

# ROAR!

*Ricerca Operativa: Applicazione Reali*

---

Alessandro Gobbi   Alice Raffaele

IIS Antonietti, Iseo (BS)

15 marzo 2021

# Introduzione

---

# Chi siamo e i nostri contatti



Alessandro Gobbi (UniBS)  
*alessandro.gobbi@unibs.it*



Alice Raffaele (Univr)  
*alice.raffaele@univr.it*



Gabriella Colajanni (Unict)  
*colajanni@dm.unict.it*



Eugenia Taranto (Unict)  
*eugenia.taranto@unict.it*



*[www.menti.com](https://www.menti.com)*

# ROAR: perché questo nome?

Perché... la matematica è dappertutto! Ha un sacco di **applicazioni reali** e ve lo dimostreremo con:

1. casi di studio della vostra quotidianità;
2. casi di studio industriali.

Metodologia didattica: uso di **progetti**

- assegnamento di un compito da affrontare a gruppi;
- presentazione finale.

Una breve introduzione alla Ricerca Operativa:

*<https://www.youtube.com/watch?v=E-430D4gChU>*

## Cinque incontri con noi:

1. 15 marzo (5 ore - Introduzione, problema dello zaino, modelli a due variabili, presentazione compito autentico)
2. 27 marzo (2,5 ore - Modelli a due variabili e risoluzione grafica)
3. 12 aprile (5 ore - Metodo del simplesso)
4. 24 aprile (2,5 ore - Modellizzazioni classiche e solver)
5. Settimana dal 10 al 15 maggio (2,5 ore - Esposizione progetti)

Parte 1:

Introduzione ai problemi di  
decisione e di ottimizzazione

---



*[www.menti.com](https://www.menti.com)*



# Come sfruttare al massimo il tuo tempo libero?

Hai già finito di studiare per la verifica di matematica di domani, e hai due ore e mezza libere. Decidi così di guardare qualche episodio delle tue serie TV preferite. Siccome ti annoi facilmente, guardi al massimo solo un episodio di una certa serie TV, poi cambi.



Serie TV	Durata (min)
La Casa di Carta	60
Numb3rs	40
Stranger Things	45
The Defenders	40

## Quesiti

- Quali serie TV scegli di guardare, per sfruttare al massimo il tempo libero a disposizione?
- Quante combinazioni puoi fare?

## Alcune definizioni utili

- **Fattoriale:** dato un numero naturale  $n$ , si indica con  $n!$  il prodotto dei numeri interi positivi minori o uguali a  $n$ .

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Esempio: quanti anagrammi puoi fare con la parola *rosa*? Ha quattro lettere diverse, quindi  $4 * 3 * 2 * 1 = 4!$ .

- **Combinazione semplice:** dato un insieme  $S$  di cardinalità  $n$ , il numero di sottoinsiemi di  $S$  aventi cardinalità  $k \leq n$  è pari al numero di **disposizioni di  $n$  elementi di classe  $k$**  diviso per il numero di **permutazioni** di  $k$  elementi.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Esempio: per risolvere questo esercizio, scegliamo 3 di voi 25. Quanti possibili gruppi possiamo fare?  $\binom{25}{3} = \frac{25!}{3! \cdot 22!}$ .

# Numero massimo di soluzioni

Quante combinazioni ci sono in questo problema?

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{0}$$

↓

Generalizzando la formula per scegliere  $n$  episodi:

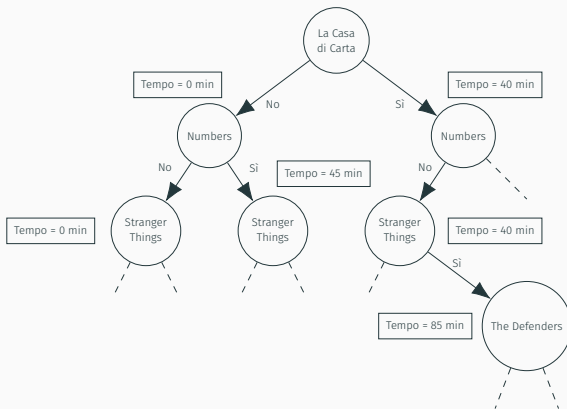
$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}$$

# Alcuni procedimenti possibili per risolvere il problema di Netflix

- Selezionare gli episodi casualmente.
- Ricerca esaustiva
  - a mano;
  - automaticamente (con dei programmi scritti apposta).

