№25 p.1

Миноры и их алг. доп-я. Тк о пр-ии минора на его алг. доп-е. Тк Лапласа. Р-е определителя по строке / столбцу.

Df. Пусть $A \in M_{n\times n}(F)$

Выберем k строк и ст-бцов $i_1 \dots i_k$ – строки

$j_1 \dots j_k$ – столбцы

На их пересечении – кв. подматрица – минор пор-ка k

$M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$

Df. Вычеркнем выбранные k строк и ст-в.

Оставшаяся подматрица – доп. минор к минору $M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$

$\overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$

Df. Алгебраическим доп-ем минору $M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ наз-ся

число, равное $A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \cdot \overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$

Тк (о пр-ии минора на его алг. доп-е)

Пусть $A \in M_{n\times n}(F)$ и $D = \det A$.

$M = M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$. Тогда:

а) Пр-е $\forall$ слагаемого минора M на $\forall$ сл-емое его алг. доп-я A есть слагаемое D (с нужным знаком)

б) Пр-е MA состоит из $k!(n-k)!$ сл-емых D

Д-во.

$$A^0 = \left(\begin{array}{c|c|c} m & 0 & m \\ \hline 0 & M & 0 \\ \hline m & 0 & m \end{array}\right)$$

Очевидно, что всякое слагаемое в составе $\det A^0$ будет входить в состав $\det A$

Покажем, что $M \cdot A = \det A^0$, где A – алг. доп-е.

Выполним такие преобр-я над A^0, при которых M переместится в верхний угол (левый). Эл-ты M при этом не изм-ся.

Строку i_1 в A_0 поменяем с $i_1 - 1, i_1 - 2 \dots 1$

пока i_1 не встанет на 1 | – $i_1 - 1$ преобр-й

⋮

для i_k $i_k - k$ пр-й.

$$i_1 - 1 + i_2 - 2 + \dots + i_k - k = \sum_{l=1}^{k} i_l - \frac{k(k+1)}{2} \text{ – общее кол-во}$$

для столбцов так же $\sum_{l=1}^{k} j_l - \frac{k(k+1)}{2}$

Получим $A' = \begin{pmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{pmatrix}$ k' $k' = n-k$

$\det A' = M \cdot \bar{M}$

$\det A^0 = (-1)^{\sum_{l=1}^{k} i_l + \sum_{l=1}^{k} j_l - k(k+1)} \det A' = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det A'$

$\det A' = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det A^0 \Rightarrow \det A^0 = M \cdot \bar{M} \cdot (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} =$

$= M \cdot A$ ☒

Тк (Лапласа)

Пусть $A \in M_{n \times n}(F)$ $D = \det A$

Задим в A пр-е k строк. $i_1 \dots i_k$

Тогда

$$\sum_{\substack{j_1 \dots j_k \\ 1 \le j_1 < j_2 \dots < j_k \le n}} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} = D$$

Д-во,

$k!(n-k)!$ слаг. в каждом пр-ии | $\Rightarrow$ $n!$ сл-емых всего

C_n^k кол. во строк | попарно разл

каждое входит в D ☒

Сл-е, Задик i-ю строку в A

$a_{ij} = M_j^i$

$A_j^i = (-1)^{i+j} \cdot \bar{M}_j^i$ $\quad \left(A_j^i \overset{def}{=} A_{ij} \right)$

По Тк Лапласа

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = D \text{ — р-е по } i\text{-й строке}$$

Note, Аналогично для столбца