ROAR!

Ricerca Operativa Applicazioni Reali

Alessandro Gobbi Alice Raffaele Gabriella Colajanni Eugenia Taranto

IIS Antonietti, Iseo (BS) 06 maggio 2021

Organizzazione della lezione

- · Parte 1: Correzione dei compiti (30 minuti)
- · Parte 2: Compiti autentici (30 minuti)

Parte 1:

Correzione dei compiti

Compito a casa – La dieta mediterranea (I)

Secondo un nutrizionista sostenitore della dieta mediterranea, le quantità minime di nutrienti che devono essere assunte ogni giorno sono 1700 chilocalorie, 200 g di carboidrati, 70 g di proteine, 60 g di grassi e 0,7 g di calcio. Generalmente, il nutrizionista è solito prescrivere una dieta composta da otto alimenti: pane, pasta, latte, uova, pollo, tonno, cioccolato e verdure. La seguente tabella mostra quante calorie (in Kcal), carboidrati, proteine, grassi (in grammi) e calcio (in mg) fornisce una porzione di ogni alimento:

	Pane	Pasta	Latte	Uova	Pollo	Tonno	Cioccolato	Verdure
Calorie (kcal)	150	390	70	70	150	150	112	45
Carboidrati (g)	30	75	5	0	2	0	7	8
Proteine (g)	5	11	5	6	36	25	2	3
Grassi (g)	2	3	3	6	5	15	10	2
Calcio (mg)	52	5	150	50	22	4	11	50

Compito a casa – La dieta mediterranea (II)

Il nutrizionista raccomanda anche almeno due porzioni di verdura al giorno, mentre il numero massimo di porzioni per ogni alimento è riportato nella tabella seguente:

	Pane	Pasta	Latte	Uova	Pollo	Tonno	Cioccolato	Verdure
N° max di porzioni	2	2	2	1	1	2	2	6

Il numero di porzioni di pane e pasta non può essere maggiore di 3, mentre quello delle porzioni di latte, pollo e tonno deve essere almeno 4. Inoltre, il nutrizionista vuole che nella dieta ci siano esattamente 7 degli otto alimenti proposti. Il costo (in €) di una porzione di ogni alimento è il seguente:

	Pane	Pasta	Latte	Uova	Pollo	Tonno	Cioccolato	Verdure
Costo per porzione	0,50	3,50	1,00	1,50	4,50	2,00	1,50	4,00

Determinare quali alimenti dovranno essere mangiati in un giorno per rispettare tutte le prescrizioni della dieta indicata dal nutrizionista, in modo tale da minimizzare il costo totale.

Compito a casa – Variabili, vincoli e funzione obiettivo (I)

Variabili:

- X_{PAN}, X_{PAS}, X_{LAT}, X_{UOV}, X_{POL}, X_{TON}, X_{CIO}, X_{VER} ≥ 0: rappresentano il numero di porzioni di ogni alimenti da inserire nella dieta;
- y_{PAN}, y_{PAS}, y_{LAT}, y_{UOV}, y_{POL}, y_{TON}, y_{CIO}, y_{VER} ∈ {0,1}: ogni variabile binaria indica se l'alimento corrispondente è inserito o no nella dieta.

Vincoli:

· Calorie:

```
150x_{PAN} + 390x_{PAS} + 70x_{LAT} + 70x_{UOV} + 150x_{POL} + 150x_{TON} + 112x_{CIO} + 45x_{VER} \ge 1700
```

· Carboidrati:

$$30x_{PAN} + 75x_{PAS} + 5x_{LAT} + 0x_{UOV} + 2x_{POL} + 0x_{TON} + 7x_{CIO} + 8x_{VER} \ge 200$$

· Proteine:

$$5x_{PAN} + 11x_{PAS} + 5x_{LAT} + 6x_{UOV} + 36x_{POL} + 25x_{TON} + 2x_{CIO} + 3x_{VER} \ge 70$$

