaldi : si P irred de deg n, $\frac{\mathbb{F}_p[X]}{\langle P \rangle}$ est iso à $\mathbb{F}_{p^n}$, exemple avec pour $q=8$, $\mathbb{F}_8 \simeq \frac{\mathbb{F}_2[X]}{\langle X^3+X+1 \rangle}$, Dénombrement des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, corollaire : il existe des polynômes irred. de tout degré.

Gozard : exemples de poly. irred pour $p=2,3$ et $n=2,3$, rq : super pratique les poly. irred visuellement, ce serait donc bien d'avoir des critères !

2) Critère d'irréductibilité

Perrin : critère d'irréductibilité de P en fct° de ses racines dans les extensions, exemple rq : c'est pratique en soi d'après ce qu'il précède de pouvoir déterminer les poly irréd sur $\mathbb{F}_q[X]$, mais ça sert aussi pour obtenir l'irréd de poly sur $\mathbb{Z}$!, thm de réduction, rq sur faire attent° à la subtilité A/K, exemples critère de réduct° a ses limites : ex avec X^4+1, thm de conservat° de l'irréd. par extension de corps, exemple.

IV - Algèbre linéaire et algèbre bilinéaire sur les corps finis

1) Groupe linéaire et dénombrement

Perrin : $Z(GL_n(\mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}^*$, $Z(SL_n(\mathbb{K})) \simeq \mu_n(\mathbb{K})$, def de $PGL_n(\mathbb{K})$, $PSL_n(\mathbb{K})$, lemme : $|\mu_n(\mathbb{F}_q)| = \text{pgcd}(n, q-1)$, cardinaux de $GL_n(\mathbb{K})$, $PGL_n(\mathbb{K})$, etc, isomorphismes exceptionnels

NH2G2-2 : [Cardinal du cône nilpotent] et cardinal de l'ensemble des trigo Z.

2) Formes quadratiques

Perrin : lemme ex $ax^2+by^2=1$ a des solutions, $\boxed{\text{classification des formes quad. sur } \mathbb{F}_q}$ rq : $2n+1$ classes dont 2 dégénérées, rq : peut permettre de montrer la réciprocité quadratique

Refs : Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Gozard : Théorie de Galois, Gozard

Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie, Rombaldi

NH2G2 : Nouvelles histoires de groupes et de géométrie, Caldero et Germoni, Tome 2.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications

I - Notion d'extension de corps

1) Définitions et premières propriétés

Gozard + Perrin : def d'une extension (avec injection), def du degré, thm de la base télescopique, csq sur la multiplicativité des degrés, def tour d'extensions, def d'extension de type finie, monogène, ex dans le cas d'un deg premier (et finie, l'un ⇒ l'autre, contre ex) ↗ des exemples

2) Eléments et extensions algébriques

Perrin + Gozard : def d'elts transcendants, algébriques, du polynôme minimal, des ex de transcendants et algébriques, prop transcendant ⇒ $k(a) \simeq k(T)$, eq $\Pi_a \Leftrightarrow \Pi_a(a)=0$, Π unitaire et irred, des exemples dont les polynômes cyclotomiques, prop sur base de $k[a] \triangleright k$, thm de caractérisation des elts algébriques, elts algébriques = corps, ex : $\sqrt[7]{5}+\sqrt[3]{7}\sqrt[5]{3}$ ▷ pas facile de trouver Π_{∞}, def extension algébrique, finie ⇒ algébrique, contre ex avec $\overline{\mathbb{Q}}$ + (éventuellement) ex des corps quad, def et thm

II - Extensions par adjonction de racines

1) Corps de rupture et de décomposition

Perrin + Gozard : def du corps de rupture, existence et unicité, exemple de la construction de $\mathbb{C}$ (et $\mathbb{F}_4$), rq : P n'est pas nécessairement scindé sur un corps de rupture, ex avec $P=X^3-2$, $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, ex d'utilité avec $L[X]$, autre critère sur racine dans extension $[L:K] \wedge \deg(P)=1 \Rightarrow P$ irred sur $L[X]$, def du corps de décomposition, existence et unicité, exemples pour les deux, ex de $\mathbb{C}$ pour X^2+1

Gourdon : appli à Cayley Hamilton

2) Clôture algébrique

Gozard : prop/def algébriquement clos, ex/contre ex, clos ⇒ infini, def thm de D'Alembert-Gauss appli : ttes matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigo, thm d'existence et d'unicité de clôture algébrique, ex de $\mathbb{C}$,

3) Application : les corps finis

Perrin : si K est fini ⇒ $\# K = p^n$, thm d'existence et d'unicité des corps finis

Gozard : propriété sur les inclusions entre $\mathbb{F}_q$ et $\mathbb{F}_{q'}$

Rombaldi : si P irred de degré n ▷ $\mathbb{F}_p[X]/\langle P\rangle$ iso à $\mathbb{F}_{p^n}$, def fct° de Möbius, Dénombrement des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, corollaire sur proportion d'irred

Gozard : ex de polynômes irred, prop : $P \in \mathbb{F}_q[X]$ de deg $= n$, P irred sur $\mathbb{F}_q$ $\Leftrightarrow \begin{cases} P \mid X^{q^n}-X \\ \forall d \mid n, d \text{ premier}, P \wedge (X^{q^{n/d}}-1)=1 \end{cases}$

III - Constructibilité à la règle et au compas

Gozard + Carrega : def d'un point constructible, qq constructions de base (dessin en annexe), notion de réel constructible, thm : $\mathbb{E}$ est un sous corps stable par $\sqrt{\ }$, thm de Wantzel et corollaire, ex avec π et $\sqrt[3]{2}$ $\Rightarrow$ csq sur les pb historiques, def $\mathbb{C}$ constructible, eq avec $z \in \mathbb{E}(i) \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{E}$, csq : $\mathbb{E}(i)$ sous corps de $\mathbb{C}$ stable par $\sqrt{\ }$, GW version complexe, def de polygone constructible (avec $e^{\frac{2i\pi}{n}}$), lemme $e^{\frac{i2\pi}{mn}} \in \mathbb{E}(i) \Leftrightarrow e^{\frac{2i\pi}{m}}, e^{\frac{i2\pi}{n}} \in \mathbb{E}(i)$, def nbr de Fermat, $\boxed{\text{Théorème de Gauss Wantzel}}$, puis thm complet, exemple (dessin en annexe ?)

Refs : Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Gozard : Théorie de Galois, Gozard.

Rombaldi : Maths pour l'agreg : algèbre et géométrie, Rombaldi

Carrega : Théorie des corps, la règle et le compas, Carrega.

Gourdon : Algèbre & probas, Gourdon

127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

I - Nombres remarquables

1) Nombres rationnels, irrationnels et décimaux

Arnaudiès : def de $\mathbb{Q}$, corps des fractions de $\mathbb{Z}$, def de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Duverney : irrationalité de $\sqrt{d}$, e et de π, def du dev décimal (dev p adique juste dans le cas p = 10), def des nombres décimaux, rq dense dans $\mathbb{R}$, irrationnel $\Leftrightarrow$ dev periodique à partir d'un certain rang, rq sur se généralise pour toute base, csq : $\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n^2}}$ est irrationnel

2) Nombres algébriques et transcendants

Gozard + Duverney : rappel sur def elt alg et transcendant sur un corps, def du polynôme minimal et équivalence $\Pi a \Leftrightarrow P(a) = 0$ et P irréd., prop/def $\triangleright$ nbr algébrique et nbr transcendant
z alg sur $\mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{Z}[X]\setminus\{0\}, P(z) = 0$, ex des nbr rationnels, rq sur infinité de nbr transcendants et def au degré, thm de Hermite et Lindemann (e et π) appli : $\xi(\mathbb{Q}_k)$ et transcendant
thm de Liouville et nbr de Liouville

Combes : thm de Liouville et nbr de Liouville, ex et contre ex, entier alg $\Leftrightarrow$ nbr alg

Duverney : def d'un entier algébrique, dont le poly min est dans $\mathbb{Z}[X]$, csq : entiers alg de $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

II - Corps de nombres et anneaux d'entiers

1) Généralités

Gozard + Duverney : l'ensemble des nbr algébriques = sous corps de $\mathbb{C}$, ensemble des entiers alg = sous anneau de $\mathbb{C}$, def d'un corps de nbr, thm de l'elt primitif, def d'un entier sur K $\triangleright$ c'est un anneau appelé anneau d'entiers

2) Corps quadratiques

Gozard : def d'un corps quad, thm qui suit sur $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$

Duverney : def du conjugé, de la norme, def des entiers de K, ex, rq : $N(x) \in \mathbb{Z}$ mais réciproque fausse, def de A_K $\triangleright$ c'est un anneau + thm qui suit (en mettant en lemme la quest° 1 de l'exo associé), ex pour $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[j]$, thm sur $x \in A_K^\times \Leftrightarrow |N(x)| = 1$, thm sur A_K pour complexe pour $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, puis pour réel, ex dans le cas $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, thm : $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[j]$ euclidien, contre ex pour $A_{\mathbb{Q}(i\sqrt{5})}$ ∩ pas factoriel, rq sur thm ⊕ général : quand est-ce que A_K est euclidien ?, appli aux équations

Perrin : appli : thm des deux carrés

3) Corps cyclotomiques

Perrin + Gozard : def de $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n^*$, pptés, def des polynômes cyclo
$X^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d$, $\boxed{\text{Irréductibilité des polynômes cyclotomiques}}$

Gozard : corollaire sur $[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}] = \varphi(n)$, appli : si K est un corps de nbr $\Rightarrow$ nbr fini de racines de l'unité, ω + def d'un corps cyclo.

Duverney : $A_K = \mathbb{Z}[\omega]$, lemme sur $A_K^\times$, ex de $\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{5}})$, $A_{\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{5}})}$ euclidien, appli : équat° de Fermat pour $p=5$.

III - Nombres constructibles à la règle et au compas

Gozard + Carrega : def d'un point constructible, qq construct° de base (dessin en annexe), net° de réel constructible, $\mathcal{E}$ est un sous corps stable par $\sqrt{\ }$, thm de Wantzel et csq sur les pb historiques, exc avec π et $\sqrt[3]{2}$, csq, def d'un $\mathbb{C}$ constructible, $z = x+iy \in \mathcal{E}(i) \Leftrightarrow x, y \in \mathcal{E}$, Csq : $\mathcal{E}(i)$ sous corps de $\mathbb{C}$ stable par $\sqrt{\ }$, GW version $\mathbb{C}$, def de polygone constructible (avec $e^{\frac{2i\pi}{n}}$), lemme avec $e^{\frac{2i\pi}{mn}} \in \mathcal{E}(i) \Leftrightarrow e^{\frac{2i\pi}{m}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{E}(i)$, def nbr de Fermat, Théorème de Gauss Wantzel, puis thm complet, exemple (dessin en annexe).

