ROAR II

Ricerca Operativa Applicazioni Reali

Alessandro Gobbi Alice Raffaele Gabriella Colajanni Eugenia Taranto

IIS Antonietti, Iseo (BS)

05 febbraio 2022

Introduzione

Chi siamo e i nostri contatti

Alessandro Gobbi (UniBS)
alessandro.gobbi@unibs.it

Alice Raffaele (UniVR)
alice.raffaele@univr.it

Gabriella Colajanni (UniCT)
colajanni@dmi.unict.it

Eugenia Taranto (UniCT)
eugenia.taranto@unict.it

Sondaggio iniziale

Mentimeter

www.menti.com – Codice: 5322 8856

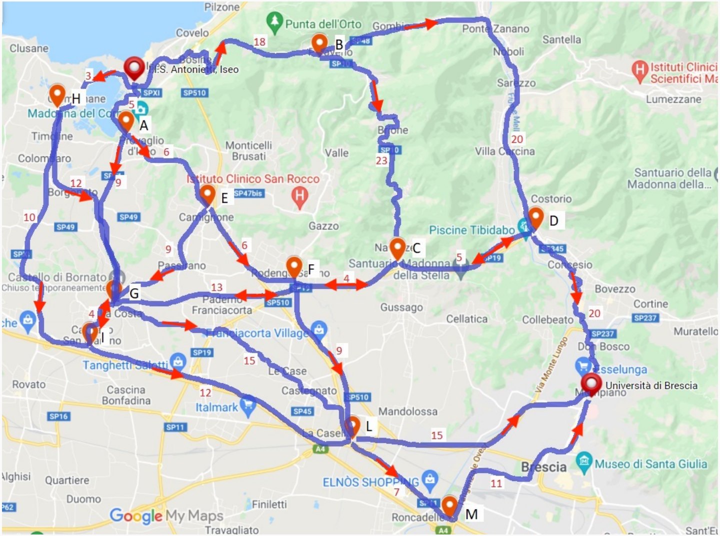
Parte 1:
Lavoro di gruppo (30 minuti)

Andiamo in università

L'11 febbraio prossimo siete attesi presso la sede di Ingegneria dell'Università degli Studi di Brescia per il 4° incontro del Project Work di quest'anno. Di seguito, è riportata una mappa con segnate alcune delle possibili tratte percorribili per arrivare in Via Branze 43. Ogni tratta è contrassegnata da un tempo (in minuti) e un verso di percorrenza.

Supposto che il punto di partenza sia il vostro Istituto, qual è il percorso che vi permetterebbe di risparmiare più tempo per giungere a destinazione?

Andiamo in università



Algoritmo di Dijkstra (I)

Calcola il cammino di costo minimo da un nodo sorgente s ad un nodo destinazione d in un grafo orientato.

Definizioni (intuitive):
arco uscente da un nodo n: ogni arco che ha come primo nodo n;
arco entrante in un nodo n: ogni arco che ha come secondo nodo n.
Notazione necessaria:

- $\Gamma(n) :=$ insieme di tutti i nodi direttamente collegati a n da un suo arco uscente
- $c_{i,j} :=$ costo dell'arco (i,j)
- Data una sorgente s:
  - $L(n) :=$ costo del cammino da s a n
  - $pred(n) :=$ il nodo che precede n nel cammino di costo $L(n)$

Fase preliminare:

individuare il nodo sorgente s e il nodo destinazione d nel grafo in esame ed eliminare:

- tutti gli archi entranti in s;
- tutti gli archi uscenti da d.

0) Inizializzazione e tabella riepilogativa:

- Inizializzo $L(s) = 0$.

Nel nostro caso:
$L(ant) = 0$ (il costo del cammino minimo da *ant* a *ant* è 0: ovvio!)

- Inizializzo $L(v) = +\infty \quad \forall n \neq s$

Nel nostro caso:
$L(A) = L(B) = L(C) = L(D) = L(E) = L(F) = L(G) = L(H) = L(I) = L(L) = L(M) = L(uni) = +\infty$ (il costo del cammino da *ant* a un qualsivoglia nodo che non sia *ant* è potenzialmente INFINITO, al momento non abbiamo informazioni sufficienti per dire altro)

Teniamo traccia dei valori di *L* e *pred* di ogni nodo in una tabella:

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	$+\infty$	-
B	$+\infty$	-
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	$+\infty$	-
F	$+\infty$	-
G	$+\infty$	-
H	$+\infty$	-
I	$+\infty$	-
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

La tabella dovrà essere costantemente aggiornata durante l'esecuzione dell'algoritmo. Evidenzieremo man mano le righe *definitive*, ossia che non dovranno essere più modificate.