- Grassi: $2x_{PAN} + 3x_{PAS} + 3x_{LAT} + 6x_{UOV} + 5x_{POL} + 15x_{TON} + 10x_{CIO} + 2x_{VER} \ge 60$
- · Calcio:

$$52x_{PAN} + 5x_{PAS} + 150x_{LAT} + 50x_{UOV} + 22x_{POL} + 4x_{TON} + 11x_{CIO} + 50x_{VER} \ge 700$$

Compito a casa – Variabili, vincoli e funzione obiettivo (II)

- Numero massimo di porzioni: $x_{PAN} \le 2y_{PAN}$; $x_{PAS} \le 2y_{PAS}$; $x_{LAT} \le 2y_{LAT}$; $x_{UOV} \le 1y_{UOV}$; $x_{POL} \le 1y_{POL}$; $x_{TON} \le 2y_{TON}$; $x_{CIO} \le 2y_{CIO}$; $x_{VER} \le 6y_{VER}$.
- · Porzioni e alimenti:
 - Verdure: $x_{VFR} > 2$:
 - Pane e pasta: $x_{PAN} + x_{PAS} \le 3$;
 - Pollo e tonno: $X_{LAT} + X_{POL} + X_{TON} \ge 4$.
- Varietà: $y_{PAN} + y_{PAS} + y_{LAT} + y_{UOV} + y_{POL} + y_{TON} + y_{CIO} + y_{VER} = 7$.

Funzione obiettivo: minimizzare i costi totali

$$0,50x_{PAN}+3,50x_{PAS}+1x_{LAT}+1,50x_{UOV}+4,50x_{POL}+2x_{TON}+1,50x_{CIO}+4x_{VER}$$
.

Compito a casa – Modello

```
\min 0.50x_{PAN} + 3.50x_{PAS} + 1x_{IAT} + 1.50x_{IIOV} + 4.50x_{POI} + 2x_{TON} + 1.50x_{CIO} + 4x_{VER}
150x_{PAN} + 390x_{PAS} + 70x_{IAT} + 70x_{IJOV} + 150x_{POJ} + 150x_{TON} + 112x_{CIO} + 45x_{VFR} \ge 1700
        30x_{PAN} + 75x_{PAS} + 5x_{IAT} + 0x_{IIOV} + 2x_{POI} + 0x_{TON} + 7x_{CIO} + 8x_{VER} > 200
        5x_{PAN} + 11x_{PAS} + 5x_{IAT} + 6x_{IIOV} + 36x_{POI} + 25x_{TON} + 2x_{CIO} + 3x_{VER} > 70
         2x_{PAN} + 3x_{PAS} + 3x_{IAT} + 6x_{IIOV} + 5x_{POI} + 15x_{TON} + 10x_{CIO} + 2x_{VER} > 60
    52x_{PAN} + 5x_{PAS} + 150x_{LAT} + 50x_{UOV} + 22x_{POL} + 4x_{TON} + 11x_{CIO} + 50x_{VFR} \ge 700
                                               XPAN < 2VDAN
                                               XDAS < 2VDAS
                                               X_{IAT} \leq 2y_{IAT}
                                               x_{UOV} \leq 1y_{UOV}
                                              x_{POL} \leq 1,5y_{POL}
                                              x_{TON} < 1.5 v_{TON}
                                               x_{CIO} < 1y_{CIO}
                                               XVFR < 5VVFR
                                                  \chi_{VFR} > 2
                                             X_{P\Delta N} + X_{P\Delta S} < 3
                                        XIAT + XPOI + XTON > 4
                 V_{PAN} + V_{PAS} + V_{IAT} + V_{IIOV} + V_{POI} + V_{TON} + V_{CIO} + V_{VER} = 7
```

6

Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (I)

Inseriamo i parametri noti del problema:

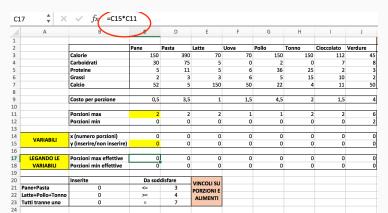
В	С	D	E	F	G	Н	1	J	K	L
									VINCO	LI SUI NUTRIENTI
	Pane	Pasta	Latte	Uova	Pollo	Tonno	Cioccolato	Verdure	Quantità ottenute	Quantità da soddisfare
Calorie	150	390	70	70	150	150	112	45	0	1700
Carboidrati	30	75	5	0	2	0	7	8	0	200
Proteine	5	11	5	6	36	25	2	3	0	70
Grassi	2	3	3	6	5	15	10	2	0	60
Calcio	52	5	150	50	22	4	11	50	0	700
Costo per porzione	0,5	3,5	1	1,5	4,5	2	1,5	4		
Porzioni max	2	2	2	1	1	2	2	6		
Porzioni min	0	0	0	0	0	0	0	2		

Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (II)

Inseriamo le variabili (inizializzate a zero):

,										
1	VADIABILI	x (numero porzioni)	0	0	0	0	0	0	0	0
5	VARIADILI	y (inserire/non inserire)	0	0	0	0	0	0	0	0

Leghiamo le variabili x e y tra di loro, definendo le porzioni massime e minime effettive:



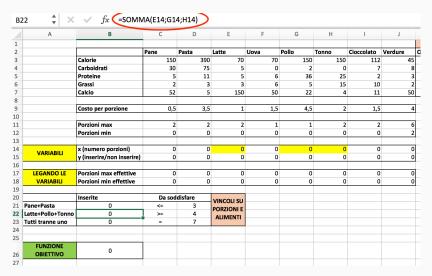
Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (III)

Definiamo i vincoli, partendo da quelli sulle porzioni. Il numero di porzioni di pane e pasta è al più 3:

	A	В	C	D	E	F	G	H	1	J
			Pane	Pasta	Latte	Uova	Pollo	Tonno	Cioccolato	Verdure
		Calorie	150	390	70	70	150	150	112	4
		Carboidrati	30	75	5	0	2	0	7	
		Proteine	5	11	5	6	36	25	2	
		Grassi	2	3	3	6	5	15	10	
		Calcio	52	5	150	50	22	4	11	5
		Costo per porzione	0,5	3,5	1	1,5	4,5	2	1,5	
0										
1		Porzioni max	2	2	2	1	1	2	2	
2		Porzioni min	0	0	0	0	0	0	0	
3										
1	VARIABILI	x (numero porzioni)	0	0	0	0	0	0	0	
5	VAKIABILI	y (inserire/non inserire)	0	0	0	0	0	0	0	
6										
7	LEGANDO LE	Porzioni max effettive	0	0	0	0	0	0	0	
3	VARIABILI	Porzioni min effettive	0	0	0	0	0	0	0	
9										
0		Inserite	Da sod	disfare	VINCOLI SU					
L	Pane+Pasta	0	<=	3	PORZIONI E					
2	Latte+Pollo+Tonno	0	>=	4	ALIMENTI					
3	Tutti tranne uno	0	=	7						
1										
5										
6	FUNZIONE OBIETTIVO	0								

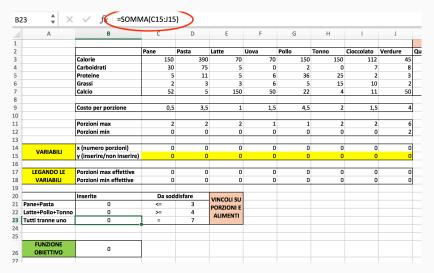
Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (IV)

Il numero di porzioni di latte, pollo e tonno è almeno 4:



Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (V)

Esattamente sette alimenti devono essere inseriti nella dieta:



Compito a casa - Risoluzione con Excel Solver (VI)