Refs : **Duverney** : Théorie des nombres, Duverney

Gozard : Théorie de Galois, Gozard

Arnaudiès : Cours de maths 1, Algèbre, Arnaudiès & Fraysse

Combes : Algèbre et géométrie, Combes

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Carrega : Théorie des corps, la règle et le compas, Carrega.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

I - Polynômes irréductibles

1) Notion d'irréductibilité

Rombaldi : def d'un polynôme irréductible

Gozard : rq sur $K[X]$ factoriel, prop sur irréductibilité, rq sur irréductibilité et sous corps, def du contenu, eq entre irred dans $A[X]$ et irred dans $K[X]$ et $C(P)=1$ $\underbrace{}_{\text{lemme de Gauss}}$

⇔ exc avec poly unitaires

2) Critères d'irréductibilité

Gozard + Perrin : Critère d'Eisenstein, exemples, thm de réduction, appli : utile pour réduire dans un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, des exemples, contre exc de la réciproque

3) Éléments algébriques et polynôme minimal

Perrin + Gozard : *def d'elts transcendants, algébriques, du polynôme minimal, des exc d'elts, eq $\Pi_a \Leftrightarrow \Pi_a(a)=0$, Π_a unitaire et irred, des exemples, contre exc, caractérisat° des elts algébriques, forment un sous corps, def ext algébrique, finie ⇒ alg, *def d'une extension (avec injection), du degré, thm de la base télescopique et exq sur la multiplicativité des degrés

II - Extension de corps par adjonction de racines

1) Corps de rupture et de décomposition

Perrin + Gozard : def de corps de rupture, existence et unicité, degré et base, exc de la construct° de $\mathbb{C}$ (et de $\mathbb{F}_4$ éventuellement, rq P n'est pas nécessairement scindé sur un corps de rupture, ex avec $P=X^3-2$, $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, et à applicat° aux critères d'irred avec racines dans les ext de deg $\leq \frac{\deg(P)}{2}$, exemples pour les 2, la conservat° de l'irréductibilité par ext de corps, def du corps de décomposit° existence et unicité, exc pour de $\mathbb{C}$ pour X^2+1

Gourdon : appli à Cayley Hamilton.

2) Clôture algébrique

Gozard : prop/def algébriquement clos, exc/contre-exc, clos ⇒ infini, thm de D'Alembert-Gauss, appli : toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trig, rq sur ⊕ général pour tt K alg. clos, def aux irred de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, def de clôture alg, exc de $\mathbb{C}$, thm d'existence et d'unicité

3) Application : construction des corps finis

Perrin : si K est fini ⇒ $\#K=p^n$, thm d'existence et d'unicité des corps finis

Gozard : ppté d'inclusion des $\mathbb{F}_q$.

Rombaldi : si P irred de deg $n \Rightarrow \frac{\mathbb{F}_p[X]}{\langle P \rangle}$ iso à $\mathbb{F}_{p^n}$, des exemples

III - Exemples de polynômes irréductibles remarquables

1) Polynômes cyclotomiques

$\Rightarrow$ qq exemples

Gozard + Perrin : def de U_n et U_n^*, ppté, def des polynômes cyclo, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, $\boxed{\text{Irréductibilité des polynômes cyclotomiques}}$, $\Rightarrow \Phi_{p^n}$ corollaire sur $[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}] = \varphi(n)$, appli : si K extension finie de $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ nbr fini de racines de l'unité

2) Polynômes irréductibles sur un corps fini

Rombaldi : def fct° de Möbius, $\boxed{\text{Dénombrement des polynômes irréductibles sur } \mathbb{F}_q}$, coro sur prop. d'irred dans $\mathbb{F}_q[X]$

Gozard : ex de polynômes irred, prop : $P \in \mathbb{F}_q[X]$ de deg n, alors P irred sur $\mathbb{F}_q \Leftrightarrow \begin{cases} P | X^{q^n} - X \\ \forall d | n, d \text{ premier}, P \wedge (X^{q^{n/d}} - 1) = 1 \end{cases}$

Refs : Gozard : Théorie de Galois

Perrin : Cours d'algèbre

Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi

Gourdon : Algèbre & proba, Gourdon.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications

I - Notions de PGCD et PPCM

1) Généralités

Rombaldi : def d'un PGCD, d'un PPCM, prop sur def à un inversible près, associativité et commutativité (def d'un anneau à PGCD), def d'elts premiers entre eux, théorème qui suit,
Szpirglas : ppcm ⇒ pgcd. (ne pas mettre la "réciproque" et la garder au besoin)

2) Cas des anneaux factoriels

Ulmer : def d'un anneau factoriel, def du système de rep, de la valuation, prop sur pgcd et ppcm, ex dans $\mathbb{Z}$, lemmes de Gauss et d'Euclide
Rombaldi : pgcd est homogène, ex : $\mathbb{Z}$, $A[X]$ avec A factoriel (Perrin)
ppcm

3) Cas des anneaux principaux

Ulmer : def d'un anneau principal, exemples, principal ⇒ factoriel (en particulier pgcd/ppcm bien def), thm de Bézout, corollaire sur CNS premiers, rq on retrouve facilement Gauss et Euclide dans ce cas,
Grand Combat : appli : lemme des noyaux, csq : critère de diag ou DJC.

II - Anneaux euclidiens et algorithmes de calcul

1) Cas des anneaux euclidiens

Ulmer : def d'un anneau euclidien, euclidien ⇒ principal, exemples, rq sur en particulier Bézout est vérifié ⊳ on va pouvoir obtenir les coeff.

2) Algorithmes de calcul

Rombaldi : lemme $a \wedge b = b \wedge r$, algo d'Euclide pour PGCD, (ex en annexe), algo d'Euclide étendu (ex en annexe), appli : inversible de qq dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
Demazure : algo binaire et coût, coût d'Euclide avec Fibonacci

III - Applications

2) Résolutions de systèmes de congruence

Rombaldi + Ulmer : $\boxed{\text{Théorème chinois et appli aux systèmes de congruence}}$ (le thm, l'algo, les deux exemples), prop sur interpolation, éventuellement autre exemple

1) Equations diophantiennes

Rombaldi : def de l'équat°, cas b=1 avec solut°, cas général, exemple

3) Forme normale de Smith

131 devs : $\boxed{\text{Forme normale de Smith}}$, ex : sur un corps, vrai sur un principal

OA + Grand Combat : algo et exemples (en annexe), prop : invariants non csts de $XI_n - M$ = invariants de Frobenius

---

Refs : Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi

Ulmer : Anneaux, corps, résultants, Ulmer

Szpirglas : Maths L3, Algèbre, Szpirglas

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Grand Combat : Algèbre le grand combat, Berhuy

Demazure : Cours d'algèbre, Demazure

131 devs : 131 devs, Beck Bendou et cie

OA : Objectif agrégation, BMP.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

I - Racines d'un polynôme

1) Définitions et propriétés

Grand Combat : def de la fct° polynomiale & on les note pareil, def d'une racine, eq avec $(X-a)$ divise P, def de la multiplicité (avec Gourdon), anneau commutatif intègre alors P a au + deg P racines, contre ex dans un anneau non intègre, (avec Gourdon) $F(x)=0$ $\forall x \Rightarrow F=0$ pour K infini, contre ex sur un corps fini, def du polynôme dérivé (avec Gourdon), éq avec la multiplicité "analytique" (Gourdon), corollaire et contre ex

2) Polynômes scindés et polynômes irréductibles

Gourdon : def polynôme scindé, scindé à racines simples, rq qui suit, exemples, def d'un corps algébriquement clos, thm de D'Alembert-Gauss, def d'un polynôme irréd

Gozard : lien irréductibilité / racines, ex dans $\mathbb{R}$

II - Fonctions symétriques élémentaires

1) Relations coefficients racines

Gourdon : def des polynômes sym élém., ex, relat° coefficient racines

2) Structure des polynômes symétriques

Gourdon : def d'un polynôme symétrique, un exemple, rq qui précède le thm, le théorème de structure, un exemple, le corollaire

III - Extension de corps

1) Éléments et extensions algébriques

Gozard : def elt algébrique, transcendant, def du polynôme minimal, caractérisat°

Perrin : def d'une extension algébrique, ex fini => algébrique, elts alg = sous corps

2) Extension de corps par adjonction de racines

Perrin + Gozard : def du corps de rupture, existence et unicité, ex de $\mathbb{C}$, et de $\mathbb{F}_4$ éventuellement (F pas forcément scindé & $P=X^3-2$ sur $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.), def du corps de décomposit°, existence et unicité, appli à l'existence et l'unicité des corps finis

IV - Applications

1) Réduction

Grand Combat : def du polynôme carac., Cayley Hamilton, eq $\chi_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda \in Sp(A)$

Grand Combat + Mansuy : critère de diag, de trig, corollaire sur D'Alembert Gauss : tout le monde trigo sur $\mathbb{C}$

2) Localisation de racines et de valeurs propres

Gourdon : def d'une matrice compagnon, polynôme carac.

CVA : lemmes : continuité du spectre, et continuité de $M \mapsto \chi_M$, $\boxed{\text{Disques de Gershgorin}}$, rq sur racines de polynômes

3) Polynômes cyclotomiques

Gozard + Perrin : def des $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n^*$, def des Φ_n, esc, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, $\boxed{\text{Irréductibilité des polynômes cyclotomiques}}$, appli : si K est une extension finie de $\mathbb{Q}$, alors il y a un nbr fini de racines de l'unité dans K.

Refs : Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

Gozard : Théorie de Galois, Gozard

Gourdon : Algèbre, Gourdon

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Mansuy : Algèbre linéaire, réduct° des endo, Mansuy & Mneimné

CVA : Carnet de voyage en algèbre, Caldero & Peronnier.

148 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.

I – Théorie de la dimension

1) Familles génératrices, libres, bases, dimension finie

Gourdon : Def famille génératrice

Grifone : Exemples famille génératrice, def + exemples dim finie, famille libre et base, prop base + exemples, prop famille libre / liée.

Gourdon : thm LC SBC G + existence d'une base en dim finie et corollaire.

2) Théorèmes sur la dimension.

Grifone : def / thm sur la dimension, ex : $\mathcal{L}(E,E') \simeq M_{n,p}(\mathbb{K})$ de dim np. corollaire, prop qui vient avec, rq sur pratique pour faire des rec : ex de la codiagonalisabilité (+ d'autres ex ⊕ tard).

3) Dimension et sous espaces vectoriels

Grifone : SEV d'un EV de dim finie = dim finie, rq sur pratique pour montrer une égalité, [def somme, somme directe, ex $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \text{Paire} \oplus \text{Impaire}$] ppté dim $(F+G)$, thm sur $F \oplus G$ selon la dim, Applicat° $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, formule de Grassman [def somme p SEV] prop sur dim de la somme, prop sur les bases.

Gourdon : Espace vectoriel quotient et codimension (rq : preuve du thm du rang)

II – Notion de rang

1) Rang d'une application linéaire

Grifone : Def du rang, thm du rang, corollaire. Application : Riesz dans un espace euclidien grâce à dim E = dim E^*, contre ex en dim finie. Autre ex : existence de polynômes annulateurs.

2) Rang d'une matrice caractérisation

Grifone : def du rang d'une matrice, prop $rg\, f = rg\, A$.

