ROAR II

Ricerca Operativa: Applicazione Reali

Alessandro Gobbi   Alice Raffaele   Gabriella Colajanni   Eugenia Taranto

IIS Antonietti, Iseo (BS)

29 gennaio 2022

Introduzione

Chi siamo e i nostri contatti

Alessandro Gobbi (UniBS)
alessandro.gobbi@unibs.it

Alice Raffaele (UniVR)
alice.raffaele@univr.it

Gabriella Colajanni (UniCT)
colajanni@dmi.unict.it

Eugenia Taranto (UniCT)
eugenia.taranto@unict.it

Sondaggio iniziale

Mentimeter

www.menti.com – Codice: **8978 2153**

Parte 1

Un problema che avete già visto...

Trasporto di acqua minerale

Un'industria di acque minerali ha tre stabilimenti (Viterbo, Castelforte e Bagnoregio) e tre impianti di imbottigliamento (Napoli, Roma e Frosinone). L'industria ha la necessità di trasportare giornalmente l'acqua minerale dagli stabilimenti ai tre impianti di imbottigliamento che devono essere riforniti giornalmente rispettivamente di almeno 150, 50 e 90 ettolitri di acqua. Gli stabilimenti giornalmente possono disporre di 145, 120 e 90 ettolitri ciascuno. La tabella che segue riporta il costo (in euro) per trasportare un ettolitro di acqua minerale da ciascuno stabilimento a ciascun impianto di imbottigliamento.

	Napoli	Roma	Frosinone
Viterbo	250	100	85
Castelforte	120	80	150
Bagnoregio	100	100	100

L'industria vuole determinare le quantità di acqua minerale da trasportare giornalmente da ciascuno stabilimento a ciascun impianto in modo da minimizzare il costo complessivo di trasporto.

Modello matematico di Programmazione Lineare

$$\min \quad 250x_{VN}+100x_{VR}+85x_{VF}+120x_{CN}+80x_{CR}+150x_{CF}+100x_{BN}+100x_{BR}+100x_{BF}$$

$$x_{VN}+x_{VR}+x_{VF} \leq 145$$

$$x_{CN}+x_{CR}+x_{CF} \leq 120$$

$$x_{BN}+x_{BR}+x_{BF} \leq 90$$

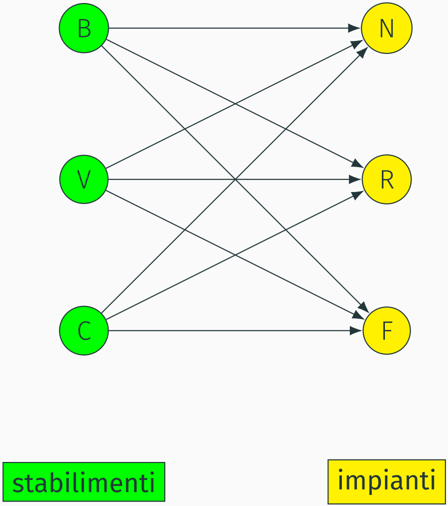
$$x_{VN}+x_{CN}+x_{BN} \geq 150$$

$$x_{VR}+x_{CR}+x_{BR} \geq 50$$

$$x_{VF}+x_{CF}+x_{BF} \geq 90$$

$$x_{VN}, x_{VR}, x_{VF}, x_{CN}, x_{CR}, x_{CF}, x_{BN}, x_{BR}, x_{BF} \geq 0$$

Un grafo particolare detto *bipartito*



Proprietà ed esempi

In un **grafo bipartito**:

- tipicamente, non tutti i vertici in V rappresentano la stessa tipologia di entità (per esempio, stabilimenti/impianti);
- è possibile suddividere l'ìnsieme di vertici in **due** diversi sottoinsiemi $A \subset V$ e $B \subset V$, dove tutti i vertici in A e B rappresentano rispettivamente due diverse identità;
- tutti i lati/archi del grafo uniscono un vertice che appartiene ad A con un vertice appartenente a B (= non ci sono lati/archi che collegano due nodi apaprtenenti allo stesso sottoinsieme).

