ROAR!

Ricerca Operativa Applicazioni Reali

Alessandro Gobbi Alice Raffaele Gabriella Colajanni Eugenia Taranto

IIS Antonietti, Iseo (BS)
27 marzo 2021

Organizzazione della lezione

1. Introduzione:
    - Ripasso (5 minuti)
    - Correzione del compito (20 minuti)
2. Modelli di PL a due variabili e risoluzione grafica:
    - Problema 1:
        - Modellizzazione assieme (10 minuti)
        - **Pausa (10 minuti)**
        - Risoluzione assieme (30 minuti)
    - Problema 2:
        - Modellizzazioni assieme (15 minuti)
        - **Pausa (10 minuti)**
        - Risoluzione con **lavoro di gruppo** (20 minuti)
        - Risoluzione assieme (15 minuti)
3. Conclusione:
    - Compiti per lunedì 12 aprile (5 minuti)
    - Sondaggio finale (5 minuti)

Introduzione

Ripasso

Mentimeter

www.menti.com

Codice: 2487 5956

Compito per oggi

Budget aziendale

L'ufficio del Comune di Iseo deve rifornirsi di cancelleria: gli oggetti necessari e le loro quantità sono indicate nella tabella seguente, assieme ai relativi costi unitari. Il budget disponibile è di 500 euro. L'ufficio vuole massimizzare il numero di tipologie di oggetti acquistati.

TIPOLOGIA OGGETTO	QUANTITÀ	COSTO UNITARIO (€)
Matita	300	0,50
Penna	200	0,60
Gomma	150	0,50
Righello	100	1,50
Risma di carta	80	3,90
Toner per stampante	12	14,90

- Trovare la soluzione ottima del problema con la stessa tecnica usata per il problema delle Serie TV (per esempio, comprando tutte le 300 matite richieste oppure neanche una) e formulare il modello matematico del problema;
- Formulare il modello matematico considerando la quantità come il numero massimo di prodotti disponibili per oggetto e spendendo il budget il più possibile.

Correzione

BUDGET AZIEND.

Variabili

$x_i \in \{0,1\}$, $i \in \{x_M, x_P, x_G, x_{RIG}, x_{RIS}, x_T\}$

$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se decido di comprare gli oggetti } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Vincoli

$\sum_i c_i \cdot q_i \cdot x_i \leq B$, dove $\begin{cases} c_i & \text{costo unitario oggetto } i \\ q_i & \text{quantità da comprare dell'oggetto } i \text{ (nota)} \\ B & \text{budget a disposizione} \end{cases}$