Gourdon : A rg $r \Leftrightarrow \simeq J_r$, mat eq de m rang, rang = taille de la ⊕ gd matrice extraite, $rg({}^tA) = rg(A)$, calcul (pivot de Gauss) + exemple

3) Utilisation du rang dans les systèmes linéaires

Grifone : def d'un système linéaire, expression matricielle, def du rang du système, cas des systèmes de Cramer, thm de Rouché, un exemple (éventuellement des exemples avec "intégrat°")

III - Applications

1) Extensions de corps et corps finis

Perrin : Def d'une extension de corps, exc, rq sous forme de prop s/ degré d'une extension, def extension finie, def sous corps premier, caractéristique, def du Frobenius, propriétés, thm existence et unicité

2) Classification des formes quadratiques sur un corps fini

Perrin : lemme cq ax^2+by^2 a des solutions, $\boxed{\text{classificat° des formes quad sur } \mathbb{F}_q}$
rq : $2n+1$ classes dont 2 dégénérées

3) Réduction de Frobenius

Cognet : def de $\Psi_{u,x}$ (linéaire), Im $\Psi_{u,x}$ =: $E_{u,x}$ SEV cyclique de u engendré par x, prop/def de Ker $\Psi_{u,x}$ idéal engendré par $\Pi_{u,x}$, $E_{u,x}$ admet $(x, u(x), \ldots, u^{\deg(\Pi_{u,x})-1})$ comme base, def d'endo cyclique

Mansuy + H_2G_2[1] : $\boxed{\text{Réduction de Frobenius}}$

Refs : Grifone : Algèbre linéaire, Grifone

Gourdon : Algèbre, Gourdon

~~Tauvel : Cours d'algèbre, Tauvel~~

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Cognet : Algèbre linéaire, Cognet

Mansuy : Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes, Mansuy et Mneimné

H_2G_2[1] : Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Caldero & Germoni (Tome 1)

149 : Déterminant. Exemples et applications

I - Définitions du déterminants

1) Formes n-linéaires alternées et déterminant d'une famille de vecteurs

Gourdon : def d'une forme p linéaire, prop sur la dim, def de alternée / antisym, prop sur eq avec antisymétrique $f(x_{\sigma(1)}, \dots x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots x_p)$, eq entre antisym et alterné, def de l'antisymétrisat° d'une forme, thm sur dim des formes n-linéaires alternées = 1, et def du déterminant, rq et prop sur le changement de base, thm sur équivalence famille liée det = 0.

2) Déterminant d'un endomorphisme

Rombaldi : thm qui précède la def de det(u), la def de det(u), thm qui suit sur les ppties de base, def de SL(E), det est un morphisme de grp, SL(E) ⊲ GL(E)

3) Déterminant d'une matrice

Rombaldi : def du det d'une matrice, rq c'est le det de ses colonnes dans la base canonique, le thm qui suit avec les ppties de base

Gourdon : rq sur dépendance linéaire ou les colonnes / lignes.

II - Calcul de déterminants

1) Méthodes générales

Gourdon : det invariant par opérat° élémentaires sur les lignes et colonnes, + influence de l'applicat° d'un σ

possibilité de calculer un det grâce au pivot de Gauss

Rombaldi : calcul de déterminant par blocs → exemple dans le cas triangulaire, csq det = $\prod$ vp. + exemple en 2×2.

2) Mineurs et cofacteurs

Gourdon + Rombaldi : def des mineurs, des mineurs principaux, des cofacteurs, un exemple détaillé, formule de développement p/r à une ligne / colonne, exemple en dim 2, définition de la comatrice, ${}^t com(A) A = A\, {}^t com(A) = \det(A) I_n$, csq : $A \mapsto A^{-1}$ continue

131 devs : def du det de $M_n(A)$ → on peut le considérer sur $M_n(Frac(A))$ si A intègre, et $M \in GL_n(A) \Leftrightarrow M \in GL_n(K)$ et $M^{-1} \in M_n(A) \Leftrightarrow \det(M) \in A^\times$, (lemme + thm), exemple (Grand Combat)

Forme normale de Smith

rq sur Cauchy Binet : $\det((MN)_{I,J}) = \sum_{L = \{l_1 < \dots < l_k\} \subset [\![1,n]\!]} \det(M_{I,L}) \det(N_{L,J})$.

3) Exemples classiques

Gourdon : déterminant de Vandermonde, appli au det avec des P, appli à $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilp $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, tr(A^k) = 0$.

Rombaldi : appli aux polynômes de Lagrange
Gourdon : déterminant circulant, l'exemple, appli à la suite de polygônes, déterminant de Cauchy, et éventuellement d'autres exemples

III - Applications en analyse

1) Régularité du déterminant

Rouvière : det est polynomiale donc C^∞ | Différentielle du déterminant
(lemme sur $GL_n(\mathbb{K})$, prop et les 2 appli), $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs

2) Changement de variables

Gourdon² : def du jacobien, thm de changement de variables, ex des coord. polaires. appli à l'intégrale de Gauss

IV - Applications en algèbre

1) Algèbre linéaire : systèmes linéaires et polynômes caractéristiques

Gourdon + Rombaldi : formules de Cramer, un exemple, def du rang, caractérisat° par la taille du ⊕ grand mineur non nul, éventuellement Rouché
Grand Combat : def du polynôme carac., prop avec les coeff, ex de mat. compagnon, Cayley Hamilton, λ vp ssi $\chi(\lambda) = 0$.

2) Géométrie

OA : interprétat° du déterminant en tant que volume (dessin en dim 2)
↳ dessin en annexe
Gourdon : inégalité de Hadamard, matrice de Gram, interprétat° avec dist à un SEV (éventuellement rq de OA sur le sujet)

Refs : Gourdon : Algèbre, Gourdon
Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi
Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy
131 devs : 131 devs, le Barbenchon et cie
OA : Objectif agreg, B.H.P.
Gourdon² : Analyse, Gourdon
Rouvière : PGCD, Rouvière

150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

I - Polynômes d'endomorphismes

1) Algèbre $K[u]$ et polynôme minimal

Grand combat : def d'un poly d'endo, lemme sur morphisme d'évaluation, def de $Ann(u)$, c'est un idéal, prop/def de μ_u, rq qui suit sur $\mu_u \neq$ cste
Rombaldi : dim de $K[u]$ et base, thm suivant avec eq pour que $K[u]$ soit un corps, $P(u)$ inversible $\Leftrightarrow P \wedge \Pi_u = 1$

2) Polynôme caractéristique

Grand Combat : rq sur polynôme annulateur de degré, def de χ_u, ppté qui suit, thm de Cayley-Hamilton, $\mu_u \mid \chi_u \mid \mu_u^n$, rq sur il reste à chercher le + petit diviseur de χ_u qui annule u, λ vp de $u \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$
exc de χ_{I_n} ou χ_n avec n nilpotent

3) Polynômes d'endomorphisme et sous espaces stables

Grand combat : $Ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par u, lemme de décomposition des noyaux, les projecteurs sont des polynômes en u, exemple d'un projecteur : $u^2 = u \Rightarrow Ker(u) \oplus Ker(u - id) = E$, $\mu_u = ppcm(\dots)$ et $\chi_u = \Pi \dots$ avec des SEV stables + corollaires.

II - Applications à la réduction

1) Diagonalisation, trigonalisation, décomposition de DJC

Grand Combat + Mansuy : def diag/trig, thm avec eq μ SARS/polynôme annulateur SARS/χ_u scindé et dim $(E_\lambda) = m_\lambda$, des exemples, exc d'un projecteur, prop u diag $\Rightarrow u_F$ diag, thm eq μ_u scindé / χ_u scindé, coro : tout le monde trig sur $\mathbb{C}$, prop u trig et F stable pour $u \Rightarrow u_F$ trig
Gourdon : Décomposition de DJC, importance de la commutativité : $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$ mais sa déc est $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

2) Réduction de Frobenius

Cognet : def de $\varphi_{u,x}$ (linéaire), $Im\, \varphi_{u,x} =: E_{u,x}$ SEV cyclique engendré par u, prop/def $Ker\, \varphi_{u,x}$ engendré par $\Pi_{u,x}$, $E_{u,x}$ admet $(x, u(x), \dots, u^{deg(\Pi_{u,x})-1})$ comme base, def endo cyclique.
Mansuy + H2G2[1] : $\boxed{\text{Réduction de Frobenius}}$, interprétat° matricielle
Gourdon : des applicat° des invariants

3) Réduction des endomorphismes normaux

Rombaldi : def d'un endo normal, exemples, $\boxed{\text{Réduction des endo normaux}}$ (3 lemmes + thm), corollaires pour les symétries, les orthogonaux. (exemple).

III - Applications au calcul matriciel

1) Puissance et inverse d'une matrice

<u>Mansuy</u> : $M^{-1} \in K[M]$, appli $\mathbb{C}[A]^{\times} \overset{\circledast}{=} \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, prop
sur les puissances et exemples $\times 2$, ajouter un ex "concret" par
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) Exponentielle de matrice

<u>Rombaldi</u> + <u>Grand Combat</u> : def de l'exp, polynôme en A, exp
d'une diag, d'une nilp, déc de Dunford d'une exp, A diag $\Leftrightarrow e^A$ diag,
rq : déc de Dunford compliquée à obtenir donc on utilise les calculs
de puissances, ~~rq : renvoie~~ l'ex concret, rq : appli de $\circledast$ = $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^{\times}$

<u>Refs</u> : <u>Grand Combat</u> : Algèbre, le grand combat, Berhuy

<u>Rombaldi</u> : Maths pour l'agrég : Algèbre & géométrie, Rombaldi

<u>Mansuy</u> : Algèbre linéaire, réduction des endo, Mansuy & Mneimné

<u>Gourdon</u> : Algèbre, Gourdon

<u>Cognet</u> : Algèbre linéaire, Cognet

<u>$H_2G_2^1$</u> : Histoires hédonistes..., Caldero & Germoni

151 : Sous espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie - Applications

I - Généralités sur les sous espaces stables

1) Définition et premières propriétés

Mansuy : def SES, exemple, propriétés.

OA : ex (si $k = \mathbb{R}$, au ⊖ droite ou plan stable) + ex : si $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilise tous les SEV de dim $k \in [\![1, n-1]\!]$ de E, alors u est une homothétie.

2) Endomorphismes induits, bases adaptés

OA : def endo induit, thm base adaptée et réciproque

Mansuy : ex endo nilpotent.

3) Dualité et sous espaces stables

Gourdon : Def de $F^\perp$ de ${}^t u$, prop $F^\perp$ stable par ${}^t u \Leftrightarrow F$ stable par u,
rq : permet des récurrences s/ la dimension.

II - Application à la réduction

1) Polynômes minimaux caractéristiques et lemme des noyaux

Grand Combat : si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, alors $\chi_u = \prod \chi_{u_{E_i}}$ et $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_{E_1}, \dots, \mu_{E_r})$,
rq : χ_u irréductible $\Leftrightarrow$ pas de SES non trivial stable par u.
Lemme des noyaux, applicat° si P annule u, $E = \bigoplus_{i=1} P_i(u)$

2) Sous espaces propres et diagonalisation

Mansuy : def espace prop (stable), prop somme directe, def sous espace caractéristique (stable)

Def diag + thm avec cq μ_u SARS / poly annulateur SARS, ex $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pas diag sur $\mathbb{R}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ l'est, prop u diag et F stable par $u \Rightarrow u_F$ diag.

