w2 p.1 Базис на пл-ти и в пр-ве, координаты в-ра от-но базиса. Описание базисов на пл-ти и в пр-ве. Действия над в-ми в координатах. Изменение коорд. при замене базиса

Def. С-ма в-ров $\varepsilon = (\bar{e}_1 .. \bar{e}_n)$ наз-ся базисом в пр-ве V_i, если
1) ε - ЛНЗ
2) $\forall a \in V_i \hookrightarrow \exists \alpha_1 .. \alpha_n : a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

Note. В матр. виде
$\bar{v} = (\bar{e}_1 .. \bar{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \alpha.$

Note. $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ - коорд ст-у.

$\bar{v} \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \alpha$

Утв. Коорд в-ра отн. базиса ε опр-ся од-но

Д-во. $\exists$ вытекает из опр. базиса
д-во ед-сти:
пусть $\bar{v} = \varepsilon \cdot \alpha_1 = \varepsilon \cdot \alpha_2$.
$\Rightarrow \varepsilon \alpha_1 - \varepsilon \cdot \alpha_2 = \bar{0} \Rightarrow \varepsilon(\alpha_1 - \alpha_2) = \bar{0} \overset{\varepsilon - \text{ЛНЗ}}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2.$ ■

Утв. Пусть с-ма $(\bar{v}_1 .. \bar{v}_n)$ - ЛНЗ, а с-ма $(\bar{v}_1 .. \bar{v}_n, \bar{u})$ - ЛЗ
Тогда $\exists \alpha_1 .. \alpha_n : \bar{u} = \sum \alpha_i \bar{v}_i$

Th (об описании базисов в V_i)
С-ма в-ров является базисом в
а) $V_1 \Leftrightarrow$ состоит из 1-го ненул. в-ра
б) $V_2 \Leftrightarrow$ состоит из 2-х неколл в-ров
в) $V_3 \Leftrightarrow$ состоит из 3-х некомпл в-ров

Д-во.
а) $\bar{e} \neq 0$
$(\bar{e})$ - ЛНЗ
$\bar{v} \in V_1 \Rightarrow \bar{v}$ колл $\bar{e} \Rightarrow \bar{v} = \alpha \bar{e}$
$\forall (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in V_1 \Rightarrow \bar{v}_1$ колл. $\bar{v}_2 \Rightarrow$ ЛЗ.

б) $\bar{e}_1, \bar{e}_2$: не колл
$(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ - ~~ЛЗ~~ ЛНЗ (пусть ЛЗ $\Rightarrow \bar{e}_1 = \alpha \bar{e}_2$?!)
$\forall \bar{v} \in V_2 \hookrightarrow (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{v})$ - ЛЗ (компл) $\Rightarrow v = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$
Если число в-ров ≤ 1, то не все в-ра выражаются

в) $(\bar e_1 \bar e_2 \bar e_3)$ — некомпл

$(\bar e_1 \bar e_2 \bar e_3)$ — ЛНЗ (пусть ЛЗ $\Rightarrow \bar e_1 = \alpha \bar e_2 + \beta \bar e_3 \Rightarrow$ компл ?!)

$(\bar v, \bar e_1 \bar e_2 \bar e_3)$ — ЛЗ $\forall \bar v \Rightarrow \bar v = \alpha_1 \bar e_1 + \alpha_2 \bar e_2 + \alpha_3 \bar e_3$

$(\bar e_1 \bar e_2) \in V_3$ — не базис, т.к. не все в-ра в-мы

$(\bar e_1 \bar e_2 \bar e_3)$: ~~компланарные~~ — не базис, т.к. ЛЗ. ☒

Утв. Пусть $\mathcal{E}$ — базис в V_i

$\bar u \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \alpha \quad \bar v \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \beta$

Тогда а) $\bar u + \bar v \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \alpha + \beta$

б) $\forall \lambda \in R \quad \lambda \bar u \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \lambda \alpha$

$\mathcal{E} = (\bar e_1 \dots \bar e_n) \quad \mathcal{E}' = (e_1' \dots e_n')$

пусть $e_1' = S_{11} \bar e_1 + S_{21} e_2 + \dots + S_{n1} \bar e_n$

$\vdots$

$e_n' = S_{1n} \bar e_1 + S_{2n} e_2 + \dots + S_{nn} \bar e_n$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}$$

Def S — матр-ца перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$

$S_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$

$$\begin{pmatrix} \bar e_1' \\ \vdots \\ \bar e_n' \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \bar e_1 \\ \vdots \\ \bar e_n \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}' = \mathcal{E} S$

Пример:

$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ — матрица пов-та

Утв (об изменении коорд при замене базисов)

$\bar u \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \alpha \quad \bar u \underset{\mathcal{E}'}{\longleftrightarrow} \alpha' \quad S = S_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$

Тогда $\alpha = S \alpha'$

Д-во

$\bar u = \mathcal{E} \cdot \alpha = \mathcal{E}' \alpha' \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E} \cdot S.$

$\bar u = \mathcal{E} \cdot S \cdot \alpha'$

$\Downarrow$

$\alpha = S \cdot \alpha'$ ☒