Funzione Obiettivo

$\max \sum_i x_i = x_M + x_P + x_G + x_{RIG} + x_{RIS} + x_T$

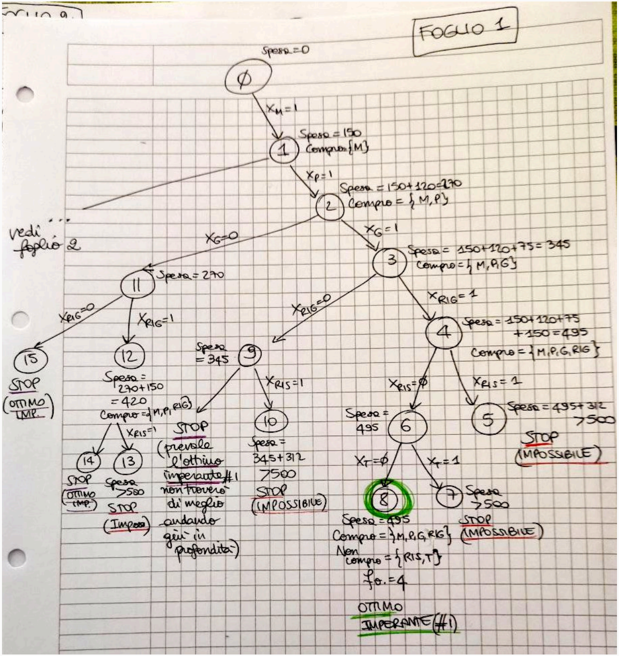
MODELLO RISULTANTE

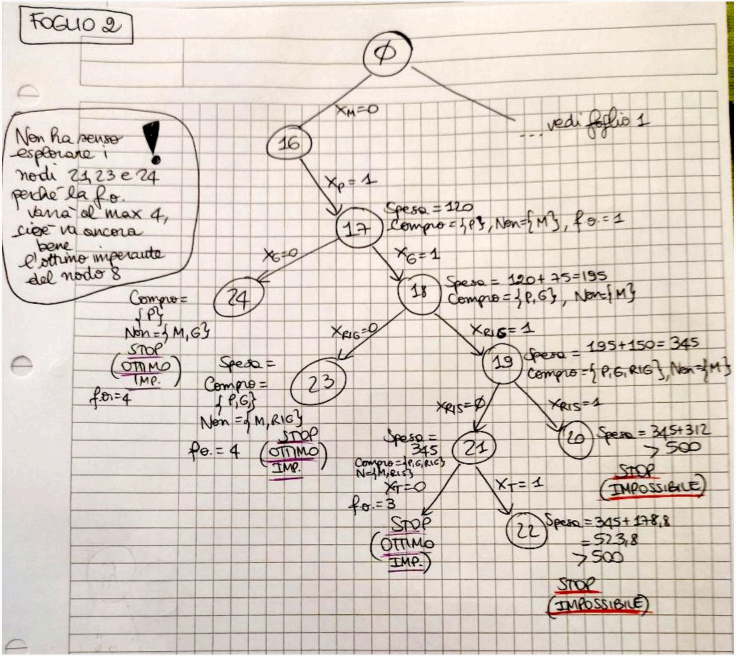
$\max \; x_M + x_P + x_G + x_{RIG} + x_{RIS} + x_T$

$c_M \cdot q_M \cdot x_M + c_P \cdot q_P \cdot x_P + c_G \cdot q_G \cdot x_G + c_{RIG} \cdot q_{RIG} \cdot x_{RIG} +$
$+ c_{RIS} \cdot q_{RIS} \cdot x_{RIS} + c_T \cdot q_T \cdot x_T \leq 500$

$x_M, x_P, x_G, x_{RIG}, x_{RIS}, x_T \in \{0,1\}$

Per risolvere il problema con una ricerca esaustiva, sfrutto un albero binario: ad ogni nodo, considero un oggetto che non ho ancora deciso se acquistare o meno e faccio due ramificazioni generando due nodi figli (uno per la scelta "SÌ - Includo l'elemento e lo acquisto", uno per la scelta "NO - Non acquisto l'elemento")


FOGLIO 1
Spesa = 0
$X_M = 1$
Spesa = 150
Compro = {M}
$X_P = 1$
Spesa = 150+120=270
Compro = {M,P}
vedi foglio 2
$X_G = 0$
$X_G = 1$
Spesa = 150+120+75 = 345
Compro = {M,P,G}
Spesa = 270
$X_{RIG} = 0$
$X_{RIG} = 1$
Spesa = 150+120+75 +150 = 495
Compro = {M,P,G,RIG}
STOP (OTTIMO IMP.)
Spesa = 270+150 = 420
Compro = {M,P,RIG}
Spesa = 345
$X_{RIS} = 1$
$X_{RIS} = \phi$
$X_{RIS} = 1$
Spesa = 495+312 > 500
STOP (IMPOSSIBILE)
STOP (prevale l'ottimo imperante #1 non troverò di meglio andando giù in profondità)
Spesa = 345+312 > 500
STOP (IMPOSSIBILE)
Spesa = 495
$X_T = \phi$
$X_T = 1$
STOP (OTTIMO IMP.)
Spesa > 500
STOP (Imposs)
Spesa > 500
STOP (IMPOSSIBILE)
Spesa = 495
Compro = {M,P,G,RIG}
Non compro = {RIS,T}
f.o. = 4
OTTIMO IMPERANTE (#1)


