№6 р.1	Поле комплексных чисел, модуль и ар-т комплексного числа

Утв. Пусть F-поле, в к-м ур-е $x^2=-1$ не имеет решений. Тогда $\exists$ поле K : $\dim_F K = 2$, к-рое изоморфно вложено в F. В поле K ур-е $x^2=-1$ имеет р-е.

Д-во.

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in F \right\} \text{ – мн-во матриц}$$

Покажем, что K – кольцо

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \in K$$

Относ. сложения аналогично

$\Rightarrow K$ – кольцо.

Покажем, что K – поле

Пусть $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K \text{ – обр-я матрица}$$

Все эл-ты обр.-мы $\Rightarrow K$ – поле и $\dim_F K = 2$

Вложение F в K.

Пусть $a \in F$. Тогда $a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Пусть $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K$.

$i^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ – ур-е имеет р-е.

$i \notin F$

Выберем базис в K – $1, i$

Тогда $\forall$ эл-т в K имеет вид $z = a + bi$ ∎

Note. Если $F = \mathbb{R}$, то $K = \mathbb{C}$

Def. Пусть $z = x + iy$. Тогда

1) Действ. число $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ наз-ся модулем компл. числа

2) Компл. число $\overline{z} = x - iy$ наз. ся сопр. к z

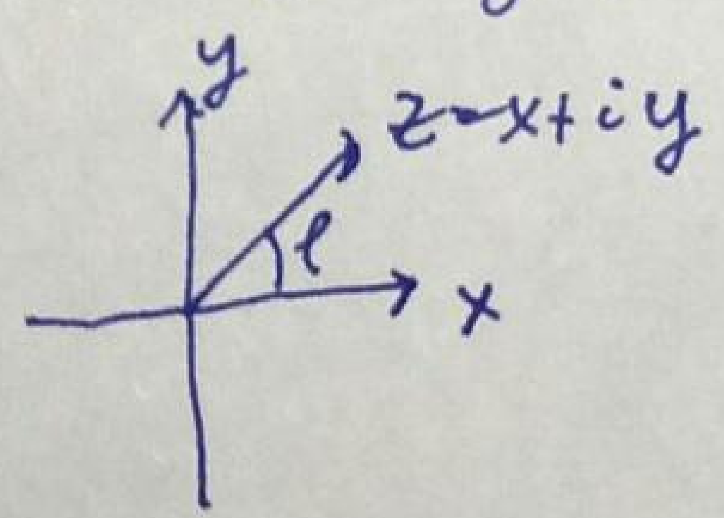
Св-ва. Если $z, w \in \mathbb{C}$, то

1) $\overline{\overline{z}} = z$ 2) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ 3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

4) $|z+w| \leq |z| + |w|$ 5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ $\quad z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Пусть на пл-ти введена ПДСК Oxy.

Тогда компл. число $z = x+iy$ можно изобр-ть точкой или в-м с коорд (x, y). Пусть (r, φ) — полярные координаты точки $z = (x+iy) \neq 0$. Тогда $r = |z|$, а φ — аргумент z (с точностью до $2\pi n$)



Т.к. $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$

$\Rightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма числа z

Note. Из триг. ф-мы получаем

а) $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$.

б) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Формула Муавра

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $n \in \mathbb{Z}$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi \cdot i$