

Def Конятие уравнения мн-ва. Алгебраические линии и поверхности, пересечение и объединение алгебраических линий. Сохранение порядка при переходе к другой с-ме координат

Def Многочлен от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n наз-ся формальное алг. выр-е вида

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ i_k \geq 0}} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

Def Выр-е вида $\sum x^i y^j z^k$ наз-ся моном

Def Замкн. многочлен наз-ся несокп, если в ней нет двух мономов с одинаковыми угл-ми степенями

Лем Если P - мн-н от n пер-х с непрерывой сокр. замкн-ю, то P - не тожд. ноль

Д-во

индукция по n , где n - кол-во пер-х.

База

$$n=1 \quad P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ a_0 \neq 0$$

Известно, что число корней такого мн-на не превосх его степени.

$$P(x) = ax + b \quad a \neq 0 - \text{од корень}$$

$$2\text{-корень} \Rightarrow P(x) = (x - \alpha) Q(x) \quad \begin{matrix} \text{мн-н} \\ \text{степени} \\ n-1 \end{matrix}$$

По предп. ин-ии $Q(x)$ имеет не более $n-1$ корней $\Rightarrow P(x)$ имеет не более n корней.

$$\text{Тогда для } P(x) \exists a \in \mathbb{R} \quad P(a) \neq 0$$

Шаг инд-ии, пусть для мн-ва $P(x)$ завис. от n пер-х уб-е δ -но

$$\text{Докажем для } P(x_1, \dots, x_n, y) = P_0(x_1, \dots, x_n) y^0 + P_1(x_1, \dots, x_n) y^1 + \dots$$

По усл-ю $\exists P_i(x_1, \dots, x_n)$ - непрерывой мн-н с несокп. замкн-ю

$$\text{по пр-ю инд-ии } \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : P_i(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

$$P(a_1, \dots, a_n, y) = P_0(a_1, \dots, a_n) y^0 + \dots$$

$$\text{Тогда } \exists b \in \mathbb{R} \quad P(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$$

Лем (точностью до порядка мономов) всякий многочлен обладает ед. несокп замкн-ю

60,

$$P(x) = \sum \alpha_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

$$- P(x) = \sum \beta_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

$$0 = \sum (\alpha - \beta) (x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) \text{ - несомн. равенство}$$

Тогда $\alpha = \beta$.

Def Степенью монома $\alpha x_1^{i_1} y_2^{j_2} z_3^{k_3}$ наз-ся число $i+j+k$

Def Степенью мн-ка наз-ся макс. степень его мономов.
 $\text{Deg } P$

Ymb $\text{deg}(P+Q) \leq \max(\text{deg } P, \text{deg } Q)$

Def Будем говорить, что первый моном старший второго, если

$$a) i+j+k > i'+j'+k'$$

или

$$b) i+j+k = i'+j'+k'$$

$$\text{и } i > i'$$

или

$$b) i+j+k = i'+j'+k' \text{ и } i = i'$$

$$\text{и } j > j'$$

или

$$2) i+j+k = i'+j'+k' \text{ и } i = i' \text{ и } j = j'$$

$$\text{и } k > k'$$

Def Старшим моном мн-ка наз-ся старший моном.
 $HT(P)$

Ymb $HT(P \cdot Q) = HT(P) \cdot HT(Q)$

u-l $\text{deg}(P \cdot Q) = \text{deg } P + \text{deg } Q$

Def Алгебраической кривой в $V_2 \subset \mathbb{A}^2_K (0, (\bar{e}_1, \bar{e}_2))$ наз-ся

мн. в V_2 коорд-ты которых удовл. ур-ю $P(x, y) = 0$, где

$P(x, y)$ - мн-к степени k .

Порядком ал. кривой наз-ся наименьшая степень многочлена, зад. эту кривую.

Def Алгебраической пов-тью в V_3 с $OSK(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

наз-ем мн-во точек в V_3 , коор-ты к-х удовл. $P(x, y, z) = 0$.

Ymb Порядок кривой (пов-ти) не меняется при замене OSK

Д-во

$$(O, E) \rightarrow (O', E')$$

$$E' = E \cdot S$$

$$X = S \cdot x' + y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$P(x, y, z) = 0 \rightarrow Q(x', y', z')$$

Тогда $\deg Q \leq \deg P$, т.к. при пр-м монуме

$$x^i y^j z^k \rightarrow (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + f_1) \dots f_1^i \dots f_2^j \dots f_3^k$$

Монум S имеет $\deg Q < \deg P$

Переходим от $(O', E') \rightarrow (O, E)$

Т.к. обратное всегда \exists , то $\deg P \leq \deg Q$

$$\begin{cases} \deg P \leq \deg Q \\ \deg Q \leq \deg P \end{cases} \Rightarrow P = Q \quad \square$$

Ymb Если M и N - ал. кривые (пов-ти), то

$M \cup N, M \cap N$ - тоже ал. кривые (пов-ти)

Д-во Пусть $M: P=0$

$$N: Q=0$$

$$M \cup N: P \cdot Q = 0$$

$$M \cap N: P^2 + Q^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$$

Ymb Пусть M - ал. пов-ть в V_3 , π - пл-ть

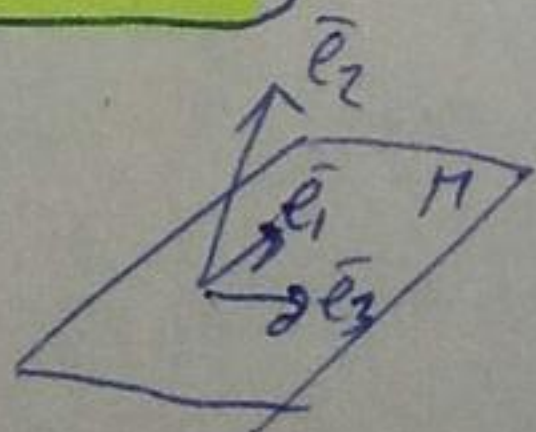
Тогда $M \cap \pi$ - ал. кривые в пл-ти π .

Д-во

Выберем $OSK(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ так, чтобы

$(O, (e_1, e_2))$ - OSK в π

$$P(x, y, z) = 0 \quad \text{в } (O, (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3))$$



Тогда $P(x, y, 0)$ задает пересечение M с π \square