№9 р.1 **Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы.**

$Ax=b$

Приведенная СЛУ $-$ $Ax=0$

Факт: мн-во решений V_0 $-$ подпр-во в F^n

$$\underset{\substack{\text{мн-во}\\\text{реш}\\ Ax=b}}{X} = \underset{\text{ч-е}}{x_0} + \underset{\text{реш пр. СЛУ}}{V_0}$$

Исследование общего реш. СЛУ сводится к нахожд. базиса в V_0

Def: Матрица Φ наз-ся фундаментальной матрицей $Ax=0$, если по ее ст-м расположены базисные в-ры V_0 (ст-цы $-$ базис в пр-ве решений)

Def: Столбцы фунд. матрицы $-$ ФСР

Б.О.О. главные ст-цы $-$ первые ст-цы. $\tilde{A}$ст. упр. вид.

$\tilde{A}_{упр} = (E_r \vdots D \vdots b)$

привед. с-ма

$(E_r \vdots D)(x)=0$

Th: Если матрица ~~прив.~~ однородной с-мы имеет вид $(E_r \vdots D)$, $D\in M$ то соотв. этой с-ме фунд матрица имеет вид $\Phi = \begin{pmatrix} -D \\ E_d \end{pmatrix}$ $\quad d=n-r \quad r=\mathrm{rk}A$

Д-во:

1) $A\Phi \overset{?}{=} 0$

$$(E_r | D)\begin{pmatrix} -D \\ E_r \end{pmatrix} = E_r(-D) + DE_d = 0$$

2) Покажем, что столбцы D ЛНЗ

$$\Phi\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} * \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall \alpha_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} -D \\ E_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = 0$$

3) Покажем, что $\forall x_0 \in V_0$ (x_0 - реш. однородной с-мы) является ЛК ст-цов φ

$$x_0 = \begin{pmatrix} * \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \text{ - реш } Ax=0$$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = y_0 \text{ - реш } Ax=0 \text{ как ЛК ст-цов } \varphi$$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = y_0$$

$$z_0 = x_0 - y_0 = \begin{pmatrix} - * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - реш } Ax=0$$

$$(E_r \mid D) \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies * = 0$$

$$\implies z_0 = 0 \implies x_0 = y_0 \quad ⓝ$$

Note Общее реш. неодн. зад. как $X = \begin{pmatrix} -D \\ E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + b$