Def trig + thm cq avec μ_u scindé / polynôme scindé, ex $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pas trig sur $\mathbb{R}$ non plus, prop u trig et F stable par $u \Rightarrow u_F$ trig.

Gourdon + Rombaldi : $\boxed{\text{Décomposition de DJC + applicat° à l'exponentielle}}$

OA : surject° de l'exp de $M_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$ et $M_n(\mathbb{R})$ sur les carrés
⚠ importance de la commutativité : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais ne commutent pas, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Réduction simultanée

OA : prop $u\circ v = v\circ u \Rightarrow Im(v), Ker(v)$ stable par u, CNS de codiag / CS de co trig, Δ trig pas CNS, contre ex : $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ co trig mais ne commutent pas !, Corollaire si u, v commutent et sont trig$_0$ 2, alors $u+v$ et $u\circ v$ aussi, ex Dunford sur $\mathbb{C}$ = résultat de trig$_0$ 2, applicat° si U, V diag/trig alors $\Phi_{U,V} : M \mapsto UM - MV$ aussi.

III - Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes semi simples

Rombaldi : def + caractérisation avec polynôme et sur $\mathbb{K}$ clos ssi diag (diag $\Rightarrow$ SS toujours vrai et dans le cas général, SS + χ_u scindé $\Rightarrow$ diag) + dunford généralisé.

OA : Exemples d'applications

2) Endomorphismes cycliques

⊕ petit SES par $u \ni x$

Cognet : def de $\Psi_{u,x}$ (linéaire), $Im\,\Psi_{u,x} =: E_{u,x}$ SEV cyclique de u engendré par x, prop/def $Ker\,\Psi_{u,x}$ idéal engendré par $\pi_{u,x}$, $E_{u,x}$ admet $(x, u(x), \dots, u^{\deg(\pi_{u,x})-1}(x))$ c base, def endo cyclique.

Mansuy + H2G2 : def matrice compagnon, $\boxed{\text{Réduction de Frobenius}}$ et version matricielle.

3) Endomorphismes normaux d'un espace euclidien

Rombaldi : Def endo normal + $\boxed{\text{Réduction des endo normaux}}$

Refs : Mansuy : Algèbre linéaire, Réduct° des endo, Mansuy et Mneimné

OA : Objectif agrégation, Beck.

Gourdon : Algèbre, Gourdon

Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie

Grand combat : Algèbre le grand Combat, Berhuy.

Cognet : Algèbre linéaire, Cognet.

H2G2[1] : Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Tome 1, Caldero et Germoni.

152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

I - Polynômes d'endomorphismes et éléments propres

1) Polynômes d'endomorphismes

Grand Combat : def ev_u, de Π_u, lemme des noyaux, def du polynôme caractéristique, Cayley Hamilton, χ_u et Π_u m facteurs irréductibles, ex : $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}$, $\Pi_u=\chi_u=(X^2+1)$ car irréductible, prop si $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_r$, $\chi_u=\prod \chi_{u|E_i}$ et $\mu_u=\text{ppcm}(\mu_{E_1},\dots,\mu_{E_r})$.

2) Éléments propres

Grand Combat : def valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre (stable), prop $\lambda\in\mathbb{K}$ VP $\Leftrightarrow \chi_u(\lambda)=0$, $|Sp(u)|\leq n$, contre ex dim infinie : $P\overset{u}{\longmapsto} XP'$ ($\forall m\in\mathbb{N}$, $m\in Sp$), def multiplicité, def espace caractéristique (stable) et $E=\oplus E_\lambda^{m_\lambda}$, prop sur les dimensions, ex : u nilp, $Sp=\{0\}$, $m_0=n$, prop sur SEP en somme directe.

II - Diagonalisabilité

1) Définition et caractérisation de la diagonalisabilité

Grand Combat : def diagonalisable, caractérisation avec χ_u, ex avec les nilpotentes pas diagonalisables, corollaire n VP $\Rightarrow$ diag, réciproque fausse (I_n), lemme $P(u)(x)=P(\lambda)(x)$ puis caractérisation avec Π_u, ex $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, $N=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ l'est !, prop si u diag, F stable $\Rightarrow u_F$ diag.

2) Diagonalisation simultanée

OA : lemme si $u\circ v=v\circ u$ alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ stables par u, CNS de co-diagonalisation, corollaire si u, v commutent et sont diag, $u\circ v$, $u+v$ sont diag + ex : si U, V diag, alors $\Phi_{U,V}: M\mapsto UM-MV$ aussi.

3) Topologie dans les espaces de matrices

OA : $\overline{C_n(\mathbb{K})}=T_n(\mathbb{K})$ et $\mathring{D}_n(\mathbb{K})=C_n(\mathbb{K})$ $\triangleright$ cxq sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, $\overline{D_n(\mathbb{C})}=M_n(\mathbb{C})$ et $\overline{D_n(\mathbb{R})}=T_n(\mathbb{R})$, application : $u\mapsto\Pi_u$ pas continue, ex : $\left(\begin{pmatrix}0&1/n\\0&0\end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\chi_u=X^2 \longrightarrow \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\chi_u=X$.

III - Applications

1) Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley et exponentielle

Gourdon + Rombaldi : $\boxed{\text{Décomposition de JDC + application à l'exponentielle}}$

OA : exp surject° de $M_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$ et de $M_n(\mathbb{R})$ sur les carrés, ex : ⚠ commutativité $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, si D diag, $D=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$, alors $\exp(D)=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$ et si N nilp, $\exp(N)=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}N^k$.

2) Réduction dans les espaces euclidiens / hermitiens

Gourdon : def adjoint, version matricielle, def endo normal, auto-adjoint, unitaires et eq matricielles, prop $F^\perp$ stable par u autoadjoint, thm spectral + corollaire matricielle.

$H_2G_2^1$: def $S_n^{++}(\mathbb{R})$, etc, $\boxed{\text{décomposition polaire}}$, rq sur racine carrée

Gourdon : lemmes nécessaires puis réduct° des endo normaux sur un espace hermitien puis dans le cas d'un espace euclidien, ex dans le cas euclidien : réduction des endo orthogonaux.

3) Actions de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison

$H_2G_2^1$: Act° par conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ def, thm + corollaire χ est invariant de similitude total, contre ex pour le polynôme minimal, prop A diag ssi orbite fermée.

Refs : Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy.

OA : Objectif agrégation, Beck

Gourdon : Algèbre, Gourdon

Rombaldi : Maths pour l'agrégation, Algèbre et géométrie, Rombaldi.

$H_2G_2^1$: Histoires hédonistes de groupes et géométries, Caldero et Germoni, Tome 1.

153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications

I - Généralités

1) Valeurs propres, vecteurs propres

Grand Combat + Mansuy : def valeur propre, vecteur propre, def sous espace propre, def multiplicité, def espace caractéristique, prop sur SEP en somme directe

2) Polynômes minimal et caractéristique

Grand Combat : def de ev_u et de Π_u, lemme des noyaux, def du poly. carac., χ_u et Π_u m facteurs irréd, prop λ vp $\Leftrightarrow \chi_u(\lambda)=0$, $|Sp(u)|\leq n$, $E=\bigoplus E_\lambda^{m_\lambda}$, (+ Mansuy), condit° de diag / trig, des exemples avec spectre et diag/trig

Gourdon + Rombaldi : Décomposition de DJC et appli à l'exponentielle

importance de la commutativité : $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$ mais dec $=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

3) Exemples de matrices remarquables

Rombaldi : ex d'une matrice symétrique, d'une matrice nilpotente

Gourdon : ex de la matrice compagnon, des matrices circulantes

CVA : appli à l'isobarycentre de polygones

Rombaldi² : ex matrice stochastique

II - Normes matricielles et conditionnement

1) Normes matricielles et rayon spectral

Rombaldi² : def d'une norme matricielle, ex des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$, prop norme sous algèbre

Rombaldi : def du rayon spectral, prop $\|A\|_2=\rho(A)$ pour normale, et cas général, thm lien norme / rayon spectral, $A\mapsto\rho(A)$ continue, thm lien cv $x_{k+1}=Ax_k$ et $\rho(A)<1$ et corollaire $\rho(A)=\lim_{k\to+\infty}\|A^k\|^{1/k}$

2) Conditionnement

Rombaldi² + Ciarlet : def du conditionnement, le cas de la norme 2, lien avec les systèmes linéaires, interprétat°, lien avec les pb de valeurs propres

3) Lien avec les méthodes itératives

Ciarlet : def des méthodes CV, thm de CV, descript° des méthodes, thm de CV

III - Calcul approché et localisation

1) Méthode de la puissance

Rombaldi²: def de la méthode de la puissance, thm de CV, méthode de la puissance inverse, et rq sur méthode de déflation.

2) Méthode QR

Ciarlet: thm décomposit° QR, def de la méthode, thm de CV.

3) Localisation de valeurs propres

CVA: lemmes: continuité du spectre et continuité de $M \mapsto \chi_M$, Disques de Gershgorin, rq sur racines de polynômes grâce à mat. compagnon

---

Refs: Grand Combat: Algèbre, le grand combat, Berhuy

Mansuy: Algèbre linéaire, réduct° des endos, Mansuy & Mneimné

Gourdon: Algèbre, Gourdon

Rombaldi: Maths pour l'agreg: Algèbre & géométrie, Rombaldi

Rombaldi²: Analyse matricielle, Rombaldi

Ciarlet: Intro à l'anum matricielle et à l'opti, Ciarlet

CVA: Carnet de voyage en Algébrie, Caldero & Peronnier.

154 : Exemples de décomposition de matrices. Applications.

I - Décompositions liées à la réduction

1) Diagonalisation, trigonalisation

Mansuy : déf diagonalisable, trigonalisable, CNS diagonalisabilité avec poly SARS, CNS trigonalisabilité avec poly scindé, applicat : nbr de résultats sont plus faciles à montrer sur une matrice diag / triangulaire et on peut généraliser (et en + $\overline{D_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$ et $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$ donc on peut encore + généraliser !).

OA : réduction simultanée, corollaire si A et B commutent et sont diag, AB, A+B aussi, + ex : si U, V diag alors $\Phi_{U,V} : M \mapsto UM - MV$ aussi.

2) Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley et exponentielle

Gourdon + Rombaldi : [Décomposition de DJC et application à l'exponentielle]

OA : surject° de $M_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$ et $M_n(\mathbb{R})$ sur les carrés, rq sur la commutativité : $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et non pas $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$!, permet de calculer facilement les exp sur chaque partie de la déc : si $D = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \ddots \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$, $\exp(D) = P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & \\ & \ddots \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$ et $\exp(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} N^k$.

NH2G2-1 : Méthode algorithmique pour obtenir la décomposition.