FOGLIO 2
Non ha senso esplorare i nodi 21, 23 e 24 perché la f.o. varrà al max 4, cioè va ancora bene l'ottimo imperante del nodo 8
X_M=0
... vedi foglio 1
16
X_P=1
17
Spesa = 120
Compro = {P}, Non = {M}, f.o. = 1
X_G=0
X_G=1
24
Compro = {P}
Non = {M, G}
STOP (OTTIMO IMP.)
f.o. = 4
18
Spesa = 120 + 75 = 195
Compro = {P, G}, Non = {M}
X_RIG=0
X_RIG=1
23
Spesa =
Compro = {P, G}
Non = {M, RIG}
f.o. = 4
STOP (OTTIMO IMP.)
19
Spesa = 195+150 = 345
Compro = {P, G, RIG}, Non = {M}
X_RIS=0
X_RIS=1
21
Spesa = 345
Compro = {P, G, RIG}
N = {M, RIS}
X_T=0
X_T=1
f.o. = 3
STOP (OTTIMO IMP.)
20
Spesa = 345+312 > 500
STOP (IMPOSSIBILE)
22
Spesa = 345 + 178,8 = 523,8 > 500
STOP (IMPOSSIBILE)

2ª Richiesta

Variabili

X_i = # di oggetti di tipo i che acquisto

$i \in \{M, P, G, RIG, RIS, T\}$

Vincoli

$$\sum c_i \cdot x_i \leq B$$

$$C_M \cdot X_M + C_P \cdot X_P + C_G \cdot X_G + C_{RIG} \cdot X_{RIG} + C_{RIS} \cdot X_{RIS} + C_T \cdot X_T \leq 500$$

$$X_M \leq 300$$

$$X_P \leq 200$$

$$X_G \leq 150$$

$$X_{RIG} \leq 100$$

$$X_{RIS} \leq 80$$

$$X_T \leq 12$$

Funzione obiettivo

$$\max \sum_i c_i \cdot x_i$$

$$\max\ C_M \cdot X_M + C_P \cdot X_P + C_G \cdot X_G + C_{RIG} \cdot X_{RIG} + C_{RIS} \cdot X_{RIS} + C_T \cdot X_T$$

Parte 1:
Modelli di Programmazione Lineare a due variabili e risoluzione grafica

Problema 1

“C’è l’insalata!” (cit.)

Un’azienda agricola deve determinare quanti ettari di terreno devono essere dedicati alla produzione di lattuga e pomodori. Si è stimato che, coltivando un ettaro di terreno, si possono produrre annualmente 20 quintali di lattuga e 30 quintali di pomodori. Per portare a termine le coltivazioni, l’azienda dovrà assegnare un suo bracciante ad ogni ettaro coltivato a lattuga e due braccianti ad ogni ettaro coltivato a pomodori. Per avere sufficiente manodopera per le altre coltivazioni, l’azienda non vuole utilizzare più di 100 lavoratori. Sapendo che l’azienda vende ogni chilogrammo di lattuga e pomodoro rispettivamente a 1 euro e a 1.5 euro, e vuole assicurarsi un profitto annuo di almeno 50000 euro dalla vendita di questi due prodotti, quanti ettari dovrà dedicare alla coltivazione di lattuga e quanti alla coltivazione di pomodori per minimizzare il numero complessivo di ettari coltivati?

Modello

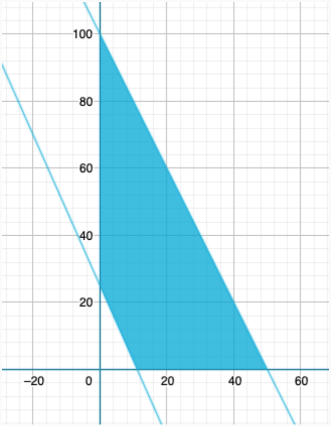
$$\min \quad x_P + x_L$$

$$2x_P + x_L \leq 100$$

$$4500x_P + 2000x_L \geq 50000$$

$$x_P, x_L \geq 0$$

Risoluzione grafica



Soluzione ottima:
$x_P = \frac{100}{9} = 11.\overline{1}, x_L = 0,$
$f = \frac{100}{9} = 11.\overline{1}.$

Vertici:

