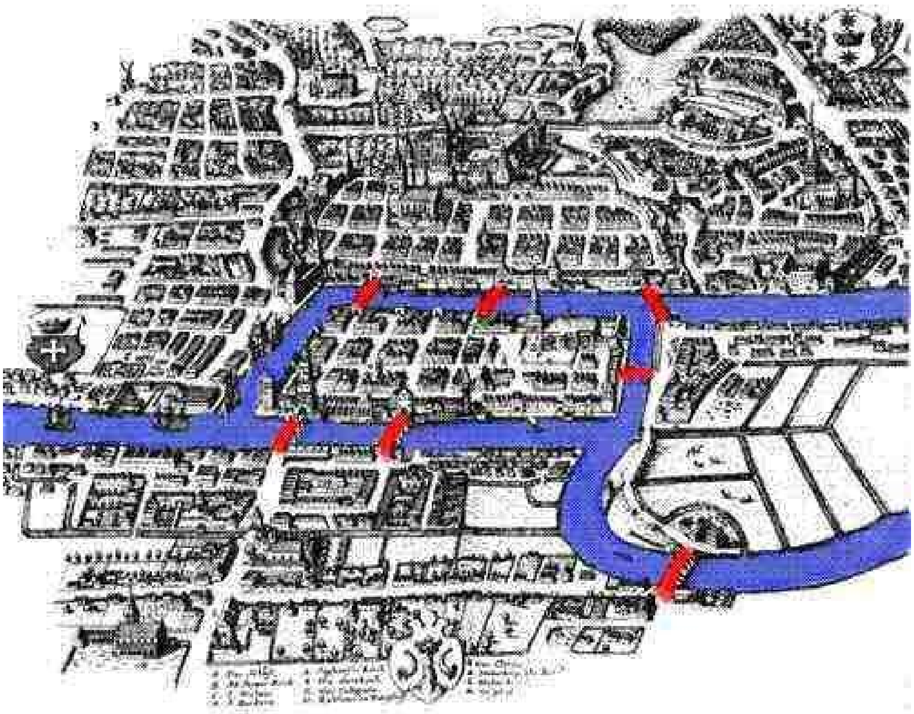
LA NASCITA DELLA TEORIA DEI GRAFI

Livello di difficoltà: intermedio

Parole chiave:
- Teoria dei grafi
- Grafi euleriani
- Teoremi di Eulero

0) Introduzione

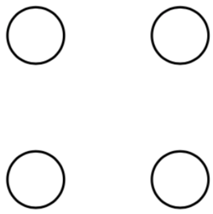


Data questa mappa di una città attraversata da un fiume, è possibile attraversare tutti i ponti una e una sola volta? Motivare la risposta.

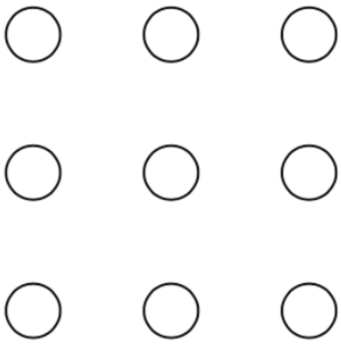
1) Un primo salto nel passato: il gioco dei “9 punti”

Nei primi anni di scuola avete mai sfidato il vostro compagno di banco a “unire i puntini” senza mai staccare la penna dal foglio?

Partiamo con quattro puntini: riuscite a collegarli tutti senza mai staccare la penna dal foglio? Indicate il punto di partenza e quello finale, e inoltre segnate il verso di percorrenza dei collegamenti che inserirete. Potete usare soltanto linee rette.

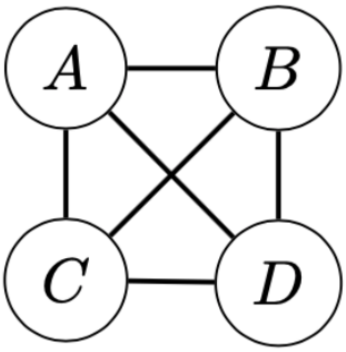
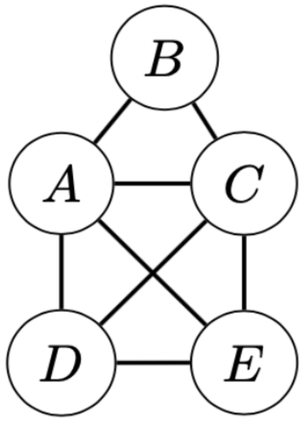
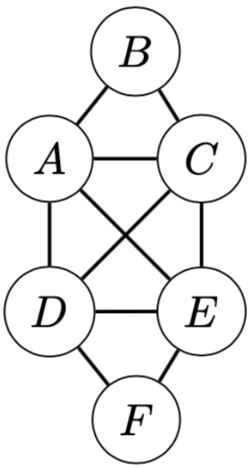
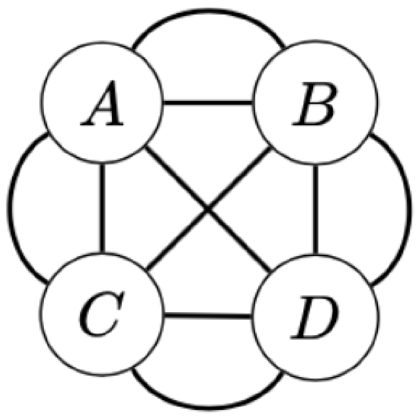


