№16 р.1 | Вывод ур-я касательной к кривой второго пор-ка. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

**Def.** Касательная к кривой — предельное положение секущей, когда хорда секущей стягивается в одну точку

**Def.** Пусть $\Gamma$ — кривая II-го пор-ка

Тогда $(x_0\ y_0)$ — особая т-ка кривой, если это центр кривой

В особых т-х касательная не опр-на.

Пусть $(x_0\ y_0)$ — не особая т-ка.

Если пр-я, проходящая через $(x_0\ y_0)$ входит в $\Gamma$, то это касательная к $\Gamma$.

После выбрасывания этих сл-ев появляется содержательная задача для эллипса/гиперболы/параболы

$\Gamma$ — эллипс, парабола или гипербола

$M_0$ — не особая т-ка

$F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (I)

$F_1(x,y) = Ax + By + D$

$F_2(x,y) = Bx + Cy + E$

$M_0(x_0, y_0) \in \Gamma \Leftrightarrow F(x_0\ y_0) = 0$

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ — ур-е пр-й сод-ей $M_0$.

Подставим в (I) $\Rightarrow Pt^2 + 2Qt + R = 0$

$P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$

$Q = Ax_0\alpha + Bx_0\beta + By_0\alpha + Cy_0\beta + D\alpha + E\beta =$

$= (Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta = F_1(x_0\ y_0)\alpha + F_2(x_0 y_0)\beta$

$R = F(x_0 y_0) = 0$

$t(Pt + 2Q) = 0$

$t = 0 \Rightarrow (x_0\ y_0)$ точка пер-я.

При $P = 0 \Rightarrow M_0$ — ед. т-ка пер-я.

**Def.** напр-е $\binom{\alpha}{\beta}$ — асс., если $P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0$

Пусть $P \neq 0$.

$t_1 = 0$ $t_2 \neq 0$ — две т-ки пер-я $M_0M \cap \Gamma$

Предельное положение секущей $\Leftrightarrow M \to M_0 \Rightarrow t_2 = t_1$

Это значит, что $Q = 0 = F_1(x_0 y_0)\alpha + F_2(x_0 y_0)\beta = 0$ т.е. $\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{F_2(x_0 y_0)}{F_1(x_0 y_0)}$

Зная отн-е $\dfrac{\alpha}{\beta}$ можно записать ур-е касательной

$$\frac{x-x_0}{-F_2(x_0y_0)} = \frac{y-y_0}{F_1(x_0y_0)}$$

Общее ур-е

$$F_1(x_0y_0)(x-x_0)+F_2(x_0y_0)(y-y_0)=0 \quad (2)$$

Подставим $x=x_0$, $y=y_0$ в $F(x,y)$

$$(Ax_0+By_0+D)x_0+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+Dx_0+Ey_0+F=0$$

Вычтем ур-е кас-й (2)

$$(Ax_0+By_0+C)(x-x_0)+(Bx_0+Cy_0+E)(y-y_0)=0$$

Сложим

$$A\,xx_0+B(xy_0+yx_0)+Cyy_0+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0.$$

Т.е.

$x^2 \to xx_0$
$2x \to x+x_0$
$2xy \to xy_0+yx_0$