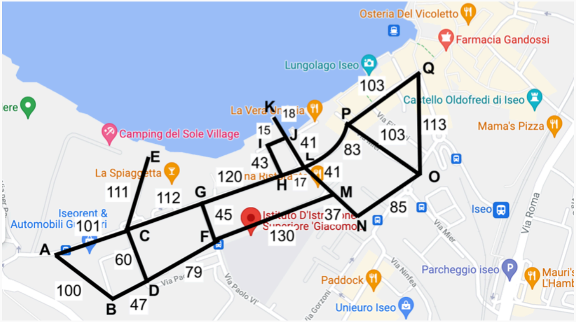
Possibili altri esempi di grafi bipartiti:

- relazioni tra professori e classi in cui insegnano;
- relazioni tra persone e libri presi in prestito alla biblioteca.

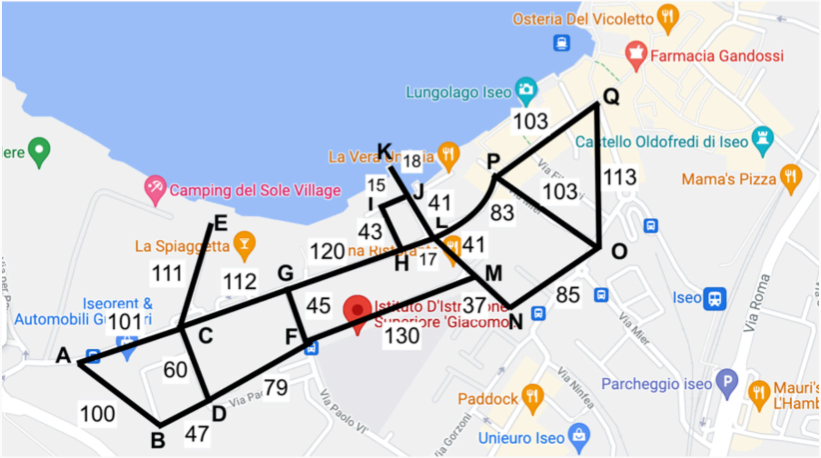
Parte 2

Un problema di... connessione

A Iseo, buona parte delle abitazioni e degli edifici sono raggiunti con la fibra ottica. Tuttavia, nella zona rappresentata nella mappa, ci sono alcuni edifici pubblici del Comune (indicati con le lettere dalla A alla Q) che non sono ancora stati coperti. Sapendo che la ditta incaricata dal Comune di Iseo chiede, per ogni metro di fibra ottica, 5 euro, in quali strade andrà posata la fibra ottica in modo da minimizzare la spesa totale sostenuta dal Comune?

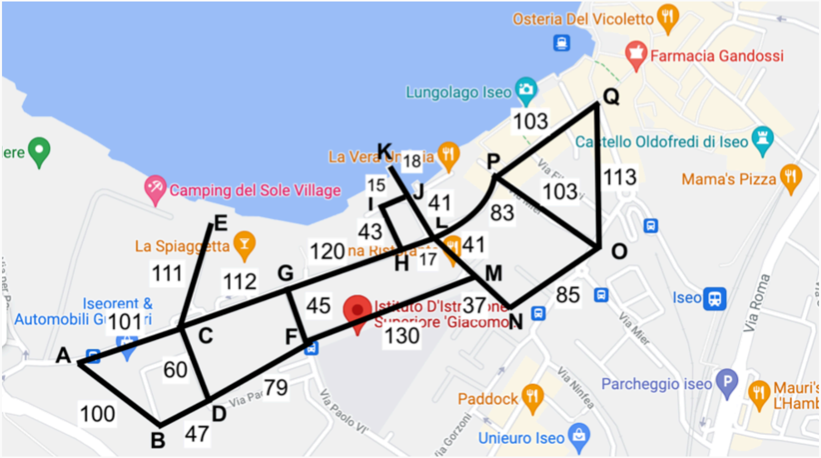


Ragioniamo un po' sul grafo



Grafo indiretto e pesato, con 17 vertici e 22 lati.

Proviamo a costruire delle soluzioni



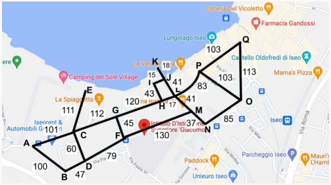
Cosa stiamo effettivamente cercando in questo grafo?

