№1 Линейные операции с векторами на плоскости и в пр-ве, их св-ва. Линейно зависимые и независимые сист-мы векторов. Связь между линейной зависимостью, колл. и компл. в-ров.

P1

Def напр. отр-к. — отр-к с упор. концами.

Def $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$, если

① $|XY| = |X'Y'|$

② $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$ (коллинеарны)

③ $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ сонаправлены

Def Вектор — класс всех напр. отр-ов, равных фикс. напр. отр-у

Утв. Два напр. отр-ка $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ определяют один и тот же в-р $\Leftrightarrow$ они равны.

Д-во.

а) $\Rightarrow$

$\exists\ \overline{ZT}:\ \overline{XY} = \overline{ZT}$, $\overline{X'Y'} = \overline{ZT}$

б) $\Leftarrow$

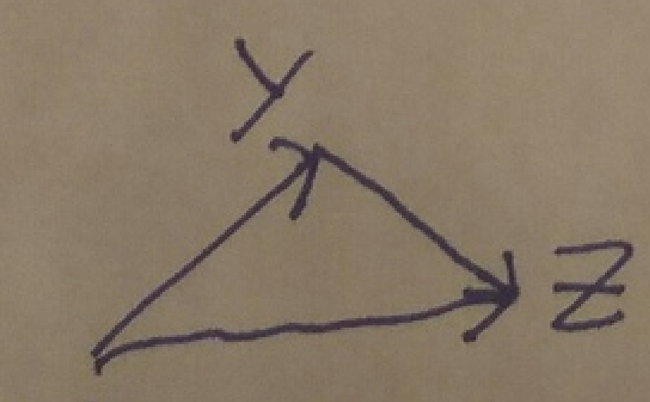
$\overline{XY} = \overline{X'Y'} \Rightarrow \overline{XY}$ и $\overline{X'Y'} \in$ одному кл-су $\Rightarrow$ опр. од. и тот же в-р. $\square$

Операции над в-ми

Def Сложение в-ров

$\bar{a}$ и $\bar{b}$

$\overline{XY} = \bar{a}$ $\quad \overline{YZ} = \bar{b}$



$\bar{a} + \bar{b} \overset{def}{=}$ вектор порожденный $\overline{XZ}$

Note. опр-е суммы в-ров нуждается в корректности.

Т.е. нужно показать, что сумма не зависит от выбора $\overline{XY}$ и $\overline{YZ}$.

Def Умножение в-ра на число

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{a}$ — в-р.

$\overline{XY} = \bar{a}$, тогда $\lambda\bar{a} \overset{def}{=} \overline{XZ}$: ① $XZ = |\lambda| XY$

② $\overline{XZ} \parallel \overline{XY}$

③ $\lambda > 0 \Rightarrow \overline{XZ} \uparrow\uparrow \overline{XY}$; $\lambda < 0$ $\overline{XZ} \downarrow\uparrow \overline{XY}$

Св-ва операций:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ коммутативность
2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ ассоц.
3. $\exists \bar{0}: \bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$
4. $\forall \bar{a} \quad \exists -\bar{a}: \bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$
5. $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$ Унитарность
6. $(\lambda\cdot\mu)\cdot\bar{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\bar{a})$
7. $(\lambda+\mu)\cdot\bar{a}=\lambda\cdot a+\mu\cdot\bar{a}$
8. $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$

Def. $\sum_i \alpha_i v_i$ – линейная комб.

Def. ЛК – тривиальная $\Leftrightarrow \alpha_i=0 \ \forall i$

Def. ЛК – не трив $\Leftrightarrow \exists \alpha_i \neq 0$

Def. С-ма в-ров $(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ – ЛЗ, если
$\exists$ нетрив ЛК $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n = \bar{0}$
т. е. $(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ – ЛЗ $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \ldots \alpha_n: \begin{cases} \sum \alpha_i v_i = \bar{0} \\ \exists \alpha_i \neq 0 \end{cases}$

Def. С-ма в-ров $(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ ЛНЗ $\Leftrightarrow (\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ не ЛЗ

Утв. (Критерий Л. зав.)

С-ма в-ров $(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ ЛЗ $\Leftrightarrow \exists v_i$, который выр-ся через остальные.

Д-во.

