№19 р.1 Канонический изоморфизм пр-ва и дважды сопряженного к нему. Аннуляторные подпр-ва, их св-ва

Def: Пусть V - лин. пр-во над F.

Тогда $(V^*)^* = V^{**}$ наз-ся вторым сопр. пр-м пр-ву V

Утв. (об изоморфизме $V \cong V^*$)

Пусть $\varphi: V \to V^{**}$

$\varphi(x) = x^{**}$, где x^{**} - ф-я из V^{**}

$x^{**}(f) = f(x)$

Тогда:

а) x^{**} - для функционал на V^*

б) $\varphi: V \to V^{**}$ φ - изоморфизм

Д-во

а) $x^{**}(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^{**} f_1(x) + x^{**}(f_2)$

$x^{**}(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot x^{**}(f)$

б) Проверим, что φ сохраняет операции

„+" $\varphi(x+y) \overset{?}{=} \varphi(x) + \varphi(y)$

$\varphi(x+y) = (x+y)^{**} \overset{?}{=} x^{**} + y^{**}$

$\forall f \in V^*$: $(x+y)^{**}(f) = f(x) + f(y)$

$(x^{**} + y^{**})(f) = f(x) + f(y)$

„*" $\varphi(\lambda x) \overset{?}{=} \lambda \varphi(x)$

$(\lambda x)^{**}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\lambda x^{**}(f) = \lambda f(x)$

Проверим, что φ биективно

$(e_1 \dots e_n)$ - базис в V

$(e_1^{**} \dots e_n^{**})$ - базис в V^{**}, причем двойств к ε, т.к.

$e_i^{**}(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(e_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$x = \sum x_i e_i \xrightarrow{**} \sum x_i e_i^{**}$

При от-ии $(**)$ каждый в-р имевший

коорд $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ будет иметь такие же коорд в e^{**} ▨

Сл-е 1, Можно отождествлять (при $\dim V < \infty$) пр-во V с пр-вом V^{**}

Сл-е 2, Пусть $(f_1 \dots f_n)$ — базис в V^*. Тогда он явл-ся двойственным к некоторому базису пр-ва V.

Д-во,

Пусть в V^{**} $(e_1^{**} \dots e_n^{**})$ — базис, двойственный к $(f_1 \dots f_n)$. В силу отождд. V и V^{**} $(e_1 \dots e_n)$ — двойственный к $(f_1 \dots f_n)$. ■

Аннуляторы

V — пр-во над F

$U \subseteq V$

Оп, $\{f \in V^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in U\}$ — аннулятор U.

Оп, Пусть W подпр-во в V^*

$\{x \in V \mid f(x) = 0 \ \forall f \in W\}$ — аннулятор подпр-ва W.

Об-е, $\operatorname{Ann} U$ или U^0

Тх (св-ва аннулятора)

а) $\forall U \subseteq V$ его аннулятор $U^0 \subseteq V^*$

б) $\dim U^0 = \dim V - \dim U$

Д-во,

а) $f_1, f_2 \in U^0$

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0 + 0 = 0$

отн. умножения очев.

б) Пусть $(e_1 \dots e_n)$ — базис V, где $(e_1 \dots e_k)$ — базис U

Пусть ε — взаимный базис к e

$U^0 \overset{?}{=} \langle \varepsilon_{k+1} \dots \varepsilon_n \rangle$ — очевидно ЛНЗ.

$f \in U^0 \overset{?}{\Rightarrow} f = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \beta_i \varepsilon_i$

$f = (\beta_1 \dots \beta_n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$

$j \in \overline{1,k}$ $f(e_j) = (\beta_1 \dots \beta_n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1(e_j) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(e_j) \end{pmatrix} = \beta_j = 0$

Сл-е, $\forall U \subseteq V \ \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} U) = U$.

Д-во, $U \subset \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} U)$, т.к.

$\operatorname{Ann} U = \{l \in V^* \mid l(u) = 0 \ \forall u \in U\} \subset V^*$

$\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = \{v \in V \mid l(v) = 0 \ \forall l \in \operatorname{Ann} U\} \subset V$

$u \in U \to \forall l \in \operatorname{Ann} U \ l(u) = 0 \Rightarrow u \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} U)$

W19 p.2 Тогда $\dim Ann(Ann\,U) = \underset{\dim V}{\dim V^*} - \underbrace{(\dim V - \dim U)}_{\dim Ann\,U} =$

$= \dim U$

Поэтому $U = Ann\,Ann(U)$ ☒

Сл-е. $\forall$ подпр-во U в V явл-ся аннулятором некоторого подпр-ва V^* (а именно $Ann\,U$).

Т2. $U \rightleftarrows Ann\,U$ — биекция между подпр-ми V и V^*. Она обращает включение ($U \subset W \Leftrightarrow Ann\,U \supset Ann\,W$), переводит Σ подпр-в в $\cap$, а $\cap$ в Σ.

Д-во. $S(V)$ — мн-во всех подпр-в в V.

$$U \mapsto Ann\,U$$
$$S(V) \longrightarrow S(V^*)$$
$$Ann\,W \leftarrow W$$

$\left.\begin{array}{l} Ann(Ann\,U) = U \\ Ann(Ann\,W) = W \end{array}\right| \Rightarrow$ от-я биективны

$U \leq W\ (\leq V)$

$Ann\,W \leq Ann\,U$ (по опр-ю)

$Ann\,W \leq Ann\,U$

$Ann\,Ann\,U \leq Ann\,Ann\,W$

$\Downarrow$

$U \leq W$

U_j — набор подпр-в V

$\bigcap\limits_j Ann\,U_j \overset{?}{=} Ann(\sum\limits_j U_j)$ (1)

$f \in \bigcap\limits_j Ann\,U_j \Rightarrow \forall \gamma\ f \in Ann\,U_\gamma \Rightarrow f|_{U_j} \underset{\forall \gamma}{=} 0 \Rightarrow f|\sum\limits_\gamma U_\gamma = 0$

$\Rightarrow f \in Ann(\sum\limits_\gamma U_\gamma)$

Note. $f|_{U_j}$ значит $\forall u \in U_j$

$Ann \bigcap\limits_j U_j \overset{?}{=} \sum\limits_j (Ann\,U_j)$

$U_j = Ann\,W_j \Leftrightarrow Ann\,U_j = W_j$

из (1) $\Rightarrow Ann(\bigcap\limits_j Ann\,W_j)) = \sum\limits_j W_j = \sum\limits_j Ann\,U_j$. ☒