№4 р.1 | Скалярное произведение, его св-ва, выражение в ортонорм. и пр-ном базисе. Ф-ла для опр-я расс-ния между т-ми и угла между в-ми

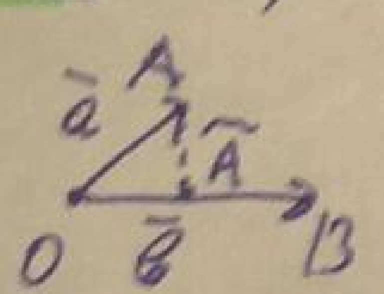
Def. Скалярным пр-м в-ров $\bar a$ и $\bar b$ наз-ся число, равное $|\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\cos\alpha$

Def. $\bar a$ и $\bar b$ ортогональны $\Leftrightarrow (\bar a,\bar b)=0$

Св-во (полож. опр-сть ск-го пр-я)

$(\bar a,\bar a)=|\bar a|^2\geq 0$, $(\bar a,\bar a)=0 \Leftrightarrow \bar a=\bar 0$

Def. $\bar a,\bar b\neq 0$



$pr_{\bar b}\bar a \overset{def}{=} O\tilde A$, где $\tilde A$ - пр-я A на $\overline{OB}$

Утв. $(\bar a,\bar b)=(pr_{\bar b}\bar a,\bar b)$, $\bar b\neq 0$

Д-во. $\cos\alpha=0$ - очев $\Rightarrow \cos\alpha\neq 0$

$|pr_{\bar b}\bar a|=|\bar a||\cos\alpha|$

$(pr_{\bar b}\bar a,\bar b)=|pr_{\bar b}\bar a||\bar b|(\pm1)=\begin{cases}|pr_{\bar b}\bar a||\bar b|, & pr\uparrow\uparrow\bar b\\ -|pr_{\bar b}\bar a||\bar b|, & pr\uparrow\downarrow\bar b\end{cases}$

$=\begin{cases}|a||b||\cos\alpha|, & pr_{\bar b}\bar a\uparrow\uparrow\bar b \Leftrightarrow \cos\alpha>0\\ -|a||b||\cos\alpha|, & pr_{\bar b}\bar a\uparrow\downarrow\bar b \Leftrightarrow \cos\alpha<0\end{cases}$

$=|\bar a||\bar b|\cos\alpha=(\bar a,\bar b)$ ■

Утв. $\bar b\neq 0$

$pr_{\bar b}\bar a=\frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar b|^2}\cdot\bar b$

Д-во.

$pr_{\bar b}\bar a=\lambda\cdot\bar b$

$(\bar a\bar b)=(pr_{\bar b}\bar a,\bar b)=(\lambda\bar b,\bar b)=\lambda|\bar b|^2 \Rightarrow \lambda=\frac{(\bar a,\bar b)}{\bar b^2}$ ■

Th (о св-х ск-го пр-я)

1. $(\bar a,\bar b)=(\bar b,\bar a)$ - симметричность

лин. по 1-му ар-ту:

2. $(\bar a_1+\bar a_2,\bar b)=(\bar a_1,\bar b)+(\bar a_2,\bar b)$ аддитивность по 1-му ар-ту
3. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $(\lambda\bar a,\bar b)=\lambda(\bar a,\bar b)$ однородность по 1-му ар-ту

Д-во.

1. $(\bar a,\bar b)=|\bar a||\bar b|\cos\alpha=|\bar b||\bar a|\cos\alpha=(\bar b,\bar a)$

3. $(\lambda\bar a,\bar b)=(pr_{\bar b}(\lambda\bar a),\bar b)=(\lambda\cdot pr_{\bar b}\bar a,\bar b)=|\lambda||pr_{\bar b}\bar a||\bar b|\cdot\cos\alpha=$

$=\begin{cases}|\lambda||pr_{\bar b}\bar a||\bar b|\cdot\cos\alpha, & \lambda>0\\ -|\lambda||pr_{\bar b}\bar a||\bar b|\cdot\cos\alpha, & \lambda<0\end{cases}=\lambda|pr_{\bar b}\bar a||\bar b|\cos\alpha=\lambda(\bar a,\bar b)$

② $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}) \overset{?}{=} (\bar{a}_1, \bar{b}) + (\bar{a}_2, \bar{b})$

$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}) = (pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2), \bar{b}) = (pr_{\bar{b}}\bar{a}_1 + pr_{\bar{b}}\bar{a}_2, \bar{b}) \ominus$

Пусть $pr_{\bar{b}}\bar{a}_1 = \lambda_1 \bar{b}$

$pr_{\bar{b}}\bar{a}_2 = \lambda_2 \bar{b}$

$\ominus (\lambda_1 \bar{b} + \lambda_2 \bar{b}, \bar{b}) = (\lambda_1 + \lambda_2)|\bar{b}|^2 = \lambda_1(\bar{b}, \bar{b}) + \lambda_2(\bar{b}, \bar{b}) =$

$= (\lambda_1 \bar{b}, \bar{b}) + (\lambda_2 \bar{b}, \bar{b}) = (pr_{\bar{b}}\bar{a}_1, \bar{b}) + (pr_{\bar{b}}\bar{a}_2, \bar{b}) = (\bar{a}_1, \bar{b}) + (\bar{a}_2, \bar{b})$ ■

Утв. Пусть (O, ε) – ПДСК

$\bar{a} \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \alpha \quad b \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \beta$

Тогда $(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha^T \cdot \beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$

Д-во.

$(\bar{a}, \bar{b}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{e}_j\right) \overset{бил}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (\bar{e}_i \bar{e}_j) =$

$\overset{ПДСК}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$ ■

Опр. ε-базис в V

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1 \bar{e}_1) & \dots & (\bar{e}_1 \bar{e}_n) \\ \vdots & & \\ (\bar{e}_n \bar{e}_1) & \dots & (\bar{e}_n \bar{e}_n) \end{pmatrix}$$ – м-ца Грама

Th $\forall$ ДСК (O, ε) и Γ_ε

$(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha^T \Gamma \beta$

Д-во.

$(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \Gamma_{ij} \beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij} \beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\Gamma\beta)_i = \alpha^T \Gamma \beta$ ■

Утв. В ОНБ р-е между т-ми вычисляется по ф-ле:

$A \underset{(O, \varepsilon)}{\longleftrightarrow} \alpha \quad B \underset{(O, \varepsilon)}{\longleftrightarrow} \beta$

$\rho(A, B) = \sqrt{\sum (\beta_i - \alpha_i)^2}$

Утв. В ОНБ угол выч. по ф-ле.

$\cos\alpha = \dfrac{(a, b)}{\sqrt{(a, a)(b, b)}} = \dfrac{\sum \alpha_i \beta_i}{\sqrt{(\sum \alpha_i^2 \cdot \sum \beta_i^2}}$