16 P.1 Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпр-в, её характеризации

V - лин. пр-во над F

Непустое U - подпр-во в V, если U - лин. пр-во отн „+" и „·"

Def. Пусть U и $W \leq V$

$$U \cap W = \{ x \in V \mid x \in U \text{ и } x \in W \}$$

Утв. $U \cap W \leq V$

Д-во.

$$\begin{rcases} 0 \in U \\ 0 \in W \end{rcases} \Rightarrow \bar{0} \in U \cap W$$

$$x, y \in U \cap W \Rightarrow \begin{rcases} \begin{rcases} x \in U \\ y \in U \end{rcases} \Rightarrow x + y \in U \\ \begin{rcases} x \in W \\ y \in W \end{rcases} \Rightarrow x + y \in W \end{rcases} \Rightarrow x + y \in U \cap W$$

$\lambda x \in U \cap W$ (аналогично) ▨

Def. $U, W \leq W$

Алг. суммой $(U + W)$ наз мн-во

$$U + W = \{ x + y \mid x \in U, y \in W \}$$

Утв. $U + W \leq V$

Д-во.

$0 + 0 = 0 \in U + W$

Пусть $a, b \in U + W$

$$\begin{rcases} a = \underset{U}{x_1} + \underset{W}{y_1} \\ b = \underset{U}{x_2} + \underset{W}{y_2} \end{rcases} \Rightarrow a + b = \overbrace{x_1 + x_2}^{U} + \overbrace{y_1 + y_2}^{W} \in U + W$$ ▨

Note. $U + W$ - min подпр-во, которое содержит U и W.

Note. Аналогично опр-ся сумма $\forall$ конечного числа подпр-в

Утв. Пусть подпр-во U_i пор-ся S_i

Тогда $U_1 + \ldots + U_k = \langle S_1 \cup \ldots \cup S_k \rangle = L$

Д-во.

$U_1 + \ldots + U_k \leq \langle S_1 \cup \ldots \cup S_k \rangle = L$ (т.к. $U_i \leq \langle S_i \rangle \subseteq \langle S_1 \cup \ldots \cup S_k \rangle$)

$L = \langle S_1 \cup \ldots \cup S_k \rangle \leq \langle S_1 \rangle + \ldots + \langle S_k \rangle = U_1 + \ldots U_k$ ▨

$$\dim(U_1+\ldots+U_k) \le \sum_{i=1}^{k} \dim U_i$$

Д-во.

Из д-го утв-я базис в $U_1+\ldots+U_k$ образует максимальная ЛНЗ подсистема S_0 в $S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k$.

$$\dim(U_1+\ldots+U_k) = |S_0| \le |S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k| =$$

$$= |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_k| = \sum_{i=1}^{k} \dim U_i \quad ▨$$

Пусть S_i – базис U_i. Говоря об объединении с-м в-ров подразумеваем их объединение как уп-к мн-в.

Сл-е. Пусть в условиях пред. утв-я S_i – базис U_i. Тогда нер-во обр-ся в р-во $\Leftrightarrow$ объединение базисов S_i – базис в $U_1+\ldots+U_k$

Д-во.

$\Rightarrow$) Пусть р-во.

Тогда $|S_0| = |S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k|$, т.е.

макс ЛНЗ с-ма – это сама с-ма $\Rightarrow (S_1 \cup \ldots \cup S_k)$ – базис $U_1+\ldots+U_k$

$\Leftarrow$) Пусть $S_1 \cup \ldots \cup S_k$ – базис $U_1+\ldots+U_k$.

Тогда $\dim(U_1+\ldots+U_k) = |S_1 \cup \ldots \cup S_k| = \sum_{i}^{k} \dim U_k$ ▨

Пр-я сумма

Оп. Пусть V – лин пр-во над F

$U_1 \ldots U_k \le V$

Ал. сумма $U_1+\ldots+U_k$ наз-ся пр-й суммой подпр-в,

если $\forall x \in U_1+\ldots+U_k$: $x = \underset{U_1}{x_1} + \underset{U_2}{x_2} \ldots + \underset{U_k}{x_k}$ – единственным обр-ом

Об-е. $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$

Оп. Подпр-ва $U_1, U_2 \ldots U_k$ наз-ся ЛНЗ, если

$\bar{0} = \underset{U_1}{x_1} + \ldots + \underset{U_k}{x_k} \Rightarrow$ все $x_i = 0$

Т (о хар-ии пр-й суммы подпр-в)

Следующие усл-я эквивалентны

1) $U_1+U_2+\ldots+U_k = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$
2) $\forall i \in \{1 \ldots k\}$ $U_i \cap (U_1+\ldots+\underset{\text{т.е. без } U_i}{\widehat{U_i}}+\ldots+U_k) = \{\bar{0}\}$
3) Подпр-ва $U_1 \ldots U_k$ ЛНЗ

№16 p.2

4) Объединение базисов $U_1 \dots U_k$ – базис $U_1 + \dots + U_k$

5) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$

Д-во,

1) => 2), От противного.