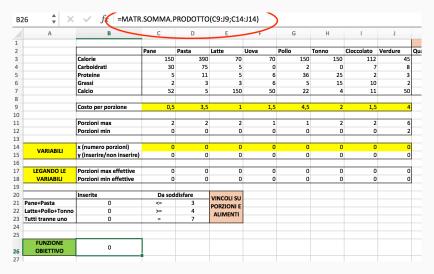
Almeno 1700 chilocalorie devono essere assunte in un giorno:

3	\$ ×	✓ f _x =MATR	.SUMMA.	PRODOTIC	O(C3:J3;C14	1:J14)						
	A	В		D		F	G	Н	- 1	J	K	L
											VINCO	LI SUI NUTRIENTI
			Pane	Pasta	Latte	Uova	Pollo	Tonno	Cioccolato	Verdure	Quantità ottenute	Quantità da soddisfare
		Calorie	150	390	70	70	150	150	112	45	0	170
		Carboidrati	30	75	5		2	0	7	8	0	20
		Proteine		11	. 5	- 6	36	25	2	3	0	71
		Grassi	- 2		3	- 6	5	15	10	2	0	6
		Calcio	52		150	50	22	4	11	50	0	70
		Costo per porzione	0,5	3,	. 1	1,5	4,5	2	1,5	4		
		Porzioni max	- 2	! :	. 2	1	1	2	2	6		
		Porzioni min	() (0		0	0	0	2		
	VARIABILI	x (numero porzioni)	() (0		0	0	0	0		
	VARIABILI	y (inserire/non inserire)	() (0		0	0	0	0		
L	EGANDO LE	Porzioni max effettive	() (0		0	0	0	0		
	VARIABILI	Porzioni min effettive) (0		0	0	0	0		

Allo stesso modo, dobbiamo aggiungere dei vincoli per le quantità minime di carboidrati, proteine, grassi e calcio da mangiare ogni giorno.

Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (VII)

Possiamo ora definire la funzione obiettivo:



Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (VIII)

Il modello implementato completamente è il seguente:

	A	В	С	D	E	F	G	Н		J	K	L
1												LI SUI NUTRIENTI
2			Pane			Uova		Tonno	Cioccolato		Quantità ottenute	Quantità da soddisfare
3		Calorie	150		70	70	150	150	112	45	0	
4		Carboidrati	30		5							
5		Proteine	5	11	5						0	
6		Grassi	2	3	3		5	15	10	2	0	60
7		Calcio	52	5	150	50	22	4	11	50	0	700
8												
9		Costo per porzione	0,5	3,5	1	1,5	4,5	2	1,5	4		
10												
11		Porzioni max	2									
12		Porzioni min	0	0	0	0	0	0	0	2		
13												
14	VARIABILI	x (numero porzioni)	0									
15	VAINABILI	y (inserire/non inserire)	0	0	0	0	0	0	0	0		
16												
17	LEGANDO LE	Porzioni max effettive	0									
18	VARIABILI	Porzioni min effettive	0	0	0		0	0	0	0		
19												
20		Inserite		ldisfare	VINCOLI SU							
21	Pane+Pasta	0	<=	3	PORZIONI E							
22	Latte+Pollo+Tonno	0	>=	4	ALIMENTI							
23	Tutti tranne uno	0	-	7								
24												
25												
26	FUNZIONE OBIETTIVO	0										
27			1									

Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (IX)

Procediamo ora risolvendo il modello con Excel Solver:

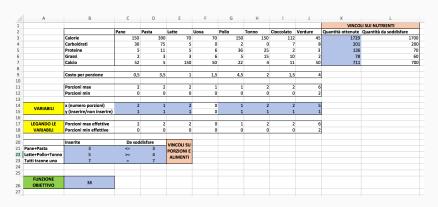
mposta obiettivo	: SB\$26	
A: Max	O Min O Valore di:	
Modificando le ce	lle variabili:	
\$C\$14:\$J\$15		
ioggette ai vincol	li:	
\$B\$21 <= \$D\$2 \$B\$22 >= \$D\$2		Aggiungi
\$B\$23 = \$D\$23		Cambia
SC\$14:SJ\$14 <-		Callibia
SC\$14:\$I\$14 >=	= SC\$18:\$I\$18	Elimina
SC\$15:\$J\$15 = SK\$3 >= \$L\$3	binario	
SKS4 >= SLS4		Reimposta tutti
\$K\$5 >= \$L\$5 \$K\$6 >= \$1\$6		Carica/Salva
Pandi non no	gative le variabili senza vincoli	
	-	
Selezionare un mi risoluzione:	etodo di Simplex LP	Opzioni
Metodo di risoluz		
Selezionare il mot	tore GRG non lineare per i problemi onare il motore Simplex LP per i pro	lisci non lineari del iblemi lineari e il
motore evolutivo	per i problemi non lisci.	
motore evolutivo	per i problemi non lisci.	

