№1. Плоскость в пр-ве, различные способы задания, их эквивалентность. р1. Условие параллельности двух пл-тей. Направляющий в-р пересечения двух пл-тей. Пучок пл-тей

Пл-ть в пр-ве

В V_3 задана ДСК $(O, \mathcal{E})$

Пл-ть в пр-ве однозначно задается точкой X_0 и $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ $\quad \bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$

Если $X(x,y,z) \in \pi$, то $\overline{X_0X}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ компланарны

$\overline{X_0X} = s\bar{a} + t\bar{b}$

Def. $\bar{r} - \bar{r}_0 = s\bar{a} + t\bar{b}$ – векторное ур-е пл-ти

$\bar{a} \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{b} \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = x_0 + s\alpha_1 + t\beta_1 \\ y = y_0 + s\alpha_2 + t\beta_2 \\ z = z_0 + s\alpha_3 + t\beta_3 \end{cases}$$ – коорд. пар-е ур-е пл-ти

$(\overline{X_0X}, \bar{a}, \bar{b}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \underset{\neq 0}{V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = 0$$

Раскроем опр-тель.

Def. $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.
– общее ур-е пл-ти

Утв. Пусть $X_0 \in \pi$, π задана общим ур-ем.
Тогда $X \in \pi \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Сл-е. Пусть π задана общим ур-ем. Тогда вектор $\bar{c}$ с коорд. (α, β, γ) параллелен пл-ти $\Leftrightarrow A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

Д-во.
$\bar{c} = \overline{X_0X}$ $\quad \bar{c} \parallel \pi \Leftrightarrow X \in \pi \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
$\Leftrightarrow A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. ☐

Note. В-ры $\begin{pmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$ $\quad A \neq 0$ можно взять за напр. в-ры пл-ти.

$c \parallel \bar{\pi} \Rightarrow A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \Leftrightarrow (\bar{n}, \bar{c}) = 0$

$\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

Утв: В-р $\bar{n}$, имеющий в ПДСК коорд $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ перпенд. пл-ти π.

Опр: $\bar{n}$ – в-р нормали

Пусть (O, ε) – ДСК

$Ax + By + Cz + D = 0$

Опр: $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ – соп. в-р в данной ДСК.

Утв (O, ε) – ДСК.

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

а) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$

б) π_1 совп с $\pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

Д-во:

а) Пусть ур-я пропорц. $\Rightarrow$ реш. одинаковые $\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1$ совп с π_2

б) Пусть ур-я , но $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$

$A_2 = \lambda A_1$

$B_2 = \lambda B_1$ но $D_2 \neq \lambda D_1$

$C_2 = \lambda C_1$

$\pi_2 : \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \underset{\neq 0}{(D_2 - \lambda D_1)} = 0$

Легко увидеть, что в этом сл-е π_1 и π_2 не имеют общих корней (иначе $D_2 = \lambda D_1$) $\Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

в) Пусть $n_1 \nparallel n_2$

Пусть $A_1 \neq 0$

$\frac{A_2}{A_1} = \lambda$ Тогда хотя бы одно из ~~отношений~~ $\frac{B_2}{B_1}$ или $\frac{C_2}{C_1} \neq \lambda$

Б.О.О. $\frac{B_2}{B_1} \neq \lambda \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ неколл.

Пусть $z = z_0$

№9 Б2

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z_0+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z_0+D_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по Тк Крамера $\exists!$ реш. $(x_0\ y_0\ z_0) \Rightarrow \pi_1$ и π_2 непарал.

В то же время π_1 и π_2 не совпадают, т.к. если бы они совп, то совп их перес. с z_0, а $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ ▣

Пересечение пл-тей

Утв. ДСК (O, E)

π_1 и π_2 перес. по прямой l

$\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$

Тогда напр. в-р $\bar{c}$ для l

$$\bar{c} \underset{E}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Д-во. $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2 \Rightarrow \bar{c} \neq \bar{0}$

иначе все опр 2×2 равны $0 \Rightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$

$$A_i\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_i\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_i\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \bar{c}$ лежит и в π_1 и в π_2 ▣

Пучок и св-ка пл-тей

$(\bar{r}-\bar{r}_0, \bar{n}) = \bar{0}$

Опр. Пучок перес. пл-тей наз-ся совокупность всех пл-тей, проход через фик пр-ю

Опр. Пучок парал. пл-ей наз-ся сов-ть всех пл-й в пр-ве, параллельных д.х пл-ти

Note $\forall$ две пл-ти в пр-ве всегда опред пучок.

Тк Пучок, порожденный разл. пл-ми p_1 и p_2 состоит в точности из тех пл-тей, ур-я которых могут быть записаны в виде

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) = 0, \text{ где } f_i(x,y,z) = A_ix+B_iy+C_iz+D_i$$