L'algoritmo di Kruskal

Dato un grafo indiretto pesato con n vertici e m lati:

1. *ordiniamo i lati in base al peso in ordine crescente;*
2. *dalla lista ordinata ottenuta, selezioniamo i primi $n - 1$ lati tali da non formare nessun* **ciclo**.

Applicando Kruskal al nostro problema di cavi di fibra ottica...

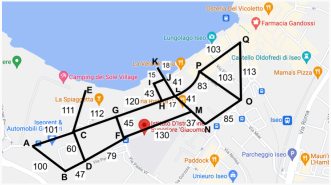


Dato un grafo indiretto pesato con 17 vertici e 22 lati:

1. *ordiniamo i lati in base al peso in ordine crescente:*

(I, J)	15	(F, G)	45	(O, P)	103
(H, L)	17	(B, D)	47	(P, Q)	103
(J, K)	18	(C, D)	60	(C, E)	111
(M, N)	37	(D, F)	79	(C, G)	112
(J, L)	41	(N, O)	85	(O, Q)	113
(L, M)	41	(A, B)	100	(G, H)	120
(H, I)	43	(A, C)	101	(F, M)	130

Applicando Kruskal al nostro grafo di cavi di fibra ottica...



Dato il nostro grafo indiretto pesato con 17 vertici e 22 lati:

2. *dalla lista ordinata, selezioniamo i primi $n-1$ lati tali da non formare nessun* ***ciclo****:*

(I, J)	15	(F, G)	45	(O, P)	103
(H, L)	17	(B, D)	47	(P, Q)	103
(J, K)	18	(C, D)	60	(C, E)	111
(M, N)	37	(D, F)	79	(C, G)	112
(J, L)	41	(N, O)	85	(O, Q)	113
(L, M)	41	(A, B)	100	(G, H)	120
(H, I)	43	(A, C)	101	(F, M)	130

Applicando Kruskal al nostro grafo di cavi di fibra ottica..

Dato il nostro grafo indiretto pesato con 17 vertici e 22 lati:

2. *dalla lista ordinata, selezioniamo i primi $n-1$ lati tali da non formare nessun* ***ciclo****:*

1. (I, J) 15
2. (H, L) 17
3. (J, K) 18
4. (M, N) 37
5. (J, L) 41
6. (L, M) 41

(H, I) 43 → NO, ciclo con (H, L), (I, J) e (J, L)

7. (F, G) 45
8. (B, D) 47
9. (C, D) 60
10. (D, F) 79
11. (N, O) 85
12. (A, B) 100

(A, C) 101 → NO, ciclo con (A, B), (B, D) e (C, D)

13. (O, P) 103
14. (P, Q) 103
15. (C, E) 111

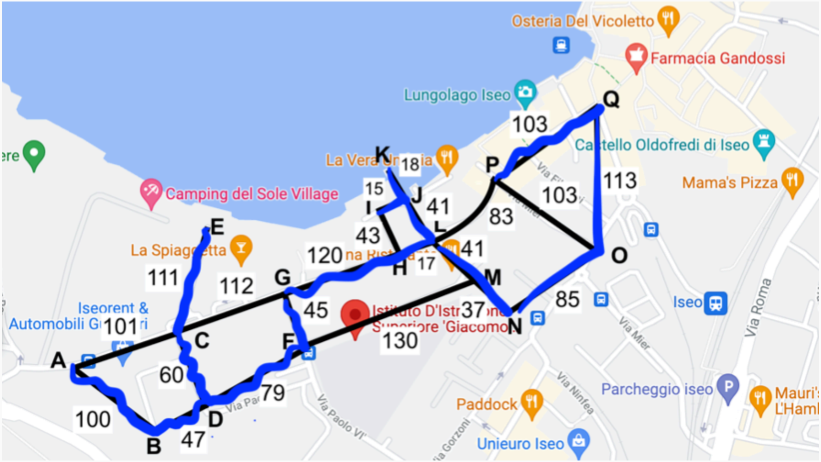
(C, G) 112 → NO, ciclo con (C, D), (D, F) e (F, G)

(O, Q) 113 → NO, ciclo con (O, P) e (P, Q)

16. (G, H) 120

(F, M) 130 → NO, ciclo con (F, G), (G, H), (H, L) e (L, M)

Soluzione



Metri totali di fibra ottica da posare:

$15+17+18+37+41+41+45+47+60+79+85+100+103+103+111+120 = 1022.$

Costo complessivo della fibra ottica: 5 euro/metro $\cdot$1022 metri= 5110 euro.

