№7 Б1 Понятие уравнения мн-ва. Алгебраические линии и поверхности, пересечение и объединение алгебраических линий. Сохранение порядка при переходе к другой с-ме координат

Опр. Многочлен от n переменных $x_1 x_2 \dots x_n$ наз-ся формальное алг. выраж. вида

$$\sum_{\substack{i_1 \dots i_n \\ i_k \geq 0}} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

Опр. Выр-е вида $\alpha x^i y^j z^k$ наз-ся моном

Опр. Запись многочлена наз-ся несокр. если в ней нет двух мономов с одинаковыми упор-ми степенями

Утв. Если P - мн-н от n пер-х с ненулевой несокр записью, то P – не тожд. нуль

Д-во.

индукция по n, где n – кол-во пер-х.

<u>База</u>

$n=1$ $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

$a_0 \neq 0$

Известно, что число корней такого мн-на не превос его степени.

$P(x) = ax+b$ $a \neq 0$ – ед корень

α - корень $\Rightarrow P(x) = (x-\alpha)\underbrace{Q(x)}_{\substack{\text{мн-н} \\ \text{степени} \\ n-1}}$

По предп. ин-ии $Q(x)$ имеет не более $n-1$ корня $\Rightarrow P(x)$ имеет не больше n корней.

Тогда для $P(x)$ $\exists a \in \mathbb{R}$ $P(a) \neq 0$

<u>Шаг инд-ии</u> пусть для мн-в $P(x)$ завис. от n пер-х ув-е д-но

Докажем для $P(x_1 \dots x_n, y) = P_0(x_1 \dots x_n) y^0 + P_1(x_1 \dots x_n) y^1 + \dots$

По усл-ю $\exists P_i(x_1 \dots x_n)$ - ненулевой мн-н с несокр. записью

по пр-ю инд-ии $\exists a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$: $P_i(a_1 \dots a_n) \neq 0$

$P(a_1 \dots a_n, y) = P_0(a_1 \dots a_n) y^0 + \dots$

Тогда $\exists b \in \mathbb{R}$ $P(a_1 \dots a_n, b) \neq 0$

Сл-е С точностью до порядка мономов всякий многочлен обладает ед. несокр записью

60,

$P(x) = \sum \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$

$- P(x) = \sum \beta_{i_1} \dots \beta_{i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$

$0 = \sum (\alpha - \beta)(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})$ – несокр запись

Тогда $\alpha = \beta$.

Def. Степенью монома $\alpha x^i y^j z^k$ наз-ся число $i+j+k$

Def. Степенью мн-на наз-ся max. степень его мономов $\operatorname{Deg} P$

Утв. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Def. Будем говорить, что первый моном старше второго, если

а) $i+j+k > i'+j'+k'$

или

б) $i+j+k = i'+j'+k'$ и $i > i'$

или

в) $i+j+k = i'+j'+k'$ и $i = i'$ и $j > j'$

или

г) $i+j+k = i'+j'+k'$ и $i = i'$ и $j = j'$ и $k > k'$

Def. Старшим членом мн-на наз-ся старший моном. $HT(P)$.

Утв. $HT(P \cdot Q) = HT(P) \cdot HT(Q)$

Сл-е. $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$

Def. Алгебраической кривой в V_2 с ДСК $(O, (\bar{e}_1, \bar{e}_2))$ наз-ся мн. во точек V_2 коорд-ты которых удовл. ур-ю $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ – мн-н степени k.

Порядком ал. кривой наз-ся наименьшая степень многочлена, зад. эту кривую.

№7 р2 **Def:** Алгебраической пов-тью в V_3 с ДСК $(O, (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3))$ наз-ся мн-во точек в V_3, коорд к-х удовл. $P(x,y,z)=0$

Утв: Порядок кривой (пов-сти) не меняется при замене ДСК

Д-во:

$(O, \mathcal{E}) \to (O', \mathcal{E}')$

$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cdot S$

$X = S \cdot X' + \gamma \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \gamma \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$

$P(x,y,z)=0 \longrightarrow Q(x',y',z')$

Тогда $\deg Q \le \deg P$, т.к. при пр-и мономе

$x^i y^j z^k \to (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \gamma_1)^i (\dots)^j (\dots)^k$

Может быть $\deg Q < \deg P$

перейдем от $(O', \mathcal{E}') \to (O, \mathcal{E})$

Т.к. обратное всегда $\exists$, то $\deg P \le \deg Q$

$\begin{cases} \deg P \le \deg Q \\ \deg Q \le \deg P \end{cases} \Rightarrow P = Q$ ∎

Утв: Если M и N - алг. кривые (пов-ти), то $M \cup N$, $M \cap N$ - тоже алг. кривые (пов-ти)

Д-во: Пусть $M: P=0$

$N: Q=0$

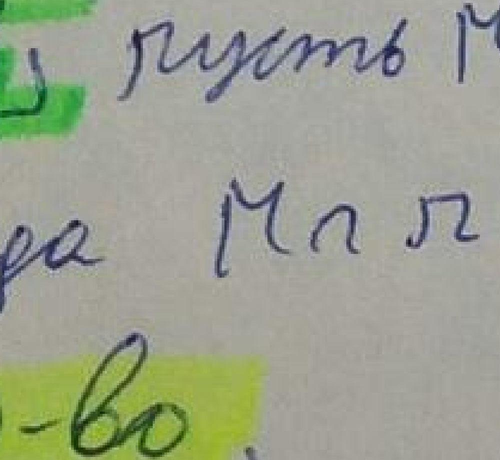
$M \cup N: P \cdot Q = 0$

$M \cap N \quad P^2 + Q^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$ ∎

Утв: Пусть M - алг. пов-ть в V_3, π - пл-ть.

Тогда $M \cap \pi$ - алг. кривые в пл-ти π.

Д-во: Выберем ДСК $(O, (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3))$ так, чтобы



$(O, (e_1, e_2))$ - ДСК в π

$P(x,y,z)=0$ в $(O, (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3))$

Тогда $P(x,y,0)$ задает пересечение M с π ∎