1) Determinazione del *nodo corrente*

Troviamo il valore minimo tra gli L di tutte le righe **non** *defintive*.

Nel nostro caso non ci sono righe definitive e quindi:

$$min(0, +\infty, +\infty, ...) = 0$$

Il nodo associato al valore minimo trovato diventa il *nodo corrente* che indichiamo con *nc*. **Il nodo corrente varierà durante l'esecuzione dell'algoritmo.**

Nel nostro caso: *nc = ant.*

Evidenzio la riga del nodo corrente nella tabella: i valori su quella riga non saranno più cambiati.

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	$+\infty$	-
B	$+\infty$	-
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	$+\infty$	-
F	$+\infty$	-
G	$+\infty$	-
H	$+\infty$	-
I	$+\infty$	-
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

2) Aggiornamento dei costi e dei precedessori

Aggiorno il valore di L in tabella per ogni nodo *i*

- appartenente a $\Gamma(nc)$
- che non è **mai stato** *nodo corrente*

tramite il seguente assegnamento:

$$L(i) = min(L(i), L(nc) + c_{nc,i})$$

L(i) a destra dell'uguale è **il valore attuale** di *L(i)*, segnato in tabella.

Il confronto di *min* può generare tre casi, che portano ad un diverso aggiornamento della colonna *pred* in tabella:
- se $L(i) < L(nc) + c_{nc,i} \rightarrow pred(i)$ rimane inalterato;
- se $L(i) > L(nc) + c_{nc,i} \rightarrow pred(i) = nc$;
- se $L(i) == L(nc) + c_{nc,i} \rightarrow pred(i) = pred(i) \cup \{nc\}$.

Nel nostro caso: *il nodo corrente* è *ant*.

Determiniamo $\Gamma(nc) = \Gamma(ant) = \{A, B, H\}$.

Nessun nodo appartenente a $\Gamma(ant)$ è stato mai *nodo corrente*: è quindi necessario aggiornare il valore di L di tutti e tre i nodi:
$L(A) = min(L(A), L(ant) + c_{ant,A}) = min(+\infty, 0 + 5) = min(+\infty, 5) = 5$
$L(B) = min(L(B), L(ant) + c_{ant,B}) = min(+\infty, 0 + 18) =$
$min(+\infty, 18) = 18$
$L(H) = min(L(H), L(ant) + c_{ant,H}) = min(+\infty, 0 + 3) = min(+\infty, 3) = 3$

Aggiorniamo la tabella con i nuovi valori.

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	$+\infty$	-
F	$+\infty$	-
G	$+\infty$	-
H	3	*ant*
I	$+\infty$	-
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Cosa leggo dalla tabella correttamente aggiornata?
Ad esempio che ho trovato che esiste un cammino che arriva ad A partendo da *ant* di costo 5 e che il nodo predecessore di A in questo cammino è (ovviamente) *ant*. Analogamente queste considerazioni posso farle per gli altri nodi.

L’algoritmo prosegue con l’esecuzione in sequenza delle fasi 1) e 2) **fino a quando nella fase 1) il nodo identificato come destinazione diventa *nodo corrente*.**

$$\downarrow$$

Nella riga del nodo destinazione trovo il costo del cammino minimo che lo collega con il nodo sorgente. Ma quale è questo cammino?

$$s \to \cdots \to pred(pred(pred(d))) \to pred(pred(d)) \to pred(d) \to d$$

Vediamo quindi come procede l’algoritmo nel nostro caso:

Determinazione del nodo corrente:

$min(5, 18, 3, +\infty, +\infty, ...) = 3$ (lo 0 **non** è stato incluso perché è ora in una riga *definitiva*)

$$nc = H$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	$+\infty$	-
F	$+\infty$	-
G	$+\infty$	-
H	3	*ant*
I	$+\infty$	-
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato H):

$$\Gamma(H) = \{I, G\}$$

$$L(I) = min(L(I), L(H) + c_{H,I}) = min(+\infty, 3 + 10) = 13$$

$$L(G) = min(L(G), L(H) + c_{H,G}) = min(+\infty, 3 + 12) = 15$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	$+\infty$	-
F	$+\infty$	-
G	15	H
H	3	*ant*
I	13	H
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Determinazione del nodo corrente:

$min(5, 18, 15, 13, +\infty, +\infty, ...) = 5$ (lo 0 e il 3 **non** sono stati inclusi perché sono ora in righe *definitive*)

$$nc = A$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	$+\infty$	-
F	$+\infty$	-
G	15	H
H	3	*ant*
I	13	H
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato A):

$$\Gamma(A) = \{G, E\}$$

$$L(G) = min(L(G), L(A) + c_{A,G}) = min(15, 5 + 9) = 14$$

$$L(E) = min(L(E), L(A) + c_{A,E}) = min(+\infty, 5 + 6) = 11$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	$+\infty$	-
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Il predecessore di G era H ed ora diventa A perché 15 $>$ 5+9: ho trovato che c'è un cammino che parte da *ant* e arriva a G che costa $5 + 9 = 14$ e il nodo che precede G in questo cammino è A.

