№7 Р.1 Понятие линейного пр-ва над произвольным полем. Линейная зависимость. Подпр-во линейного пр-ва. Линейная ~~оболочка с-мы векторов~~, ее характеризация

F - поле. Линейным пр-вом (векторным пр-м) над полем F наз-ся мн-во V с опр-м на нем оп-ми:

① Сложение эл-в из V (т.е $\forall a, b \in V \to a+b \in V$)

② Умножение эл-в из V на числа из поля F (т.е. $\forall \, \xi \in F \; \forall a \in V \to \xi \cdot a \in V$)

Аксиомы 1-4 $(V, +)$ - абелева гр. с нейтр эл-м 0

⑤ ~~Унитарность~~ $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$

⑥ ассоциативность относ. скал. пр-я $(\lambda\mu) a = \lambda (\mu a)$ $\forall \lambda, \mu \in F, \forall a \in V$

⑦ дистрибутивность скал мн-ля $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$

⑧ дистр. относ. в-го мн-ля $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.

Note, эл-ты $\forall$ линейного пр-ва независимо от их природы приемлемо наз-ть в-рами

Df, $\bar{0}$ - нулевой вектор ($\exists!$ 0, т.к. нейтральный эл-т группы)

$\forall a \in V \; \exists (-a) \in V : a + (-a) = \bar{0}$

Note, Если K - подполе F, то F - лин пр-во над K.

Понятие лин з-ти и лин нез-ти

V - лин пр-во над F

Df, с-ма в-ров $a_1 \ldots a_n \in V$ наз-ся лин зависимой над F, если $\exists \lambda_1 \ldots \lambda_n$, где $\exists \lambda_i \neq 0 : \sum \lambda_i a_i = 0$

Df, с-ма в-ров $a_1 \ldots a_n \in V$ наз-ся лин. нез. над F, если $\sum\limits_{\lambda_i \in F} \lambda_i a_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Утв а) Если с-ма $(a_1, \ldots a_n)$ - ЛЗ, то всякая ее надсистема ЛЗ

б) Если с-ма $(a_1, \ldots a_n)$ - ЛНЗ, то $\forall$ ее подсист-ма ЛНЗ

Утв, Если с-ма $(a_1, \ldots a_n)$ - ЛНЗ, а $(a_1, \ldots a_n, b)$ - ЛЗ, то b пр-м ЛК $(a_1 \ldots a_n)$

Пусть V – лин. пр-во над полем F.
Непустое подпр-во $W \subset V$ наз-ся подпр-м V, если оно само лин. пр-во отн. „+" и „·" из V

Утв. Пусть $W \leq V$. Тогда

а) $0_V = 0_W$

б) Если $w \in W$, то $-w_V \in W$

Д-во.

а) Следует из того, что нейтральный эл-т подгруппы – нейтральный эл-т группы.

б) Пусть $-w_W$ – против. к w из W.

$V \ni -w_V = -w_W + w - w_V = -w_W + \bar{0} = -w_W \in W$ ∎

Утв. (критерий подпр-ва)

V – лин. пр-во над F. $W \neq \varnothing : W \subset V$.

W – подпр-во V, если

а) $\forall a, b \in W \hookrightarrow a + b \in W$

б) $\forall a \in W \ \forall \lambda \in F \hookrightarrow \lambda a \in W$

Д-во.

$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ $a \in W$

$-a = (-1)a \Leftarrow a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0 \cdot a = \bar{0}$

$(-1)a \in W \Rightarrow -a \in W \overset{а)}{\Longrightarrow} a + (-a) = \bar{0} \in W$ ∎

Все акс-мы вып. в W, т.к. вып. в V.

Note. Иногда усл-я а) б) принимают за опр-е подпр-ва

Линейная оболочка

S – с-ма в-ров в V над F

Опр. Линейной оболочкой сист. S наз-ся наименьшее по включению подпр-во V, содержащее с-му S

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{W \leq V \\ S \subseteq W}} W$$

Утв. $\langle S \rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \mid \lambda_i \in F, s_i \in S, n \in \mathbb{N} \}$

№7 p. 2

Д-во.

пусть $U = \{\sum \alpha_i s_i\}$

а) покажем, что $U \supseteq S$

$\forall s \in S \quad \underset{P}{\underset{\cap}{1}} \cdot s = s \in U$

б) покажем, что $U \subseteq V$

$$\left.\begin{array}{l} \sum \alpha_i s_i + \sum \beta_i s_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) s_i \in V \\ \lambda \sum \alpha_i s_i = \sum \lambda \alpha_i s_i \in V \end{array}\right| \Rightarrow U \subseteq V$$

Осталось проверить, что если $\exists\, U' \subseteq V$ сод S,

то $U \subseteq U'$

Пусть ЛК вида $\sum \alpha_i s_i$ – произв. эл-т из U.

$\sum \alpha_i s_i \in U'$, т.к. U' замкн. отн. пр.я. на число и слож $\Rightarrow U \subseteq U'$ ∎