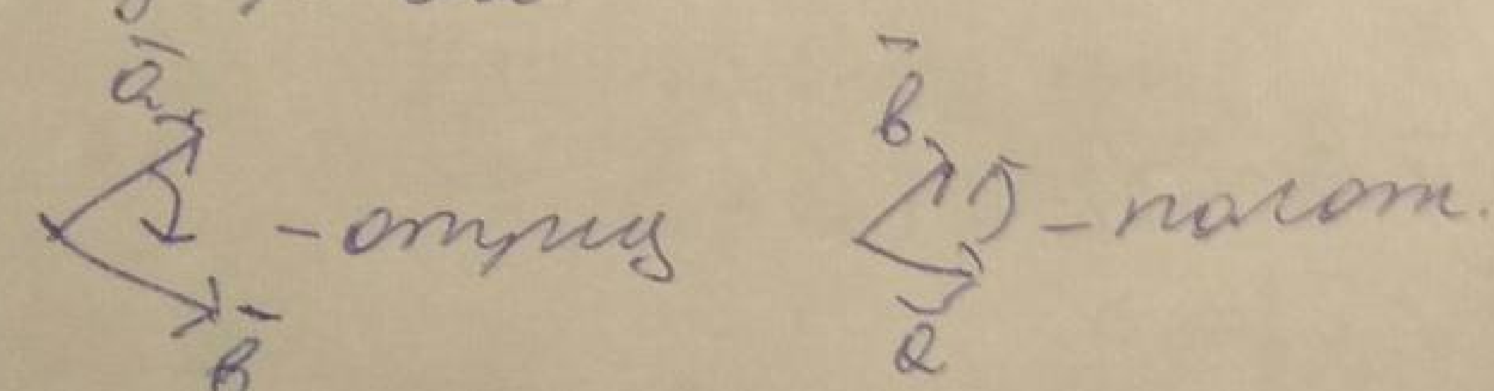
№5 р1 Задание ориентации на пл-ти и в пр-ве. Ориентированная площадь и объем (смешанное пр-е). С-ва смешанного пр-ия. Выражение см. пр-я в пр-м базисе.

$V_2(a, b)$ - базис

$V_2 \subset V_3$.

Из двух полупр-в, на которые пл-ть делит пр-во одно зафиксируем.

Def Базис $(\bar a, \bar b)$ будем наз-ть положительно ориентированным, если поворот от первого вектора ко второму совершается против часовой стрелки, если смотреть из выделенного полупр-ва.



Note Если посмотреть на в-ра из „зазеркалья", то ориентация поменяется

Note Пусть на пл-ти зафикс + ор. ОНБ и − ор ОНБ

$\Rightarrow$ $\forall$ другой ОНБ совпадет либо с одним или другим

$V_3(\bar a, \bar b, \bar c)$ - базис V_3

Def Базис $(\bar a, \bar b, \bar c)$ будем наз-ть правым если для наблюдателя, помещенного в конце $\bar c$, базис $(\bar a, \bar b)$ - полож ор.

Утв

а) В V_2 базисы (a, b) и (b, a) имеют пр-ю ориентацию

б) В V_3 $(\bar a, \bar b, \bar c)$ и $(\bar b, \bar a, \bar c)$ имеют пр-ю ориентацию

$(\bar a, \bar b, \bar c)$ и $(\bar b, \bar c, \bar a)$ - одинаковую

Д-во

а) очев из опр-я

б) ОНБ $(\bar e_1, \bar e_2 \bar e_3)$ (поворот на 120°) ■

$(\bar e_2 \bar e_3 \bar e_1)$

Def Всякую перемену местами двух базисных в-ров назовем транспозицией.

А пер-ку $(\bar a, \bar b, \bar c) \to (\bar b, \bar c, \bar a)$

$(\bar c, \bar a, \bar b)$

Сл-е. $\forall$ транспозиция меняет ориентацию, а цикл сохр-ет

Ориент. площадь и объем

Def. V_2 с фикс ор.