Determinazione del nodo corrente:

$$min(18, 11, 14, 13, +\infty, ...) = 11$$

$$nc = E$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	$+\infty$	-
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato E):

$$\Gamma(E) = \{F, G\}$$

$$L(F) = min(L(F), L(E) + c_{E,F}) = min(+\infty, 11 + 6) = 17$$

$$L(G) = min(L(G), L(E) + c_{E,G}) = min(14, 11 + 9) = 14$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Il predecessore di G non è cambiato perché $14 < 11 + 9$: non conviene passare per il nodo E per raggiungere G.

Determinazione del nodo corrente:

$$min(18, 17, 14, 13, +\infty, ...) = 13$$

$$nc = I$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	$+\infty$	-
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato I):

$$\Gamma(I) = \{G, L\}$$

$$L(G) = min(L(G), L(I) + c_{I,G}) = min(14, 13 + 4) = 14$$

$$L(L) = min(L(L), L(I) + c_{I,L}) = min(+\infty, 13 + 12) = 25$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Il predecessore di G ancora una volta non è cambiato perché $14 < 13 + 4$: non conviene passare per il nodo I per raggiungere G.

Determinazione del nodo corrente:

$$min(18, 17, 14, 25, +\infty, ...) = 14$$

$$nc = G$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato G):

$$\Gamma(G) = \{I, L, F\}$$

Il nodo I è in una riga definitiva della tabella: non deve essere aggiornato!

$$L(L) = min(L(L), L(G) + c_{G,L}) = min(25, 14 + 15) = 25$$

$$L(F) = min(L(F), L(G) + c_{G,F}) = min(17, 14 + 13) = 17$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

La tabella è rimasta inalterata!

Determinazione del nodo corrente:

$$min(18, 17, 25, +\infty, ...) = 17$$

$$nc = F$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	$+\infty$	-
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato F):

$$\Gamma(F) = \{G, C, L\}$$

Il nodo G è in un riga definitiva della tabella: non deve essere aggiornato.

$$L(C) = min(L(C), L(F) + c_{F,C}) = min(+\infty, 17 + 4) = 21$$

$$L(L) = min(L(L), L(F) + c_{F,L}) = min(25, 17 + 9) = 25$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Determinazione del nodo corrente:

$$min(18, 21, 25, +\infty, ...)$$

$$nc = B$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	$+\infty$	-
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato B):

$$\Gamma(B) = \{C, D\}$$

$$L(C) = min(L(C), L(B) + c_{B,C}) = min(21, 18 + 23) = 21$$

$$L(D) = min(L(D), L(B) + c_{B,D}) = min(+\infty, 18 + 20) = 38$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	38	B
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Determinazione del nodo corrente:

$$min(21, 38, 25, +\infty, +\infty) = 21$$

$$nc = C$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	38	B
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato C):

$$\Gamma(C) = \{F, D\}$$

$$L(D) = min(L(D), L(C) + c_{C,D}) = min(38, 21 + 5) = 26$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Determinazione del nodo corrente:

$$min(26, 25, +\infty, +\infty) = 25$$

$$nc = L$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	$+\infty$	-
uni (d)	$+\infty$	-

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato L):

$$\Gamma(L) = \{M, uni\}$$

$$L(M) = min(L(M), L(L) + c_{L,M}) = min(+\infty, 25 + 7) = 32$$

$$L(uni) = min(L(uni), L(L) + c_{L,uni}) = min(+\infty, 25 + 15) = 40$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	32	L
uni (d)	40	L

Determinazione del nodo corrente:

$$min(26, 32, 40) = 26$$

$$nc = D$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	32	L
uni (d)	40	L

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato D):

$$\Gamma(D) = \{C, uni\}$$

$$L(uni) = min(L(uni), L(D) + c_{D,uni}) = min(40, 26 + 20) = 40$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	32	L
uni (d)	40	L

La tabella è rimasta inalterata.

Determinazione del nodo corrente:

$$min(32, 40) = 32$$

$$nc = M$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	32	L
uni (d)	40	L

Aggiornamento dei pesi e dei predecessori (il *nodo corrente* è diventato M):

$$\Gamma(M) = \{uni\}$$

$$L(uni) = min(L(uni), L(M) + c_{M,uni}) = min(40, 32 + 11) = 40$$

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	32	L
uni (d)	40	L

La tabella è rimasta inalterata.

