№14 Р1 Классификация линий второго пор-ка. Приведение ур-я второго пор-ка с двумя пер-ми к канон виду в ПДСК. Опр-е типа кривой по её инв-м

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \ (\text{I}), \text{ где } A^2+B^2+C^2\neq 0$$

Приведение кривой к канону.

1) Аннулирование смешанного пр-я ($B=0$)

$$\mathcal{E}'=\mathcal{E}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \ \varphi\in\mathbb{R}$$

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$$

$$y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$$

(I) в $(O,(e_1',e_2'))$

$$A(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2+2B(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)+\ldots=0$$

$$B'=-A\cos\varphi\sin\varphi+B(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+C\cos\varphi\sin\varphi=0$$

$$\frac{1}{2}(C-A)\sin 2\varphi+B\cos 2\varphi=0$$

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2B}{A-C}$$

Если $A\neq C \Rightarrow \exists$ поворот: $B'=0$

Если $A=C \Rightarrow B\cos 2\varphi=0 \quad \varphi=\frac{\pi}{4}$

$\Downarrow$

$$(\text{I})\to A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0 \ (\text{II})$$

Л) Если коэф при квадрате какой-нибудь пер-й отличен от 0, то парал. перенося СК вдоль оси, соотв. этой пер-й, можно изб-ся от соотв линейного члена

$$\begin{cases}\text{Если } A'\neq 0, \text{ изб от } D'\\ \text{Если } C'\neq 0, \text{ изб от } E'\end{cases}$$

Д-во,

пусть $A'\neq 0$

$$A'\Big(\underbrace{x'^2+\frac{2D'}{A'}x'+\left(\frac{D'}{A'}\right)^2}_{(x'+\frac{D'}{A'})^2}\Big)+C'y'^2+2E'y'+F'-\frac{(D')^2}{A'}=0$$

$$\begin{cases}x''=x'+\frac{D'}{A'}\\ y''=y'\end{cases}$$

$\Rightarrow A'x''^2 + C'y''^2 + 2E'y'' + F'' = 0$ (II)

т.е. Если в ур-ии (I) $A' \neq 0$, $B' \neq 0$ можно удалить лин. часть.

Классификация

(II) $A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$

$E: A'C' > 0$ — элл. тип

$H: A'C' < 0$ — гип. тип

$D: A'C' = 0$ — пар. тип

E: $A'x''^2 + C'y''^2 = -F''$ — по (Λ)

$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ — эллипс.

$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс.

$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых перес. пр-х.

$a \geq b > 0$ — иначе повернем с-му на $\pi/2$ $\left\{\begin{array}{l} x''' = -y'' \\ y''' = x'' \end{array}\right.$

H: $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$ — гип-ла

$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0$ — пара дейст. пер. пр-х

D: $C'y''^2 + 2D''x'' + F'' = 0$ (будем считать, что $A' = 0$, иначе повернем) (тогда $C' \neq 0$, т.к. ур-е 2-го пор-ка)

1) $D'' \neq 0$

$C''y''^2 + 2D''\left(x'' + \frac{F''}{2D''}\right) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x''' = x'' + \frac{F''}{2D''} \\ y''' = y'' \end{array}\right.$

$y'''^2 = 2px'''$ $\quad p = -\frac{D''}{C''} > 0$ (иначе поворот)

2) $D'' \neq 0$

$C'y''^2 = -F''$

$y''^2 = a^2$ — пара паралл. д. пр-х.

$y''^2 = -a^2$ — пара паралл. мнимых пр-х

$y''^2 = 0$ — пара совп. пр-х.

№14 Р.2 **Тh** (о класс. кривых 2-го пор-ка)
Ур-е кривой 2-го пор-ка в ПДСК может быть пр-но к одному из 9-ти видов.

Инварианты

(I) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

Тh Инвариантами кр-х второго пор-ка (I) явл-ся ф-ии
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad I = A+C$$

Д-во.

Запишем (I) в матричном виде
$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Bigg|_{z=1} = 0$$

При замене ПДСК:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Пр-е пл-ти запишем как пр-е пр-ва, в котором z не меняется
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \gamma_1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad z=z'$$

$$(x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \gamma_1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\Bigg|_{z=1} = 0$$

$$\Delta' = \det\left(\left(\ \right)\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\left(\ \right)\right) = 1\cdot\det\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\cdot 1 = \Delta$$

$$\delta' = \left|\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right| = 1\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}\cdot 1 = \delta$$

$$I' = tr\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = tr\left(R_{-\varphi}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\cdot R_\varphi\right) = tr\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = A+C. \ \blacksquare$$

Классификация пр-х с помощью инв-ов.

E	H	D
1 Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\delta>0$ $\Delta\cdot I<0$ $(a\ge b>0)$ 2 Мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ $\delta>0$ $\Delta\cdot I>0$ $(a\ge b>0)$ 3 Пара пересек. мн-х прямых $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ $\delta>0$ $\Delta=0$ $(a\ge b>0)$	4 Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\delta<0$ $\Delta\ne0$ 5 Пара пересек. действ. пр-х $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ $\delta<0$ $\Delta=0$	6 Парабола $\delta=0$ $y^2=2px$, $p>0$ $\Delta\ne0$ 7, 8, 9) $\delta=0$ $\Delta=0$ 7 $y^2=a^2$ $a>0$ 8 $y^2=-a^2$ 9 $y^2=0$