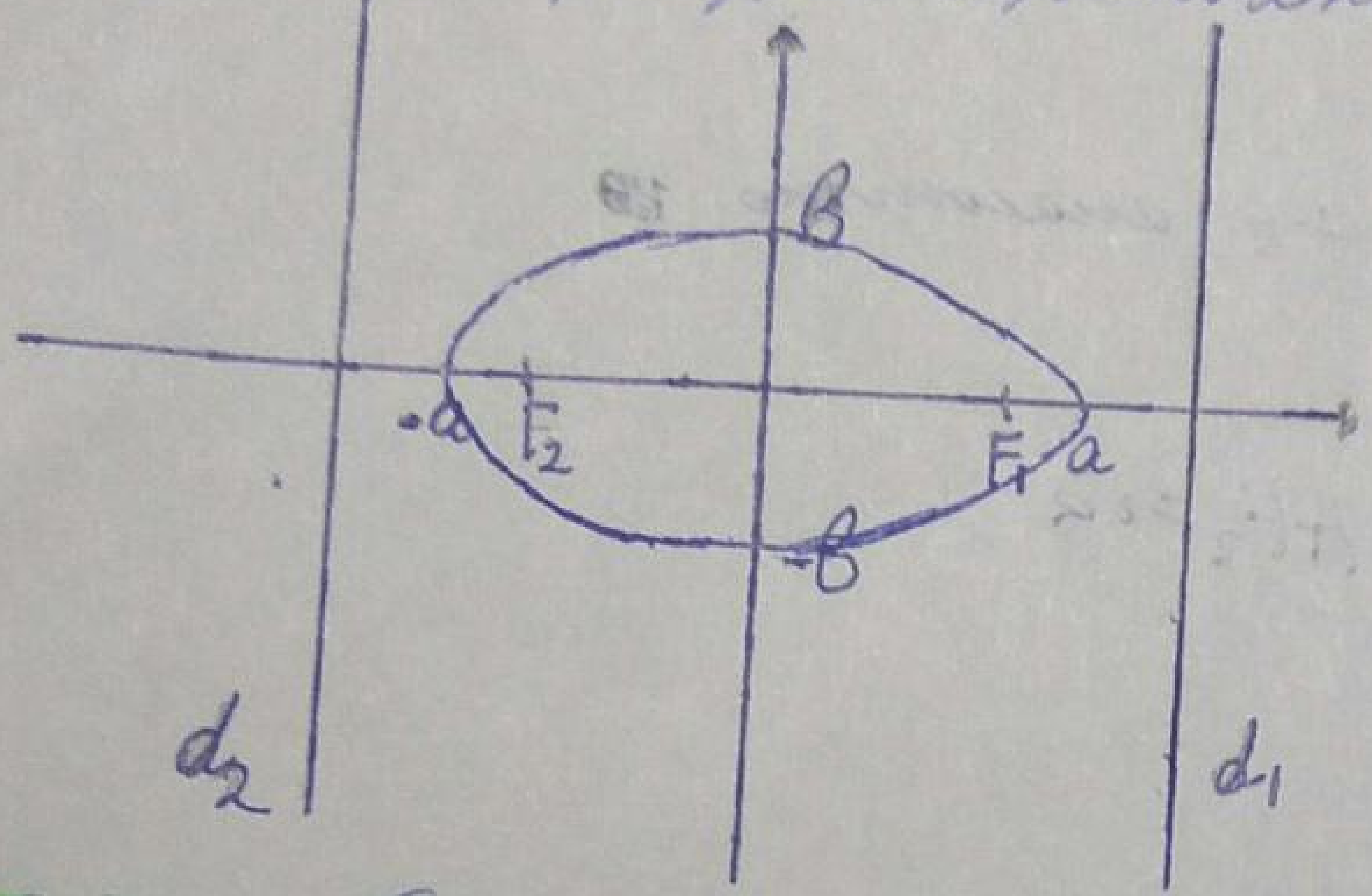
№11 Р1 Эллипс. Тк о фокусах и директрисах эллипса.

Def Эллипс - кривая на пл-ти, которая в ПДСК задана ур-ем (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a \ge b > 0$

Эллипс - фигура ограниченная: $|x| \le a$ $|y| \le b$



Def a - большая полуось

b - малая полуось

$(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ - вершины эллипса.

Note Эллипс симметричен относительно осей OX и OY

Def $c = \sqrt{a^2-b^2}$ - фокусное расстояние

$F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ - фокусы эллипса

Note Если $a=b$ => эллипс переходит в окр-ть и $F_1=F_2$

Будем считать $c>0$

Def $\varepsilon = \frac{c}{a}$ эксцентриситет

Note Для эллипса $\varepsilon < 1$

Th1 Точка $A(x,y) \in$ эллипсу, заданному ур-ем (1) $\Leftrightarrow$ $AF_1 = |a - \varepsilon x|$, $AF_2 = |a + \varepsilon x|$

Поскольку $\varepsilon < 1$ и $|x| < a$ => модули р-ся с „+"

Д-во

$$0 = AF_1^2 - (a-\varepsilon x)^2 \quad (\text{т.к. } AF_1 = |a - \varepsilon x|)$$

$$AF_1^2 - (a-\varepsilon x)^2 = (x-c)^2 + y^2 - (a-\varepsilon x)^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - a^2 + 2a\varepsilon x - \varepsilon^2 x^2 =$$

$$= x^2(1-\varepsilon^2) + 2x\underbrace{(-c + a\varepsilon)}_{=0} + y^2 - a^2 + c^2 = S$$

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

Тогда $S = \frac{x^2 b^2}{a^2} + y^2 - b^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow A \in$ эл-су.

