№14 р.1 | T^h о базисном миноре. Нахождение ранга с помощью ЭП. T_h Кронекера-Капелли

Пусть $A \in M_{m \times n}$

$rk\, A = r$

Def Минор k-го пор-ка — квадратная подматрица, расположенная на пересечении выбранных k строк и k столбцов.

$M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ — стр-ки / — ст-бы

Note Определитель этой подматрицы так же наз-ют минором

Def Минор $M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ — невырожденный, если $rk\left(M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}\right) = k$

Утв Если $rk\, A = r$, то в A не может быть минора порядка $> r$

Д-во

очевидное от противного ■

Def Если $rk\, A = r$, то $\forall$ её невырожд. минор пор-ка r — базисный

Th (о базисном миноре)

Пусть $rk\, A = r$. Тогда

а) В матрице A сущ-ет базисный минор

б) Всякая строка A явл-ся ЛК базисных строк

в) Всякий столбец A явл-ся ЛК базисных столбцов

г) С помощью ЭП строк и столбцов A можно привести к виду, где на месте базисного минора стоит E_r, а остальные эл-ты $= 0$

Д-во

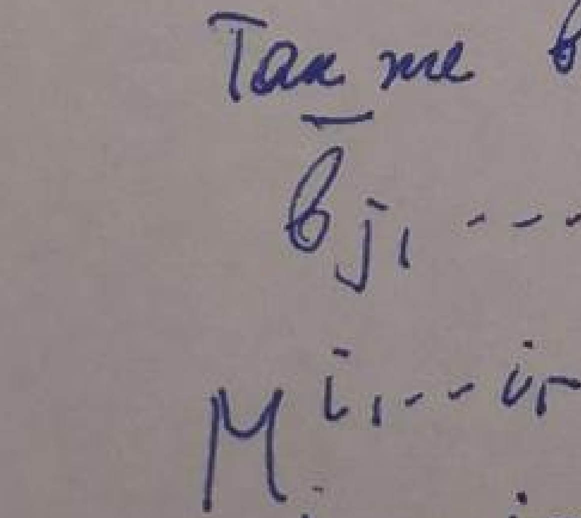
В матрице A есть r ЛНЗ строк.

$\bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2} \dots \bar{a}_{i_r}$

Так же в A найдутся r ЛНЗ столбцов

$\bar{b}_{j_1} \dots \bar{b}_{j_r}$

$M^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r}$ — базисный. Покажем это



$\bar{a} \notin M \Rightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_r \quad a = \lambda_1 \bar{a}_{i_1} + \dots + \lambda_r \bar{a}_{i_r}$

В итоге можно аннулировать строку a, применяя ЭП первого типа.

Аналогично аннулируем все такие строки.

Аналогично ст-ми аннулируем все НЕ базисные ст-бы.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Покажем, что M – невырожд.

Пусть $rk\, M < r$.

Значит столбцы этого минора ЛЗ

Т.к. при ЭП строк сохраняют зависимости между столбцами $\Rightarrow$ столбцы A, проход через M ЛЗ ?!

$\Rightarrow$ M невырожд.

Т.к. $rg\, M = r$, то его единично-диаг. вид – E. ▨

Th (Кронекера - Капелли).

Пусть система л.у. $Ax = b$.

Система совместна $\Leftrightarrow rg\, A = rg\, \tilde{A}$ $(= rg(A|b))$

Д-во.

Пусть с-ма совместна. Приведем $\tilde{A}$ к ступенчатому виду.

В соответствии с методом Гаусса система совместна $\Leftrightarrow$ нет ни одного лидера в столбце свободных членов

Тогда число ненулевых строк в $A_{ст}$ и $\tilde{A}_{ст}$ одинаковое $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow rg\, A_{ст} = rg\, \tilde{A}_{ст} \Leftrightarrow rg\, A = rg\, \tilde{A}$ ▨

Th (критерий определенности совместной СЛУ)

Совместная СЛУ является опр-й $\Leftrightarrow rg\, A =$ числу неизв.-х $= n$

Д-во.

Приведем $\tilde{A}$ к ступ. виду.

Система явл-ся опр-й $\Leftrightarrow$ все неизв гл-е $\Leftrightarrow n = rg\, A_{ст} = rg\, A$. ▨