3) Réduction de Frobenius et de Jordan

Cognet : déf de $\Psi_{u,x}$ (linéaire), $\operatorname{Im} \Psi_{u,x} =: E_{u,x}$ SEV cyclique de u engendré par x, prop / déf de $\operatorname{Ker} \Psi_{u,x}$ idéal engendré par $\Pi_{u,x}$, $E_{u,x}$ admet $(x, u(x), \ldots, u^{\deg \Pi_{u,x} - 1}(x))$ c base, déf endo cyclique

Mansuy + H2G2 **:** [Réduction de Frobenius], réduction de Jordan des nilp (que l'on déduit directement), puis Jordan de façon générale (grâce au lemme des noyaux), lien entre les 2 et comment passer de l'un à l'autre, remarque sur invariants = facteurs invariants $\neq 1$ de $M - XI_n \in M_n(\mathbb{K}[X])$ que l'on peut obtenir par des opérat° élémentaires (forme de Smith)

II - Décompositions utiles à la résolution de systèmes linéaires, point de vue algorithmique

1) Décomposition LU

Ciarlet : Décomposition LU, exemple, applicat° à la résolution de systèmes linéaires, rq : valide dans le cas des matrices dans S_n^{++}, on verra Cholesky, décomposition PLU, rq : s'obtient à l'aide du pivot de Gauss en pratique, en stockant les opérations élémentaires

2) Décomposition de Cholesky

Ciarlet : Décomposition de Cholesky, rq : conséquence de LU dans ce cas particulier, corollaire : CNS pour être dans S_n^{++} !, en pratique : calcul de système, encore appli syst. linéaire

3) Décomposition QR.

Ciarlet : Décomposition QR, rq : cela correspond au procédé de Gram-Schmidt (meilleure construct° : Householder car meilleur conditionnement), application aux systèmes linéaires : $AX = B \Leftrightarrow RX = {}^tQB$ système triangulaire !

Rombaldi : Décomposition d'Iwasawa.

Ciarlet : def de la méthode QR, thm de convergence, rq : sous d'autres hypothèses on peut généraliser ça.

III - Décomposition polaire

1) Le résultat.

H2G2-1 : lemmes : $O_n(\mathbb{R})$ compact et $S_n^{++}(\mathbb{R}) = S_n^+(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{Décomposition polaire}}$, rq sur corollaire de la preuve sur racine carrée d'une matrice symétrique, rq sur "décomposition polaire" en lien avec ce qu'il se passe sur $\mathbb{C}$

Gourdon : Décomposition polaire pour $M \in M_n(\mathbb{R})$.

2) Applications

H2G2-1 : corollaires : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ et maximalité du groupe orthogonal en tant que sous grp compact, $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

---

Refs : Mansuy : Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes, Mansuy et Mneimné

OA : Objectif agrégation, Beck, Malick et Peyré

Gourdon : Algèbre, Gourdon

Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie, Rombaldi

H2G2-1 : Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Caldero et Germoni Tome 1

NH2G2-1 : Nouvelles " , Tome 1

Ciarlet : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Ciarlet

Cognet : Algèbre linéaire, Cognet

155 : Exponentielle de matrices. Applications

I - Définition, régularité et premières propriétés

Grand Combat + Rombaldi : lemme de bonne déf, déf de l'exp, elle est continue, pptés de base, $e^A \in K[A]$, contre exc pour la commutat ; en fait ni nécessaire ni suffisante, exp est diff ($\bar{m}$ C^∞) + expression de la différentielle, réciproque à la commutation, rq sur $Dexp(0) = I_{Mn}$ inversible, $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$ donc $exp(M_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$
* dans les exo du Rombaldi

II - Calcul de l'exponentielle

1) Décomposition de DJC

Gourdon + Rombaldi : $\boxed{\text{Décomposit° de DJC et appli à l'exponentielle}}$

Grand Combat : calcul de exp (N) et exp (D)
rq sur compliqué d'obtenir la déc en pratique → $NH_2G_2^1$: méthode numérique

2) Décomposition de Jordan

Gourdon : thm de réduction de Jordan, rq sur pratique car il suffit de calculer sur les blocs, lemme qui suit

III - Injectivité et surjectivité

1) Sur $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$

Rombaldi : exp injective ni sur $M_n(\mathbb{R})$, ni sur $M_n(\mathbb{C})$ (contre exc avec $2i\pi k I_n$ pour $M_n(\mathbb{C})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ pour $M_n(\mathbb{R})$), rq sur elle est injective sur $D_n(\mathbb{R})$ par injectivité de exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → mais pas sur $D_n(\mathbb{C})$!.

131 dev : $\boxed{\text{Surjectivité de l'exponentielle}}$ + image de $M_n(\mathbb{R})$

Rombaldi : le corollaire sur les racines n-ièmes sur $GL_n(\mathbb{C})$

Rombaldi : le corollaire sur les racines n-ièmes sur $GL_n(\mathbb{R})$

Grand Combat : le corollaire sur les matrice de $GL_n^+(\mathbb{R})$ n'ayant pas d'antécédent.

Rombaldi : exc de matrice de

2) Restriction aux matrices nilpotentes

Rombaldi : déf du log sur $B(I_n, 1)$, lemme qui suit, bijection entre $N_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, rq grâce à Dunford cela peut aussi permettre d'avoir la surjectivité

3) Restriction à $S_n(\mathbb{R})$ et $H_n(\mathbb{C})$

$H_2G_2^1$: décomposition polaire, homéo exp : $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$, corollaire sur homéo pour $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{R})$

IV - Applications à la résolution d'équations différentielles

Gourdon 2 : def d'une équat° linéaire, rq sur le fait de se ramener à l'ordre 1, thm de CL linéaire

Demailly : thm sur système fondamental avec exp, exemple, rq sur le fait qu'on retrouve le cas de l'ordre 2, def de stabilité, asymptotique stabilité, rq sur il suffit d'étudier 0, thm de stabilité avec les VP, rq sur Liapounov

+ exemple en dim 2 en fct° des VP, dessin en annexe

Refs : Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy

Romboldi : Maths pour l'agreg : algèbre et géom, Romboldi

Gourdon : Algèbre, Gourdon

131 devs : 131 dev, le Barbenchon et cie

H_2G_2 1 : Histoires Hédonistes..., Caldero & Germoni

Gourdon 2 : Analyse, Gourdon

~~Berthelin : Equa. diff, Berthelin~~

Demailly : Anum & équa diff, Demailly.

156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

I - Trigonalisation

1) Polynômes d'endomorphismes

Grand Combat : def ev_u, de π_u, lemme des noyaux, def du polynôme caractéristique, $\lambda \in \mathbb{K}$ VP ssi $\chi_u(\lambda)=0$, Cayley Hamilton, χ_u et π_u m facteurs irréductibles ex : $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \to$ sur $\mathbb{R}$, $\pi_M=\chi_M=X^2+1$ car irréductible, prop si $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_r$, $\chi_u=\prod \chi_{u_{E_i}}$ et $\mu_u=\mathrm{ppcm}(\mu_{E_1},\dots,\mu_{E_r})$.

2) Définition et caractérisations de la trigonalisabilité

Mansuy : def trigoZ, thm trigoZ ssi poly. ann. scindé + corollaire ssi π_u scindé, csq : sur $\mathbb{C}$, tt le monde est trigoZ, contre ex : $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ pas trigoZ sur $\mathbb{R}$. prop si u trigoZ et F stable $\Rightarrow u_F$ trigoZ + def drapeau complet et drapeau associé.

3) Trigonalisation simultanée

OA : lemme si $u\circ v=v\circ u$ alors $\ker v$ et $\mathrm{Im}\, v$ stables par u, critère de co trig, ⚠ contrairement au cas diag, pas $\Leftrightarrow$, contre ex : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ sont co-trig mais ne commutent pas ! , corollaire si u, v commutent et sont trigoZ, alors $u+v$ et $u\circ v$ aussi + applicat° si U, V trig, $\Phi_{U,V}$: $M\mapsto UM-MV$ aussi.

II - Réduction des nilpotents et conséquences

1) Définitions et caractérisations des nilpotents

OA : def endo nilpotent, indice de nilpotence, prop sur caractérisations des nilpotents, exemple, si u nilp et F u-stable, u_F nilp, prop sur ensemble des nilp = un cône, contre ex de $\underset{nilp}{N}+\underset{nilp}{N'}$ pas nilp, exemple de la dim 2,

2) Sous espaces cycliques et réduction de Jordan

Gozard : def de $\Psi_{u,x}$: $P\in\mathbb{K}[X]\mapsto P(u)(x)\in E$ (linéaire), $\mathrm{Im}(\Psi_{u,x})=:E_{u,x}$ est appelé sous espace cyclique de u engendré par x, prop/def $\ker\Psi_{u,x}$ idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par $\pi_{u,x}$; $\Psi_{u,x}$ induit un iso $\mathbb{K}[X]/\langle\pi_{u,x}\rangle \xrightarrow{\sim} E_{u,x}$ donc la famille $(u, u(x),\dots,u^{\deg(\pi_{u,x})-1})$ est une base de $E_{u,x}$

Mansuy : prop $\exists x\in E$, $\pi_{u,x}=\pi_u$ ($u\in\mathcal{L}(E)$ qq) + prop si $x\in E$ est tq $\pi_{u,x}=\pi_u$ alors $E_{u,x}$ admet un supplémentaire stable par u. ↗ lié avec noyaux itérés (+OA) def d'un bloc de Jordan, prop unicité de la décomposition, puis existence de la réduite et enfin Jordan dans le cas général.

3) Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley

Gourdon + Rombaldi : $\boxed{\text{Décomposition de DJC + applicat° à l'exponentielle}}$

OA : exp surjection, sur $\mathbb{C} \to$ DJC = trigoZ grâce à co trig, ex : $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

III - Aspects topologiques et dénombrement

1) Caractérisations topologiques et géométriques

OA : u nilp ssi $u \sim \lambda u$ (car $=0$), $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, u nilp ssi $0 \in$ $\overline{\text{classe sem de } u}$, car nulle, u nilp ssi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $tr(u^k)=0$, contre ex $I_2 \in M_2(\mathbb{F}_2)$ trace nulle

2) Propriétés topologiques des ensembles

OA : $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$ et $\overline{D_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$, appli : $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ qui à M associe D diag dans la DDJ, $n \geq 2$ φ pas continue, $u \mapsto \pi_u$ pas continue
ex : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\pi_u = X^2$ et $\to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi_u = X$

$H_2G_2^2$: ens des nilp est fermé, adhérence de classe de sim de Jd blc nilp de taille max = ensemble des nilp.

3) Dénombrement dans un corps fini

$NH_2G_2^2$: cardinal de $Gl(\mathbb{F}_q)$

CVA : $\boxed{\text{Lemme de Fitting + cardinal du cône nilpotent}}$

$NH_2G_2^2$: cardinal de l'ensemble des trigonalisables.

Refs : Grand Combat : Algèbre : le grand combat, Berhuy.

Mansuy : Algèbre linéaire, réduction des endo, Mansuy et Mneimné

OA : Objectif Agrégation, Beck.

Cognet : Algèbre linéaire, Cognet

Gourdon : Les Maths en tête, Algèbre, Gourdon

Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie, Rombaldi

$H_2G_2^2$: Histoires Hédonistes de groupes et de géométries, Caldero et Germoni, Tome 2

$NH_2G_2^2$: Nouvelles " , Tome 2

CVA : Carnet de voyage en algèbre, Caldero et Peronnier.