E se i puntini fossero invece i seguenti nove? E se i puntini fossero invece i seguenti nove? Anche qui, potete usare solo linee rette, anzi, solo quattro.



2) Non solo puntini (o vertici), ma anche lati…

Consideriamo ora alcuni grafi. Riuscite a unire tutti i puntini senza mai staccare la penna dal foglio, **passando per ogni lato una e una sola volta**?
Come prima, indicate il vertice di partenza e quello finale, e inoltre segnate il verso di percorrenza di ogni lato.

<table>
<tr><td>a)
</td><td>b)
</td></tr>
<tr><td>c)
</td><td>d)
</td></tr>
</table>

In quali di questi grafi siete riusciti a passare su tutti i lati una sola volta senza mai staccare la penna dal foglio?

a)	b)	c)	d)

In quanti modi siete riusciti a farlo? Ovvero, la soluzione è unica oppure ne esistono diverse? Indicate la risposta per ogni grafo.

a)	b)	c)	d)

Se ci sono soluzioni multiple, cosa hanno di diverso (o in comune) tra loro?

____

____

____

____

____

____

Nella teoria dei grafi, come si chiama formalmente il tratto che avete disegnato per ogni grafo?

____

3) Qualche definizione formale

Dato un grafo *G = (V, E)*:

- un cammino si dice **semplice** se i vertici sono tutti diversi tra loro;

- un cammino è in realtà un **ciclo** quando il primo e l'ultimo vertice coincidono ed è composto da almeno tre lati;

- un **cammino** si dice **euleriano** quando percorre **tutti** i lati del grafo una sola volta;

- quando il cammino euleriano inizia e termina nello stesso vertice, si dice **ciclo euleriano**;

- *G* è detto **semi-euleriano** quando contiene un cammino euleriano;

- *G* è detto **euleriano** quando contiene un ciclo euleriano.

Nelle Attività 1 e 2, vi è stato quindi chiesto di determinare l'esistenza di un cammino…

____

Se, dato un grafo, affermate che ammette questo tipo di cammino, come potete provare e supportare la vostra affermazione?

____

Se in un grafo non trovate un cammino euleriano, potete affermare con certezza che tale cammino non esista? Perchè?

____

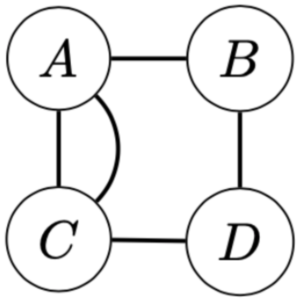
Riuscite a stabilire un numero minimo di tentativi con cui potete affermare che in un grafo non esista nessun cammino euleriano? Se sì, come? Se no, perché?

____

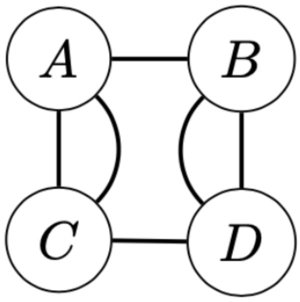
4) Analizzando meglio i grafi

Aggiungiamo alla collezione di grafi precedentemente esaminati – da a) a d) – i seguenti tre:

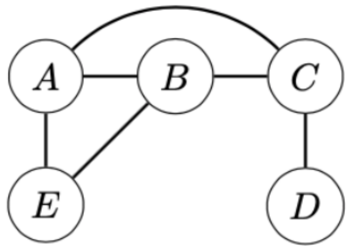
e)



f)



g)



In ognuno dei grafi da a) a g), completate la seguente tabella.

