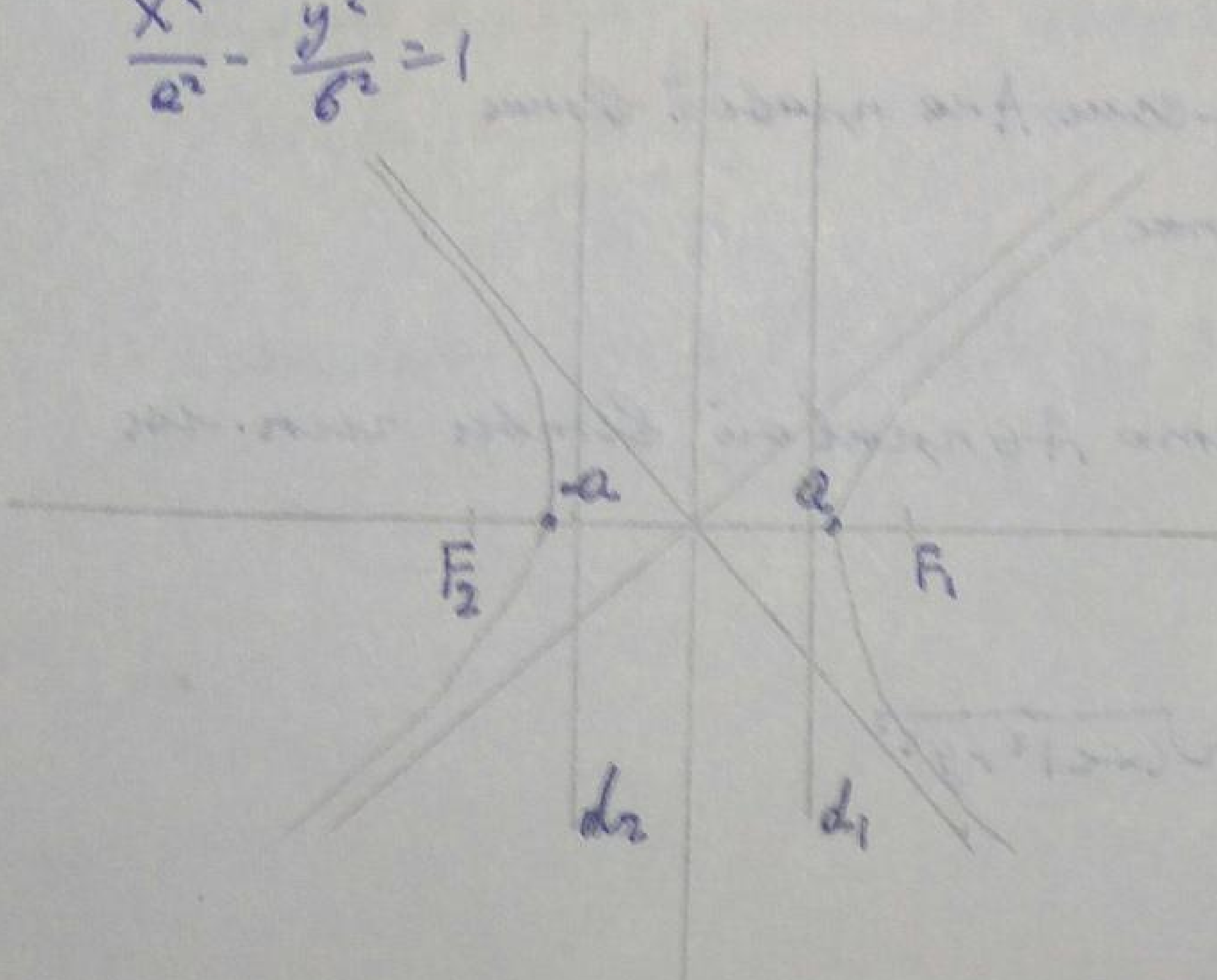
№12 P.1 Гипербола. ТК о фокусах и директрисах гиперболы. Асимптоты гиперболы

Def. Гипербола — кривая, которая в ПДСК задается ур-ем.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Note гипербола симм. отн. OX и OY

OX — действ. ось

OY — мнимая ось

Def. a — действ.

b — мнимая полуось

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ — фокусное р-е.

