

W14 P1 классификация линий второго порядка. Приведение ур-я второго порядка с двумя пер-ми к канон виду в ПДСК. Опред-ти тип кривой по ее инв-м

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (I), \text{ где } A' + B' + C' \neq 0$$

Приведение кривой к канону.

① Аннулирование смешанного чл-а ($B=0$)

$$E = E \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \leftarrow R_\varphi$$

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$(I) \text{ в } (0, (e'_1, e'_2))$$

$$A(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + 2B(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + \dots = 0$$

$$B' = -A \cos \varphi \sin \varphi + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + C \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

$$\frac{1}{2}(C-A) \sin 2\varphi + B \cos 2\varphi = 0$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A-C}$$

$$\text{Если } A \neq C \Rightarrow \exists \text{ поворот: } B' = 0$$

$$\text{Если } A = C \Rightarrow B \cos 2\varphi = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

!!

$$(I) \Rightarrow A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \quad (II)$$

⌘ Если коэф при квадрате какой-нибудь пер-й отличен от 0, то парам. переносом СК вдоль оси, соотв. этой пер-й, можно уб-ая от соотв линейного члена

⌋ Если $A' \neq 0$, уб-ая от D'
⌋ Если $C' \neq 0$, уб-ая от E'

Д-во,

Пусть $A' \neq 0$

$$A' \left(x'^2 + \frac{2D'}{A'} x' + \left(\frac{D'}{A'} \right)^2 \right) + C'y'^2 + 2E'y' + F' - \frac{(D')^2}{A'} = 0$$

$$\left(x' + \frac{D'}{A'} \right)^2$$

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{D'}{A'} \\ y'' = y' \end{cases}$$

$$A'x'' + C'y'' + 2E'y' + F'' = 0$$

Еще в 2-м-ан \square $A' \neq 0$ $B' \neq 0$ можно разделить на B'

классификация

$$E: A'x'' + C'y'' + 2E'y' + F'' = 0$$

$E: A'C' > 0$ — эллипс

$H: A'C' < 0$ — гиперб.

$D: A'C' = 0$ — пара пр-х.

$$E: A'x''^2 + C'y''^2 = -F'' \text{ по } (\Lambda)$$

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ — эллипс.}$$

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперб. эллипс.}$$

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ — пара мнимых пр-х.}$$

$$a \geq b > 0 \text{ — овал повернут с-мью на } \pi/2 \left(\begin{array}{l} x'' = -y''' \\ y'' = x''' \end{array} \right)$$

$$H: \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперб.}$$

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ — пара действ. пр-х}$$

$$D: C'y''^2 + 2D''x'' + F'' = 0 \text{ (будем считать, что } A' = 0, \text{ иначе повернем)}$$

(тогда $C' \neq 0$, т.к. упр-е 2-го порядка)

1) $D'' \neq 0$

$$C''y''^2 + 2D''(x'' + \frac{F''}{2D''}) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x''' = x'' + \frac{F''}{2D''} \\ y''' = y'' \end{array} \right.$$

$$y'''^2 = 2\rho x''' \quad \rho = -\frac{D''}{C''} > 0 \text{ (иначе повернем)}$$

2) $D'' = 0$

$$C'y''^2 = -F''$$

$$y''^2 = a^2 \text{ — пара паралл. д. пр-х.}$$

$$y''^2 = -a^2 \text{ — пара мнимых пр-х}$$

$$y'' = 0 \text{ — пара совп. пр-х.}$$

14
р. 2

ТК (окласс. кривые 2-го порядка)

Упр-е кривой 2-го порядка в МДСК имеет вид
к одной из 9-ти видов.

Универсальность

$$\textcircled{I} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ТК Универсальность кр-х второго порядка (I) эквив-на гр-ии

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad I = A + C$$

Д-во,

Затем (I) в матричном виде

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad z=1$$

При замене МДСК:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Пр-е не-ти заменим как пр-е пр-ва,

в котором z не меняется

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & x_0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad z=z'$$

$$(x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & x_0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \quad z=1$$

$$\Delta' = \det \left(C \right) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \cdot 1 = \Delta$$

$$\delta' = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \cdot 1 = \delta$$

$$I' = \text{tr} \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = \text{tr} (R_p \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \cdot R_p) = \text{tr} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = A + C. \quad \square$$

Классификация кр-х с помощью инв-ов.

| E | H | D |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>① Эллипс</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \delta > 0$ $\Delta \cdot I < 0$ $(a \geq b > 0)$ | <p>④ Гипербола</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \delta < 0$ $\Delta \neq 0$ | <p>⑥ Парабола</p> $y^2 = 2px, \quad p > 0 \quad \delta = 0$ $\Delta \neq 0$ |
| <p>② Мнимый эллипс</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \delta > 0$ $\Delta \cdot I > 0$ $(a \geq b > 0)$ | <p>⑤ Пара пересек. лучей кр-х</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \delta < 0$ $\Delta = 0$ | <p>7, 8, 9) $\delta = 0 \quad \Delta = 0$</p> <p>⑦ $y^2 = a^2, \quad a > 0$</p> <p>⑧ $y^2 = -a^2$</p> <p>⑨ $y^2 = 0$</p> |
| <p>③ Пара пересек. мн-х прямых</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \delta > 0$ $\Delta = 0$ $(a \geq b > 0)$ | | |