

Экзаменационная программа
по «Алгебре и геометрии»
(поток Штепина В.В.)

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

1. Линейные операции с векторами на плоскости и в пространстве, их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов.
2. Базис на плоскости и в пространстве, координаты вектора относительно базиса. Описание базисов на плоскости и в пространстве. Действия над векторами в координатах. Изменение координат при замене базиса.
3. Общая декартова система координат. Прямоугольная система координат. Связь между координатами направленного отрезка и координатами его конца и начала. Замена декартовой системы координат, матрица перехода. Задача о делении отрезка в данном отношении.
4. Скалярное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном и произвольном базисе. Формула для определения расстояния между точками и угла между векторами.
5. Задание ориентации на плоскости и в пространстве. Ориентированные площадь и объем (смешанное произведение). Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе.
6. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Критерии коллинеарности и компланарности векторов. Двойное векторное произведение.
7. Понятие уравнения множества. Алгебраические линии и поверхности, пересечение и объединение алгебраических линий (поверхностей). Сохранение порядка при переходе к другой системе координат.
8. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Формула для расстояния от точки до прямой в прямоугольной системе координат. Условия пересечения и параллельности двух прямых. Пучок прямых.
9. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Условие параллельности двух плоскостей. Направляющий вектор пересечения двух плоскостей. Пучок плоскостей.
10. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Формулы для расстояния от точки до плоскости и от точки до прямой в прямоугольной системе координат.
11. Эллипс. Теоремы о фокусах и директрисах эллипса.
12. Гипербола. Теоремы о фокусах и директрисах гиперболы. Асимптоты гиперболы.

13. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Теорема о фокусе и директрисе. Диаметр, сопряженный данному направлению относительно параболы.
14. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения второго порядка с двумя переменными к каноническому виду в прямоугольной системе координат. Определение типа кривой по ее инвариантам.
15. Диаметр, сопряженный данному направлению относительно эллипса или гиперболы. Сопряженные диаметры.
16. Вывод уравнения касательной к кривой второго порядка. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.
17. Центр линии (уравнения) второго порядка. Условие единственности центра.

Линейные пространства. Матрицы и определители

1. Матрицы, операции с матрицами, их свойства.
2. Понятия группы, кольца и поля. Кольцо вычетов по модулю n . Поле вычетов по простому модулю. Характеристика поля. Простое подполе.
3. Группа подстановок (перестановок). Знак подстановки. Изоморфизм групп, теорема Кэли.
4. Порядок элемента Циклические группы, их подгруппы.
5. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы и следствия из нее.
6. Поле комплексных чисел, модуль и аргумент комплексного числа.
7. Понятие линейного пространства над произвольным полем. Линейная зависимость. Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов, ее характеристика.
8. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Элементарные преобразования строк матрицы, приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду. Элементарные матрицы и их свойства.
9. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы.
10. Достаточное условие существования нетривиального решения у однородной системы линейных уравнений. Основная лемма о линейной зависимости.
11. Базис и размерность линейного пространства, их свойства. Теорема об изоморфизме.
12. Мощность конечного линейного пространства и конечного поля. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса пространства.
13. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Ранг произведения матриц.

14. Теорема о базисном миноре. Нахождение ранга с помощью элементарных преобразований. Теорема Кронекера–Капелли.
15. Невырожденные и обратимые матрицы. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.
16. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, ее характеристики.
17. Прямое дополнение подпространства. Связь между размерностями суммы и пересечения подпространств.
18. Линейные функции (функционалы). Сопряженное (двойственное) пространство, его размерность. Взаимный (биортогональный) базис, изменение координат в нем при замене базиса.
19. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему. Аннуляторные подпространства, их свойства.
20. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Их матрицы. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Критерий инъективности линейного отображения.
21. Операции над линейными отображениями и их матрицами. Изменение матриц линейного отображения и линейного преобразования при замене базисов.
22. Полилинейные и кососимметричные функции. Определитель матрицы, явное выражение определителя через элементы матрицы, задание определителя его свойствами.
23. Поведение определителя при элементарных преобразованиях. Определитель произведения матриц и транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей.
24. Решение системы линейных уравнений методом Крамера. Вычисление обратной матрицы.
25. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке/столбцу.