№8 р.1 С-мы лин. ур-й. Метод Гаусса. Элементарные преобр-я строк матрицы, приведение матрицы к ступенчатому и упр-му виду. Эл-е матрицы и их св-ва

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

A – матрица с-мы. $A \in M_{m\times n}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$ $\quad AX = B \in M_{m\times 1}$

$\widetilde{A} = (A|b)$ – расширенная м-ца с-мы.

Def. СЛУ (1) наз-ся однородной, если $b = 0$

Def. Для с-мы (1) $Ax = b$, с-ма $Ax = 0$ наз-ся приведенной

Def. СЛУ – совместна, если $\exists$ решение

Note. $Ax = 0$ – мн-во реш $V_0 \leq F^n$

Утв. Пусть V_0 – подпр-во решений приведенной с-мы $Ax = 0$ для совместной с-мы (1). Тогда $\forall$ решение с-мы (1) имеет вид

$X = X_0 + u$, $u \in V_0$, x_0 – г-е решение (1)

Д-во.

$Ax = A(x_0 + u) = Ax_0 + Au = b + 0 = b.$

Пусть x – произв реш. (1)

Покажем, что $\exists u \in V_0 : x = x_0 + u$

$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$

$\Rightarrow \exists u \in V_0, u = x - x_0$

$\Rightarrow x = x_0 + u$ ■

Эл. пр. к строкам м-цы

$M = M_{m\times n}$

$\exists$ эл-е пр-я (ЭП) трех типов.

Def. Э.П. I типа: прибавление к i-ой строке j-ю строку, умноженную на $\lambda \in F$ $\quad a_i \to a_i + \lambda a_j$

Def. Э.П. II типа: перемена местами i-й и j-й строк $\quad a_i \leftrightarrow a_j$

Эл. П. III типа: умножение строки на $\lambda \neq 0 \in F$

Def. СЛУ $A_1 x = b_1$ и $A_2 x = b_2$ — эквивалентные, если они зависят от одних и тех же пер-х. Каждое решение первой — решение второй и наоборот

Утв. Применение к матр M э.п. I, II или III типа равносильно умножению M слева на одну из след эл-х матриц

$$D_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & \lambda & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & -i \\ \quad\quad\quad j & \end{array} \quad a_i \to a_i + \lambda a_j$$

D_{ij} — применение ЭП I к E.

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & i & j \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -i \\ \\ -j \end{array} \end{array} \quad P_{ij} \text{ — прим ЭП II к } E$$

$$T_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix} -i \quad T_i(\lambda) \text{ — ЭП III к } E$$

Утв. Все эл-е матрицы обратимы. Причем обр-я — тоже эл-я

Д-во

$$D_{ij}(\lambda) D_{ij}(-\lambda) = E$$

$$D_{ij}(-\lambda) \cdot D_{ij}(\lambda) = E$$

$$(P_{ij})^2 = E$$

$$T_i(\lambda) \cdot T_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) = E \quad \blacksquare$$

Утв. Если над расширенной матрицей с-мы совершить Э.П строк, то пол-ся с-ма экв исходной

Д-во

$$\tilde{A} = (A|b) \quad \text{I}$$

Q — м-ца эл-го пр-я

$$\tilde{A}' = (QA|Qb) \quad \text{II}$$

Пусть x_0 — реш I

$$Q \underbrace{A x_0}_{b} \overset{?}{=} Qb \Rightarrow Qb = Qb. \quad \text{обр-е очев., т.к. } \exists\, Q^{-1} \quad \blacksquare$$

№8 р.2

Def. 1-й ненулевой эл-т строки — лидер строки

Def. Матрица $M_{m\times n}$ — ступенчатая, если выполн[illegible] 2 усл-я:

а) Если a_{ij} и $a_{i+1,k}$ — лидеры двух соседних строк, то $j<k$
(лидер строки с большим номером располагается в большем ст-це

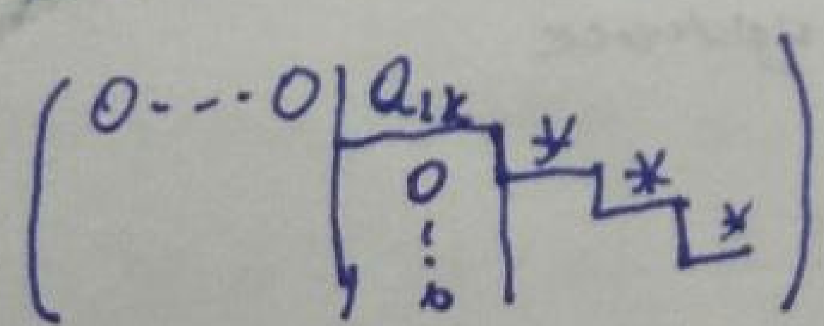
б) Ниже нулевой строки может быть только нулевая стр-ка

Th. Всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью конечного числа эл-х преобр строк.

Д-во. Индукция по m

а) База $m=1$ $(0..0 * .. *)$

б) Пусть для матриц $(m-1)\times n$ утв спр-во
Докажем для $M_{m\times n}$
Выберем строку, лидер которой расположен в столбце с наим номером k_1 и поменяем м-ми с первой строкой



С п-ю ЭП I типа аннулируем все эл-ты под лидером
мысленно отбросим 1-ю строку и к ост-ся матрице $(m-1\times n)$ применим пр-е. инд-ии ☐

Note. алгоритм д-ва — прямой ход метода Гаусса

Def. Ступенчатая матрица наз-ся упрощенной, если вып. два усл-я:

а) лидеры строк $=1$

б) в столбцах, содержащих лидеры строк (базисные) единственный отличный от 0 эл-т — лидер

Th. Всякую ступ. матрицу можно привести к упр виду с помощью конечного числа ЭП строк.

Д-во

a_{rk_r} – строка с лидером

$a_r \to \frac{1}{a_{rk_r}} \cdot a_r$

⇓

все лидеры – единицы

Пусть всего r строк $\neq 0$

Начиная с r строки применяя ЭП

1-го типа обнуляем все эл-ты выше лидера

При переходе от нижележащих к вышележащим. ■

Note алгоритм – обр-й ход метода Жордана – Гаусса

Метод Гаусса

$\bar{A}_{m\times(n+1)} \to \bar{A}_{\text{ступ.}}$

а) Если у $\bar{A}$ есть лидер в ст-це свободных членов, то с-ма несовместна

б) Если все лидеры расп $1 \leq j \leq n$ то с-ма сов-на.

Пусть $a_{1k_1} \dots a_{rk_r}$ – лидеры строк в $\bar{A}_{\text{ступ.}}$

Тогда неизв. $x_{k_1} \dots x_{k_r}$ – гл-е, а остальные свободные (базисные)

б1) Пусть все неизв-е гл-е $r=n$.

$a_{1k_1} \dots a_{nk_n}$

$1 \leq k_1 < k_2 \dots < k_n \leq n$

$\Rightarrow k_1 = 1 \; k_2 = 2 \dots k_n = n$

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

б2) Есть св-е неизв-е.

$$\begin{aligned} a'_{1k_1}x_{k_1} + \dots + a'_{1k_r}x_{k_r} &= b'_1 - L_1 \\ &\vdots \\ a'_{rk_r}x_{k_r} &= b'_n - L_r \end{aligned}$$