Il problema del minimo albero ricoprente

- **Albero**: grafo indiretto, aciclico e connesso.
  Nota: per ogni coppia di vertici, esiste un solo cammino.

Il problema del minimo albero ricoprente

- **Albero**: grafo indiretto, aciclico e connesso.
  Nota: per ogni coppia di vertici, esiste un solo cammino.
- **Albero ricoprente**: dato un grafo $G = (V, E)$, un albero ricoprente di G è un sottografo $T = (V', E')$ dove $V' = V$, ossia include tutti i vertici del grafo di partenza, e T è ovviamente un albero.

Il problema del minimo albero ricoprente

- **Albero**: grafo indiretto, aciclico e connesso.
  Nota: per ogni coppia di vertici, esiste un solo cammino.
- **Albero ricoprente**: dato un grafo $G = (V, E)$, un albero ricoprente di G è un sottografo $T = (V', E')$ dove $V' = V$, ossia include tutti i vertici del grafo di partenza, e T è ovviamente un albero.
- **Problema del minimo albero ricoprente**: dato un grafo indiretto $G = (V, E)$, dove ogni lato $e \in E$ è dotato di un peso p_e ($w : E \mapsto \mathbb{R}^+$), determinare un albero ricoprente $T = (V, E')$ tale per cui la somma dei pesi dei lati in E' sia minima.

Parte 3:
Lavoro di gruppo

Anche SuperMario a volte ha bisogno della Teoria dei Grafi

Stai giocando con la tua Nintendo Switch a “*Super Mario 3D World*”. Al momento, ti trovi nel Mondo 1, dove sono disseminati alcuni *MegaFunghi*, ovvero dei “Power Up”, che Mario può raggiungere tagliando degli arbusti che gli ostacolano la via.

Per superare il livello corrente, devi far sì che Mario raccolga tutti i MegaFunghi effettuando il *minimo numero di tagli*. Quali alberi bisogna tagliare?

Sfruttiamo i grafi indiretti pesati

Possiamo supporre che ogni MegaFungo sia un vertice di un grafo e che le strade che collegano i MegaFunghi siano i lati:

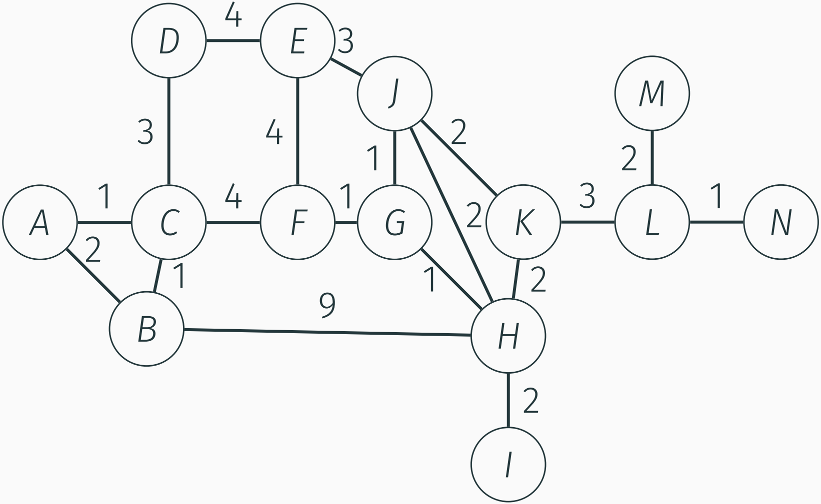
Sfruttiamo i grafi indiretti pesati

Il peso di un lato rappresenta il numero di arbusti da tagliare su quel tratto di strada:

(A, B)	2
(A, C)	1
(B, C)	1
(B, H)	9
(C, D)	3
(C, F)	4
(D, E)	4
(E, F)	4
(E, J)	3
(F, G)	1

(G, H)	1
(G, J)	1
(H, I)	2
(H, J)	2
(H, K)	2
(J, K)	2
(K, L)	3
(L, M)	2
(L, N)	1

Grafo indiretto risultante



Applicando Kruskal al nostro livello di SuperMario...

