w6 p.1 Векторное пр-е, его св-ва, выражение в правом ОНБ. Критерии колл. и компл. в-ров. двойное в-ное пр-е.

V_i с фикс ориент.

Def. Векторным пр-ем $[\bar{a}, \bar{b}]$ наз-ся вектор, определяемый условиями:

1. $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}, \bar{b}$
2. $|[\bar{a}, \bar{b}]| = S_{\square} = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \sin\alpha$
3. $(\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}])$ — правая тр-ка

Утв. $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$

Д-во.

$\Rightarrow$ $\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow S(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow |[\bar{a}, \bar{b}]| = 0 \Rightarrow [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$

$\Leftarrow$ $[\bar{a}, \bar{b}] = 0 \Rightarrow S(a, b) = 0 \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$ ■

Th. (о св-х в-го пр-я)

1. кососим. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$
2. Аддитивность по II-му ар-ту $[\bar{a}, \bar{b}_1 + \bar{b}_2] = [\bar{a}, \bar{b}_1] + [\bar{a}, \bar{b}_2]$
3. Однородность по II-му ар-ту $[\bar{a}, \lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a}, \bar{b}]$

Д-во.

1. Пусть $(\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}])$ — правая тр-ка
   $(\bar{b}, \bar{a}, [\bar{a}, \bar{b}])$ — левая
   $(\bar{b}, \bar{a}, -[\bar{b}, \bar{a}])$ — правая

2. $\forall c \in V_3$

$([a, b_1 + b_2], \bar{c}) \overset{*}{=} (\bar{a}, b_1 + b_2, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{c}) + (\bar{a}, \bar{b}_2, \bar{c}) =$

$= ([\bar{a}, \bar{b}_1], c) + ([\bar{a}, \bar{b}_2], c) = ([\bar{a}, \bar{b}_1] + [\bar{a}, \bar{b}_2], \bar{c})$ ■

3. Аналогично ■

Note. $* =$ Тк $V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (S(\bar{a}, \bar{b}) \cdot \bar{n}, \bar{c}) = S(a, b)(\bar{n}, \bar{c}) = V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

Утв. Пусть ε — базис в V_3

$\bar{a} \underset{\varepsilon}{\leftrightarrow} \alpha \quad \bar{b} \underset{\varepsilon}{\leftrightarrow} \beta$

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} [e_2, e_3] & [e_3, e_1] & [e_1, e_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Д-во.

$[\bar{a},\bar{b}] = [\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j] = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j [e_i e_j] =$

$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\bar{e}_2 \bar{e}_3] +$

$+ (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[\bar{e}_3, \bar{e}_1]$ ■

Сл-е: В ОНБ выр-е для в-го пр-я

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Д-во.

$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_3 \quad [\bar{e}_2 \bar{e}_3] = \bar{e}_1 \quad [\bar{e}_3 \bar{e}_1] = \bar{e}_2$ ■

Т2 $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b})$

Д-во.

Введем базис (правый ОНБ)

$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$

$\bar{b} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2$

$\bar{c} = \gamma_1 \bar{e}_1$

$[\bar{b}, \bar{c}] = [\beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2, \gamma_1 \bar{e}_1] = \beta_2 \gamma_1 [\bar{e}_2 \bar{e}_1] =$

$= -\beta_2\gamma_1 \bar{e}_3 = (0, 0, -\beta_2\gamma_1)$

$[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = [\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3, -\beta_2\gamma_1 \bar{e}_3] =$

$= \alpha_1\beta_1\gamma_1 \bar{e}_2 - \alpha_2\beta_2\gamma_1 \bar{e}_1 = (-\alpha_2\beta_2\gamma_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1, 0)$

$\bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{b} \cdot \alpha_1\gamma_1 - \bar{c}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) =$

$= (-\alpha_2\beta_2\gamma_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1, 0)$ ■