ориент S пары в-ров $(\bar{a}, \bar{b})$ наз-ся число

$S(a,b) = \pm S_{\square}$

Знак +/- выбирается в зависимости от ориентации $(\bar{a}, \bar{b})$

Def. V_3 с фикс. ор.

ориент $V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ наз-ся число

$V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \pm V_{\square}$

Утв. а) В-ры $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллин. $\Leftrightarrow S(\bar{a}, \bar{b}) = 0$

б) В-ры $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компл. $\Leftrightarrow V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$

Утв.

а) Пусть $\varepsilon = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ - ОНБ в V_2

Тогда $S(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \pm 1$ в з-ти от ор-ии

б) Пусть $\varepsilon = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ - ОНБ в V_3

Тогда $V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \pm 1$

Th (о св-вах ор. объема)

1. $\forall$ транспозиция меняет $V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ на противопол. число
$\forall$ цикл сохр-ет $V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

2. Аддитивность по 3-му ар-ту
$V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1 + \bar{c}_2) = V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1) + V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_2)$

3. Однородность по 3-му ар-ту
$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad V(\bar{a}, \bar{b}, \lambda\bar{c}) = \lambda V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

Д-во.

1. очев, т.к. $\forall$ транспозиция меняет ориент

2. $\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow$ очевидно (0)

Пусть $\bar{a} \nparallel \bar{b}$

$V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \overset{?}{=} S(a,b) \cdot (\bar{n}, \bar{c})$, где $\bar{n} \perp \bar{a}$ $\bar{n} \perp b$ $|\bar{n}| = 1$ и $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{n})$ - правая

$|V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = S(a,b) \cdot h = S(a,b) \cdot |\bar{c}| \cdot |\cos_{\angle \bar{c}, \bar{n}}| =$

$= S(a,b) \cdot |(\bar{n}, \bar{c})|$ Д-ли с точностью до абсолютного значения.

№5 Р3 Д-м знаки.
$v(\bar a,\bar b,\bar c)>0 \Leftrightarrow (\bar a,\bar b,\bar c)$ – правая $\Leftrightarrow \bar n$ и $\bar c$ смотрят в одно полупр-во по отн к пл-ти $\alpha \Leftrightarrow \cos\varphi>0$.

Тогда $v(\bar a,\bar b,\bar c_1+\bar c_2) = S(a,b)\cdot(\bar n,\bar c_1+\bar c_2) \underset{\text{лин. ск. пр-я}}{=} v(\bar a,\bar b,\bar c_1)+v(\bar a,\bar b,\bar c_2)$

③ Аналогично 2-му. ■

Сл-е $(\bar a,\bar b,\bar c)$ линейно по 3-му ар-ту

ТХ (о св-х ориент пл-ди)

① $S(\bar a,\bar b)=-S(\bar b,\bar a)$ кососимметричность

② Адд. по 2-му ар.
$S(\bar a,\bar b_1+\bar b_2)=S(\bar a,\bar b_1)+S(\bar a,\bar b_2)$

③ Однор по 2-му ар-ту
$S(\bar a,\lambda\bar b)=\lambda S(\bar a,\bar b)$

Сл-е S линейно по 2-му ар-ту.

Утв. Координатная запись ориент S-ди

V_2 – пл-ть с фикс ор.

ε – базис

$\bar a \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \alpha \quad b \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \beta$

Тогда $S(\bar a,\bar b)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\cdot S(\bar e_1,\bar e_2)$

Д-во.

$\bar a=\sum\alpha_i\bar e_i \quad \bar b=\sum\beta_j e_j$

$$S(\bar a,\bar b)=S\left(\sum_i\alpha_i\bar e_i,\sum_j\beta_j\bar e_j\right)=\sum_i\sum_j\alpha_i\beta_j S(\bar e_i,\bar e_j)=$$
$$=\alpha_1\beta_2 S(\bar e_1,\bar e_2)+\alpha_2\beta_1 \underset{-S(\bar e_1,\bar e_2)}{\underbrace{S(\bar e_2,\bar e_1)}}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\cdot S(\bar e_1,\bar e_2)$$ ■

Утв.

