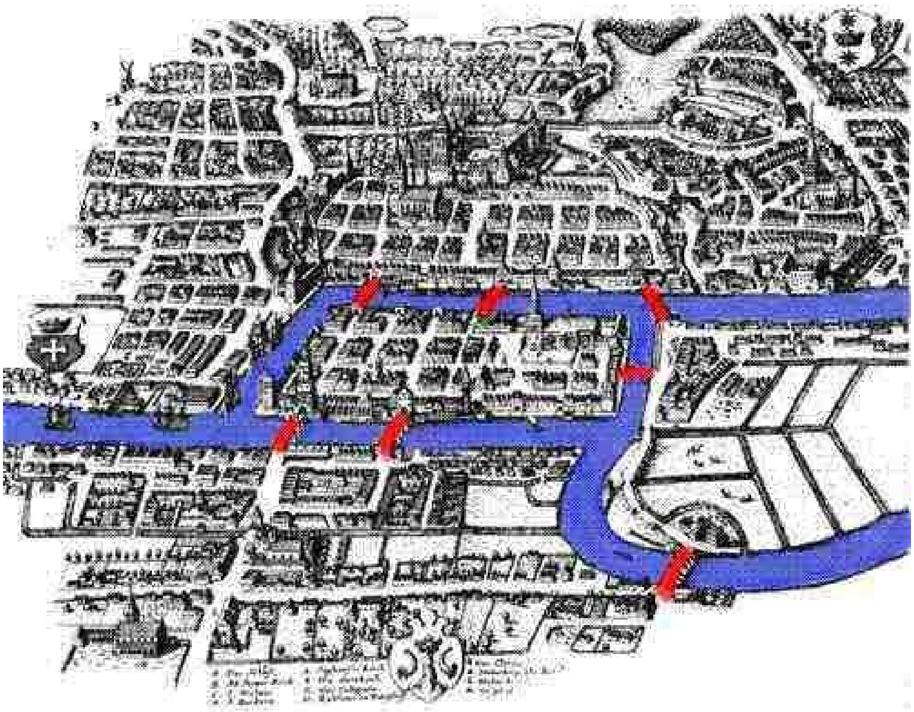
Sette ponti: la nascita della teoria dei grafi

Livello di difficoltà: intermedio

Parole chiave:
- Teoria dei grafi
- Grafi euleriani
- Teoremi di Eulero

0) Introduzione

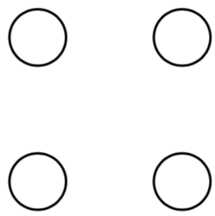


Data questa mappa di una città attraversata da un fiume, è possibile attraversare tutti i ponti una e una sola volta? Motivare la risposta.

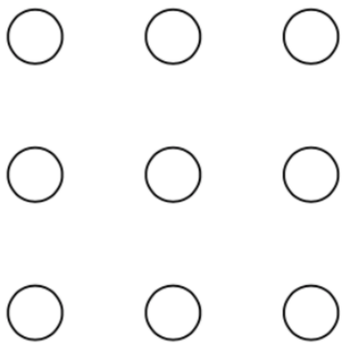
1) Un primo salto nel passato: il gioco dei “9 punti”

Nei primi anni di scuola avete mai sfidato il vostro compagno di banco a “unire i puntini” senza mai staccare la penna dal foglio?

Partiamo con quattro puntini: riuscite a collegarli tutti senza mai staccare la penna dal foglio? Indicate il punto di partenza e quello finale, e inoltre segnate il verso di percorrenza dei collegamenti che inserirete. Potete usare soltanto linee rette.



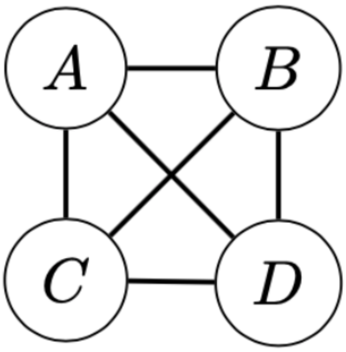
E se i puntini fossero invece i seguenti nove? Anche qui, potete usare solo linee rette, anzi, solo quattro.