Dato un grafo indiretto pesato con 14 *vertici e* 19 *lati:*

1. *ordiniamo i lati in base al numero di arbusti in ordine crescente:*

(A, C)	1
(B, C)	1
(F, G)	1
(G, H)	1
(G, J)	1
(L, N)	1
(A, B)	2
(H, I)	2
(H, J)	2
(H, K)	2
(J, K)	2
(L, M)	2
(C, D)	3
(E, J)	3
(K, L)	3
(C, F)	4
(D, E)	4
(E, F)	4
(B, H)	9

Applicando Kruskal al nostro livello di SuperMario...

Dato un grafo indiretto pesato con 14 *vertici e* 19 *lati:*

2. ***dalla lista ordinata, selezioniamo i primi*** $n-1$ ***lati tali da non formare nessun ciclo:***

1. (A, C) 1
2. (B, C) 1
3. (F, G) 1
4. (G, H) 1
5. (G, J) 1
6. (L, N) 1

(A, B) 2 → NO, ciclo con (A, C) e (B, C)

7. (H, I) 2

(H, J) 2 → NO, ciclo con (G, H) e (G, I)

8. (H, K) 2

(J, K) 2 → NO, ciclo con (G, H), (G, I) e (H, K)

9. (L, M) 2
10. (C, D) 3
11. (E, J) 3
12. (K, L) 3
13. (C, F) 4

(D, E) 4 → NO, ciclo con (C, D), (C, F), (E, J), (F, G) e (C, J)

(E, F) 4 → NO, ciclo con (E, J), (F, G) e (G, J)

(B, H) 9 → NO, ciclo con (B, C), (C, F), (F, G) e (G, H)

Soluzione

Numero minimo di arbusti da tagliare:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 = 25.$

Variante: oltre agli arbusti, ecco le stelline

Consideriamo ora la seguente variante del problema appena affrontato: oltre a dover minimizzare il numero di arbusti da tagliare per raggiungere tutti i funghi, Mario dovrà anche cercare di conservare più energia possibile. Infatti, ogni volta che sceglie di passare per una strada e tagliare gli arbusti presenti, Mario compie uno sforzo e consuma energia, sotto forma di *stelline*.

Variante: oltre agli arbusti, ecco le stelline

Nella mappa sono indicati, oltre agli arbusti, anche le stelline richieste per attraversare una strada. Se su un lato non ci sono stelline, allora il consumo di energia richiesto per attraversarlo è 0.

Variante: oltre agli arbusti, ecco le stelline

Come prima, per superare il livello, Mario dovrà raccogliere tutti i MegaFunghi, stavolta però effettuando il minimo numero di tagli E consumando meno stelline possibile:

1. Quali e quanti alberi dovrà tagliare in questo caso?
2. La soluzione ottenuta è uguale o diversa da quella ottenuta precedentemente?

Sfruttiamo ancora un grafo indiretto

Come nel caso precedente, introduciamo un vertice per ogni MegaFungo e un lato tra due MegaFunghi collegati tra loro da un tratto di strada. Anche stavolta ogni lato è pesato, però consideriamo anche il numero di stelline presenti:

(A, B)	(2, 1)
(A, C)	(1, 0)
(B, C)	(1, 0)
(B, H)	(9, 3)
(C, D)	(3, 1)
(C, F)	(4, 2)
(D, E)	(4, 2)
(E, F)	(4, 1)
(E, J)	(3, 1)
(F, G)	(1, 0)

(G, H)	(1, 0)
(G, J)	(1, 1)
(H, I)	(2, 1)
(H, J)	(2, 0)
(H, K)	(2, 1)
(J, K)	(2, 2)
(K, L)	(3, 1)
(L, M)	(2, 1)
(L, N)	(1, 1)

Consideriamo anche l'informazione sulle stelline

Modifichiamo leggermente l'algoritmo di Kruskal come segue:

1. *inizialmente si ordinano i lati secondo il numero minore di arbusti* ***E*** *poi secondo il numero minore di stelline;*
2. *si prendono i primi n-1 lati che non generano cicli e che raggiungono tutti i vertici.*

A ogni lato è associata una coppia di valori: il primo rappresenta il numero di arbusti, il secondo il numero di stelline.