V_3 – пр-во с фикс. ор. ε – базис.

$\bar a \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \alpha \quad \bar b \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \beta \quad \bar c \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \gamma$

$$v(\bar a,\bar b,\bar c)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix} v(\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3)$$

Д-во:

$\bar a = \sum_i \alpha_i \bar e_i \quad \bar b = \sum_j \beta_j \bar e_j \quad \bar c = \sum_k \gamma_k \bar e_k$

$v(\bar a, \bar b, \bar c) = v\left(\sum_i \alpha_i \bar e_i, \sum_j \beta_j \bar e_j, \sum_k \gamma_k \bar e_k\right) =$

$= \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i \beta_j \gamma_k \, v(\bar e_i, \bar e_j, \bar e_k) = \left| \text{если } \left[\begin{matrix} i=j \\ i=k \\ k=j \end{matrix}\right. \Rightarrow =0 \right| =$

$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} v(\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$ ■

Сл-е:

В правом ОНБ

$S(\bar a, \bar b) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$

$v(\bar a, \bar b, \bar c) = \begin{vmatrix} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$

Векторное и см-е пр-е

V_3 с фикс. ор.

Def. Векторным пр-ем $[\bar a, \bar b]$ наз-ся в-р, определяемый усл-ми:

1. $[\bar a, \bar b] \perp \bar a, \bar b$
2. $|[\bar a, \bar b]| = S = |\bar a||\bar b| \cdot \sin\alpha$
3. $(\bar a, \bar b, [\bar a, \bar b])$ — правая тр-ка

T2 (о св-зи ориент объема с в-м и скалярным пр-ем)

$\forall \bar a, \bar b, \bar c \in V_3 \hookrightarrow ([\bar a, \bar b], \bar c) \overset{1}{=} v(\bar a, \bar b, \bar c) \overset{2}{=} (\bar a, [\bar b, \bar c])$

Д-во:

1. Пусть $\bar a \nparallel \bar b$ ($\bar a \parallel \bar b \Rightarrow$ равно 0)

$v(\bar a, \bar b, \bar c) = S(\bar a, \bar b) \cdot (\bar n, \bar c)$, где $\bar n$ — в-р нормали к (OAB)
$\bar n \perp \bar a, \bar b$, $|\bar n| = 1$, $(\bar a, \bar b, \bar n)$ — пр-я

$v(\bar a, \bar b, \bar c) = (S(\bar a, \bar b) \cdot \bar n, \bar c) = ([\bar a, \bar b], \bar c)$

2. $v(\bar a, \bar b, \bar c) = v(\bar b, \bar c, \bar a) = ([\bar b, \bar c], \bar a) = (\bar a, [\bar b, \bar c])$

Def. Выр-е $([\bar a, \bar b], \bar c) = (\bar a, [\bar b, \bar c])$ — смешанное пр-е

Об-ся $(\bar a, \bar b, \bar c)$

Утв. В правом ОНБ

$(\bar a, \bar b, \bar c) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

15 p3

1. $(\bar{x}, \bar{a}) = (\bar{y}, \bar{a}) \ \forall \bar{a} \in V_3$

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$

Д-во:

$(\bar{x}, \bar{a}) = (\bar{y}, \bar{a}) \Rightarrow (\bar{x} - \bar{y}, \bar{a}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} = \bar{0}$

$\bar{x} = \bar{y}$ ■

Сл-е: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{x}, \bar{c}) \ \forall c \in V_3$

Тогда $\bar{x} = [\bar{a}, \bar{b}]$

Д-во:

$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{x}, \bar{c}) \ \forall \bar{c} \overset{\text{по } 1}{\Rightarrow} \bar{x} = [\bar{a}, \bar{b}]$ ■