21 p.1 Операции над лин. от. и их матрицами. Изменение матриц линейного от-я и лин ф-я при замене базисов

Утв. $\varphi: V \to U$

матрица $\varphi = A$ из базиса ε в $V \to f$ в U.

Пусть $\varepsilon \to \varepsilon'$ $\varepsilon' = C\varepsilon$

Пусть $f \to f'$ $f' = D\varepsilon$.

Тогда $A' = D^{-1}AC$.

Д-во.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \{e_1 \dots e_n\} & A & \{f_1 \dots f_m\} \\ \downarrow C & & \downarrow D \\ \{e_1' \dots e_n'\} & A' & \{f_1' \dots f_m'\} \end{array}$$

$\varepsilon' = \varepsilon C$

Подействуем $\varphi \Rightarrow (\varphi(e_1') \dots \varphi(e_n')) = (\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))C$

$(\varphi(e_1') \dots \varphi(e_n')) = (f_1 \dots f_m)AC$

Но $(f_1' \dots f_m') = (f_1 \dots f_m)D \Rightarrow (f_1 \dots f_m) = (f_1' \dots f_m')D^{-1}$

Отсюда

$(\varphi(e_1') \dots \varphi(e_n')) = (f_1' \dots f_m') \underbrace{D^{-1}AC}_{=A'}$ ■

Note. Если $\varphi: V \to V$, то

$A' = C^{-1}AC$.

Th. $\varphi: V \to U$ лин. от-е. Тогда $\exists$ базисы $\{e_1 \dots e_n\}$ в V и $\{f_1 \dots f_m\}$ в U такие, что матрица φ $A = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Д-во.

$V \xrightarrow{\varphi} U$.

Выберем $\{e_1 \dots e_k\}$ - базис в $\operatorname{Ker} \varphi$, дополним до базиса в V.

$\{\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n, e_1 \dots e_k\}$ - базис V.

$\{\varphi(\bar{e}_{k+1}), \dots, \varphi(\bar{e}_n), \bar{u}_{n-k+1}, \dots \bar{u}_m\}$ - базис в U

Тогда $A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ ■

Произведение л.о. Обратное о.

$V\ W\ L$ — лин. пр-ва

$\varepsilon\ f\ g$ — базисы

$\varphi: W \to L \quad \varphi \underset{(f,g)}{\longleftrightarrow} A \quad A \in M_{k\times m}$

$\psi: V \to W \quad \psi \underset{(\varepsilon, f)}{\longleftrightarrow} B \quad B \in M_{m\times n}$

Оп. Произведением отобр-й $\varphi \cdot \psi$ наз-ся отображение $V \to L$, опр-е равенством $(\varphi\cdot\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$

Утв. Если $\varphi \underset{(f,g)}{\longleftrightarrow} A$ и $\psi \underset{(\varepsilon, f)}{\longleftrightarrow} B$, то $\varphi\cdot\psi \underset{(\varepsilon,g)}{\longleftrightarrow} AB$

Д-во. $\varphi\cdot\psi: V \to L$

$(\varphi\cdot\psi)\varepsilon = \varphi(\psi\varepsilon) = \varphi(f\cdot B) = (\varphi f)B = (gA B) = g(AB) \Rightarrow AB$ — матрица $\varphi\cdot\psi$. ▣

Утв.

Пусть $\varphi: V \to W$ — лин. от-е. $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ $\operatorname{Im}\varphi = W$

Тогда

1) $V \cong W$

2) φ имеет обр-е от-е $\varphi^{-1}: W \to V$ — линейное.

Если $\varphi \underset{(\varepsilon,f)}{\longleftrightarrow} A$, то $\varphi^{-1} \underset{(f,\varepsilon)}{\longleftrightarrow} A^{-1}$

Д-во.

$$\underbrace{\dim\operatorname{Ker}\varphi}_{=0} + \underbrace{\dim\operatorname{Im}\varphi}_{=\dim W} = \dim V$$

$\dim W = \dim V \Rightarrow V \cong W$

Т.к. φ инъективно и сюръективно $\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1}$

Аддитивность $\varphi^{-1}(y_1+y_2) \overset{?}{=} \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)$

$\exists\, x_1 \in V_1,\ x_2 \in V: \varphi(x_1) = y_1,\ \varphi(x_2) = y_2$

$\Rightarrow \varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = y_1 + y_2$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(y_1+y_2) = x_1 + x_2 = \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)$

Однородность аналогично. $\Rightarrow \varphi^{-1}$ линейно

$\varphi\cdot\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\cdot\varphi = id$ ▣