Nota: nello screenshot qui sopra non sono mostrati tutti i vincoli inseriti.

NB: aggiungiamo dei vincoli che impongono che le variabili *x* siano intere (visto che rappresentano il numero di porzioni) e che le variabili *y* siano invece binarie (indicando appunto una scelta Sì/No).

Compito a casa – Risoluzione con Excel Solver (X)

Soluzione ottima: sono inseriti nella dieta tutti gli alimenti eccetto le uova, spendendo 38 euro.



Parte 2: Compiti autentici e applicazioni

Compito A – Turni del personale

SuperAmazingMarket deve riorganizzare il proprio personale addetto alla cassa, in base alle esigenze minime espresse nella tabella seguente per ogni fascia oraria:

Fascia oraria	3-7	7-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-23	23-3
Durata turno (ore)	8	8	4	4	4	6	8	8
Numero minimo persone	7	15	12	20	15	20	10	5

Ogni cassiere inizia il proprio turno lavorativo all'inizio di una delle due fasce orarie. La durata del turno dipende dalla fascia in cui inizia a lavorare: sono previsti turni da otto ore consecutive per chi inizia a lavorare nel periodo notturno (23–7), turni da sei per chi inizia in serata (17–23), mentre sono previsti turni da quattro ore per chi inizia a lavorare nel periodo diurno (11–15). Si vuole determinare il numero minimo di dipendenti affinché le esigenze del supermercato siano soddisfatte in ogni fascia oraria.

Compito B – Apertura punti vendita

L'azienda SuperAmazingMarket possiede sei filiali sparse nel territorio, corrispondenti a sei supermercati, elencati nella tabella seguente assieme alle loro relative distanze (in chilometri):

	Chiari	Coccaglio	Rovato	Iseo	Brescia 1	Brescia 2
Chiari	-	4	5	21	25	27
Coccaglio	4	-	1	17	22	24
Rovato	5	1	-	14	20	22
Iseo	21	17	14	-	27	29
Brescia 1	25	22	20	27	-	2
Brescia 2	27	24	22	29	2	-

Per esempio, il supermercato situato a Chiari dista 5 km da quello a Rovato, mentre il supermercato a Iseo dista 27 km da quello a Brescia 1.

Il manager di *SuperAmazingMarket* vuole riorganizzare gli orari di apertura domenicali, decidendo per ogni supermercato se aprirlo al mattino e/o al pomeriggio, in modo tale che, nel raggio di 20 chilometri da ogni supermercato, ce ne sia almeno uno aperto.

Non è detto che tutti i supermercati possano sempre aprire: nella tabella seguente sono infatti indicate le possibilità di apertura e i relativi costi di attivazione.

	Mattina	Costo apertura mattina (€)	Pomeriggio	Costo apertura pomer. (€)
Chiari	Sì	20.000	Sì	25.000
Coccaglio	Sì	15.000	No	-
Rovato	Sì	23.000	Sì	23.000
Iseo	No	_	Sì	17.000
Brescia 1	Sì	30.000	Sì	35.000
Brescia 2	Sì	35.000	Sì	45.000

Per esempio, il supermercato di Iseo non può essere aperto la mattina ma solo il pomeriggio; attivare l'apertura in tale fascia oraria costerebbe all'azienda 17.000 euro.