Аналогично для F_2 ▨

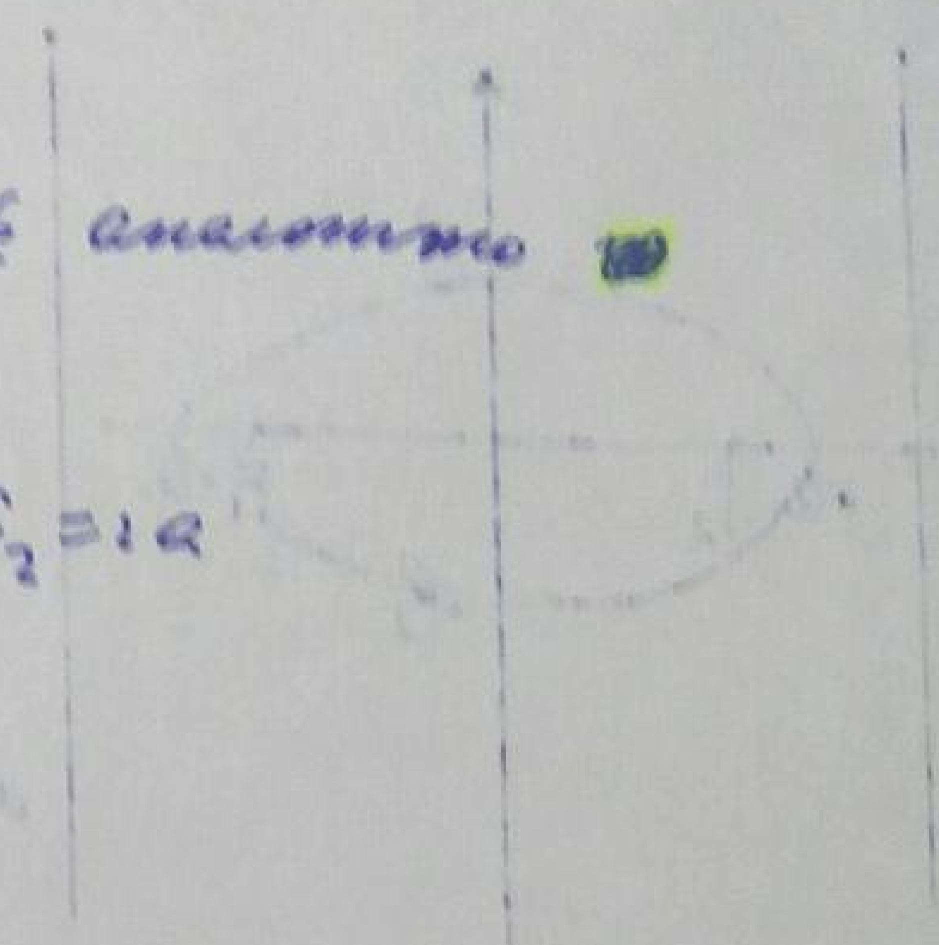
Сл-е. Эллипс — геометрическое место точек, для к-х верно;

$$\frac{AF_1}{\rho(A,d_1)} = \frac{AF_2}{\rho(A,d_2)} = \varepsilon,$$ где d_1, d_2 — пр-е вида $\left.\begin{array}{l} d_1 = \frac{a}{\varepsilon} \\ d_2 = -\frac{a}{\varepsilon} \end{array}\right|$ — директрисы.

Д-во

$$\rho(A,d_1) = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon\cdot\rho(A,d_1) = |a-\varepsilon x| \underset{\text{по } Th_1}{=} AF_1$$ для $\frac{AF_2}{\rho(A,d_2)} = \varepsilon$ аналогично ■



Th2 Эллипс

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — это ГМТ, т.ч. $A\binom{x}{y}$: $AF_1 + AF_2 = 2a$

Д-во

1) $\Rightarrow$ Пусть $A\binom{x}{y} \in$ эллипсу.

по Th_1 $AF_1 + AF_2 = a - \varepsilon x + a + \varepsilon x = 2a$.

2) $\Leftarrow$ Пусть $AF_1 + AF_2 = 2a$

Покажем, что $|x| \le a$.

Пусть $|x| > a \Rightarrow AF_1 + AF_2 \ge |x-c| + |x+c| \ge |x-c+c+x| = 2|x| > 2|a|$

?! $\Rightarrow |x| \le a$

Пусть $|x| = a$. Если $A(a,0)$ или $A(-a,0)$, то $A \in$ эллипсу.

$\forall A(\pm a, y)$, где $y > 0$ имеем $AF_1 + AF_2 > 2a$.

Пусть $|x| < a$

Проведем пр-ю $x = const$: $A \in$ пр-й.

Эта пр-я пересечет эллипс в 2-х т-х.

Обозначим в-юю за B_1

Тогда $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$, но если A выше B_1 или ниже B_2

$AF_1 + AF_2 > B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$?!

Если A между B_1 и B_2

$AF_1 + AF_2 < B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$?!

$\Rightarrow A$ совпадает с B_1 или B_2 ■