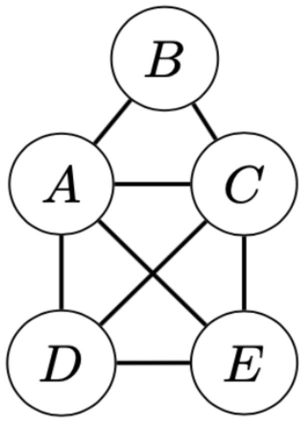
2) Non solo puntini (o vertici), ma anche lati…

Consideriamo ora alcuni grafi. Riuscite a unire tutti i puntini senza mai staccare la penna dal foglio, **passando per ogni lato una e una sola volta**?
Come prima, indicate il vertice di partenza e quello finale, e inoltre segnate il verso di percorrenza di ogni lato.

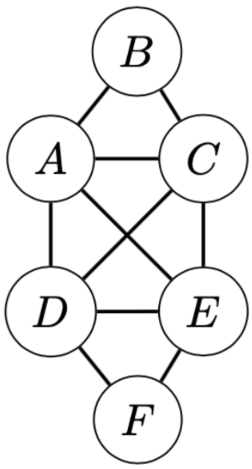
a)



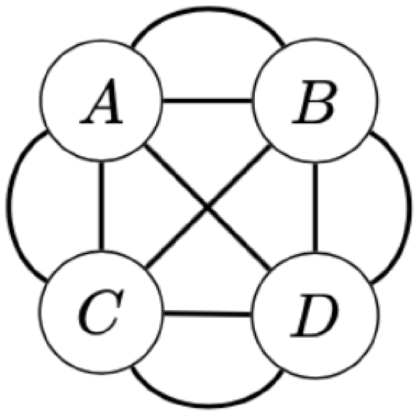
b)



c)



d)



In quali di questi grafi siete riusciti a passare su tutti i lati una sola volta senza mai staccare la penna dal foglio?

a)	b)	c)	d)

In quanti modi siete riusciti a farlo? Ovvero, la soluzione è unica oppure ne esistono diverse? Indicate la risposta per ogni grafo.

a)	b)	c)	d)

Se ci sono soluzioni multiple, cosa hanno di diverso (o in comune) tra loro?

____

____

____

____

____

____

Nella teoria dei grafi, come si chiama formalmente il tratto che avete disegnato per ogni grafo?

____

3) Qualche definizione formale

Dato un grafo *G = (V, E)*:

- un cammino si dice **semplice** se i vertici sono tutti diversi tra loro;
- un cammino è in realtà un **ciclo** quando il primo e l'ultimo vertice coincidono ed è composto da almeno tre lati;
- un **cammino** si dice **euleriano** quando percorre **tutti** i lati del grafo una sola volta;
- quando il cammino euleriano inizia e termina nello stesso vertice, si dice **ciclo euleriano**;
- *G* è detto **semi-euleriano** quando contiene un cammino euleriano;
- *G* è detto **euleriano** quando contiene un ciclo euleriano.

Nelle Attività 1 e 2, vi è stato quindi chiesto di determinare l'esistenza di un…

____

Se, dato un grafo, affermate che ammette questo tipo di cammino, come potete provare e supportare la vostra affermazione?

____

Se in un grafo non trovate un cammino euleriano, potete affermare con certezza che tale cammino non esista? Perchè?

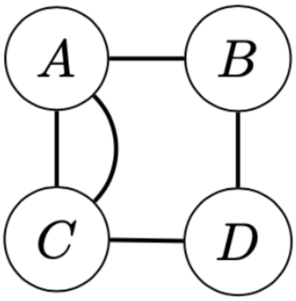
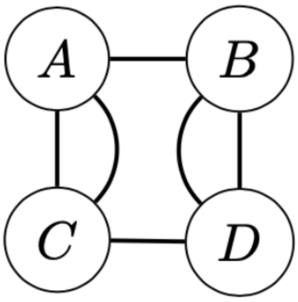
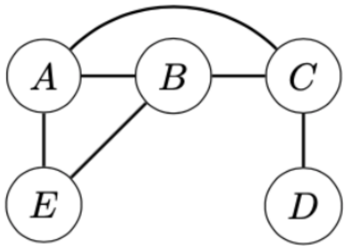
____

Riuscite a stabilire un numero minimo di tentativi con cui potete affermare che in un grafo non esista nessun cammino euleriano? Se sì, come? Se no, perché?

____

4) Analizzando meglio i grafi

Aggiungiamo alla collezione di grafi precedentemente esaminati – da a) a d) – i seguenti tre:

e)	f)	g)
		

In ognuno dei grafi da a) a g), completate la seguente tabella.

Grafo	**Ammette un cammino euleriano?**	**Numero di vertici**	**Numero di lati**	**Grado di ogni vertice**
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				
g)				

Osservando i dati raccolti in tabella, cosa notate?

