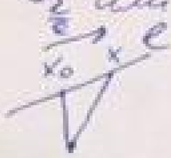
№8 Р1 Прямая на пл-ти, различные способы задания, их эквивалентность. Формула для расстояния от точки до прямой в ПДСК. Условия пересечения и параллельности двух прямых. Пучок прямых.

Способы задания прямой на пл-ти и в пр-ве

V_2 или V_3 $\bar{a}$ - напр. в-р

$\bar{r}$ - радиус в-р



Def $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t$ - векторное ур-е прямой. $t \in \mathbb{R}$

(O, ε) - ДСК в V_2

$\bar{r} \xleftrightarrow[\varepsilon]{} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $r_0 \xleftrightarrow[\varepsilon]{} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ $\bar{a} \xleftrightarrow[\varepsilon]{} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Def Коорд. ур-е пр-й

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Def канон. ур-е пр-й

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Общее ур-е прямой на пл-ти

$$\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} \Rightarrow \alpha_2 (x - x_0) = \alpha_1 (y - y_0)$$

Def Общее ур-е $Ax + By + C = 0$ (1)

Утв Пусть l задана (1)

Пусть $X_0(x_0\ y_0) \in l$

Тогда $r\ X \xrightarrow[(O,\varepsilon)]{} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in l \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

Д-во

а) „$\Rightarrow$" $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

б) „$\Leftarrow$" $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ Ax + By - A\cancel{x}_0 - By_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow Ax + By + C = 0$ ②

Следствие Вектор с коорд (α_1, α_2) явл напр в-ром l, заданной (1)

$\iff A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0,\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$

Д-во.

$\bar a = \overline{X_0X_1}$ – напр-щий $\Leftrightarrow$ $X_1\binom{x_1}{y_1} \in l$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=0 \Leftrightarrow Ax_1+By_1=0$ ☒

Т2. Пусть пр-я задана (1)

а) Тогда её напр в-р колл. в-ру $\bar a = \binom{-B}{A}$

б) В к-ве нач. т-ки можно взять

$$X_0\begin{pmatrix} -\frac{AC}{A^2+B^2} \\ -\frac{BC}{A^2+B^2}\end{pmatrix}$$

Д-во.

а) $A(-B)+B(A)=0 \Rightarrow \bar a$ – напр в-р

б) $-\frac{A^2}{A^2+B^2}C - \frac{B^2}{A^2+B^2}C + C = 0.$ ☒

Утв. Пусть l задана (1) в ПДСК (O, E)

Тогда $\bar n\binom{A}{B} \perp l$.

Д-во.

$\bar a = \binom{-B}{A}$

$(\bar n, \bar a) = (A\ B)\binom{-B}{A} = 0.$ ☒

Задание прямой с помощью норм. в-го ур-я

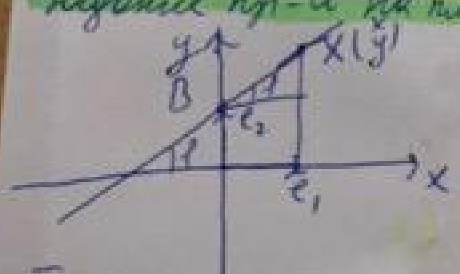
$(\overline{X_0X}, \bar n) = 0 \Leftrightarrow X \in l$

$\Updownarrow$

Def. $(\bar r - \bar r_0, \bar n) = 0$ – нормальное в-ное ур-е.

$(\bar r, \bar n) = (\bar r_0, \bar n) = D.$

Задание пр-й на пл-ти ур-ем с угл. коэф. (ПДСК)



Будем предполагать, что $l \not\parallel OY$

Пусть b – ордината т. пер. $l \cap OY$

φ – угол, который составляет l с пол. напр OX

$\overline{BX} = \binom{x}{y-b}$

$y-b = \operatorname{tg}\varphi \cdot x$

№8 р3 **Оп.** $y = kx + b$ – ур-е с угл коэф, где $k = \operatorname{tg}\varphi$

Note. $Ax+By+C=0$ можно записать в форме с угл коэф. $\Leftrightarrow$ оно р-но относительно $y \Leftrightarrow B \neq 0$

Note. пусть $l \parallel OY$

$x = a$ – ур-е пр-й.

Сл-е (признак параллельности пр-х)

а) Прямые l_1 и l_2, заданные ур-м с угл коэф

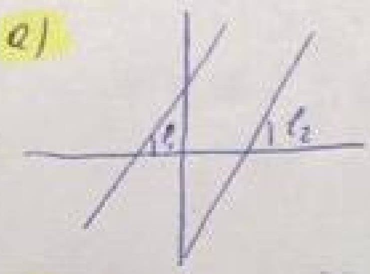
$y = k_1x + b_1 \quad l_1$

$y = k_2x + b_2 \quad l_2$ параллельны или совпадают $\Leftrightarrow k_1 = k_2$.

б) прямые l_1 и l_2, заданные общим ур-ем параллельны или совп $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

Д-во.