157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

I - Généralités sur les matrices symétriques et hermitiennes

1) Définitions et premières propriétés

Gourdon : def de matrices sym, antisym, hermitiennes, des exemples, dimension de An et Sn, Mn = An ⊕ Sn avec décomposition, dim de Hn (⚠ en tant que $\mathbb{R}$-sev, ce n'est pas un $\mathbb{C}$-sev), décomposition, def de $S_n^{+(+)}$ et $H_n^{+(+)}$. ⇒ coeff diag nécessairement réels

2) Lien avec les endomorphismes auto-adjoints

Gourdon : def de l'adjoint, d'un endo auto-adjoint, lien avec les matrices sym/hermitiennes, la prop qui suit sur F⊥ stable pour f.

3) Lien avec les formes quadratiques / hermitiennes

Gourdon : def de formes bilinéaire symétrique et sesquilinéaire hermitienne def de la mat. d'une forme bilinéaire, sesquilin., cq avec matrices; * def de forme quad, prop forme polaire, def mat et rang, def de forme herm, prop forme polaire, def mat et rang, les exemples * produit scalaire ⇔ $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

II - Réduction et applications

1) Théorème spectral

Rombaldi + Gourdon : lemmes qui précèdent le thm, thm spectral, traduct° matricielle, thm de pseudo-réduct° simultanée, rq.
Audin : utilité pour la classification des coniques dans un repère ortho.
Rombaldi : $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) / H_n^{++}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow VP > 0$, corollaire. $M \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = {}^tBB$, critère de Sylvester, corollaire.

2) Réduction des formes quadratiques

Gourdon + Grifone : thm de réduction, exemple, csq matricielle, thm d'inertie de Sylvester, csq matricielle, rq avec lien signature et déf/pos, classificat° des coniques en fct° de leurs signatures
Rombaldi : act° par congruence, signature = invariant

3) Décomposition polaire

H2G2 1 : lemmes : $O_n(\mathbb{R})$ compact dans $M_n(\mathbb{R})$, $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^{+}(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{Décomposition polaire}}$, rq sur $\sqrt{\ }$ de $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, rq sur "déc polaire" en lien avec ce qu'il se passe sur $\mathbb{C}$.
Gourdon : déc polaire sur $M_n(\mathbb{R})$
H2G2 1 : Corollaires : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ et maximalité du grp orthogonal en tant que ss-grp compact, exp homéo entre $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$, csq sur homéo de $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$

III - Applications

1) Calcul différentiel et géométrie

Gourdon²: thm de Schwarz, def de la Hessienne, elle est symétrique, lien avec les extremums, ex en dimension 2
Rouvière: $\boxed{\text{Lemme de Morse}}$, appli. à posit° surface/plan tangent et à courbes de niveau

2) Vecteurs gaussiens

Barbe: def d'un vecteur gaussien, de m et Γ, c'est une matrice symétrique, xq sur marginale, fct° caractéristique, prop qui fait intervenir $\Gamma = {}^tAA$, xq: $\forall S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists$ vecteur gaussien tq $\Gamma = S$, densité d'un vecteur gaussien

---

Refs: Gourdon: Algèbre, Gourdon
Rombaldi: Maths pour l'agreg: Algèbre & géométrie, Rombaldi
Audin: Géométrie, Audin
Grifone: Algèbre linéaire, Grifone
$H_2G_2^1$: Histoires hédonistes ..., Tome 1, Caldero & Germoni
Gourdon²: Analyse, Gourdon
Rouvière: PGCD, Rouvière
Barbe: Probabilité, Barbe & Ledoux
~~Appel: Proba pour les non probabilistes~~, Appel.

158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

I - Endomorphisme adjoint et définitions d'endomorphismes remarquables

1) Définition de l'adjoint et propriétés

Rombaldi : thm de Riesz, thm et def de l'adjoint, prop sur mat. dans une BON, thm sur les ptés de base à découper en mettant en avant le dernier point (ajouter $\mu_u = \mu_{u^*}$ et $\chi_u = \chi_{u^*}$)

2) Exemples d'endomorphismes remarquables

Rombaldi : def endo symétrique, et de $S_n(\mathbb{R})$, correspondance avec une BON, dim de $S(E)$, def d'un projecteur orthogonal, exc sur une droite, c'est un symétrique, def endo orthogonal, eq avec conserve les distances, prop envoie BON sur BON, lien avec matrice, det $= \pm 1$*, def d'une sym orthogonale, c'est une isométrie (et un sym aussi), def des normaux, es : les exc précédents sont des normaux, ⊕ les antisym, les similitudes, lien matrices. * def de $SO(E)$

II - Réduction des endomorphismes normaux et conséquences sur les auto-adjoints

1) Réduction des endomorphismes normaux

Rombaldi : Réduction des endo normaux (les 3 lemmes + le théorème), rq : on va pouvoir appliquer cela en particulier aux sym et auto-adjoints

2) Conséquences sur les endomorphismes auto-adjoints

Rombaldi : théorème spectral, rq sur antisymétrique, csq matricielle, def de sym positif (resp. défini positif), de $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$, thm sur vp
Gourdon : thm de pseudo-réduct° simultanée
Rombaldi : $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = {}^tBB$, csq : $\forall A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe un vecteur gaussien de mat de cov $= A$ / Barbe), critère de Sylvester, csq : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
$H_2G_2{}^1$: exp : $S_n \to S_n^{++}$ est un homéo

III - Endomorphismes orthogonaux

1) Réduction et étude en dimensions 2 et 3

Rombaldi : thm de réduct° des orthogonaux
Grifone : thm pour la dimension 2, dessins qui vont avec en annexe, thm pour la dimension 3, dessins qui vont avec, éventuellement l'exc qui va avec

2) Structure du groupe orthogonal

Rombaldi : $O(E)$ sous groupe de $GL(E)$, $SO(E)$ grp distingué d'indice 2 de $O(E)$, déf (avec Perrin) de renversements, retournement

Rombaldi + Perrin : $O(E)$ engendré par les réflexions, $SO(E)$ par les renversements

3) Propriétés topologiques

Rombaldi : $O(E)$ deux composantes connexes par arcs

$H_2G_2^1$: $O_n(\mathbb{R})$ compact, (lemme $S_n^{++}(\mathbb{R}) = S_n^{+}(\mathbb{R})$), Décomposit° polaire, rq sur $\sqrt{}$ de $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, rq sur "déc polaire" en lien avec $\mathbb{C}$, coro $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ et maximalité du gp ortho en tant que ss-gp compact de GL_n, csq sur homéo GL_n. Szpirglas : Enveloppe CVX de $O_n(\mathbb{R})$

Refs : Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géom, Rombaldi

$H_2G_2^1$: Histoires hédonistes..., Tome 1, Caldero & Germoni

Barbe : Probabilité, Barbe & Ledoux

Gourdon : Algèbre, Gourdon

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Grifone : Algèbre linéaire, Grifone

Szpirglas : Maths L3, Algèbre, Szpirglas

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

I - Formes linéaires et espace dual

1) Formes linéaires et hyperplans

Rombaldi : def d'une forme linéaire* et de l'espace dual, prop sur identiquement nulle ou surjective, ex de la projection, ex de $M \mapsto tr(AM)$, de la différentielle et $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a)$

Gourdon : def d'un hyperplan, prop hyperplan $\Leftrightarrow$ noyau d'une FL $\neq 0$,

Rombaldi : 2 FL def le m hyperplan $\Leftrightarrow$ elles sont liées, thm avec $\bigcap \ker \varphi_i$

Grand Combat : interprétat° de ça avec les systèmes

Grifone : ex d'obtention d'équat° à partir des vecteurs

2) Espace dual

Gourdon + Rombaldi : def de FL coordonnées, thm sur base de E^*, exemple de base, isomorphisme, rq cet iso n'est pas canonique !, prop chgt de base dans le dual, thm de Riesz, dual sur les polynômes, exemple pour les matrices et application

3) Bidual

Gourdon : def du bidual, thm d'iso $E \simeq E^{**}$, rq sur cette fois-ci, l'iso est canonique !, prop sur la base antéduale, rq sur utilité au chgt de base, exemple dans les exos.

II - Orthogonal et transposée

1) Orthogonal d'une partie

Gourdon + Rombaldi : def de φ et x orthogonaux, rq sur le cas euclidien def de l'orthogonal d'une partie pour $A \subset E$ ou $C \subset E^*$, ce sont des SEV, thm avec dimensions, rq sur la dim infinie thm avec les pptés de base, et contre ex, ex pour un hyperplan

2) Application transposée

Rombaldi : def de la transposée, le thm qui suit (à couper en deux en mettant à part les liens noyau/image), prop avec la matrice

Gourdon : F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par ${}^tu$, rq sur appli aux raisonnements par récurrence, appli : condit° de trigoZ et cotrigoZ.

III - Applications

1) Réduction de Frobenius

Cognet : (rapidement) def de $\Psi_{u,x}$, $\mathrm{Im}\,\Psi_{u,x} =: E_{u,x}$ SEV cyclique engendré par x, prop/def de $\Pi_{u,x}$, base de $E_{u,x}$, def endo cyclique.

Mansuy + H2G2[1] : Réduct° de Frobenius (les 2 lemmes et le thm) + def mat compagnon et thm version matricielle

2) Dualité et convexité

OA + ZQ + Szpirglas : lemme Hahn Banach géom pour 1 pt et un cvx et csq sur $x \in \mathrm{Conv}(A) \Leftrightarrow \dots$, Enveloppe cvx de $O_n(\mathbb{R})$, rq sur interprétat° de 2) $\subset$ Conv(A) = intersect° des demi espaces, séparat° de 2 convexes.

3) Applications en calcul différentiel

Rouvière : def du gradient, interprétat° géom, (Rombaldi) lemme qui est nécessaire aux extrema liés, le théorème, appli au thm spectral, appli à l'EMV
OA : interprétat° géom, appli au thm spectral, appli à l'EMV d'une loi à support fini $\hat{p} = (\hat{p}_i)_{1 \le i \le r} = \left(\frac{N_i}{n}\right)_{1 \le i \le r}$.

Refs :
Gourdon : Algèbre, Gourdon
Rombaldi : Maths pour l'agrég : Algèbre & géométrie, Rombaldi
Grand Combat : Algèbre : le grand combat, Berhuy
Grifone : Algèbre linéaire, Grifone
Gognot : Algèbre linéaire, Gognot
Mansuy : Algèbre linéaire, réduct° des endo, Mansuy & Mneimné
H2G2[1] : Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Tome 1, Caldero et Germoni
OA : Objectif agrégat°, B.M.P.
ZQ : Analyse pour l'agrég, Zuily & Queffélec
Szpirglas : Maths L3, Algèbre, Szpirglas
Rouvière : PGCD, Rouvière.

161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances et isométries

I - Distances sur un espace euclidien

1) Notion de distance

Tauvel : def d'un espace affine, distance entre 2 points, distance entre 1 point et une partie, entre 2 parties, def de la project° orthogonal p/r à $\mathcal{F}$, // à $F^\perp$, caractérisat°, lien avec la distance à $\mathcal{F}$.