- $(0, 100)$ (Vincolo $1 \cap x_P = 0$) $\rightarrow f = 100;$
- $(50, 0)$ (Vincolo $1 \cap x_L = 0$) $\rightarrow f = 50;$
- $(25, 0)$ (Vincolo $2 \cap x_P = 0$) $\rightarrow f = 25;$
- $(\frac{100}{9}, 0)$ (Vincolo $2 \cap x_L = 0$) $\rightarrow f = \frac{100}{9}.$

Problema 2

In forneria

Un fornaio ogni mattina prepara per il suo negozio una gustosa focaccia genovese e una pizza margherita al taglio. Per la preparazione e la cottura di un chilogrammo di pizza sono richiesti rispettivamente 10 minuti e 40 minuti. Per produrre invece un chilogrammo di focaccia sono previsti 1 ora di preparazione dell'impasto e 1 e 20 di cottura nel forno. Avendo anche altri prodotti da preparare, il fornaio non può dedicare nel complesso più di 6 ore alla lavorazione di questi prodotti. Supponendo che il fornaio riesca a vendere tutto ciò che prepara e sapendo che il prezzo di vendita per focaccia e pizza è rispettivamente 3 euro/Kg e 8 euro/Kg, quale è la produzione giornaliera più redditizia?

Variante: e se il tempo massimo per la lavorazione fosse di tre ore, mentre quello di utilizzo del forno cinque? Come varierebbero il modello e la soluzione ottima?)

Modello (base)

$$\max \quad 3x_F + 8x_P$$

$$(10 + 40)x_P + (60 + 60 + 20)x_F \leq 6 \cdot 60$$

$$x_P, x_F \geq 0$$

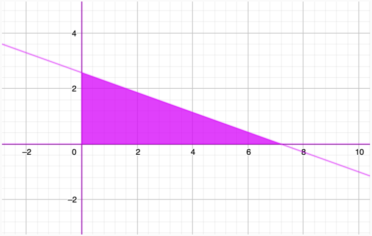
Lavoro di gruppo (20 minuti)

Quiz

www.menti.com

Codice: 7512 1778

Risoluzione grafica (base)



Soluzione ottima:
$x_P = \frac{36}{5} = 7.2, x_F = 0,$
$f = \frac{108}{5} = 21.6.$

Vertici:

- $(0, 0)$ $(x_P = 0 \cap x_F = 0)$ $\rightarrow f = 0;$
- $(0, \frac{18}{7})$ (Vincolo $1 \cap x_P = 0$) $\rightarrow f = \frac{144}{7} = 20.57;$
- $(\frac{36}{5}, 0)$ (Vincolo $1 \cap x_F = 0$) $\rightarrow f = \frac{108}{5} = 21.6.$

Modello (variante)

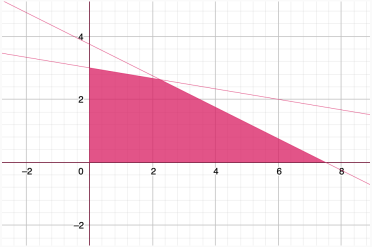
$$\max \quad 3x_P + 8x_F$$

$$10x_P + 60x_F \leq 3 \cdot 60$$

$$40x_P + (60 + 20)x_F \leq 5 \cdot 60$$

$$x_P, x_F \geq 0$$

Risoluzione grafica (variante)



Soluzione ottima:

$x_P = \frac{9}{4}, x_F = \frac{21}{8}$,
$f = \frac{111}{4} = 27.75$.

Vertici:

- $(0, 0)$ $(x_P = 0 \cap x_F = 0)$
  $\rightarrow f = 0$;
- $(0, 3)$ (Vincolo 1 $\cap\ x_P = 0$)
  $\rightarrow f = 24$;
- $(\frac{15}{2}, 0)$ (Vincolo 2 $\cap\ x_F = 0$)
  $\rightarrow f = \frac{45}{2} = 22.5$;
- $(\frac{9}{4}, \frac{21}{8})$ (Vincolo 1 $\cap$ Vincolo 2)
  $\rightarrow f = \frac{111}{4} = 27.75$.