Grafo	**Ammette un cammino euleriano?**	**Numero di vertici**	**Numero di lati**	**Grado di ogni vertice**
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				
g)				

Osservando i dati raccolti in tabella, cosa notate?

5) Verso un metodo generale

Osservate con attenzione le proprietà dei grafi che ammettono un cammino euleriano e quelle dei grafi che non lo ammettono. Quali regolarità potete riscontrare?
Provate a distinguere tra i vertici di partenza e di arrivo, e i vertici intermedi (detti anche *di transito*).

Dovreste avere scoperto che, se per un grafo vale una certa proprietà, allora ammette (o non ammette) l'esistenza di un cammino euleriano. Provate a scrivere qui sotto il vostro teorema in modo formale e rigoroso, e a spiegarlo considerando un grafo qualsiasi.

Se siete riusciti a rispondere, allora molto probabilmente avete appena enunciato uno dei due teoremi di Eulero, quello riguardante i cammini euleriani. Riuscirete quindi sempre a determinare quando un grafo ammette o no un cammino euleriano.
La regola che avete trovato vale per tutti i grafi di esempio proposti sopra?

____

____

____

In quali dei grafi il cammino euleriano che avete trovato è in realtà un **ciclo euleriano**?

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)

Il teorema che avete definito permette di determinare anche se un grafo contenga un ciclo euleriano? Se sì, perché? Se no, come si potrebbe partire da questo per arrivare a formulare *un secondo teorema* che esprima una proprietà per identificare i grafi in cui vi è almeno un ciclo euleriano? Ricontrollate anche l'enunciato del primo teorema.

Siete proprio certi che i vostri teoremi valgano per *qualsiasi* grafo? C'è qualche ulteriore condizione che dobbiamo imporre? Perché?

____

____

____

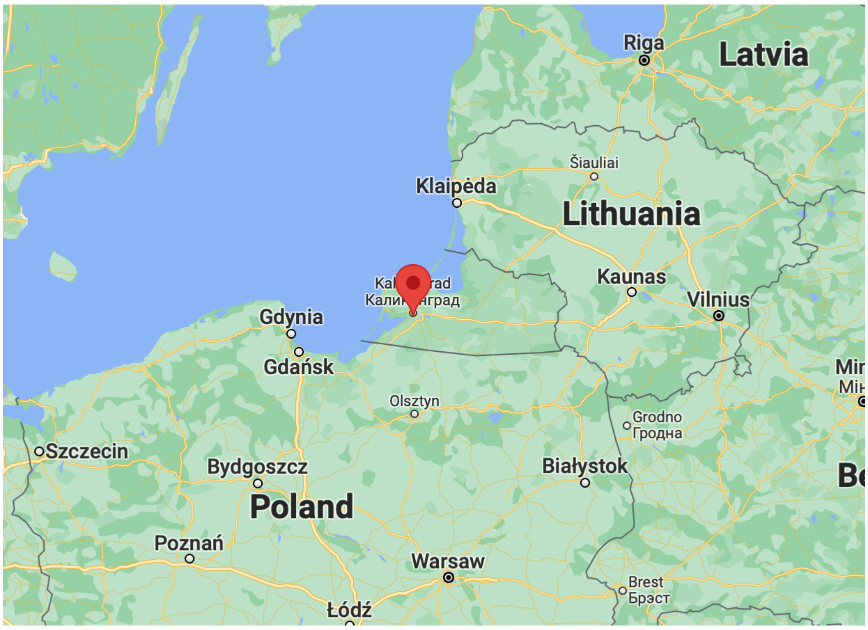
6) Esempi inventati da voi

Disegnate qui sotto tre grafi, diversi da tutti i precedenti, ognuno con almeno quattro vertici e cinque lati, tali che:

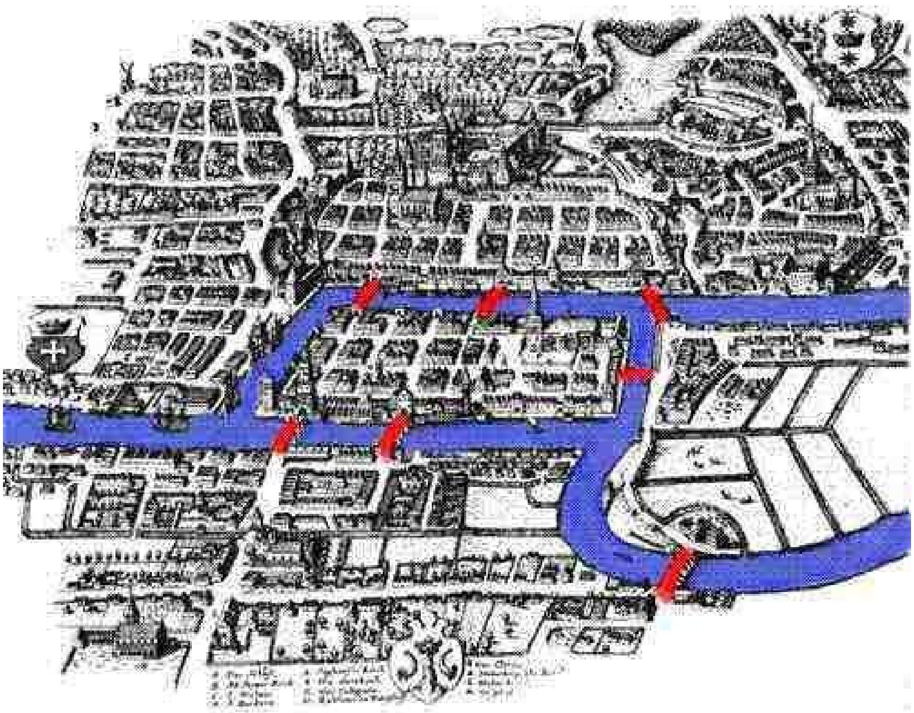
- il primo ammetta un cammino euleriano;
- il secondo ammetta un ciclo euleriano;
- il terzo non ammetta un cammino euleriano.

7) Un altro salto nel passato: 1736

La città russa *Kaliningrad*, situata sul Mar Baltico tra la Polonia e la Lituania, nel Settecento apparteneva in realtà alla Prussia ed era nota con il nome di **Königsberg**.



Königsberg è percorsa dal fiume Pregel e da alcuni suoi affluenti, che formano due estese isole. Nel Settecento, tali isole erano collegate tra loro e alle altre aree della città attraverso sette ponti.



Da "*Labirinti, quadrati magici e paradossi logici. I dieci più grandi enigmi matematici di tutti i tempi"* di Marcel Danesi:

"*Gli abitanti della città si chiedevano spesso se fosse possibile fare una passeggiata iniziando da un punto qualsiasi della città, per poi attraversare ogni ponte una e una sola volta e ritornare al punto di partenza. Nessuno era mai riuscito nell'intento, ma d'altra parte nessuno riusciva a dare una spiegazione del perché ciò sembrasse impossibile. Eulero rimase affascinato dalla questione e la trasformò in uno dei più grandi enigmi di ogni tempo:*

> *Nella città di Königsberg è possibile attraversare ognuno dei sette ponti sul fiume Pregel, che collegano due isole fra loro e alla terraferma, senza attraversare due volte lo stesso ponte?*

[...] Egli iniziò riducendo la mappa dell'area a una forma schematica, nota come grafo*, e riformulando l'enigma…*"

Rispetto alla terminologia che avete appreso fin qui, come pensate che Eulero abbia riformulato l'enigma in termini matematici più formali?

____

____

____

____

____

Disegnate il grafo corrispondente alla mappa dei sette ponti di Königsberg:

È possibile fare la passeggiata dei sette ponti di Königsberg, così come intendevano gli abitanti della città prussiana? Motivate la risposta, riconducedovi ai teoremi scoperti in precedenza.

Quando, nel 1736, Eulero presentò la propria soluzione al problema dei ponti di Königsberg all'Accademia Russa e scrisse l'articolo scientifico intitolato "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*", nacque ufficialmente la disciplina della teoria dei grafi. Fu la prima volta infatti che venne utilizzato il termine "*grafo*".

Ma non solo: il risultato di Eulero è considerato anche uno dei primissimi risultati di un'altra branca della matematica, più particolarmente della geometria: la *topologia*.
La topologia studia le proprietà delle figure e degli oggetti matematici che non cambiano quando viene effettuata una deformazione. Infatti, alcuni problemi geometrici dipendono, più che dalla forma, soltanto dalle *connessioni* presenti tra gli oggetti. Potete pensare a un grafo, se mantenete invariato l'insieme dei lati (se non ne aggiungete o non ne togliete), come a un oggetto topologico. I due teoremi di Eulero che avete scoperto non dipendono da alcun tipo di misura. Ci sono quindi alcune intersezioni tra la teoria dei grafi e la topologia.

8) Tornando nel presente…

Descrivete una situazione reale e attuale in cui potrebbe essere molto utile conoscere se il grafo corrispondente ammetta (o no) un cammino o un ciclo euleriano.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____