w1
p.1

Матрицы, операции с матрицами, их св-ва.

Def. Матрицей р-ра $m\times n$ наз-ся прямоугольная таблица $m\times n$ чисел (или других объектов) упор-х в виде m строк и n столбцов.

Def. Зафиксируем какие-то строки и столбцы. На их пересечении - подматрица A

Def. Квадратная подматрица порядка k = минор пор-ка k.

Операции:

① Сложение

$A\in M_{m\times n}$ $B\in M_{m\times n}$ $A+B\in M_{m\times n}$

$[A+B]_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

② Умножение м-цы на действ. число

$A\in M_{m\times n}$; $\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda A\in M_{m\times n}$

$[\lambda A_{ij}]=\lambda a_{ij}$

③ Транспонирование

$A\in M_{m\times n}$ $A^T\in M_{n\times m}$

$[A^T]_{ij}=a_{ji}$

④ Умножение матриц

$A\in M_{m\times n}$ $B\in M_{n\times k}$ $C=AB\in M_{m\times k}$

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}=(a_{i1}\ a_{i2}\ldots a_{in})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}$$

Св-ва операций

Сложение:

① $A+B=B+A$ коммутативность

② $(A+B)+C=A+(B+C)$ ассоциативность

③ $\exists\, O_{mn}:\forall A\in M_{m\times n}\to O+A=A+O=A$

④ $\forall A\in M_{m\times n}\ \exists -A\in M_{m\times n}: A+(-A)=(-A)+A=O$

Умножение на число

① $1 \cdot A = A$

② $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda(\mu A)$

③ $(\lambda + \mu) A = \lambda \cdot A + \mu A$

④ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Транспонирование

① $(A^T)^T = A$

② $(\lambda A^T) = \lambda A^T$

③ $(A+B)^T = A^T + B^T$

Умножение матриц

① $(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$

② $(AB)^T = B^T A^T$

③ $\exists E_{n\times n} : \forall B_{n\times m} \quad E \cdot B = B$

$\exists E_{m\times m} \ \forall A_{m\times m} \quad AB = A$

Д-во

① $[(AB)C]_{ij} = \sum_{s=1}^{k} [AB]_{is} [C]_{sj} =$ $(A \in M_{m\times n} \ B \in M_{n\times k} \ C \in M_{k\times r})$

$= \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{ts} c_{sj} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} a_{it} b_{ts} c_{sj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \sum_{s=1}^{k} b_{ts} c_{sj} =$

$= \sum_{t=1}^{n} [A]_{it} [BC]_{tj} = [A(BC)]_{ij}$ ■

② $[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} =$

$= \sum_{s=1}^{n} a_{js} \cdot b_{sj} = \sum_{s=1}^{n} b_{sj} a_{js} = \sum_{s=1}^{n} [B^T]_{is} [A^T]_{sj} = [B^T A^T]_{ij}$ ■