№20 р. 1 | Линейные от-я и линейные пр-я линейного пр-ва. Их матрицы. Ядро и образ линейного от-я, их р-ти. Критерий инъективности линейного от-я.

V, U над F

$l : V \to W$ наз-ся линейным, если

1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad l(v_1+v_2) = l(v_1) + l(v_2)$

2) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in F \quad l(\alpha v) = \alpha\, l(v)$

Отсюда $l\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i l(v_i)$

$l(0) \overset{?}{=} 0$

$l(0) = u$

$u + u = l(0) + l(0) = l(0+0) = l(0) = u.$

$\Rightarrow u = 0.$

$l(-v) = -l(v)$

Утв. $\{e_1 \ldots e_n\}$ — базис $\{u_1 \ldots u_n\}$, $u_i \in U$

с-ма из n векторов

Тогда $\exists!$ лин. $l : V \to U$: $l(e_i) = u_i$

Утв. Пусть такое l $\exists$.

Покажем, что оно единств.-е

$l(v) = l\left(\sum_{i=1}^{n} \cancel{\alpha_i} \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{u}_i$ очев ед.

Пусть теперь l: $l(e_i) = u_i$.

Д-м линейность

$l(v + v') = l(v) + l(v')$ очев.

$l(\lambda v) = \cancel{\lambda} l(v)$ очев.

Матрицы л. от.

$l(e_1) = u_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m$

$\vdots$

$l(e_n) = u_n = a_{1n} f_1 + \ldots \ldots + a_{mn} f_m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица л от}$$

$l(v) \longleftrightarrow A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, где $v_1 \ldots v_n$ — коорд.

При лин пр-ии выб-ся один и тот же базис.

$\varphi: V \to U$ - лин. от-е

Def. $\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ - ядро лин. от-я φ

Def. $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq U$ - образ φ.

Утв. $\varphi: V \to U$ инъективно $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = 0$

Д-во. $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$

$\Rightarrow$ Пусть $0 \neq v \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(v) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi$ - не инъективно

$\Leftarrow$ Пусть φ не инъективно

$\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \quad v_1 \neq v_2$

$\varphi(v_1 - v_2) = 0$

$v_1 - v_2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \neq 0$ ☒

Note. $\varphi: V \to U$

$u \in \operatorname{Im}\varphi$

$\varphi^{-1}(u) = v + \operatorname{Ker}\varphi = \{u + w \mid w \in \operatorname{Ker}\varphi\}$.

Понятно, что $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots \varphi(e_n) \rangle$

Th 1 $\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}(\operatorname{colsp} A) = \operatorname{rk} A$

Th 2 $V \xrightarrow{\varphi} U$

$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$

Д-во.

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = k \quad \operatorname{Ker}\varphi \subseteq V$

Возьмём $\{e_1 \dots e_k\}$ - базис в $\operatorname{Ker}\varphi$ и дополним до базиса в V

$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \dots = \varphi(e_k) = 0$

$\langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \operatorname{Im}\varphi$

Покажем, что $\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)$ - ЛНЗ.

$\lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0$

$\varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0 \Rightarrow \lambda_{k+1}, \dots \lambda_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n))$ - базис $\operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = n - k$

$k + n - k = n \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid A\bar{x} = \bar{0}\}$.