Applichiamo Kruskal alla variante

Dato un grafo indiretto pesato con 14 *vertici e* 19 *lati:*

1. ***ordiniamo i lati in base prima al numero di arbusti e poi al numero di stelline, entrambi in ordine crescente:***

(A, C)	(1, 0)	(A, B)	(2, 1)		
(B, C)	(1, 0)	(H, I)	(2, 1)	(K, L)	(3, 1)
(F, G)	(1, 0)	(H, K)	(2, 1)	(E, F)	(4, 1)
(G, H)	(1, 0)	(L, M)	(2, 1)	(C, F)	(4, 2)
(G, J)	(1, 1)	(J, K)	(2, 2)	(D, E)	(4, 2)
(L, N)	(1, 1)	(C, D)	(3, 1)	(B, H)	(9, 3)
(H, J)	(2, 0)	(E, J)	(3, 1)		

Nota: in arancione, i lati che hanno cambiato posizione nella lista ordinata rispetto al problema base, dato il diverso criterio di ordinamento.

Applichiamo Kruskal alla variante

Dato un grafo indiretto pesato con 14 vertici e 19 lati:

2. ***dalla lista ordinata, selezioniamo i primi*** $n - 1$ ***lati tali da non formare nessun ciclo:***

1. (A, C) (1, 0)
2. (B, C) (1, 0)
3. (F, G) (1, 0)
4. (G, H) (1, 0)
5. (G, J) (1, 1)
6. (L, N) (1, 1)

(H, J) (2, 0) $\rightarrow$ NO, ciclo con (G, H) e (G, J)

(A, B) (2, 1) $\rightarrow$ NO, ciclo con (A, C) e (B, C)

7. (H, I) (2, 1)
8. (H, K) (2, 1)
9. (L, M) (2, 1)

(J, K) (2, 2) $\rightarrow$ NO, ciclo con (G, H), (G, J) e (H, K)

10. (C, D) (3, 1)
11. (E, J) (3, 1)
12. (K, L) (3, 1)

(E, F) (4, 1)$\rightarrow$ NO, ciclo con (E, J), (F, G) e (G, J)

13. (C, F) (4, 2)

(D, E) (4, 2) $\rightarrow$ NO, ciclo con (C, D), (C, F), (E, F), (E, J), (F, G) e (G, J)

(B, H) (9, 3) $\rightarrow$ NO, ciclo con (B, C), (C, F), (F, G) e (G, H)

Soluzione della variante

Numero minimo di arbusti da tagliare:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 = 25.$

Numero minimo di stelline da consumare:

$0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 10.$

Nota: l'albero di supporto ottenuto per la variante è lo stesso della versione base. Tuttavia, l'esecuzione dell'algoritmo di Kruskal è stata diversa perché i lati sono stati ordinati secondo un diverso criterio, dando comunque più importanza agli arbusti rispetto alle stelline.

Variante bis: priorità alle stelline

Cosa succederebbe invece se dessimo prima importanza alle stelline?
Dato un grafo indiretto pesato con 14 vertici e 19 lati:

1. ***ordiniamo i lati in base prima al numero di stelline e poi al numero di arbusti, entrambi in ordine crescente:***

(A, C)	(1, 0)
(B, C)	(1, 0)
(F, G)	(1, 0)
(G, H)	(1, 0)
(H, J)	(2, 0)
(G, J)	(1, 1)
(L, N)	(1, 1)
(A, B)	(2, 1)
(H, I)	(2, 1)
(H, K)	(2, 1)
(L, M)	(2, 1)
(C, D)	(3, 1)
(E, J)	(3, 1)
(K, L)	(3, 1)
(E, F)	(4, 1)
(J, K)	(2, 2)
(C, F)	(4, 2)
(D, E)	(4, 2)
(B, H)	(9, 3)

Nota: in arancione, i lati che hanno cambiato posizione nella lista ordinata rispetto alla variante, dato il diverso criterio di ordinamento.

