24 р.1 | Решение с-мы ЛУ методом Крамера. Вычисление обр-й матрицы.

**Т(Крамера)**

$Ax=b$ n ур-й с n неизв.

Эта с-ма явл-ся опр-й $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

В этом сл-е $\exists!$ реш. с-мы, к-е можно найти

по ф-ле $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ... $x_n = \frac{\Delta_n}{n}$.

**Д-во**

а) $\Rightarrow$ Пусть $Ax=b$ определ-я

$rg A = n \Rightarrow \det A \neq 0$

$\Leftarrow$ $\det A \neq 0 \Rightarrow rg A = n$

$\hat{A} \in M_{n\times(n+1)} \Rightarrow rg \hat{A} \leq n$ $\Big| \Rightarrow rg \hat{A} = n \Rightarrow$ с-ма совм и опр.

б) $A_{*1} \ldots A_{*n}$ – столбцы $A$

$\Delta_j - \det(A_{*1} \ldots \underset{j}{b} \ldots A_{*n}) =$

Т.к. с-ма явл-ся опр-й $\Rightarrow b = \sum_{s=1}^{n} x_s A_{*s}$

$= \det(A_{*1} \ldots \sum_{s=1}^{n} x_s A_{*s} \ldots A_{*n}) =$

$= \sum_{j} x_j \det(A_{*1} \ldots \underset{\uparrow j}{A_{*j}} \ldots A_{*n}) = x_j \cdot \det A \Rightarrow x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}$ $\boxed{\phantom{x}}$

**Оп.** Пусть $A \in M_{n\times n}(F)$

Выберем к строк и ст-цов $i_1 \ldots i_k$ – строки

$j_1 \ldots j_k$ – столбцы.

На их пересечении – кв. подматрица пор-ка к. – минор

$M^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$.

**Оп.** Вычеркнем из А выбранные к строк и столбцов.

$\Rightarrow$ полученная подматрица – доп. минор к минору М

$\bar{M}^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$.

**Оп.** Алгебраическим доп-ем минору $M^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ наз-ся

число, равное $A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} = (-1)^{i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} \cdot \bar{M}^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$.

Th (об обр-й матрице)

A — невырожд ($\det A \neq 0$) кв. м. пор-ка n.

Тогда $\exists!$ $A^{-1}$, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$[A^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

Д-во,

$$AB = E$$

$$\det A \det B = \det E$$

$$\det A \neq 0$$

$$A\,X = e_j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} j$$ , где X — j-й столбец B

$$x_i = b_{ij} = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$ по Th Крамера

$$\Delta_i = \det\left( A_{*1} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j \cdots A_{*n} \right)$$ раскроем по i-му ст-цу

$$i$$

$$\Rightarrow \Delta_i = A_{ji} \Rightarrow x_i = \frac{A_{ji}}{\det A}$$ ∎