# Ricerca esaustiva delle soluzioni ammissibili

Sfruttiamo un **albero binario**:



Quante sono le *foglie* dell'albero?

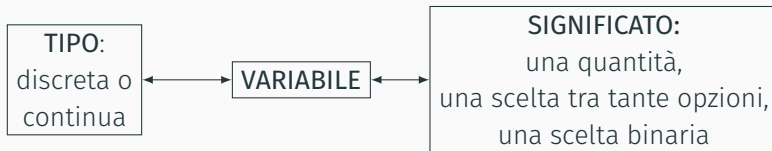
Corrispondono alla somma  $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$  ?

# Quale soluzione scegliere?

- **Qualità** di una soluzione;
- Soluzione **ammissibile** e soluzione **ottima**;
- Quanto tempo serve per trovare la soluzione ottima?

# Variabili

- Variabili **continue** e variabili **discrete**
- Una variabile in Ricerca Operativa:



## Quesiti

- Quali sono le variabili del nostro problema di Netflix?
- E quale significato assegniamo loro?

# Vincoli (I)

A volte in un problema reale alcune scelte non possono essere fatte!



Le variabili del nostro problema non possono assumere tutti i valori possibili: ci sono dei **vincoli** che limitano il loro *dominio*.



Ogni *scelta vietata* rappresenta un vincolo del nostro problema.

## Quesiti

- Quali sono le scelte vietate del problema di Netflix?
- E quante sono le scelte vietate (= i vincoli) complessivamente?

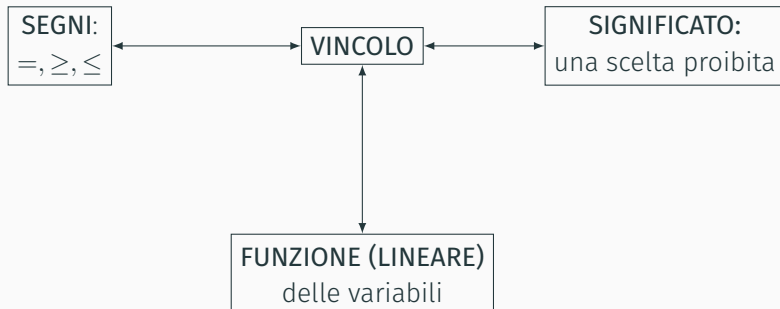


- Nella Ricerca Operativa, un vincolo è rappresentato da un'equazione o una disequazione formulata usando le variabili del problema.
- In molti casi, queste funzioni sono **lineari**.

### Quesiti

- Cosa vuol dire *lineare*?
- Esempi di alcune funzioni lineari?

## Vincoli (III)



### Quesito

Come possiamo *trasformare* una scelta vietata del nostro problema in un'equazione lineare?

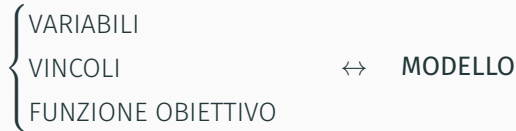
# Funzione obiettivo

- In base a quale *criterio* decidiamo che una soluzione sia ottima?
- Tale criterio è definito dalla **funzione obiettivo**, un'altra funzione (molto spesso lineare) delle variabili



## Quesito

Come possiamo *esprimere*, in funzione delle variabili che abbiamo introdotto, la funzione obiettivo del nostro problema?



## Quesito

Aprire Netflix e considerare tutte le serie TV che appaiono nella prima striscia. A ognuna di queste assegnare un valore, da 1 a 10, che indichi la vostra preferenza (quanto vi piace o vi ispira quella serie TV). A questo punto, provate a formulare il modello matematico del problema di Netflix considerando di avere tre ore di tempo libero e di voler guardare le serie che vi piacciono di più, senza però superare il limite di quattro episodi.

## Budget aziendale

L'ufficio del Comune di Iseo deve rifornirsi di cancelleria: gli oggetti necessari e le loro quantità sono indicate nella tabella seguente, assieme ai relativi costi unitari. Il budget disponibile è di 500 euro. L'ufficio vuole massimizzare il numero di tipologie di oggetti acquistati.

