

12/12 Мощность конечного линейного пр-ва и конечного поля.
Р.1 Дополнение ЛНЗ с-ми векторов до базиса пр-ва

Th Пусть L -конечное л. пр-во над полем F .
Тогда любую л. нез. с-му в-ров S_0 можно
дополнить до базиса в L

Д-во,

Пусть $S = L$ $S_0 \subset S \subset S \supseteq L$ $|S_0| = k$.

Если S_0 - макс ЛНЗ \Rightarrow она базис (по Th из II сем.)

иначе $\exists S_{k+1} : (S_0, S_{k+1})$ - ЛНЗ.

$S_{k+1} \not\subset \langle S_0 \rangle \Rightarrow (S_0, S_{k+1})$ - ЛНЗ.

Если (S_0, S_{k+1}) не макс ЛНЗ \rightarrow повторить.

Придем к макс ЛНЗ, т.к. L -конечное. \square

Зам, Пусть F -конечное поле. $\text{char } F = p$

Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : |F| = p^n$.

Д-во,

В поле F \exists пр-е подполе D (лемма 2)

$D \cong \mathbb{Z}_p$ (2 лемма из II сем. - $\varphi_F, 1_F \dots (p-1)_F \in D, \mathbb{Z}_p \cong \{ \varphi_F, 1_F \dots (p-1)_F \}$)

$\Rightarrow |D| = p$. Будем рассм. F как ЛН над D .

Пусть (v_1, \dots, v_n) - базис F

$F \cong D^n$ (по Th из II сем. (лемма)) (изб. - координ. столбцы)

$|F| = |D^n| = p^n \quad \square$

Сл-е, V -л. пр-во над F . $|F| = p^n$

Тогда $|V| = p^{nm}$, где $m = \dim_F V$

Д-во,

$V \cong F^m \Rightarrow |V| = |F|^m = p^{m \cdot n} \quad \square$