2) Déterminant et matrice de Gram

Gourdon : def du det de Gram d'une famille de vecteurs, prop qui suit, théorème sur lien avec calcul de distances

Tauvel : corollaire sur $d(A,\mathcal{F})$, corollaire puis théorème sur calcul de $d(\mathcal{F},\mathcal{G})$

Gourdon : inégalité de Hadamard (et interprétation)

II - Isométries vectorielles et affines

1) Groupe des isométries vectorielles et réduction

• def de $SO(E)$
▷ distingué d[...]

Rombaldi : def d'une isométrie, thm eq avec conserver les distances, sous grp de $GL(E)$, thm sur BON → BON, det $= \pm 1$, * les 3 lemmes puis la réduction des isométries, def d'une symétrie orthogonale, de réflexion et retournement, eq sur matrice, (+ Perrin) engendrent $O(E)$ et $SO(E)$.

2) Propriétés topologiques du groupe orthogonal

Rombaldi : 2 composantes connexes par arcs, $O(E)$ partie compacte

$H_2G_2^1$: Décomposition polaire, coro : maximalité du grp orthogonal en tant que sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

ZQ + OA + Szpirglas : $\boxed{\text{Enveloppe convexe de } O_n(\mathbb{R})}$

3) Isométries d'un espace affine

Tauvel : def d'une isométrie affine, thm d'eq avec partie linéaire $\in O(E)$, def de Is^+ et Is^-, des exemples, $Is(\mathcal{E}) \triangleleft GA(\mathcal{E})$, prop sur le det et quelques corollaires, générateurs de

Mercier : thm "fondamental" et

$Is(\mathcal{E})$ et $Is^+(\mathcal{E})$.

III - En dimensions 2 et 3

1) Classification en dimension 2

Grifone : thm de classificat° pour la dimension 2, dessins qui vont avec.

Audin : classificat° des isométries du plan, dessins + Combes (dessins

2) Classification en dimension 3

Grifone : thm de classificat° pour la dimension 3, dessins et ex qui va avec

Mercier : classificat° des isométries de l'espace, dessins

3) Isométries préservant une figure

Ulmer : def de D_n (en tant qu'iso de P_n), thm sur les générateurs, et sur $D_n = \{id, r, \dots r^{n-1}\} \cup \{s, rs \dots r^{n-1}s\}$ et la relat° sur les élts

Rombaldi : thm sur iso avec les autres groupes de la m forme.

Tauvel : éventuellement def d'une similitude

H2G2 1 : lemme sur $Is(\varphi(X)) \simeq Is(X)$, (lemme + les 2 théorèmes). $\boxed{\text{Isométries du cube et du tétraèdre}}$

Refs :

- Tauvel : Géométrie, Tauvel
- Gourdon : Algèbre, Gourdon
- Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géom., Rombaldi
- Perrin : Cours d'algèbre, Perrin
- H2G2 1 : Histoires hédonistes ..., Tome 1, Caldero & Germoni
- OA : Objectif agrégatif, B. M. P
- Szpirglas : Maths L3, Algèbre, Szpirglas
- ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily & Queffélec
- Mercier : Cours de géométrie, Mercier
- Grifone : Algèbre linéaire, Grifone
- Audin : Géométrie, Audin
- Combes : Algèbre et géométrie, Combes
- Ulmer : Théorie des groupes, Ulmer.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

I - Généralités sur les systèmes linéaires

1) Définitions

Grifone : définition de systèmes linéaires, def de solut°, de compatible, expression matricielle, rq : solut° si $B \in Im(A)$, def du rang du système

2) Système de Cramer et cas général

Grifone : def d'un système de Cramer, prop : unique solut°, (+ Gourdon) formule de Cramer, exemple, thm de Rouché, exemple, ex des systèmes homogènes, rq : le calcul "naïf" (via la formule de base) d'un det est bien trop coûteux → trouvons une alternative !

II - systèmes échelonnés et résolution directe

1) Opérations élémentaires et pivot de Gauss

$H_2G_2^1$: def d'une matrice échelonnée, pour une matrice carrée, échelonnée ⇔ triangulaire supérieure

Ciarlet : rq sur l'algo de remontée

Grifone : opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système

$H_2G_2^1$: def des matrices d'opérat° élémentaires et tableau qui va avec

Ciarlet : méthode du pivot, exemple, complexité, rq sur m chose pour les matrices rectangulaires et m chose sur les colonnes

2) Applications

$H_2G_2^1$: reformulat° en termes d'actions de groupes

Grand Combat + CVA + FGN Algèbre 2 : Générateurs de $Gl_n(\mathbb{K})$ et $Sl_n(\mathbb{K})$ et application à la connexité

Grifone + Gourdon : lien équat° formes linéaires, ex avec un système, utilisat° pour obtenir FNG, pour obtenir l'équat° des SEV, rq sur calcul de déterminant, thm A de rang r éq à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, csq : calcul du rang. exemple

3) Factorisations LU et Cholesky

Ciarlet : def de la factorisation LU, appli à la résolut° de systèmes linéaires, rq sur cas particulier hyp vérifiées : $S_n^{++}(\mathbb{R})$, décomposit° de Cholesky, rq sur appli à la résolut° de systèmes

4) Etude sur un anneau euclidien

Forme de Hermite → tte matrice sur A euclidien éq à une matrice éch en lignes/en colonnes

→ $B = PA$ (éch lignes, $P \in Gl_n(A)$)

131 dev : ~~Forme normale de Smith !~~

OA + Grand Combat : algo et exemples, rq sur un corps, rq vrai pour un anneau principal, ppté : invariants de $XI_n - M$ = invariants de Frobenius de M, rq sur mat. d'opérat° élémentaires in définition, générateurs de $GL_n(A)$ et $SL_n(A)$

III - Méthodes itératives

Ciarlet : déf des méthodes itératives, thm de convergence, descript° des méthodes avec le petit tableau, thm de convergence, éventuellement gradient à pas opti

Refs : Grifone : Algèbre linéaire, Grifone

Ciarlet : Introduct° à l'anum matricielle et à l'opti, Ciarlet

$H_2G_2^1$: Histoires hédonistes ..., Tome 1, Caldero & Germoni

Grand Combat : Algèbre le grand combat, Berhuy

CVA : Carnet de voyage en algèbre, Caldero & Peronnier

FGN Algèbre 2 : Oraux X-ENS, Algèbre 2, F.G.N

131 dev : 131 devs, Le Barbenchon et cie

OA : Objectif agregat°, B.M.P

Gourdon : Algèbre, Gourdon.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

I - Généralités

1) Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Rombaldi : def d'une forme bilinéaire, symétrique, d'une forme quadratique, exemple et rq sur xps par forme bilinéaire, thm/def de la forme polaire (unique, (isomorphisme)

2) Représentation matricielle

Rombaldi : def matrice d'une forme bilinéaire, $\varphi(x,y) = {}^tXAY$, φ symétrique ssi A symétrique, iso entre $S_n(\mathbb{K})$ et forme bil. sym et donc entre forme quad et $S_n(\mathbb{K})$, dim de l'espace des formes quad, def de la matrice d'une forme quadratique, exemple (Grifone), thm de changement de base.

H2G2-1 : def matrices congruentes, def du discriminant (et prop de bonne def), invariant par act° par congruence, rq : dans la suite, on voudra classifier les formes quad, cela reviendra à chercher les orbites selon l'act° de congruence, autre invariant intéressant pour cela : le rang.

3) Rang et noyau.

Grifone : def du rang, noyau d'une forme bil., et ainsi d'une forme quad, def forme non dégénérée, définie, définie positive, def positive => non dégénérée, reprendre l'exemple, prop sur les dim : $\dim E = \mathrm{rg}\, q + \dim N(q)$, rq : ne pas confondre $x \in N(q)$ et $q(x) = 0$, on verra ces vecteurs + tard, rq : le rang est aussi un invariant par l'act° par congruence de GL_n sur S_n.

II - Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

Rombaldi : def vecteurs orthogonaux, parties orthogonales, orthogonal d'une partie, prop $X^\perp$ SEV, $X \subset (X^\perp)^\perp$, $X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$ et $E^\perp = N(q)$

Grifone : $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N(q))$, si q non dégénérée, $F^{\perp\perp} = F$

Rombaldi : $E = F \oplus F^\perp$ ssi $q_{|F}$ non dégénérée, contre ex : $q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $F = \mathrm{Vect}\binom{1}{1}$, ($\varphi((x_1,x_2),(x_1',x_2')) = x_1x_1' - x_2x_2'$), alors $x = (x_1,x_2) \in F^\perp \Leftrightarrow \forall x,\ x x_1 - x x_2 = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

2) Isotropie

Grifone : def du cône isotrope, rq : pas un EV mais un cône justement, exemples avec dessin en annexe, $N(q) \subset I(q)$, rq pas $\boxed{\supset}$, def d'un SEV isotrope, prop $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ non isotrope, contre ex : retour au contre ex précédent : de façon générale, si v est isotrope, on aura ce problème.

3) Base orthogonale et réduction simultanée

Grifone : def base orthogonale, rq : la matrice de q est alors diagonale, thm : existence, et alors $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$, exemple méthode de Gauss sur une forme, rq : donne aussi la base, thm de réduct° simultanée : Si q et q' sont 2 formes quad sur E un $\mathbb{R}$ ev de dim finie, et si q est déf positive, alors il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'. ▷ Gourdon[Al]

III - Classification des formes quadratiques

Perrin : déf de formes équivalentes, rq : classifier les formes revient à regarder les orbites par l'action de congruence.

1) Sur $\mathbb{C}$

Grifone : sur $\mathbb{C}$, $\exists$ base, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ où $r = \mathrm{rg}\, q$, cor : $\exists$ BON $\Leftrightarrow$ non dég. $\Leftrightarrow r = n$

H2G2-1 : (en rq) $\mathrm{Orb}(A) = \mathrm{Orb}(A') \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A'$, donc $n+1$ classes dont 1 seule non dég ; rq : même chose pour K un corps algébriquement clos.

2) Sur $\mathbb{R}$

Grifone : thm de Sylvester, corollaire qui donne des CNS pour déf positive, négative, non dégénérée, (en rq) $\mathrm{Orb}(A) = \mathrm{Orb}(A') \Leftrightarrow \mathrm{sgn}(A) = \mathrm{sgn}(A')$, donc $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes et $n+1$ non dég.

3) Sur un corps fini

Perrin : $\boxed{\text{Classificat° des formes quadratiques sur } \mathbb{F}_q}$

H2G2 : (En rq), si $A, A' \in GL_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{Orb}(A) = \mathrm{Orb}(A') \Leftrightarrow S(A) = S(A')$ (sinon ⊕ compliqué), $2n+1$ classes dont 2 non dég.

IV - Groupe orthogonal

Grifone : déf/prop de l'adjoint, eq $q(f(x)) = q(x)$ ssi $f^* \circ f = id$, déf du groupe orthogonal, caractérisation matricielle.

Perrin : déf des réflexions, thm : $O(q)$ engendré par les réflexions, rq : on peut montrer même plus que ça : au ⊕ n réflexions (thm de Cartan-Dieudonné)

à enlever si plus de place (dév)

V - Application à l'analyse

Gourdon[An] : Thm de Schwarz, déf de la Hessienne : symétrique, thm $f(a+h) = f(a) + \frac{Q(h)}{2} + o(h$ et étude du minimum

Rouvière : $\boxed{\text{Lemme de Morse}}$

≃60165

Refs : Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie

Grifone : Algèbre linéaire, Grifone

H2G2-1 : Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Caldero et Germoni, Tome 1

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

Gourdon[An] : Analyse, Gourdon & Gourdon[Al] : Algèbre, Gourdon.