TIPOLOGIA OGGETTO	QUANTITÀ	COSTO UNITARIO (€)
Matita	300	0,50
Penna	200	0,60
Gomma	150	0,50
Righello	100	1,50
Risma di carta	80	3,90
Toner per stampante	12	14,90

- Trovare la soluzione ottima del problema con la stessa tecnica usata per il problema delle Serie TV (per esempio, comprando tutte le 300 matite richieste oppure neanche una) e formulare il modello matematico del problema;
- Formulare il modello matematico considerando la quantità come il numero massimo di prodotti disponibili per oggetto e spendendo il budget il più possibile.

## Parte 2:

# Modelli di ottimizzazione

---



*[www.menti.com](https://www.menti.com)*

## In forneria

Un fornaio ogni mattina prepara per il suo negozio una gustosa focaccia genovese e una pizza margherita al taglio. Per la preparazione e la cottura di un chilogrammo di pizza sono richiesti rispettivamente 10 minuti e 40 minuti. Per produrre invece un chilogrammo di focaccia sono previsti 1 ora di preparazione dell'impasto e 1 e 20 di cottura nel forno. Avendo anche altri prodotti da preparare, il fornaio non può dedicare nel complesso più di 6 ore alla lavorazione di questi prodotti. Supponendo che il fornaio riesca a vendere tutto ciò che prepara e sapendo che il prezzo di vendita per focaccia e pizza è rispettivamente 3 euro/Kg e 8 euro/Kg, quale è la produzione giornaliera più redditizia?



### “C'è l'insalata!” (cit.)

Un'azienda agricola deve determinare quanti ettari di terreno devono essere dedicati alla produzione di lattuga e pomodori. Si è stimato che, coltivando un ettaro di terreno, si possono produrre annualmente 20 quintali di lattuga e 30 quintali di pomodori. Per portare a termine le coltivazioni, l'azienda dovrà assegnare un suo bracciante ad ogni ettaro coltivato a lattuga e due braccianti ad ogni ettaro coltivato a pomodori. Per avere sufficiente manodopera per le altre coltivazioni, l'azienda non vuole utilizzare più di 100 lavoratori. Sapendo che l'azienda vende ogni chilogrammo di lattuga e pomodoro rispettivamente a 1 euro e a 1.5 euro, e vuole assicurarsi un profitto annuo di almeno 50000 euro dalla vendita di questi due prodotti, quanti ettari dovrà dedicare alla coltivazione di lattuga e quanti alla coltivazione di pomodori per minimizzare il numero complessivo di ettari coltivati?

## C'è sempre spazio per il dolce

La Kondor Ferrari è un'azienda dolciaria che produce tre tipi di cioccolato: bianco, al latte e fondente. Ogni Kg di cioccolato richiede le quantità (in Kg) di zucchero, cacao, latte e vaniglia mostrate in tabella.

Cioccolato	Zucchero	Cacao	Latte	Vaniglia
bianco	0.2	0.2	0.4	0.2
al latte	0.2	0.3	0.5	0.0
fondente	0.1	0.7	0.2	0.0

Ogni giorno l'azienda ha a disposizione al massimo 70 Kg di zucchero, 40 Kg di cacao, 100 Kg di latte e 20 Kg di vaniglia. Per soddisfare la domanda di tutti i clienti, è necessario che l'azienda produca giornalmente almeno 10 Kg di cioccolato bianco, (che vende a 30 euro/Kg) almeno 30 Kg di cioccolato al latte (che vende a 20 euro/Kg) e almeno 35 Kg di cioccolato fondente (che vende a 40 euro/Kg). Qual è la quantità di cioccolata da produrre giornalmente in modo che il profitto della Kondor Ferrari sia massimo?

## “Buongiorno! Kaffè?”

Una catena di bar ha stipulato un contratto commerciale con un'industria di torrefazione per la fornitura esclusiva di caffè. L'industria ha a disposizione due impianti di torrefazione  $T_1$  e  $T_2$  con cui dovrà rifornire i tre bar  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  della catena. Vista la differente distanza tra gli impianti e i bar e i differenti mezzi di trasporto utilizzati, i costi di trasporto euro/chilogrammo di caffè da un impianto ad un bar risultano differenti e sono riassunti nella seguente tabella:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$T_1$	0,4	0,3	0,2
$T_2$	0,2	0,3	0,5

Sapendo che gli impianti di torrefazione  $T_1$  e  $T_2$  possono produrre giornalmente al massimo 54 e 44 Kg di caffè e che i tre bar necessitano di 35, 30 e 33 Kg di caffè, qual è la quantità da trasportare da ogni impianto a ogni bar per minimizzare i costi?

