№22 р1 | Полилинейные и кососимметричные ф-ии. Определитель матрицы, явное выражение опр-ля через эл-ты матрицы, задание опр-ля его св-ми

Про подстановки читать 3-й билет.

Def. Пусть $A \in M_{n\times n}$. Её опр-лем наз-ся число равное $\det A = |A| = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma_1} \dots a_{n\sigma_n}$

словесное опр-е: определителем матрицы $M_{n\times n}$ наз-ся сумма $n!$ слагаемых взятых по одному и ровно одному из каждой строки и каждого столбца. Перед каждым сл-ым знак подстановки.

Вывод $\det A^T = \det A$.

Def. ф-я $f: V^n \to F$ наз-ся полилинейной (или n линейной) если она линейна по каждому из своих ар-в

$f(\dots \underbrace{x_i + x_i'}_{i} \dots) = f(\dots x_i, \dots) + f(\dots x_i' \dots)$ – аддитивность по i-му

$f(\dots \lambda x_i \dots) = \lambda f(\dots x_i)$ однородность

Def. ($\operatorname{char} F \neq 2$) Полилинейная ф-я $f: V^n \to F$ наз-ся кососимметричной, если

а) $f(\dots x_i \dots x_j \dots) = -f(\dots x_j \dots x_i \dots)$ $\forall i,j: i \neq j$

б) $f(\dots \underset{i}{x} \dots \underset{j}{x}) = 0$

Утв. а $\Leftrightarrow$ б

Д-во. а $\Rightarrow$ б, очевидно

б $\Rightarrow$ а,

$0 = f(\dots x_i + x_j \dots x_i + x_j \dots) = \overset{=0}{f(\dots x_i \dots x_i)} + f(\dots x_i \dots x_j) + f(\dots x_j \dots x_i) + \dots + f(\dots x_j \dots x_j \dots)$ $\boxtimes$

Note. В случае $\operatorname{char} F = 2$ из а $\not\Rightarrow$ б. В этом сл-е ~~???~~ за опр-е б. сч. а)

Утв. Если f – полилинейная. кососим. ф-я ($f: V^n \to F$), то

$f(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1 \dots x_n)$

Д-во. Если σ – тожд, то утв вып-но.

Пусть $\sigma \neq$ тожд.

Разложим σ в пр-е транспозиций.

Индукция по кол-ву транспоз в п-ии

База, $\tau(G)=1 \Rightarrow G$ - транспозиция - очевидно (кососим-сть)

Пусть для $\tau(G) < k$ утв вып-но

Докажем для $\tau(G)=k$

$G=\tau_1 \ldots \tau_k = \tau_1 G_0$, где $G_0 = \tau_2 \ldots \tau_k$

$f(x_{\tau_1 G_0(1)} \ldots x_{\tau_1 G_0(n)}) = -f(x_{G_0(1)} \ldots x_{G_0(n)})$ - по д-му выше.

$-f(x_{G_0(1)} \ldots x_{G_0(n)}) = -\varepsilon(G_0) f(x_1 \ldots x_n) = \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(G_0) f(x_1 \ldots x_n) =$

$= \varepsilon(\tau_1 G_0) f(x_1 \ldots x_n) = \varepsilon(G) f(x_1 \ldots x_n)$ $\boxed{\text{Ч}}$

Т2 а) Определитель, рассматриваемый как ф-я от строк (или столбцов) кв. матр $A \in M_{n\times n}(F)$ явл-ся полилинейной кососим. ф-ей

б) Всякая полилинейная кососим ф-я от строк (столбцов), опр-ая на мн-ве матриц $M_{n\times n}(F)$ отличается от опр-ля лишь числовым м-лем.

$f(A) = f(E) \cdot \det A$

Д-во, а) БОО покажем, что определитель - лин. ф-я по первой строке

$a_{ij} = a^0_{ij}$ $\forall i > 1$

$\det A = \sum_{G \in S_n} \varepsilon(G) a_{1G_1} a^0_{2G_2} \ldots a^0_{nG_n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \lambda_{1j}$, где λ_{1j} не завис от элем первой строки

$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\lambda_{1j}$ - линейная форма от $(a_{11} \ldots a_{1n})$

Значит, опр-ль линейная ф-я по первой строке.

Покажем, что если a_i и a_j поменять местами, то опр-ль поменяет знак.

$A \to A'$ $a_i \leftrightarrow a_j$.

$\det A = \sum_{G \in S_n} \varepsilon(G) a_{1G_1} \ldots a_{iG_i} \ldots a_{jG_j} \ldots a_{nG_n}$

$a_{1G_1} \ldots a_{iG_1} \ldots a_{iG_j}$ входит в Σ для A'

В $\det A$ это пр-е входит со знаком $\varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \delta_1 & \ldots & \ldots & \delta_i & \ldots & \delta_j & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$

В $\det A'$ ——— // ——— $\varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_j & & \delta_i & \ldots & n \end{pmatrix}$

- пр-й знак.

№22 P2 Если char F = 2, то кососим. следует понимать в смысле
$f(\ldots x \ldots x \ldots) = 0$

Покажем, что если char F = 2 и $a_i = a_j$ (строки), то $\det A = 0$

$a_1 b_1 \ldots a_i b_i \ldots a_j b_j \ldots a_n b_n$

$a_1 b_1 \ldots a_j b_i \ldots a_i b_j \ldots a_n b_n$

Все сл-е можно разбить на пары так, что
эл-ты внутри пары отл-ся пер-кой эл-в i и j строки.
i стр = j строке => пр-я равны => они в сумме дают 0 т.к. Char F = 2
$\Rightarrow \det A = 0$

б) $e_1 = (1\,0 \ldots 0)$
$e_2 = (0\,1 \ldots 0)$
$\vdots$
$e_n = (0 \ldots 0\,1)$

$f(a_1 \ldots a_n) = f\left(\sum a_i e_{i_1}, \sum a_{i_2} e_{i_2}, \ldots, \sum a_{i_n} e_n\right) =$

$= \sum\limits_{i_1} \ldots \sum\limits_{i_n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} f(e_{i_1} \ldots e_{i_n}) = \sum\limits_{i_1} \ldots \sum\limits_{i_n} a_{i_1} \ldots a_{i_n} \cdot \varepsilon(i) \cdot f(e_1 \ldots e_n) =$

$= f(E) \cdot \det A.$ ☒

Сл-е, ∃! полилин. кососим. ф-е, которое на E принимает 1