Applichiamo Kruskal alla variante bis

Dato un grafo indiretto pesato con 14 *vertici e* 19 *lati:*

2. ***dalla lista ordinata, selezioniamo i primi*** $n - 1$ ***lati tali da non formare nessun ciclo:***

1. (A, C) (1, 0)
2. (B, C) (1, 0)
3. (F, G) (1, 0)
4. (G, H) (1, 0)
5. (H, J) (2, 0)

(G, J) (1, 1) → NO, ciclo con (G, H) e (H, J)

6. (L, N) (1, 1)

(A, B) (2, 1) → NO, ciclo con (A, C) e (B, C)

7. (H, I) (2, 1)
8. (H, K) (2, 1)
9. (L, M) (2, 1)
10. (C, D) (3, 1)
11. (E, J) (3, 1)
12. (K, L) (3, 1)

(E, F) (4, 1) → NO, ciclo con (E, J), (F, G), (G, H) e (G, J)

(J, K) (2, 2) → NO, ciclo con (H, J) e (H, K)

13. (C, F) (4, 2)

(D, E) (4, 2) → NO, ciclo con (C, D), (C, F), (F, G) e (G, H)

(B, H) (9, 3) → NO, ciclo con (B, C), (C, F), (F, G) e (G, H)

Soluzione della variante bis

Numero minimo di stelline da consumare:

$0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+2=9.$

Numero minimo di arbusti da tagliare:

$1+1+1+1+2+1+2+2+2+3+3+3+4=26.$

Nota: l'albero di supporto ottenuto per la variante bis è diverso rispetto a quello ottenuto nella versione base e nella variante per via della presenza del lato (H, J) e dell'assenza del lato (G, J).

Un altro approccio... multiobiettivo

- Per considerare **allo stesso tempo** sia il numero di arbusti sia il numero di stelline, possiamo anche pensare di definire una **nuova misura** da associare a ogni lato.
- Per esempio, potremmo decidere di pesare ogni lato in base alla **somma tra il numero di arbusti e il numero di stelline**, visto che sono entrambi da minimizzare!
- A questo punto, si può applicare ancora una volta l'algoritmo di Kruskal e ottenere la soluzione desiderata (lo svolgimento è lasciato a voi).

Un altro approccio... multiobiettivo

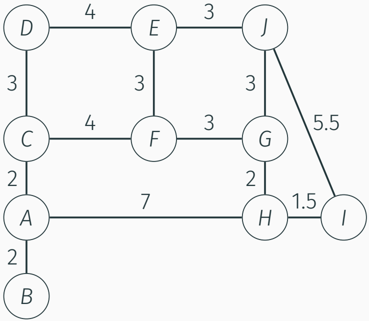
- Solitamente, se si devono considerare **due obiettivi di arbitraria importanza**, si sfruttano due parametri α e β nel seguente modo (consideriamo sempre il nostro problema di SuperMario):
  - $\alpha \cdot \#$ arbusti $+\beta \cdot \#$ stelline, con $\alpha + \beta = 1$;
  - se i due obiettivi sono da considerare alla pari, allora $\alpha = \beta = 0.5$;
  - se invece uno conta di più dell'altra, allora si può giocare con i valori di α e β, per esempio $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.3$.
- **E se gli obiettivi fossero tre?**
  La formula si potrebbe estendere con un terzo parametro γ, sempre soddisfacendo la condizione che $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (e così via, per un numero maggiore di obiettivi).

Conclusione

Compiti per sabato 05 febbraio 2022

1. Rappresentare con dei **grafi bipartiti** gli esempi proposti nella Lezione 1 (*professori e classi*, *persone e libri in prestito*).
2. Trovare e descrivere un'applicazione del problema del minimo albero ricoprente **non menzionata oggi**.

3. Risolvere il seguente problema, mostrando tutti i passaggi:
In un condominio ci sono dieci appartamenti, indicati con le lettere da A a J. Nella rete idrica condominiale ci sono i seguenti tubi, ognuno lungo un certo numero di metri, come rappresentato nel grafo sottostante:



Quali tubi effettivamente usare per minimizzare il percorso che deve fare l'acqua per raggiungere tutti gli appartamenti del condominio?

Sondaggio finale

`www.menti.com` – Codice: **9684 6564**