## Parte 3:

# Compito autentico

---

Un *compito autentico* è un “problema complesso e aperto, posto agli studenti per dimostrare la loro padronanza di qualcosa”

Siete i componenti dell'area di Ricerca Operativa di *SuperAmazingMarket*, una catena di supermercati della zona.

Volete migliorare vari aspetti della vostra azienda che al momento **non sono gestiti in maniera ottimale** oppure sono risolti ancora **manualmente**.

Per farlo, potete usare Internet e tutti gli strumenti informatici che conoscete o che apprenderete durante le lezioni di questo project work.

I risultati dovranno essere esposti al direttore esecutivo in forma di **presentazione**, a metà maggio.

## Compito A – Turni del personale

*SuperAmazingMarket* deve riorganizzare il proprio personale addetto alla cassa, in base alle esigenze minime espresse nella tabella seguente per ogni fascia oraria:

Fascia oraria	3-7	7-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-23	23-3
Durata turno (ore)	8	8	4	4	4	6	8	8
Numero minimo persone	7	15	12	20	15	20	10	5

Ogni cassiere inizia il proprio turno lavorativo all'inizio di una delle due fasce orarie. La durata del turno dipende dalla fascia in cui inizia a lavorare: sono previsti turni da otto ore consecutive per chi inizia a lavorare nel periodo notturno (23–7), turni da sei per chi inizia in serata (17–23), mentre sono previsti turni da quattro ore per chi inizia a lavorare nel periodo diurno (11–15). Si vuole determinare il numero minimo di dipendenti affinché le esigenze del supermercato siano soddisfatte in ogni fascia oraria.

## Compito B – Apertura punti vendita

L'azienda *SuperAmazingMarket* possiede sei filiali sparse nel territorio, corrispondenti a sei supermercati, elencati nella tabella seguente assieme alle loro relative distanze (in chilometri):

	Chiari	Coccaglio	Rovato	Iseo	Brescia 1	Brescia 2
Chiari	-	4	5	21	25	27
Coccaglio	4	-	1	17	22	24
Rovato	5	1	-	14	20	22
Iseo	21	17	14	-	27	29
Brescia 1	25	22	20	27	-	2
Brescia 2	27	24	22	29	2	-

Per esempio, il supermercato situato a Chiari dista 5 km da quello a Rovato, mentre il supermercato a Iseo dista 27 km da quello a Brescia 1.

Il manager di *SuperAmazingMarket* vuole riorganizzare gli orari di apertura domenicali, decidendo per ogni supermercato se aprirlo al mattino e/o al pomeriggio, in modo tale che, nel raggio di 20 chilometri da ogni supermercato, ce ne sia almeno un altro aperto.



Non è detto che tutti i supermercati possano sempre aprire: nella tabella seguente sono infatti indicate le possibilità di apertura e i relativi costi di attivazione.

	Mattina	Costo apertura mattina (€)	Pomeriggio	Costo apertura pomer. (€)
Chiari	Sì	20.000	Sì	25.000
Coccaglio	Sì	15.000	No	-
Rovato	Sì	23.000	Sì	23.000
Iseo	No	-	Sì	17.000
Brescia 1	Sì	30.000	Sì	35.000
Brescia 2	Sì	35.000	Sì	45.000

Per esempio, il supermercato di Iseo non può essere aperto la mattina ma solo il pomeriggio; attivare l'apertura in tale fascia oraria costerebbe all'azienda 17.000 euro.

Determinare per ogni supermercato quali aperture attivare in modo tale da rispettare le condizioni indicate e soprattutto che i costi di attivazioni totali siano minimi. Ci sono supermercati “superflui”?

## Compito C – Un cassiere numismatico

È quasi ora di chiusura e Geronimo, appassionato di numismatica, è rimasto il solo a servire gli ultimi quattro clienti alla cassa. A fine turno, controlla sempre tutte le monete da 1 euro rimaste in cassa alla ricerca di una particolarmente rara da aggiungere alla propria collezione.

