№20 р.1 | Линейные от-я и линейные пр-я линейного пр-ва. Их матрицы. Ядро и образ линейного от-я, их р-ти. Критерий инъективности линейного от-я.

V, U над F

$\ell : V \to W$ наз-ся линейным, если

1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad \ell(v_1+v_2) = \ell(v_1) + \ell(v_2)$

2) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in F \quad \ell(\alpha v) = \alpha \ell(v)$

Отсюда $\ell\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ell(v_i)$

$\ell(0) \overset{?}{=} 0$

$\ell(0) = u$

$u+u = \ell(0) + \ell(0) = \ell(0+0) = \ell(0) = u.$

$\Rightarrow u = 0.$

$\ell(-v) = -\ell(v)$

Утв. $\{e_1 \dots e_n\}$ – базис $\{u_1 \dots u_n\}, u_i \in U$
с-ма из n векторов

Тогда $\exists!$ лин. $\ell : V \to U : \ell(e_i) = u_i$

Утв. Пусть такое $\ell\ \exists$.

Покажем, что оно единств.-е

$\ell(v) = \ell\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{u}_i$ очев ед.

Пусть теперь $\ell : \ell(e_i) = u_i$.

Д-м линейность

$\ell(v+v') = \ell(v) + \ell(v')$ очев.

$\ell(\lambda v) = \lambda \ell(v)$ очев.

Матрицы л. от.

$\ell(e_1) = u_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m$

$\vdots$

$\ell(e_n) = u_n = a_{1n} f_1 + \dots + a_{mn} f_m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица л от}$$

$$\ell(v) \longleftrightarrow A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ где } v_1 \dots v_n \text{ – коорд.}$$

При лин пр-ии выб-ся один и тот же базис.