№13 P1 | Ранг с-мы в-ров, его связь с размерностью линейной оболочки. Ранг матрицы. Т-а о ранге матрицы. Ранг пр-я матриц.

V - лин. пр-во над F

$S = (v_1, \dots v_n)$

Def $rg\, S$ - р-ть линейной оболочки, порожденной с-мой S. Т.е. $rg\, S = \dim \langle S \rangle$

Def С-мы $(a_1 \dots a_n)$ и $(b_1 \dots b_n)$ наз-ся эквивалентными, если

$\forall a_i = \sum \lambda_j b_j$ и $\forall b_i = \sum \beta_j a_j$

Т.е. $\langle a_1, \dots a_n \rangle = \langle b_1, \dots b_n \rangle$

Утв. Экв. системы имеют од. ранги.

Утв. Если над матрицей $A \in M_{m \times n}$ совершить преобр. строк, то ранг системы ее строк не изменится.

$(a_1 \dots a_n) \in F^n$

Д-во Если $\overset{\text{swap}}{\boxed{\text{I}}}$ или $\overset{\text{умн. на число}}{\boxed{\text{II}}}$ типа, то кол-во ЛНЗ строк не изменится

I тип:

$$(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_m) \xrightarrow[\bar{a}_i \to \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j]{} (\bar{a}_1 \dots (\bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j) \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_m)$$

$\bar{a}_i = 1(a_i + \lambda a_j) + (-\lambda) \cdot \bar{a}_j$

$\bar{a}_k = \bar{a}_k,\ k \neq i$

$\Rightarrow$ т.е. каждый в-р второй с-мы это ЛК в-ров первой

$\Rightarrow$ с-мы экв $\Rightarrow$ ранг не изм-ся. $\blacksquare$

Def Пространство строк матрицы A наз-ся линейная об-ка ее строк. $rowsp(A)$

Def Пространство столбцов —//— ее столбцов. $colsp(A)$

Def Ранг матрицы по строкам $rg_r(A)$ наз-ся размерность $\dim rowsp(A)$

Def —//— $rg_c(A)$ —//— $\dim colsp(A)$

Note очев, что введенные ранги являются рангами систем строк (столбцов) A.

Утв3 Если A - ступенчатая матрица, то ее ранг по строкам равен числу ненул. строк.

Д-во: $a_{1k_1} \dots a_{rk_r}$ — лидеры ступ. матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{1k_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & a_{rk_r} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_r \bar{a}_r = 0$ $\bar{a}_i$ — строка с н-ром i.

$\lambda_1 a_{1k_1} + 0 + 0 \dots + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\underset{0}{\underset{\parallel}{\lambda_1}} \underset{0}{\underset{\ne}{a_{1k_1}}} + \lambda_2 a_{2k_2} + 0 \dots + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\vdots$

$\lambda_r = 0$.

Т.о. $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1..r\} \Rightarrow$ строки $1..r$ — базис $\Rightarrow rk_r A = r$ ■

Утв: Если над матрицей совершить ЭП столбцов, то все линейные зависимости между стр-ми сохранятся

Д-во:

$\forall$ ЭП над ст-ми равносильно умножению справа на соотв элем. матрицу.

$A \to AQ$, Q — эл. м-ца

$$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m) \begin{pmatrix} \leftarrow \bar{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \bar{a}_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \bar{a}_m \rightarrow \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$\exists \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m : \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_m^2 \ne 0 : (\lambda_1 \dots \lambda_m) A = \bar{0}$

$(\lambda_1 \dots \lambda_m)(AQ) = ((\lambda_1 \dots \lambda_m) A) Q = \bar{0} \cdot Q = \bar{0}$

Note: ЭП строк сохраняют л.з. столбцов ■

Следствие: Если над матрицей совершить ЭП столбцов, то ее ранг по строкам сохранится.

Д-во:

Пусть $A_{m \times n}$ — матрица. $rk_r A = r$

Тогда существуют r ЛНЗ строк в A, а всякие $r+1$ ЛЗ.

$A \to B$

В матрице B $\forall$ $r+1$ строк ЛЗ (в силу утв), поэтому

$rk_r B \le rk_r A$

Но в силу обр-ти ЭП:

$B \to A$, $rk_r A \le rk_r B$

Значит $rk_r B = rk_r A$. ■

№13
р.2

Note, Аналогично ЭП строк не меняют $rk_s A$.

Def, Матрица $A_{m\times n}$ наз-ся единично-диагональной, если в левом верхнем углу этой матрицы расположена единичная квадр. матрица порядка r (E_r) а все ост-е эл-ты равны нулю

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Th. Всякую ненулевую матрицу можно привести к единично-диаг. виду, применяя ЭП строк и ст-цов.

Д-во, Приведем A к ступ. виду

$$\begin{array}{cccccc} k_1 & & & k_2 & & \\ 1 & \times & \times & 0 & & 0 \\ & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 \end{array}$$

С помощью столбца k_1 можно аннулировать все элем. справа от первого ст-ца, применяя ЭП столбцов I-го типа.

Повторяем для всех ненулевых строк.
После этого останется единичная подматрица, где единицы стоят в $k_1, k_2 \dots k_r$ столбцах.
Переносим ст-цы влево, получим матрицу единичного-диаг. вида. ▨

Сл-е, У всякой матрицы $A_{m\times n}$ $rk_r A = rk_s A =$ порядок E_r

Д-во, При ЭП строк и столбцов столбцовый и строковый ранги не меняются. ▨

Утв, Пусть $C = A\cdot B$
Тогда $rg\, C \le rg\, A$ и $rg\, C \le rg\, B$

Д-во, строка C явл-ся ЛК строк B с коэф из i-й строки A. Тогда лин. оболочка строк C $\subseteq$ лин. об. строк B.
Значит $rg\, C \le rg\, B$.
j-й столбец C является ЛК столбцов A с коэф из j-го столбца B $\Rightarrow rg\, C \le rg\, A$ ▨

Утв, Если B — невырожденная матрица, то
$rg\, AB = rg\, A$

Д-во, B — невырожденная $\Rightarrow$ B раскладывается в пр-е эл-х матриц $Q_1 \dots Q_s \Rightarrow$
$\Rightarrow rg\, A\cdot Q_1 \dots Q_s = rg\, A$ ▨