5) Verso un metodo generale

Osservate con attenzione le proprietà dei grafi che ammettono un cammino euleriano e quelle dei grafi che non lo ammettono. Quali regolarità potete riscontrare?
Provate a distinguere tra i vertici di partenza e di arrivo, e i vertici intermedi (detti anche *di transito*).

Dovreste avere scoperto che, se per un grafo vale una certa proprietà, allora ammette (o non ammette) l'esistenza di un cammino euleriano. Provate a scrivere qui sotto il vostro teorema in modo formale e rigoroso, e a spiegarlo considerando un grafo qualsiasi.

Se siete riusciti a rispondere, allora molto probabilmente avete appena enunciato uno dei due teoremi di Eulero, quello riguardante i cammini euleriani. Riuscirete quindi sempre a determinare quando un grafo ammette o no un cammino euleriano.
La regola che avete trovato vale per tutti i grafi di esempio proposti sopra?

In quali dei grafi il cammino euleriano che avete trovato è in realtà un **ciclo euleriano**?

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)

Il teorema che avete definito permette di determinare anche se un grafo contenga un ciclo euleriano? Se sì, perché? Se no, come si potrebbe partire da questo per arrivare a formulare *un secondo teorema* che esprima una proprietà per identificare i grafi in cui vi è almeno un ciclo euleriano? Ricontrollate anche l'enunciato del primo teorema.

Siete proprio certi che i vostri teoremi valgano per *qualsiasi* grafo? C'è qualche ulteriore condizione che dobbiamo imporre? Perché?

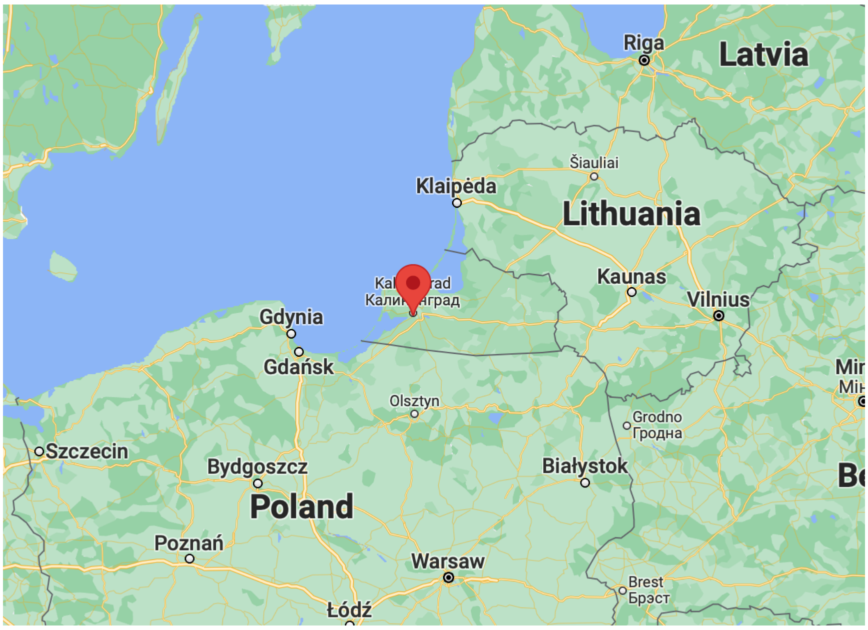
6) Esempi inventati da voi

Disegnate qui sotto tre grafi, diversi da tutti i precedenti, ognuno con almeno quattro vertici e cinque lati, tali che:

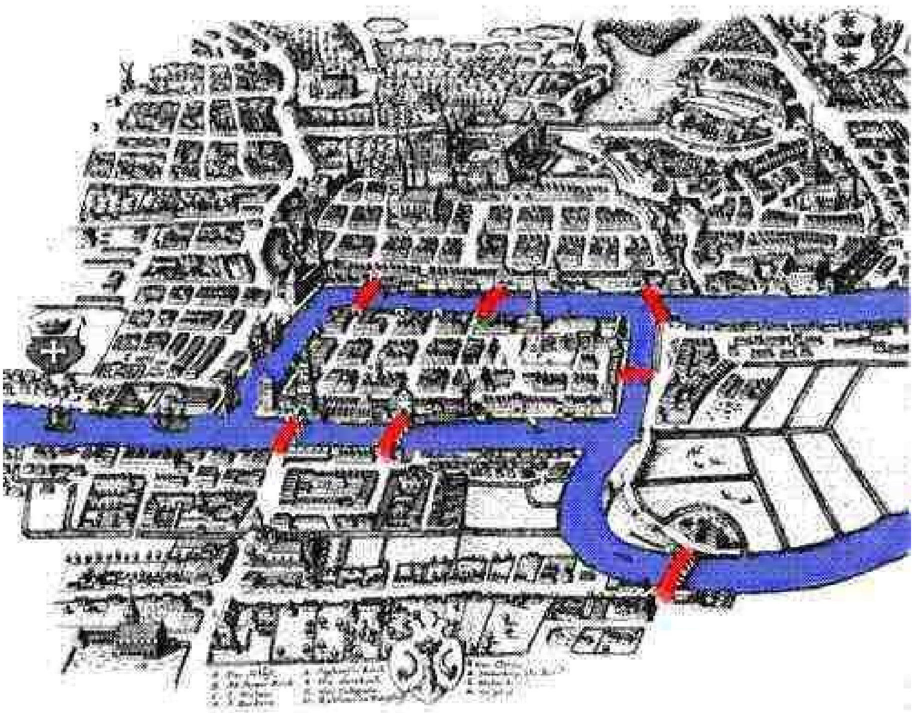
- il primo ammetta un cammino euleriano;
- il secondo ammetta un ciclo euleriano;
- il terzo non ammetta un cammino euleriano.

7) Un altro salto nel passato: 1736

La città russa *Kaliningrad*, situata sul Mar Baltico tra la Polonia e la Lituania, nel Settecento apparteneva in realtà alla Prussia ed era nota con il nome di **Königsberg**.



Königsberg è percorsa dal fiume Pregel e da alcuni suoi affluenti, che formano due estese isole. Nel Settecento, tali isole erano collegate tra loro e alle altre aree della città attraverso sette ponti.



Da "*Labirinti, quadrati magici e paradossi logici. I dieci più grandi enigmi matematici di tutti i tempi"* di Marcel Danesi:

"*Gli abitanti della città si chiedevano spesso se fosse possibile fare una passeggiata iniziando da un punto qualsiasi della città, per poi attraversare ogni ponte una e una sola volta e ritornare al punto di partenza. Nessuno era mai riuscito nell'intento, ma d'altra parte nessuno riusciva a dare una spiegazione del perché ciò sembrasse impossibile. Eulero rimase affascinato dalla questione e la trasformò in uno dei più grandi enigmi di ogni tempo:*

> *Nella città di Königsberg è possibile attraversare ognuno dei sette ponti sul fiume Pregel, che collegano due isole fra loro e alla terraferma, senza attraversare due volte lo stesso ponte?*

[...] Egli iniziò riducendo la mappa dell'area a una forma schematica, nota come grafo*, e riformulando l'enigma…*"

Rispetto alla terminologia che avete appreso fin qui, come pensate che Eulero abbia riformulato l'enigma in termini matematici più formali?

____

____

____

____

____

Disegnate il grafo corrispondente alla mappa dei sette ponti di Königsberg:

È possibile fare la passeggiata dei sette ponti di Königsberg, così come intendevano gli abitanti della città prussiana? Motivate la risposta, riconducedovi ai teoremi scoperti in precedenza.

____

____

____

____

____

Quando, nel 1736, Eulero presentò la propria soluzione al problema dei ponti di Königsberg all'Accademia Russa e scrisse l'articolo scientifico intitolato "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*", nacque ufficialmente la disciplina della teoria dei grafi. Fu la prima volta infatti che venne utilizzato il termine "*grafo*".

Ma non solo: il risultato di Eulero è considerato anche uno dei primissimi risultati di un'altra branca della matematica, più particolarmente della geometria: la *topologia*.
La topologia studia le proprietà delle figure e degli oggetti matematici che non cambiano quando viene effettuata una deformazione. Infatti, alcuni problemi geometrici dipendono, più che dalla forma, soltanto dalle *connessioni* presenti tra gli oggetti. Potete pensare a un grafo, se mantenete invariato l'insieme dei lati (se non ne aggiungete o non ne togliete), come a un oggetto topologico. I due teoremi di Eulero che avete scoperto non dipendono da alcun tipo di misura. Ci sono quindi alcune intersezioni tra la teoria dei grafi e la topologia.

8) Tornando nel presente…

Descrivete una situazione reale e attuale in cui potrebbe essere molto utile conoscere se il grafo corrispondente ammetta (o no) un cammino o un ciclo euleriano.