№18 р.1 | Линейные функции (функционалы), сопряженное (двойственное) пр-во, его размерность. Взаимный (биортогональный) базис, изменение координат в нем при изменении базиса

Пусть V - лин. пр-во над F.

Def. Функция $f: V \to F$ наз-ся линейным функционалом (линейной ф-ей) если она:

1) Аддитивна $\forall x_1, x_2 \in V \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
2) Однородна $\forall x \in V, \lambda \in F \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Утв. Пусть V^* - мн-во всех лин ф-в, определенных на V.

Тогда V^* - лин пр-во над F

Д-во.

$(f_1 + f_2)(x) \overset{def}{=} f_1(x) + f_2(x)$

$(\lambda f_1)(x) \overset{def}{=} \lambda \cdot f_1(x)$

а) Замкн. относ. „$+$"

Пусть $f_1, f_2 \in V^*$. Покажем, что $f_1 + f_2 \in V^*$

$(f_1+f_2)(x+y) = f_1(x+y) + f_2(x+y) = f_1(x) + f_1(y) + f_2(x) + f_2(y) =$

$= (f_1+f_2)(x) + (f_1+f_2)(y)$

$(f_1+f_2)(\lambda x) = f_1(\lambda x) + f_2(\lambda x) = \lambda(f_1(x) + f_2(x)) = \lambda(f_1+f_2)(x)$

б) Замкн. относ. „$*$" на скаляр

Пусть $f \in V^*$. Покажем, что $\lambda f \in V^*$

$(\lambda f)(x+y) = \lambda f(x+y) = \lambda(f(x) + f(y)) = \lambda f(x) + \lambda f(y) =$

$= \lambda(f(x)) + \lambda(f(y))$

$(\lambda f)(\mu x) = \lambda f(\mu x) = \lambda \mu f(x) = \mu \lambda f(x) = \mu(\lambda f)(x)$ ■

Def. V^* - сопряженное к V

Def. V - лин пр-во над F. $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ - базис V.

Пусть $x \underset{\mathcal{E}}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha x$

наз-ся линейной формой от коорд в-ра x

Note. лин форму можно рассм. как линейный ф-л на F^n

$\alpha(x+y) = \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y = \alpha(x) + \alpha(y)$

$\alpha(\lambda x) = \alpha \cdot \lambda x = (\alpha \cdot \lambda) x = \lambda \alpha x = \lambda \alpha(x)$.

Утв. V - лин. пр-во над F

$\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ - базис в V

$f \in V^*$

$\forall$ линейный ф-л на V может быть представлен в виде лин. формы коорд. в-ра x_e, при этом коэф линейной формы равны знач. f на базисных в-рах $e_1, \dots e_n$

Д-во. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \quad \blacksquare$$

Сл-е. Каждый лин. ф-л однозначно опр-ся своими значениями на базисных в-рах V

Пусть $\varepsilon_i(x) = x_i$

Утв. V — лин пр-во над F, e — базис в V

Тогда $\varepsilon = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ — базис в V^*

Д-во.

а) ЛНЗ

Пусть $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varepsilon_i = 0$

Применим к $e_j \in V$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varepsilon_i (e_j)}_{\beta_j} = 0$$

$\beta_j = 0$

Тогда $\forall j \; \beta_j = 0 \Leftrightarrow$ ЛК трив. $\Rightarrow (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ — ЛНЗ.

б) Всякий $f \in V^*$ в-ся через $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$

$$f(x) = \sum_i f(e_i) x_i = \sum_i f(e_i) \cdot \varepsilon_i(x) = \left(\sum f(e_i) \cdot \varepsilon_i\right)(x)$$

$$\Rightarrow f = \sum f(e_i) \cdot \varepsilon_i \quad \blacksquare$$

Сл-е. $\dim V^* = n = \dim V$

Оп. Построенный в утв. базис V^* наз-ся двойственным (взаимным, биортогональным) к базису e.

Сл-е. Если $f \in V^*$ и ε — взаимный базис к e, то координатами лин. ф-ла f являются

$$f \xleftrightarrow[\varepsilon]{} \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix}$$

$$f = (f(e_1) \dots f(e_n)) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Утв. Пусть в V есть базисы e и e'

Пусть ε и ε' — взаимные к ним базисы V^* (к ε и к ε' соотв.)

Тогда $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix}$

w 1.8 p. 2 D-Go;

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix}(x)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{pmatrix}. \blacksquare$$