а)



$l_1 \underset{\text{совп}}{\parallel} l_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

б) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow S(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

Сл-е (признак перп.)

а) l_1 и l_2 заданные ур-м с коэф.

$y = k_1x + b_1 \quad y = k_2x + b_2$

перпендикулярны $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

б) l_1, l_2 зад. общим ур-ем перп-ны $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Д-во.

а) $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_2} \quad k_1 \cdot k_2 = -1$

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Т2 (о взаимном расп-ии двух пр-х на пл-ти ДСК)

$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

а) l_1 и l_2 пер-ся $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

б) l_1 и l_2 парал. или совп. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

в) l_1 и l_2 совп $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

во) а) по Тк Крамера l_1 и l_2 перес <=> система СЛУ имеет единств. решение <=> $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

б) Если l_1 и l_2 не перес. по одной точке, то по Тк Крамера $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

в) Пусть $l_1 \equiv l_2$. Тогда $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

$A_1 B_2 = A_2 B_1 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda \quad \lambda \neq 0, \ \lambda \neq \infty$

Покажем, что $\frac{C_1}{C_2} = \lambda$.

$l_1 \equiv l_2 \to x_0$ удовл обоим ур-м

$A_1 = \lambda A_2$
$B_1 = \lambda B_2$

$$\begin{cases} A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0 \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda (A_2 x_0 + B_2 y_0) + C_1 = 0 \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

Пусть $A_1 = A_2 = 0$.

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 = 0 \\ B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = -\frac{C_1}{B_1} \\ y = -\frac{C_2}{B_2} \end{matrix}$$ ЧТД

Пучок пр-х.

Def Пусть M — фикс. т. пл-ти
$l_1 \cap l_2 = M$.
Пучком пр-х, порожденных l_1 и l_2 наз-ся совокупность всех пр-х на пл-ти, проход через т. M.

Def Пусть $l_1 \parallel l_2$ и l_1 и l_2 различны.
Пучком пр-х, порожд l_1 и l_2 наз-ся совокупность всех пр-х на пл-ти, параллельных этим пр-м.

Note $\forall$ две $l_1 \not\equiv l_2$ порождают единств. пучок.

Тк (об ур-ии пучка пр-х)

Пусть l_1 и l_2 различные прямые, заданные общими ур-ми.

$l_1 : f_1(x,y) = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$l_2 : f_2(x,y) = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Тогда пучок пр-х, порожд l_1 и l_2 состоит из тех и только тех прямых, ур-е которых имеет вид.

(2) $\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0 \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

№8 P3

Д-во:

а) Пусть $l_1 \cap l_2 = \{x_0\}$

$\Rightarrow$

$f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$

Пусть l имеет ур-е вида $\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0$

$\Rightarrow \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow l$ проходит через x_0

$\Leftarrow$ Пусть $l \in$ пучку, порожд. l_1 и l_2

Покажем, что l есть ур-е вида (2)

Пусть $x \in l$, $x \neq x_0$

Введем $\alpha = f_2(x)$, $\beta = -f_1(x)$

Покажем, что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Если $\alpha = \beta = 0$, то $\left.\begin{array}{l} f_1(x) = f_2(x) \\ f_1(x_0) = f_2(x_0) \end{array}\right| \Rightarrow$ совпадают ?!

$\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_2(x) \cdot f_1(x) - f_1(x) \cdot f_2(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y)$

б) Пусть $l_1 \parallel l_2$ и различ-ны

$\Rightarrow$

Пусть l - пр-я, ур-е которой задано в виде $\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0$.

$\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \Rightarrow l$ имеет в-р $\overline{n} = \alpha \overline{n}_1 + \beta \overline{n}_2 \Rightarrow \overline{n} \parallel \overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow l \in$ пучку.

$\Leftarrow$

Пусть $l \in$ пучку, порожд. l_1 и l_2.

Пусть $x \in l$. Тогда $x \notin l_1$ $x \notin l_2$

Пусть $\alpha = f_2(x)$ $\beta = -f_1(x)$

$\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y)$

Допустим, что $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$?!

Подставим т. X.

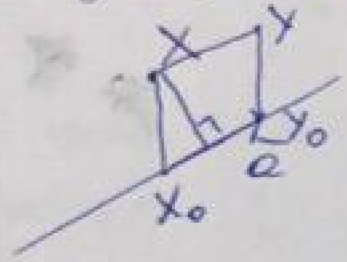
$f_2(x) \cdot f_1(x) - f_1(x) \cdot f_2(x) = 0 \Rightarrow x \in l$ ☒

Задача. (р-е от точки до пр-й)

ПДСК $(O, \mathcal{E})$

$\ell: Ax + By + C = 0$

$X(x, y)$



X_0XYY_0 — параллелограм.

$$S_{\square} = |[\overline{X_0X}, \vec{e}]| = \left| \begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} \right| =$$

$$= |A(x - x_0) + B(y - y_0)|$$

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad C = -Ax_0 - By_0$$

$$S = |Ax + By + C|$$

$$\rho(X, \ell) = \frac{S}{|\vec{e}|} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$