№11 р.1 Базис и р-ть линейного пр-ва, их св-ва. Т-а об изоморфизме

Def. Пусть V — лин пр-во над F

система $\mathcal{E} = (e_1, e_2 \dots e_n)$ наз-ся базисом в V, если

а) $\mathcal{E}$ — ЛНЗ

б) $\langle \mathcal{E} \rangle = V$ (или $\forall\, v \in V$ представляется в виде ЛК $\mathcal{E}$)

Утв. Всякое конечнопорожд. лин. пр-во имеет конечный базис.

Д-во. V — конечнопорожд.

Из всех S, порожд V, выберем ту, что имеет конечную мощность

Покажем, что выбранная с-ма ЛНЗ

От противного. Пусть S — ЛЗ

Тогда $\exists\, S_0 = \sum \alpha_i s_i$ — ост-е в-ры

$\langle S \setminus \{S_0\} \rangle = \langle S \rangle = V$?! (S — миним.)

т.е. S — ЛНЗ => S — базис. ☒

Def. Пусть L — лин. пр-во над полем F.

Число n наз-ся разм-ю L, если в L есть система из n ЛНЗ в-ров, а всякая с-ма $n+1$, сод в L — ЛЗ.

Если $\forall n \in \mathbb{N}$ в L $\exists$ с-ма из n ЛНЗ в-ров, то $\dim L = \infty$

Т-а Пусть L — конечномерное пр-во над F. Тогда $\forall$ два базиса в L содержат одинаковое число эл-в и это число совп с $\dim L$

Д-во.

а) Если в L есть два базиса, содержащих разное число векторов, то базис, сод. большее число в-ров — ЛЗ

б) Покажем, что число баз в-ров $= \dim L$

Пусть $e_1, e_2, \dots e_n$ — базис в L

$V = (v_1 \dots v_{n+1})$ — ЛЗ по основной Л *

$n = \dim L$ ☒

(*) — Основная лемма (о ЛНЗ и ЛЗ)

Пусть L — лин пр-во над F

$U = (u_1 \dots u_n)$ $V = (v_1 \dots v_m)$ v_i — ЛК в-ров из U

Если $m > n$ => V — ЛЗ. Д-во в пред. билете.

Note. Иногда р-ть пр-ва определяют как число базисных в-ров

Def. $\dim \{\bar{0}\} = 0$

Пусть L - конечномерное лин пр-во над полем F.
S - с-ма в-ров (конечная или бесконечная). Тогда ее максимальная ЛНЗ подсистема S_0 - базис в $\langle S \rangle$

Д-во,

Нужно д-ть, что $\forall$ в-р из $\langle S \rangle$ р-ся по векторам из S_0.

а) $s \in S_0$ $\quad s = 1 \cdot s$.

б) Если $s \in S \setminus S_0$. С-ма $(S_0, s) \subseteq S \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по усл-ю (S_0, s) - ЛЗ $\Rightarrow s$ пр-м в виде ЛК из S_0. ▨

Def : Пусть V и W - лин пр-ва над F

От-е $f: V \to W$ наз-ся изоморфизмом, если : а) f - биекция

б) f сохр-ет оп-ии

$\forall a, b \in V \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$

$\forall \lambda \in F \quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$

Th Пусть V - лин пр-во над F и $\dim V = n$.

Тогда $V \cong F^n$

Д-во пусть $\mathcal{E}$ - базис. $|\mathcal{E}| = n$

$V \ni a \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$

$f: V \to F^n$

В силу утв. о том, что сумме в-ров соотв сумма координат $\Rightarrow f$ - сохр оп-ии.

Инъективность:

$a \stackrel{?}{\neq} b \stackrel{?}{\Rightarrow} f(a) \neq f(b)$

$a \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad b \leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad a - b \neq \bar{0}$

$a - b \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_n - \beta_n \end{pmatrix} \neq 0$. ▨

Th (об изоморфности)

$V \cong W \Leftrightarrow \dim_F V = \dim_F W$

Д-во,

$\Rightarrow$ Пусть $\exists$ изоморфизм $f: V \to W$

$n = \dim V > \dim W = m$

$(e_1 \ldots e_n)$ - базис V.

$f(e_1), \ldots f(e_n) \in W$ - ЛЗ (т.к. $n > m$)

№11
p. 2

$\exists \lambda_1 \ldots \lambda_n : \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0 :$

$\lambda_1 \varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n (\varphi e_n) = 0$

$\varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0 \overset{\varphi\text{-биек}}{\Longrightarrow} \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \varepsilon - ЛЗ\ ?!$

$\Leftarrow$) $\dim W = \dim V$

$\varphi : V \to F^n$

$\psi : W \to F^n$ $\quad \varphi, \psi$ – изоморфизм

$\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ – изоморфизм