Determinazione del nodo corrente:

$$min(40) = 40$$

$$nc = uni$$

$$\downarrow$$

STOP

nodo	L	pred
ant (s)	0	-
A	5	*ant*
B	18	*ant*
C	21	F
D	26	C
E	11	A
F	17	E
G	14	A
H	3	*ant*
I	13	H
L	25	I
M	32	L
uni (d)	40	L

Il cammino trovato lo costruiamo a ritroso, partendo da $pred(uni) = L$:

$$\rightarrow pred(L) \rightarrow L$$

$$\rightarrow pred(I) \rightarrow I \rightarrow L$$

$$\rightarrow pred(H) \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow L$$

$$ant \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow L$$

Note:

- Non è detto che il nodo destinazione diventi nodo corrente quanto tutti gli altri lo sono già stati: l'algoritmo si ferma in ogni caso.
- Potrebbero esserci più cammini minimi ad egual costo.

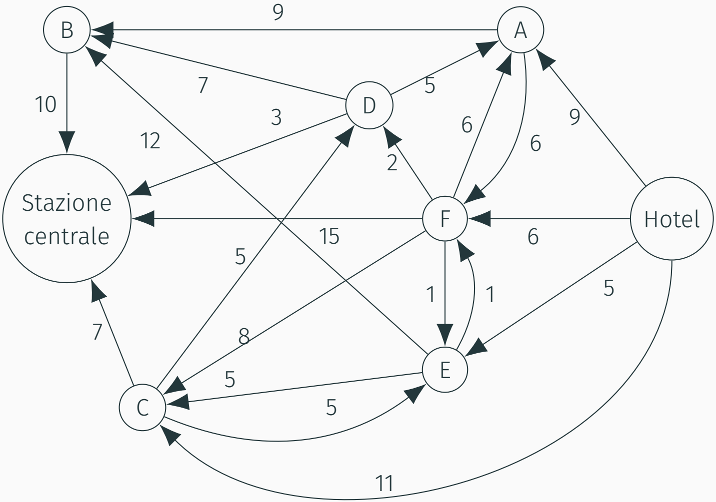
Parte 2:
Lavoro di gruppo (30 + 30 minuti)

Un treno da prendere

Per Remo è arrivato il giorno di lasciare Grafopoli e di tornare a casa. Il treno di ritorno partirà dalla Stazione Centrale alle 11:03 ma Remo, come sempre in ritardo, riesce a lasciare l'Hotel solo alle 10:50. Considerando affidabili i tempi di percorrenza (in minuti) riportati nel grafo, rappresentante la rete cittadina, si sfrutti l'esecuzione dell'algoritmo di Dijkstra per rispondere ai quesiti seguenti.

a. Quale è il percorso che permetterebbe a Remo di risparmiare più tempo possibile? Ce n'è solo uno o più di uno? Perché?
b. Remo avrebbe quindi una possibilità di arrivare in tempo in stazione per prendere il treno delle 11:03? Se sì, con quanti minuti di anticipo potrebbe arrivare? Se no, con quanti minuti di ritardo?

Grafopoli



B
A
D
F
Hotel
E
C
Stazione centrale
9
7
5
10
3
12
6
6
9
2
15
6
5
1
1
5
8
7
5
5
11

Visitare la città

Si supponga che Remo, scoraggiato dal ritardo, decida di trascorrere ancora qualche ora a visitare la città di Grafopoli. In particolare, ogni nodo del grafo rappresenta un punto di interesse da visitare (un museo, una piazza, un monumento, etc.). In tabella sono riportati i tempi stimati di visita per ogni attrazione e gli eventuali orari di chiusura, oltre il quale non è più possibile accedervi (se c'è il '-', allora l'attrazione è sempre aperta):

	A	B	C	D	E	F
Tempo di visita	20	5	30	60	10	20
Orari di chiusura	12:00	-	13:00	13:30	-	-

Supponendo che Remo parta dall'hotel alle ore 11:00, quale cammino può fare per visitare quante più attrazioni possibili e non arrivare in stazione dopo le 14:00?

Visitare la città

- Formulare e descrivere passo per passo un algoritmo che risolva il problema proposto.
- Trovare una possibile soluzione per il problema, sfruttando l'algoritmo formulato.

Conclusione

Compiti per mercoledì 09 febbraio 2022

1. Trovare e descrivere un'applicazione del problema del cammino minimo **non menzionata oggi**.
2. Risolvere il problema "**Al concerto!**". In particolare, vi si chiede di:
   - disegnare il grafo orientato associato al problema e attribuire a ciascun lato il corretto costo.
   - sfruttare l'algoritmo di Dijkstra per trovare la soluzione al problema.

Sondaggio finale

Mentimeter

www.menti.com – Codice: **2298 4958**