Determinare per ogni supermercato quali aperture attivare in modo tale da rispettare le condizioni indicate e soprattutto che i costi di attivazioni totali siano minimi. Ci sono supermercati "superflui"?

Compito C – Un cassiere numismatico

È quasi ora di chiusura e Geronimo, appassionato di numismatica, è rimasto il solo a servire gli ultimi quattro clienti alla cassa. A fine turno, controlla sempre tutte le monete da 1 euro rimaste in cassa alla ricerca di una particolarmente rara da aggiungere alla propria collezione.

Una sera il fondo cassa è formato da 22 banconote da 5 euro, 38 monete da 2 euro, 15 da 1 euro, 39 da 50 centesimi, e 34 da 20 centesimi. Geronimo vuole assicurarsi di avere in cassa, dopo gli ultimi quattro clienti, quante più monete da 1 euro. Per far ciò, chiede loro una stima della loro spesa e il metodo di pagamento che useranno. I quattro clienti gli rispondono che la stima della loro spesa è 47,50 euro, 27,80 euro, 18,50 euro e 33,60 euro, mentre il metodo di pagamento sarà rispettivamente una banconota da 50 euro, una banconota da 20 e una da 10 euro, una banconota da 20 euro, e infine due banconote da 20 euro.

Come dovrà dare il resto Geronimo per massimizzare il numero di monete da 1 euro rimanenti?

Compito D – Scorte e scaffali

Tea dell'azienda SuperAmazingMarket deve sistemare diversi tipi di prodotti su uno scaffale. Nella tabella seguente sono indicate, per ogni prodotto, le quantità rimanenti sullo scaffale e le scorte in magazzino.

	Accendino	Borraccia	Coltellino	Dentifricio	Elastico	Fischietto	Guanti	Helios scarpa
Scaffale	0	2	2	1	1	0	2	0
Magazzino	4	1	2	3	5	6	4	6

Il direttore della *SuperAmazingMarket* ha stabilito che sullo scaffale devono essere presenti almeno tre accendini, una borraccia, tre coltellini e tre dentifrici, cinque elastici, un fischietto, quattro guanti e tre scarpe Helios. Inoltre, da indagini di mercato, è stato rilevato che per ogni dentifricio sullo scaffale, devono essere presenti almeno due fischietti e che per ogni coltellino, devono esserci al più tre borracce.

Quanti prodotti, di ciascun tipo, Geronimo deve inserire o togliere, affinché l'azienda possa avere il miglior guadagno, tenendo conto che ogni prodotto ha un certo costo e volume indicati nella tabella seguente e che il volume massimo dello scaffale è di 100 dm³?

								Helios scarpa
Prezzo (€)								
Volume (cm ³)	834	5100	1360	570	3980	4700	6000	3350

Compito E – Cesti regalo

È Pasqua e l'azienda *SuperAmazingMarket* vuole creare dei cesti regalo da vendere ai propri clienti.

L'azienda ha disposizione diversi prodotti da poter inserire nei cesti, ognuno dei quali ha un certo prezzo e un certo peso, indicati nella tabella seguente.

	Profitto (€)	Peso (kg)
Agnello di cioccolato	2,1	0,2
Bambola	6,99	0,5
Colomba	7,2	1
Diario	9,4	1
Etichetta	3,35	0,3
Francobolli	5,75	0,9
Gioco da tavolo	8,7	1,4
Hit in CD	4,8	0,6
Imbuto	5,25	0,4
Lampada	3,99	0,7

L'azienda può realizzare cinque cesti: uno con al massimo 1 kg di prodotti; un altro 3 kg; due cesti possono contenere al massimo 2 kg di prodotti; infine, l'ultimo cesto può contenere 2,5 kg.

Il manager dell'azienda ha dato a Benjamin il compito di stabilire quali cesti utilizzare tra quelle disponibili e quale prodotto inserire in ogni cesto al fine di massimizzare i profitti totali.