Esercizi per lunedì 12 aprile

Esercizio 1 – BrumBrumBrum

L'industria BrumBrumBrum S.p.A. produce automobili e microcar utilizzando due macchinari chiamati P e Q. Entrambi i macchinari sono usati per entrambi i veicoli, ma cambiano i tempi di lavorazione: per ogni automobile sono necessarie un'ora di lavorazione su P e tre ore su Q; per ogni microcar servono invece due ore di lavorazione su P e due ore su Q. Per motivi logistici, non possono essere prodotte più di diciotto automobili settimanali. Inoltre, il macchinario P non può essere usato per più di 40 ore alla settimana, mentre Q per non più di 60. Nell'ipotesi che ogni prodotto realizzato sia poi messo in commercio, determinare quale sia la combinazione produttiva più conveniente, sapendo che ogni automobile è venduta a 16.000€ e ogni microcar a 10.000€.

Quesiti:

1. Fornire un modello di programmazione lineare del problema;
2. Trovare una soluzione ottima usando il metodo di risoluzione grafica;
3. La soluzione trovata ha senso nella realtà? Perché?

Esercizio 2 – Collane d'oro e d'argento

L'azienda Gioie D'Oro S.r.l. produce due modelli di collane, A e B. Per il modello A utilizza dei gancetti speciali, di cui ogni giorno c'è una disponibilità pari a 400 unità. Il modello B richiede invece gancetti meno preziosi, per i quali c'è una disponibilità di 700 unità al giorno. Le perle necessarie giornalmente permettono di produrre non più di 800 collane in totale. Per quanto riguarda le tempistiche di produzione, per realizzare una collana del modello A si impiega il doppio del tempo necessario per realizzare una collana del modello B, ma se l'azienda producesse solo collane B potrebbe produrne al più 1000 ogni giorno. Ogni collana di tipo A dà un ricavo di 400 €; ogni collana B invece di 300 €. Quante collane di tipo A e di tipo B occorre produrre per massimizzare il ricavo complessivo giornaliero?

Quesiti:

1. Fornire un modello di programmazione lineare del problema;
2. Trovare una soluzione ottima usando il metodo di risoluzione grafica;
3. La soluzione trovata ha senso nella realtà? Perché?

Esercizio 3 – Candele

Un artigiano produce delle candele bianche e delle candele blu, impiegando diciotto minuti per ogni candela bianca e venti per ogni candela blu. Le spese di produzione di ogni candela bianca sono pari a 1 €, mentre quelle di ogni candela blu sono pari a 2 €. Ogni giorno l'artigiano lavora otto ore. In base alla sua esperienza e alla domanda dei clienti, l'artigiano sa che ogni giorno deve realizzare non meno di dieci ma non più di quindici candele bianche, e non meno di otto ma non più di dodici candele blu. Sapendo che il prezzo di vendita di ogni candela bianca è 6 € e quello di ogni candela blu è 8 €, quante candele gli conviene produrre giornalmente per massimizzare il suo guardagno?

Quesiti:

1. Fornire un modello di programmazione lineare del problema;
2. Trovare una soluzione ottima usando il metodo di risoluzione grafica;
3. La soluzione trovata ha senso nella realtà? Perché?

“Buongiornissimo! Kaffè?”

Una catena di bar ha stipulato un contratto commericale con un’industria di torrefazione per la fornitura esclusiva di caffè. L’industria ha a disposizione due impianti di torrefazione T_1 e T_2 con cui dovrà rifornire i tre bar B_1, B_2 e B_3 della catena. Vista la differente distanza tra gli impianti e i bar e i differenti mezzi di trasporto utilizzati, i costi di trasporto euro/chilogrammo di caffè da un impianto ad un bar risultano differenti e sono riassunti nella seguente tabella:

	B_1	B_2	B_3
T_1	$0,4$	$0,3$	$0,2$
T_2	$0,2$	$0,3$	$0,5$

Sapendo che gli impianti di torrefazione T_1 e T_2 possono produrre giornalmente al massimo 54 e 44 Kg di caffè e che i tre bar necessitano di 35, 30 e 33 Kg di caffè, qual è la quantità da trasportare da ogni impianto a ogni bar per minimizzare i costi?

Quesito: fornire un modello di programmazione lineare del problema.

Conclusione

Sondaggio finale

www.menti.com

Codice: 3610 0430

Link utile: *https://www.youtube.com/watch?v=_oohQ8c6PFg*