

Упр. (дана сист. уравн. с линейными уравн.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \text{ и} \end{cases}$$

Если $m < n \Rightarrow \exists$ нетривиальное решение

Доказ.

Преобразуем $A \rightarrow \tilde{A}$ по стр.

$$a'_{1k_1}x_{k_1} + \dots + a'_{1k_r}x_{k_r} = b'_1 - L_1$$

$$\vdots$$

$$a'_{rk_r}x_{k_r} = b'_r - L_r$$

где L_i - л. свободных пер-х.

свободные можно считать, т.е. свободных (число строк) $< n$. **В**

Л Основная лемма (о ЛЗ ЛН)

Пусть L - л. уравн. по F

$$U = (u_1, \dots, u_n) \quad V = (v_1, \dots, v_m) \quad V_i = \lambda_i \text{ в-ров } u_1, \dots, u_n$$

Тогда если $m > n$ то $V \perp U$

Доказ. выражаем по n

$$\begin{aligned} \text{е) Если } n=1 \quad v_1 &= \lambda_1 u \\ v_2 &= \lambda_2 u \\ \vdots \\ v_m &= \lambda_m u \end{aligned}$$

$$\text{Если } \exists \lambda_i = 0 \Rightarrow V \perp U$$

Пусть все $\lambda_i \neq 0 \quad \overline{1 \dots m}$

$$\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_m = \lambda_2 \lambda_1 u - \lambda_1 \lambda_2 u = 0 \Rightarrow V \perp U$$

Д Преобразованием уравн.

Пусть у нас будет n и $|U| = n-1$

Докажем, что $|U| = n$

$$v_1 = \mu_{11}u_1 + \mu_{12}u_2 + \dots + \mu_{1n}u_n$$

!

$$\vdots$$

$$v_m = \mu_{m1}u_1 + \dots + \mu_{mn}u_n$$

Если $\mu_{11} = \mu_{21} = \dots = \mu_{m1} = 0 \Rightarrow V - \Lambda \mathbb{C}$ (по пр. $u_1 = u_1$). б.о.о. $\mu_{11} \neq 0$

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} v_1 = \lambda_{22} u_2 + \dots + \lambda_{2n} u_n$$

$$\tilde{v}_m = v_m - \frac{\mu_{m1}}{\mu_{11}} v_1 = \lambda_{m2} u_2 + \dots + \lambda_{mn} u_n$$

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_m) \quad \tilde{u} = (u_2, \dots, u_n)$$

$$|\tilde{v}| = m-1 \quad |\tilde{u}| = n-1$$

$$m-1 > n-1 \Rightarrow |\tilde{v}| - \Lambda \mathbb{C}$$

Запишем условие непр. ЛК

$$\lambda_2 \tilde{v}_2 + \dots + \lambda_m \tilde{v}_m = 0 \quad \text{и} \quad \exists \lambda_i \neq 0 \quad (\text{не все нулевые})$$

Подставим $\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_m$

$$\lambda_2 \left(v_2 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} v_1 \right) + \lambda_3 \left(v_3 - \frac{\mu_{31}}{\mu_{11}} v_1 \right) + \dots + \lambda_m \left(v_m - \frac{\mu_{m1}}{\mu_{11}} v_1 \right) = 0$$

Получим условие ЛК в-ров v_1, \dots, v_m равное 0