Rouvière : Petit guide du calcul différentiel, Rouvière.

181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et géométrie

I - Notions de convexité dans un espace affine

1) Barycentres

Mercier : prop qui justifie la def du barycentre, la def, la prop avec les pptés de base, def de l'isobarycentre (et du milieu), des exemples, applicat° au centre de gravité d'un triangle

2) Ensembles convexes

Szpirglas : def d'une combinaison convexe, d'un segment, def d'une partie convexe, ex en annexe, eq avec stabilité par C.C., CVX => connexe par arcs, ex des CVX de $\mathbb{R}$, des sous espaces affines, d'une boule

3) Fonctions convexes

Szpirglas : def de fct° CVX, inégalité de Jensen, des exemples, caractérisat° des fct° CVX diff sur $\mathbb{R}$,

OA : eq avec épigraphe CVX, ex de la fct° quad

II - Enveloppe convexe et points extrémaux

1) Enveloppe convexe

Szpirglas : lemme qui précède la def d'E.C, prop/def de l'EC, le test

Tauvel : thm de Gauss - Lucas

Szpirglas : thm de Carathéodory (avec les 2 lemmes).

Tauvel : conv d'une partie compact, d'une partie bornée

2) Points extrémaux

Szpirglas : def d'un pt extremal, extremal => frontière, ex d'un intervalle

équivalence avec $C \setminus \{M\}$ convexe etc

Tauvel : ex d'une boule, def d'hyperplan d'appui, les 2 lemmes nécessaires, thm de Krein - Milman

Szpirglas : max d'une fct° CVX = pts extrémaux

III - Applications en algèbre et géométrie

1) Convexité dans les espaces de matrices

OA + Szpirglas + ZQ : $\boxed{\text{Enveloppe convexe de } O_n(\mathbb{R})}$, + ajouter séparat° cvx fermé = intersect° des demi-espaces + généraliser pour la séparat° de deux parties

Szpirglas : lemme + parties compact de $GL_n(\mathbb{R})$

+ $S_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto -\ln(\det(M))$

2) Barycentres et applications affines

Audin : def applicat° affine, éq appli affine ssi conserve barycentres

Szpirglas : fct° affine envoie un CVX sur un CVX, et fct° affine est CVX

H2G2[1] : Isométries du cube et du tétraèdre (lemme + 2 thm)

+ éventuellement 3) Coordonnées barycentriques avec def et des pptés dans Szpirglas et dans Audin ex pour un triangle : centre de gravité et point quelconque

---

Refs : Tauvel : Cours de géométrie, Tauvel

Szpirglas : Maths L3 : Algèbre, Szpirglas

Mercier : Cours de géométrie, Mercier

OA : Objectif agrégation, B.M.P

ZQ : Analyse pour l'agreg, Zuily Queffélec

Audin : Géométrie, Audin

H2G2[1] : Histoires hédonistes ..., Tome 1, Caldero & Germoni

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

I - Briques élémentaires du dénombrement

1) Cardinaux et ensembles finis

Gourdon : def d'un cardinal, cardinaux et bijection/injection/surjection, principe des tiroirs, exemple d'application au théorème d'approximation de Dirichlet, somme de cardinaux, principe des bergers, formule du crible, exemple : utile pour obtenir la classificat° des formes quad, cf partie III

2) Listes et arrangements

Gourdon : définitions de liste, arrangement, ex jeu de cartes, nbr a'appli entre 2 ensembles

CVA : nombre de surjections entre 2 ensembles

Gourdon : nombre de parties d'un ensemble.

3) Combinaisons

Gourdon : def combinaison, ex jeu de cartes, interprétations, différentes formules (symétrie, Pascal, etc), formule du binôme, formule de Vandermonde, cas particulier coef multinomial et formule du multinôme.

II - Outils plus avancés de combinatoire

1) Inversion de Möbius

Rombaldi : def du produit de convolution, de la fonction de Möbius, propriétés du produit, inversion de Möbius, $\boxed{\text{Nombre de polynômes irréductibles sur } \mathbb{F}_q}$, autre application pour l'indicatrice d'Euler.

2) Séries génératrices

Grand Combat : définition de l'anneau des séries formelles

Gourdon : application au nombre de dérangements, et au nombre de Bell.

III - Combinatoire en algèbre

1) En théorie des groupes

Rombaldi : thm de Lagrange, prop sur card de $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ si φ morphisme application : si $m \wedge n = 1$, pas de morphisme autre que le morphisme trivial entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Grand Combat : relation orbite-stabilisateur, équation aux classes, application au p groupe, pour déduire $|E| = |E^G| [p]$ et $Z(G)$ non trivial, formule de Burnside

H2G2[1] : Iso du cube et dénombrement des coloriages du cube

2) Autour des corps finis

Perrin : Cardinaux de $GL_n(\mathbb{F}_q)$, $SL_n(\mathbb{F}_q)$, etc, applications aux isomorphismes exceptionnels.

CVA : Lemme de Fitting + cardinal du cône nilpotent

$NH_2G_2^2$: cardinal de l'ensemble des trigonalisables, des diagonalisables, éventuellement des applications de rang fixé.

Perrin : lemme $ax^2+by^2=1$ a des solutions, classification des formes quad sur $\mathbb{F}_q$

3) Entre algèbre et probabilités : les permutations aléatoires

Gourdon : N va donnant le nb de points fixes d'une $\sigma \in S_n$ tirée au hasard, $\mathbb{P}(N=0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ (grâce aux dérangements), et on en déduit que $\mathbb{P}(N=k)=\frac{1}{n!}\binom{n}{\pi}(n-\pi)!\sum_{k=0}^{n-\pi}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{\pi!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, que $N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(1)$, et en remarquant $N=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{1_{\sigma(k)=k}}_{\text{Bernoulli}}$, on obtient $E(N)=1$ et $V(N)=1$., définition des nombres de Stirling de première espèce, propriété, proba d'avoir k cycles dans sa décomposition en cycles à supports disjoints, on en déduit l'espérance ($K \leftarrow$ va donnant le nb de cycles) (et donc quand $n\to+\infty$, $E(K)\sim \ln(n)$)

Refs : Gourdon : Algèbre et probabilités, Gourdon

CVA : Carnet de voyage en algèbrie, Caldero et Peronnier

Rombaldi : Maths pour l'agreg, Algèbre et géométrie, Rombaldi

Grand Combat : Algèbre, le grand combat, Berhuy.

Perrin : Cours d'algèbre, Perrin

$NH2G2^2$: Nouvelles histoires de groupes et de géométrie, Caldero et Germoni, Tome 2.

$H_2G_2^1$: Histoires hédonistes..., Caldero et Germoni, Tome 1

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

I - Transformations d'un espace affine

1) Espace affine et applications affines

Mercier : def d'un espace affine avec les act° de groupe, pptē avec interprétat° et relat° de Chasles (et la bijéct° avec $\vec{E}$)
Tauvel : prop/def d'un SEA, def d'un repère affine
Mercier + Audin : def applicat° affine avec rq, prop sur f déterminée par...,
f : SEA -> SEA, ex des pts alignés
Tauvel : ex de translat°, d'homothétie, de project°

2) Groupe affine

Mercier : prop sur inverse d'une appli affine, def du groupe affine
Tauvel : prop sur $f \in GA(\mathcal{E})$ vérifie $f = s \circ g$ où $s \in T(\mathcal{E})$ et $g \in GA_A(\mathcal{E})$
act° transitive sur les repères affines

3) Utilisation des applications affines

Audin : rq sous forme de définit° de la mesure algébrique, rapport ne dépend pas $\vec{u}$, thm de Thalès, corollaire (dessins), (+Rombaldi) prop sur composée de 2 homothéties, thm de Pappus, thm de Desargues

II - Géométrie euclidienne : les isométries

1) Isométries vectorielles et réduction

Rombaldi : def d'une isométrie, eq avec conserve les distances, prop avec det = ±1, ss-gp de $GL(E)$ et def de $SO(E) \triangleleft O(E)$ d'indice 2, réduct° des isométries, def de symétrie orthogonale, de réflexion, de retournement, (Perrin) engendrent $O(E)$ et $SO(E)$
Grifone : thm de classificat° en dim 2, en dim 3, exemple et dessins

2) Isométries affines, exemples dans le plan et l'espace

Tauvel : def d'une isométrie affine, thm eq avec ($\vec{f} \in O(E)$), $Is(\mathcal{E}) \triangleleft GA(\mathcal{E})$ et prop sur le det avec def de Is^+ et Is^-, exemples et thm fondamental.
Mercier : générateurs de $Is(\mathcal{E})$ et $Is^+(\mathcal{E})$
Audin + Combes + Mercier : classificat° des isométries du plan, de l'espace, dessins

3) Isométries préservant une figure

Ulmer : def de D_n (ent tant qu'iso de P_n), thm sur les générateurs et relat° sur les elts
Rombaldi : $D_3 \simeq S_3 \simeq Is$(triangle équilatéral)
H2G2[1] : lemme sur $Is(\mathcal{C}(X)) \simeq Is(X)$, $\boxed{\text{Isométries du cube et du tétraèdre}}$
éventuellement coloriages du cube.

III - Constructibilité à la règle et au compas

1) Corps des réels constructibles

Gozard + Carrega : def d'un pt constructible, qq constructions de base (dessin en annexe), not° de réel constructible, E = sous corps stable par $\sqrt{\ }$,

2) Théorème de Wantzel et applications à des problèmes grecs

Gozard + Carrega : thm de Wantzel, coro, ex avec π et pb de quadrature du cercle, ex de $\sqrt[3]{2}$ et pb de duplicat° du cube

3) Polygones constructibles

Gozard + Carrega : def d'un $\mathbb{C}$ constructible, $z = x+iy \in E(i) \Leftrightarrow x, y \in E$, csq : $E(i)$ sous corps de $\mathbb{C}$ stable par $\sqrt{\ }$, GW version $\mathbb{C}$, def de polygone constructible (avec $e^{\frac{2i\pi}{n}}$), lemme avec $e^{\frac{2i\pi}{mn}} \in E(i) \Leftrightarrow e^{\frac{2i\pi}{m}}, e^{\frac{2i\pi}{n}} \in E(i)$, def nbr de Fermat, $\boxed{\text{Théorème de Gauss Wantzel}}$, thm complet, exemple (dessin en annexe)

Refs :
- Mercier : Cours de géométrie, Mercier
- Tauvel : Cours de géométrie, Tauvel
- Audin : Géométrie, Audin
- Rombaldi : Maths pour l'agreg : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- Perrin : Cours d'algèbre, Perrin
- Grifone : Algèbre linéaire, Grifone
- Combes : Algèbre et géométrie, Combes
- Ulmer : Théorie des groupes, Ulmer
- H_2G_2 1 : Histoires hédonistes ..., Tome 1, Caldero & Germoni
- Carrega : Théorie des corps, la règle et le compas, Carrega
- Gozard : Théorie de Galois, Gozard