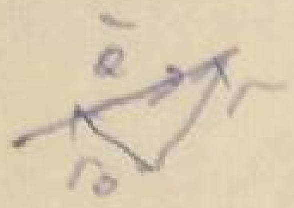
№10 p1 | Прямая в пр-ве, различные способы задания их эквивалентность. Взаимное расположение пр-х в пр-ве. Ф-лы для расстояния от точки до пл-ти и от точки до прямой в ПДСК.

Прямая в пр-ве



$\bar r = \bar r_0 + \bar a t$ – векторно-пар. ур-е

$a \xleftrightarrow{(O,E)} \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \\ z = z_0 + \alpha_3 t \end{cases}$ – коорд. пар-е ур-е $t \in \mathbb{R}$

Def канон. ур-е.

$$\frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3}$$

Note Прямую можно задать как пересечение двух плоскостей $\pi_1 \cap \pi_2$.

Напр. в-р такой пр-й $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Note Из канон. ур-я $\forall$ прямую можно задать пересечением двух пл-тей

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\alpha_1} = \dfrac{y-y_0}{\alpha_2} : \pi_1 \\ \dfrac{y-y_0}{\alpha_2} = \dfrac{z-z_0}{\alpha_3} : \pi_2 \end{cases}$$

Утв (о взаимном расп-ии прямой и пл-ти)

Пусть π задано в ДСК $Ax + By + Cz + D = 0$

$$l : \frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3}$$

Тогда $l \in \pi \iff$

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (1) \\ A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Д-во

1) $\Rightarrow$

Пусть $l \in \pi$. Тогда т. $X_0(x_0\, y_0\, z_0) \in \pi$ – ур-е (1)

$a = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ – напр. в-р $a \parallel \pi$, т.к. $l \in \pi$ – ур-е (2)

$\Leftarrow$) Пусть вып-но (1) и (2)

$\Rightarrow X_0 \in \Pi$ и $\bar{a} \parallel \Pi$ - напр в-р пр-й $\parallel$ пл-ти $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все точки пр-й $\in \Pi$ ▪

Утв. (ДСК)

$l_1 : \bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t \quad X_1$ - н. т. l_1

$l_2 : \bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2 t \quad X_2$ - н. т. l_2

l_1 и l_2 лежат в одной пл-ти $\Leftrightarrow \bar{r}_1 - \bar{r}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ - компл.

Д-во.

а) $\Rightarrow$) очев.

б) $\Leftarrow$) Пусть $\bar{r}_1 - \bar{r}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ компл.

Возьмем т. X_1 и пл-ть, порожденную ей и $\bar{a}_1, \bar{a}_2$

$\overline{X_1X_2}$ компл $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \Rightarrow X_2 \in$ этой пл-ти $\Rightarrow l_1$ и l_2 лежат в той же пл-ти ▪

Сл-е 1. Пр-е l_1 и l_2 лежат в одной пл-ти $\Leftrightarrow (\bar{r}_1 - \bar{r}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0$

Сл-е 2. Если пр-е не лежат в одной пл-ти, то они скрещ. $\Leftrightarrow (\bar{r}_1 - \bar{r}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \neq 0$

Сл-е 3. Прямые l_1 и l_2 пересекаются по одной точке

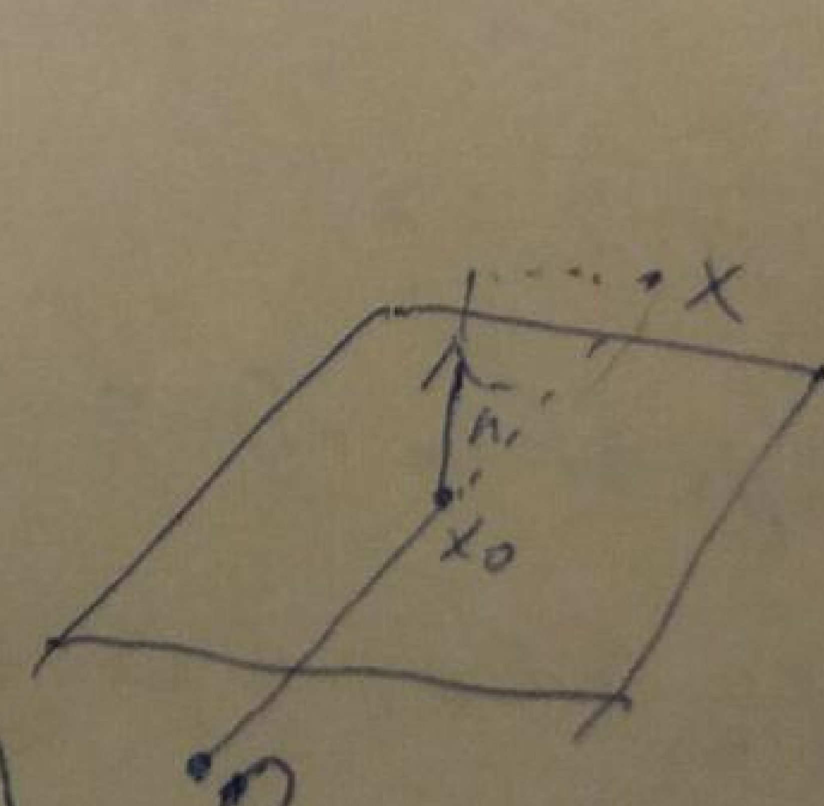
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{r}_1 - \bar{r}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0 \\ [a_1, a_2] \neq 0 \end{cases}$$

Сл-е 4. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (r_1 - r_2, a_1, a_2) = 0 \\ [a_1, a_2] = 0 \end{cases}$

Сл-е 5. $l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2 \parallel \bar{r}_1 - \bar{r}_2$

Задача. (ρ от точки до пл-ти)

$X(x, y, z)$ и $\Pi : (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = 0$



Расстояние от т. X до Π равно длине проекции X_0X на в-р $\bar{n}$

$$\rho(X, \Pi) = |pr_{\bar{n}} \overline{X_0X}| = \frac{|(\overline{X_0X}, \bar{n})|}{|\bar{n}|} = \frac{|(r_x - r_0, \bar{n})|}{|\bar{n}|}$$

№10 р. 2

Пусть π задана общим ур-ем $Ax+By+Cz+D=0$

$$r \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad r_0 \underset{(O,e)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix};$$

$$(r-r_0, n) = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} =$$

$$= A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = Ax+By+Cz-\underbrace{(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{=-D} =$$

$$= Ax+By+Cz+D=0$$

$$\rho(X,\pi) = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Задача: (ρ от точки до прямой)

Пусть $l: \bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t \quad X: \bar{r}_x$

$$\rho(X,l) = \frac{|[\bar{r}_0 - \bar{r}_x, \bar{a}]|}{|\bar{a}|}$$