а) $\Rightarrow$ $\alpha_1\bar{v}_1+\ldots+\alpha_n\bar{v}_n=\bar{0}$
Пусть $\alpha_n \neq 0$ (б.о.о.) $\Rightarrow \alpha_n\bar{v}_n=-\alpha_1\bar{v}_1-\ldots-\alpha_{n-1}\bar{v}_{n-1}$

б) $\Leftarrow$ Пусть $\bar{v}_n=\beta_1\bar{v}_1 \ldots \beta_{n-1}\bar{v}_{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\bar{v}_i+\bar{v}_n=\bar{0}$ ▨

Утв. $(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ – ЛЗ $\Rightarrow \forall$ подсистема ЛЗ.
$(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n)$ – ЛНЗ $\Rightarrow \forall$ подсистема ЛНЗ.

w1 p2

Утв. Если $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ – ЛНЗ, то всякий в-р раскладывается по ней не более чем одним способом.

Д-во.

Пусть $\bar{u} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1-\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_n-\beta_n\end{pmatrix} = \bar{0}$

т.к. $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ – ЛНЗ $\Rightarrow \bar{\alpha} - \bar{\beta} = 0 \Rightarrow \bar{\alpha} = \bar{\beta}$ ∎

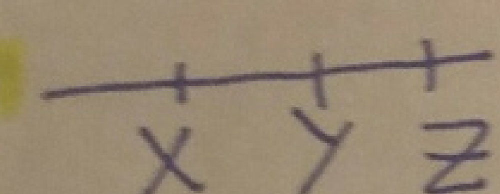
Утв.

а) Пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$. Тогда $\bar{b}$, колл. $\bar{a}$, выражается через $\bar{a}$
$\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

б) Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ – неколл. Тогда $\bar{b}$, компланарный $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ выражается через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$
$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

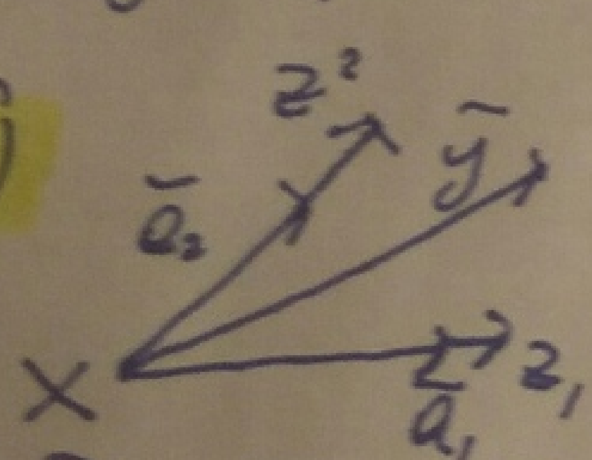
в) Пусть $(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3)$ – некомп.
Тогда $\forall \bar{b} \in V$ (пр-ву) можно выразить через $(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3)$

Д-во.

а)  $\overline{XZ} = \bar{b}$

$|\lambda| = \frac{XZ}{XY}$ $\quad\alpha > 0$, Y и Z по одну ст-ну от X
$\quad\alpha < 0$, иначе

$\overline{XZ} = \lambda \overline{XY}$
$\bar{b} = \lambda \bar{a}$

б) 

$\bar{b} = \overline{XZ}_1 + \overline{XZ}_2 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$ (пользуемся а)

в) очевидно. ∎

Сл-я.

1. $(\bar{0})$ – ЛЗ
2. С-ма, сод два колл. в-ра – ЛЗ.
3. С-ма, сод три комп. в-ра – ЛЗ
4. $\forall$ с-ма, сод 4 в-ра – ЛЗ.

Д-во:

1) $1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$

2) Если есть $\bar{0}$ => очев.

Пусть $\begin{matrix} \bar{v}_1 \neq \bar{0} \\ \bar{v}_2 \neq \bar{0} \end{matrix}$ => $\bar{v}_1 = \alpha \bar{v}_2$ => $\bar{v}_1 - \alpha \bar{v}_2 = \bar{0}$

3) $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ — компл.

Если $\exists i, j$: $(\bar{v}_i, \bar{v}_j)$ колл => $(\bar{v}_i, \bar{v}_j)$ — ЛЗ => $(v, v_1 v_3)$ — ЛЗ

Иначе ЛЗ по пред. утв.

4) очевидно. ▨