Una sera il fondo cassa è formato da 22 banconote da 5 euro, 38 monete da 2 euro, 15 da 1 euro, 39 da 50 centesimi, e 34 da 20 centesimi. Geronimo vuole assicurarsi di avere in cassa, dopo gli ultimi quattro clienti, quante più monete da 1 euro. Per far ciò, chiede loro una stima della loro spesa e il metodo di pagamento che useranno. I quattro clienti gli rispondono che la stima della loro spesa è 47,50 euro, 27,80 euro, 18,50 euro e 33,60 euro, mentre il metodo di pagamento sarà rispettivamente una banconota da 50 euro, una banconota da 20 e una da 10 euro, una banconota da 20 euro, e infine due banconote da 20 euro.

Come dovrà dare il resto Geronimo per massimizzare il numero di monete da 1 euro rimanenti?

## Compito D – Scorte e scaffali

Tea dell'azienda *SuperAmazingMarket* deve sistemare diversi tipi di prodotti su uno scaffale. Nella tabella seguente sono indicate, per ogni prodotto, le quantità rimanenti sullo scaffale e le scorte in magazzino.

	Accendino	Borraccia	Coltellino	Dentifricio	Elastico	Fischietto	Guanti	Helios scarpa
Scaffale	0	2	2	1	1	0	2	0
Magazzino	4	1	2	3	5	6	4	6

Il direttore della *SuperAmazingMarket* ha stabilito che sullo scaffale devono essere presenti almeno tre accendini, una borraccia, tre coltellini e tre dentifrici, cinque elastici, un fischietto, quattro guanti e tre scarpe Helios. Inoltre, da indagini di mercato, è stato rilevato che per ogni dentifricio sullo scaffale, devono essere presenti almeno due fischietti e che per ogni coltellino, devono esserci al più tre borracce.

Quanti prodotti, di ciascun tipo, Geronimo deve inserire o togliere, affinché l'azienda possa avere il miglior guadagno, tenendo conto che ogni prodotto ha un certo costo e volume indicati nella tabella seguente e che il volume massimo dello scaffale è di  $100 \text{ dm}^3$ ?

	Accendino	Borraccia	Coltellino	Dentifricio	Elastico	Fischietto	Guanti	Helios scarpa
Prezzo (€)	12,3	7,99	4,2	5,65	9,99	7,35	10	8,7
Volume ( $\text{cm}^3$ )	834	5100	1360	570	3980	4700	6000	3350

## Compito E – Cesti regalo

È Pasqua e l'azienda *SuperAmazingMarket* vuole creare dei cesti regalo da vendere ai propri clienti.

L'azienda ha disposizione diversi prodotti da poter inserire nei cesti, ognuno dei quali ha un certo prezzo e un certo peso, indicati nella tabella seguente.

	Profitto (€)	Peso (kg)
Agnello di cioccolato	2,1	0,2
Bambola	6,99	0,5
Colomba	7,2	1
Diario	9,4	1
Etichetta	3,35	0,3
Francobolli	5,75	0,9
Gioco da tavolo	8,7	1,4
Hit in CD	4,8	0,6
Imbuto	5,25	0,4
Lampada	3,99	0,7

L'azienda decide di realizzare cinque cesti: uno con al massimo 1 kg di prodotti; un altro 3 kg; due cesti possono contenere al massimo 2 kg di prodotti; infine, l'ultimo cesto può contenere 2,5 kg.

Il manager dell'azienda ha dato a Benjamin il compito di stabilire quali cesti utilizzare tra quelle disponibili e quale prodotto inserire in ogni cesto al fine di massimizzare i profitti totali.

# Cosa vi è richiesto

Ogni gruppo si concentrerà su un aspetto soltanto e ogni presentazione dovrà contenere i seguenti aspetti:

1. **Analisi** del testo;
2. **Risoluzione manuale**: metodo per trovare una soluzione ammissibile (non per forza l'ottimo);
3. **Modellizzazione** del problema con la Programmazione Lineare o la Programmazione Lineare Intera;
4. **Risoluzione con Excel Solver**;
5. **Descrizione in inglese** di un problema analogo ma in un contesto *completamente diverso* da quello del supermercato.

Potrete usare tutti gli strumenti che preferite per realizzare la presentazione.

# Conclusione

---





# Mentimeter

*[www.menti.com](https://www.menti.com)*