p.1 Группа подстановок (перестановок). Знак подстановки. Изоморфизм групп, теорема Кэли.

Def. $M_n = \{1, 2 \dots n\} = [n]$

$\forall$ р-ка эл-в в M_n, именуемая пор-док наз-ся перестановкой степени n.

$(1 \dots n)$ – тожд. пер-ка

$(n \dots 1)$ – антитожд.

Def. Б. г., что два символа α и β перестановки образуют порядок, если они идут в том же пор-ке, что и в тождественной подст-ке

Def. Б. г., что два символа обр-ют беспорядок, если они идут в том же пор-ке, что и в ~~[illegible]~~ антитожд. подстановке (обр-я тожд.)

Def. Пер-ка четная – число инверсий четное, иначе – нечетная

Утв. $\forall$ транспозиция меняет четность пер-ки

Д-во.

а) Пусть α и β – соседние сим-лы

$(* \dots * \alpha \beta * \dots *)$

$(* \dots * \beta \alpha * \dots *)$

четность м-ся

б) $(* \dots * \alpha \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s \beta * \dots *)$

$(* \dots * \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s \beta \alpha * \dots *)$

$(* \dots * \beta \gamma_1 \dots \gamma_s \alpha * \dots *)$

$2s + 1 \Rightarrow$ четность меняется $\boxtimes$

Утв. Все $n!$ пер-к степени n можно р-ть в посл-ть так, что каждая следующая пол-ся из предыдущей с помощью одной тр-ции.

Д-во.

а) $n = 2$ $(1 2)$ $(2 1)$

Пусть для $n-1$ утв спр-во.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1(\alpha_2 \dots \alpha_n) \\ \vdots \\ \alpha_1(\dots \alpha_2 \dots)\end{array}\right\}(n-1)!$$

$$\downarrow$$

$$(\alpha_1 \alpha_2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2(\dots \alpha_1 \dots) \\ \vdots \\ \alpha_2(\dots \dots)\end{array}\right\}(n-1)!$$

Так n раз $\Rightarrow n \cdot (n-1)! = n!$ ■

Сл-е $\exists$ поровну $\frac{n!}{2}$ четных и $\frac{n!}{2}$ нечетных

Оп. Всякое взаимно од-е от-е M_n на себя $f: M_n \to M_n$ | $M_n \overset{\text{def}}{=} \{1 \dots n\}$

наз-ся подстановкой ст-ни n.

$|S_n| = n!$ $\quad (f \cdot \varphi)(x) = f(\varphi(x))$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ – тожд п-ка

$(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ – транспозиция i, j

Утв Всякую п-ку степени n можно р-ть в пр-е транспозиций

Д-во

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

$(\alpha_i, \alpha_j) \cdot \alpha = (\alpha_i \alpha_j) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & j & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \alpha_j & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_i & & \alpha_n \end{pmatrix}$

Выполним такие транспозиции, чтобы нижняя стр-ка перешла в $1 \dots n$.

$\alpha = (\alpha_{i_1}, \alpha_{j_1}) \dots (\alpha_{i_s}, \alpha_{j_s}) e = (\alpha_{i_1}, \alpha_{j_1}) \dots (\alpha_{i_s}, \alpha_{j_s})$ ■

Оп. Подстановка четная, если вып-ся одно из св-в

а) Четность пер-к в верхней и нижней стр-ах од-ва

б) Суммарное число инв-сий в двух стр-к четно

в) пер-ка р-ся в пр-е четного числа транспозиций

p. 2

Def. Отоб-е

$\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\} : \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma - \text{четная} \\ -1, & \sigma - \text{нечетная} \end{cases}$

наз-ся знаком под-ки.

$inv(\sigma)$ – сумма числа инв-сий

$\tau(\sigma)$ – min число транспозиций

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)} = (-1)^{\tau(\sigma)}$

Утв. Отобр $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ – гомоморфизм

$\varepsilon(\sigma \cdot \rho) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\rho)$

$\sigma = t_1 \dots t_k \quad \rho = t_1' \dots t_l'$

$\sigma \cdot \rho = t_1 \dots t_k \cdot t_1' \dots t_l'$

$\varepsilon(\sigma \rho) = (-1)^{k+l} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho)$

Def. Пусть $\varphi : G \to G'$ гомоморфизм

$Ker\,\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e'\}$

Утв. Ядро $\forall$ гомоморфизма – подгруппа в гр-пе G.

Д-во.

$\varphi(e) = e' \Rightarrow e \in Ker\,\varphi$.

Пусть $x, y \in Ker\,\varphi$. Проверим $x * y \overset{?}{\in} Ker\,\varphi$

$\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y) = e' \Rightarrow x * y \in Ker\,\varphi$

$x^{-1} \overset{?}{\in} Ker\,\varphi$

$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = (e')^{-1} = e' \Rightarrow x^{-1} \in Ker\,\varphi$. ▯

Утв. Гомоморфизм $\varphi : G \to G'$ явл-ся изоморфизмом на нек-ю подгр-пу гр-пы G' $\Leftrightarrow$ $Ker\,\varphi = \{e\}$

Д-во.

$\Rightarrow$ $\varphi : G \to G'$ φ – изоморф.

$Ker\,\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e'\}$

$\varphi(e) = e'$

Ядро трив. т.к. φ – инъективно

$\Leftarrow$ Пусть $Ker\,\varphi = \{e\}$

Покажем, что φ – инъективно

От прот: пусть $\exists x, y$ $x \neq y$ и $\varphi(x) = \varphi(y)$

$x \neq y \Rightarrow y^{-1}x \neq e$

$f(y^{-1}x) = f(y)^{-1} f(x) = f(x)^{-1}\cdot f(x) = e' \Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{e\}$?!

Проверим, что $f(G) \leq G'$

Пусть $y_1, y_2 \in f(G)$ $\quad y_1\cdot y_2 \overset{?}{\in} f(G)$

$\exists x_1 \in G : f(x_1) = y_1$

$\exists x_2 \in G : f(x_2) = y_2$ $\quad f(x_1\cdot x_2) = y_1 y_2 \Rightarrow y_1 y_2 \in f(G)$

Пусть $y \in f(G)$ $\quad y^{-1} \overset{?}{\in} f(G)$

$\exists x \in G : f(x) = y$ $\quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = y^{-1} \Rightarrow y^{-1} \in f(G)$

Значит f биективно от-ет на $f(G) \leq G'$ ■

Def Таблица Кэли

$G = \{g_1 \dots g_n\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & g_1 & \dots \overset{j}{} & g_n \\ \hline g_1 & & & \\ i \ \vdots & \dots & g_i\cdot g_j & \\ g_n & & & \end{array}$$

T Кэли

$\forall$ конечная группа пор-ка n изоморфна некоторой подгруппе группы S_n

Д-во

$g_i \in G$

$K(g_i) = \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ g_i g_1 & \dots & g_i g_n \end{pmatrix}$

Проверим, что K - гомоморфизм из G в S_n.

$K(g_j) = \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ g_j g_1 & \dots & g_j \cdot g_n \end{pmatrix}$

$K(g_i)\cdot K(g_j) = K(g_i g_j)$

$\operatorname{Ker} K \overset{?}{=} \{e\}$

$K(g_i) = e \iff \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ g_i g_1 & \dots & g_i g_n \end{pmatrix} \iff g_i = e$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} K = \{e\} \Rightarrow K$ - инъекция

Легко п-ть, что K - сюрьекция ■