№15 р.1 | Невырожденные и обр-е матрицы. Нахождение обр-й матрицы при помощи эл-х пр-й

**Def** Пусть $A \in M_{n \times n}$

A наз-ся обратимой, если у нее существует обр-я $A^{-1}$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

**Def** A наз-ся обратимой слева, если $\exists B \in M_{n\times n} : BA = E$

A наз-ся ——— // — справа, если $\exists B \in M_{n\times n}\ AB = E$

**Th** Пусть $A \in M_{n\times n}$ (над F)

Тогда след. усл-я эквивалентны:

1) A обратима

2) A обратима с одной стороны

3) A — невырождена ($rg A = n$)

4) A можно привести к $E_n$ с помощью только ЭП строк (или только ст-бцов)

5) A р-ся в пр-е элем матриц

**Д-во**

1) => 2) очевидно

2) => 3) Пусть A обратима слева (БОО)

$$\exists B : BA = E_n.$$

$$\left.\begin{array}{l} rg E_n = n \le rg A \\ rg A \le n \end{array}\right| = rg A = n$$

3) => 4) а) приведем с помощью ЭП строк

$A$ к виду $A_{упр.} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n$ (т.к. $rk A = n$)

б) $rk A^T = n \quad A^T \to A^T{}_{упр} = E$

$$a_k \dots a_1 A^T = E \Rightarrow A a_1^T \dots a_k^T = E$$

4) => 5)

$$T_k \dots T_1 A = E$$

$$A = T_1^{-1} \dots T_k^{-1} E = T_1^{-1} \dots T_k^{-1}$$

5) => 1) $A = a_1 \dots a_k$

$$A^{-1} = a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$$

$$AA^{-1} = a_1 \dots a_k a_k^{-1} \dots a_1^{-1} = E = A^{-1}A$$

**Сл-е,** Если кв. матрица вырождена => необратима

**Сл-е,** Пр-е невырожд. матриц пор-ка n - невырожд. матр.

**Сл-е,** Мн-во всех матриц пор-ка n образует группу отн. умножения.

**Д-во,**

$E_n$ - нейтр. по умн.

$\forall A \mid A$ нев. $\exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E \Rightarrow A^{-1}$ обр-ма $\Rightarrow A^{-1}$ - невыр ▨

Построенная гр-па - общая лин. группа пор-ка n - $GL_n(F)$

**Правило выч. обр-й матрицы (с помощью ЭП строк)**

$A \in M_{n \times n} \quad \operatorname{rk} A = n$

$(A \vdots E)_{n \times 2n}$

$\Downarrow$ эл. пр-я строк

$(E \vdots A^{-1})$

**Д-во,**

Пусть для $A \mapsto E$ потребуются $Q_1 \dots Q_k$ (ЭП строк)

$Q_k \dots Q_1 A = E$

$Q_k \dots Q_1 = A^{-1}$

$(A \mid E) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{Э.П}} (Q_k \dots Q_1 A \mid Q_k \dots Q_1 E) = (E \mid A^{-1})$ ▨