$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ — фокусы.

$\varepsilon=\frac{c}{a}$; $\varepsilon>1$.

Th1 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in$ гип. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow AF_1=|\varepsilon x-a|$

$$AF_2=|\varepsilon x+a|$$

Если $A\in$ правой ветви, то $|x|\geq a$, $|\varepsilon x|>a \Rightarrow \varepsilon x\pm a>0$

Если $A\in$ левой ветви, то $x\leq -a$ и $|x|\geq a \Rightarrow \varepsilon x\pm a<0$

Д-во

Пусть $AF_1=|\varepsilon x-a| \Rightarrow AF_1^2-(\varepsilon x-a)^2=0=(x-c)^2+y^2-(\varepsilon x-a)^2=$

$=x^2-2cx+c^2+y^2-\varepsilon^2x^2+2a\varepsilon x-a^2=-\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2+c^2-a^2=$

$=b^2\left(-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in$ гип.-е. ■

Сл-е Гипербола — ГМТ: $\frac{AF_1}{\rho(A,d_1)}=\frac{AF_2}{\rho(A,d_2)}=\varepsilon$, где $d_1=x=\frac{a}{\varepsilon}$

$d_2=x=-\frac{a}{\varepsilon}$

Д-во

$\rho(A,d_1)=\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|=\left|\frac{\varepsilon x-a}{\varepsilon}\right|$

$\varepsilon\cdot\rho(A\,d_1)=|\varepsilon x-a|=AF_1$

Аналогично для AF_2 ■

(T2) Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – ГМТ $A\binom{x}{y}$: $|AF_1-AF_2|=2a$

Д-во.

1) $\Rightarrow$

Пусть $A\in$ гиперболе

$|AF_1-AF_2|=|\varepsilon x-a-\varepsilon x-a|=2a$ – если A на правой ветке

Аналогично, если A на левой ветке

2) $\Leftarrow$

$A\binom{x}{y}$: $AF_2-AF_1=2a$. Покажем, что $A\in$ правой ветви гип-лы

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$xc-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$a^4+x^2c^2=a^2(x^2+c^2+y^2)$$

$$a^4+a^2x^2+b^2x^2=a^2x^2+a^4+a^2b^2+a^2y^2$$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – т.е. $A\binom{x}{y}\in$ гип-ле.

$AF_2>AF_1\Rightarrow A\in$ правой ветви

для левой аналогично ▨

Асимптоты гиперболы

Def. Пр-е $l_1: \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

$l_2: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$

наз-ся асс. г-лы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(T2) пр-е расстояний от $A\binom{x}{y}\in$ гип-ле $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до асс-т – постоянная в-на

Д-во.

$$\rho(A,l_1)=\frac{\left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}};\quad \rho(A,l_2)=\frac{\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

$$\rho(A,l_1)\cdot\rho(A\cdot l_2)=\frac{\left|\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right|}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\text{const}$$ ▨

w12 p.2 **Сл-е.** Если т. $A\binom{x}{y}$ движется по полуветви гип-лы, так что $\rho(A,O)\to+\infty$, то или $\rho(A,l_1)\to 0$, или $\rho(A,l_2)\to 0$.

Д-во.

Пусть правая верхняя полуветвь

$$\rho(A,l_2)=\frac{\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}},\quad x,y>0 \text{ и } \begin{matrix} x\to+\infty \\ y\to+\infty \end{matrix} \Rightarrow \rho(A,l_2)\to+\infty$$

Поскольку $\rho(A,l_1)\cdot\rho(A,l_2)=\mathrm{const}\Rightarrow\rho(A,l_1)\to 0$ ■