Пусть $U_i \cap (\dots)$ нетрив, т.е.

$\exists x \neq \bar{0}: x \in U_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U_i} + \dots + U_k)$

$x \in U_i \Rightarrow x = 0 + 0 + \dots + \underset{i}{x} + \dots + 0$

$x \in U_1 + \dots + \hat{U_i} + \dots + U_k \Rightarrow x = x_1 + x_2 + \dots + \underset{i}{0} + \dots + x_k$.

Разложения р-ны => сумма не пр-я ?!

2) => 3), От противного

$\bar{0} = x_1 + \dots + x_k \quad \exists x_i \neq 0$

Тогда $\underset{U_i}{x_i} = \underbrace{-x_1 - \hat{x_i} - x_k}_{\in U_1 + U_2 + \dots + \hat{U_i} + \dots + U_k}$

Т.е. $x_i \in U_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U_i} + \dots + U_k)$; $x_i \neq 0$?!

3) => 4),

Пусть $e_{i1} \dots e_{in_i}$ – базис в U_i ($\dim U_i = n_i$)

$\mathcal{E} = (e_{11} \dots e_{1n} \dots e_{k n_k}) \overset{?}{-}$ базис в $U_1 + \dots + U_k$

Проверим ЛНЗ

Пусть $\exists$ нетрив ЛК: $\sum \alpha_{ij} e_{ij} = \bar{0}$

$x_1 = \sum \alpha_{1j} e_{1j}, \dots, x_k = \sum \alpha_{kj} e_j$

В силу нетрив из $x_1 \dots x_k$ найдется нетр-в-р.

$\sum x_i = \bar{0}$, $x_i \in U_i$ и не все $x_i = 0$?!

$\forall x \in U_1 + \dots + U_k \Leftrightarrow x = x_1 + \dots + x_k$

Т.е. x_i р-ся по $\mathcal{E}$. => $\mathcal{E}$ – базис.

4) <=> 5)

по утв и сл-ющего

Покажем 4) => 1) От противного

Пусть $\left.\begin{array}{l} x = x_1 + \dots + x_k \\ x = y_1 + \dots + y_k \end{array}\right)$ два разл. р-я по $(e_{i1} \dots e_{in_i})$

$$\begin{array}{rl} & x = \sum \lambda_{ij} e_{ij} \\ - & x = \sum \mu_{ij} e_{ij} \\ \hline & 0 = \sum (\lambda_{ij} - \mu_{ij}) e_{ij} \end{array}$$

– нетрив ЛК $= 0$?! ($\mathcal{E}$ – базис) ▨

Def. Говорят, что V р-ся в прямую сумму $U_1 \dots U_k \subseteq V$, если $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

Т.е.

а) $V = U_1 + \dots + U_k$

б) любое из 5-ти условий.

Th (ф-ла суммы подпр-в)

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$, где $U, W \subseteq V$

Д-во.

Пусть $\dim(U \cap W) = k$

$U \cap W \subseteq U \Rightarrow \dim U \geq k \Rightarrow \dim U = k + \ell,\ \ell \geq 0$

$U \cap W \subseteq W \Rightarrow \dim W \geq k \Rightarrow \dim W = k + m,\ m \geq 0$

Покажем, что $\dim(U+W) = k + \ell + m$.

Пусть $(e_1 \dots e_k)$ – базис $U \cap W$

Дополним до базиса U: $(e_1 \dots e_k\ f_1 \dots f_\ell)$

— // — W: $(e_1 \dots e_k\ g_1 \dots g_m)$.

Покажем, что (e, f, g) – базис $U + W$

Пусть $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_\ell f_\ell + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m = 0$

$y = \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m = -\sum \alpha_i e_i - \sum \beta_j f_j$

$y \in W,\ y \in U \Rightarrow y \in U \cap W \Rightarrow y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ ($\mathcal{E}$ – базис $U \cap W$)

$y = \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m$

$y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$

$\overline{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k - \gamma_1 g_1 - \dots - \gamma_m g_m \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_i = 0 \\ \gamma_j = 0 \end{matrix}$ (т.к. это базис W)

Аналогично $\beta_i = 0$

$\Rightarrow (e, f, g)$ – ЛНЗ.

Покажем, что $\forall x \in W + U = ЛК(e, f, g)$

$x \in W + U \Rightarrow x = \underset{U}{x_1} + \underset{W}{x_2} = (\sum \lambda_i e_i + \sum \mu_i f_i) + (\sum t_i e_i + \sum \gamma_i g_i) = ЛК(e, f, g)$

$\Rightarrow (e, f, g)$ – базис $U + W \Rightarrow \dim(U+W) = k + m + \ell$ ▨

Def. $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

$x = x_1 + \dots + x_k$ – единств. (канон.) р-е.

x_i – пр-я x на U_i параллельно $(U_1 \oplus \dots \oplus \widehat{U_i} \oplus \dots \oplus U_k)$