№23 p.1 | Поведение определителя при ЭП. Определитель пр-я и треуг. матрицы. Определитель с углом нулей

Утв. (поведение опр-ля при ЭП строк/столбцов)

а) При ЭП I типа ($a_i \to a_i + \lambda a_j$) опр-ль не меняется

б) При ЭП II типа ($a_i \leftrightarrow a_j$) опр-ль меняет знак

в) При ЭП III типа $a_i \to \lambda a_i$ опр-ль умножается на λ.

Д-во.

а) $\det A' = \det(\ldots(a_i + \lambda a_j)\ldots a_j \ldots) = \underbrace{\det(\ldots a_i \ldots a_j \ldots)}_{=\det A} +$

$+ \lambda \underbrace{\det(\ldots a_j \ldots a_j \ldots)}_{=0} = \det A$

б) Сл-е кососим.

в) Сл-е однородности ∎

Оп. $A \in M_{n\times n}(F)$

A - верхнетреугольная (нижне), если $\forall (i,j): i > j \longmapsto a_{ij} = 0$

$(i < j \to a_{ij} = 0)$

Утв. Определитель верхнетреуг. (нижне) = пр-е чисел на диаг.

Д-во. а) для верхнетреуг.

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma_1} \ldots a_{n\sigma_n} = \varepsilon(e) a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} + 0 = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Если $\sigma \neq e \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists i, j > \sigma_i \Rightarrow$ равно 0

б) аналогично ∎

Th (об определителе пр-я матриц)

$A, B \in M_{n\times n}(F)$

Тогда $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Д-во. $C = A \cdot B$

c_i - i-я строка C. $c_i = a_i \cdot B$

Покажем, что $\det(C) = \det(AB)$ явл-ся полилинейной

кососим. ф-ей от строк A.

Будем считать, что B - fix.

Если поменять местами a_i и a_j в A, то c_i и c_j поменяются местами $\Rightarrow$

$\Rightarrow \det(C)$ поменяет знак

Докажем полилинейность

Пусть $a_i = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}$: $\bar{u}, \bar{v} \in M_{1\times n}(F)$

$\det(C) = \det(A \cdot B) = \det(\bar{a}_1 B, \ldots (\alpha\bar{u} + \beta\bar{v})B \ldots \bar{a}_n B) =$

$= \det(\bar{a}_1 B \ldots \alpha\bar{u}B + \beta\bar{v}B, \ldots \bar{a}_n B) =$

$= \alpha \underbrace{\det(\bar{a}_1 B \ldots \bar{u}B \ldots \bar{a}_n B)}_{\alpha \det A' B} + \beta \underbrace{\det(\bar{a}_1 B \ldots \bar{v}B \ldots \bar{a}_n B)}_{\beta \det A'' B}$

Здесь $\det A'$ получен из $\det A$ заменой i-й строки на $\bar{u}$

— // — $\det A''$ ——————————— // —— на $\bar{v}$

$\det(AB) = \det(E \cdot B) \cdot \det A = \det A \cdot \det B$ (по Th из 22 билета) $\boxtimes$

Th (об опр-ле с углом нулей)

$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, B имеет размер k; $B \in M_{k \times k}$ $D \in M_{k' \times k'}$ $k' = n - k$

Тогда $\det A = \det B \cdot \det D$.

Д-во.

Будем расс. $\det A$ как ф-ю от столбцов B.

Очевидно она полилинейна и кососим.

Тогда $\det A = \det \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \det B$

$\det \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ будем р-ть как ф-ю от строк D.

Тогда $\begin{vmatrix} E & C \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & C \\ 0 & E \end{vmatrix} \cdot \det D$.

$\det A = \det B \cdot \det D \cdot \underbrace{\det \begin{vmatrix} E & C \\ 0 & E \end{vmatrix}}_{1^n} = \det B \cdot \det D$ $\boxtimes$