ROAR!

Ricerca Operativa: Applicazione Reali

Alessandro Gobbi   Alice Raffaele   Gabriella Colajanni   Eugenia Taranto

IIS Antonietti, Iseo (BS)
12 aprile 2021

Organizzazione della lezione (I)

- Parte 1: Introduzione (45 minuti):
  - Ripasso
  - Correzione dei compiti
  - Risoluzione grafica con i fasci di rette
- Pausa (10 minuti)
- Parte 2: Lavoro di gruppo – Problema di Programmazione Lineare a due variabili (45 minuti):
  - Modellizzazione
  - Risoluzione grafica:
    - Confronto fra tutti i vertici della regione ammissibile
    - Uso dei fasci di rette
  - Rientro nella stanza principale e confronto risultati
- Pausa (10 minuti)

Organizzazione della lezione (II)

- Parte 3: Introduzione a Excel Solver (40 minuti):
  - Introduzione al tool
  - Risoluzione di un esercizio di compito tramite il tool (demo)
  - Problema 1:
    - Modellizzazione assieme
    - Risoluzione tramite il tool assieme
- Pausa (10 minuti)
- Parte 4: Lavoro di gruppo – Problema 2 (45 minuti):
  - Modellizzazione
  - Risoluzione tramite il tool
  - Rientro nella stanza principale e confronto risultati
- Conclusione (10 minuti):
  - Compiti per sabato 24 aprile (5 minuti)
  - Sondaggio finale (5 minuti)

Parte 1: Introduzione

Ripasso

Mentimeter

www.menti.com

Codice: 1357 3584

Esercizi per lunedì 12 aprile

Esercizio 1 – BrumBrumBrum

L'industria BrumBrumBrum S.p.A. produce automobili e microcar utilizzando due macchinari chiamati P e Q. Entrambi i macchinari sono usati per entrambi i veicoli, ma cambiano i tempi di lavorazione: per ogni automobile sono necessarie un'ora di lavorazione su P e tre ore su Q; per ogni microcar servono invece due ore di lavorazione su P e due ore su Q. Per motivi logistici, non possono essere prodotte più di diciotto automobili settimanali. Inoltre, il macchinario P non può essere usato per più di 40 ore alla settimana, mentre Q per non più di 60. Nell'ipotesi che ogni prodotto realizzato sia poi messo in commercio, determinare quale sia la combinazione produttiva più conveniente, sapendo che ogni automobile è venduta a 16.000€ e ogni microcar a 10.000€.

Quesiti:

1. Fornire un modello di programmazione lineare del problema;
2. Trovare una soluzione ottima usando il metodo di risoluzione grafica;
3. La soluzione trovata ha senso nella realtà? Perché?

Esercizio 2 – Collane d'oro e d'argento

L'azienda Gioie D'Oro S.r.l. produce due modelli di collane, A e B. Per il modello A utilizza dei gancetti speciali, di cui ogni giorno c'è una disponibilità pari a 400 unità. Il modello B richiede invece gancetti meno preziosi, per i quali c'è una disponibilità di 700 unità al giorno. Le perle necessarie giornalmente permettono di produrre non più di 800 collane in totale. Per quanto riguarda le tempistiche di produzione, per realizzare una collana del modello A si impiega il doppio del tempo necessario per realizzare una collana del modello B, ma se l'azienda producesse solo collane B potrebbe produrne al più 1000 ogni giorno. Ogni collana di tipo A dà un ricavo di 400 €; ogni collana B invece di 300 €. Quante collane di tipo A e di tipo B occorre produrre per massimizzare il ricavo complessivo giornaliero?

Quesiti:

1. Fornire un modello di programmazione lineare del problema;
2. Trovare una soluzione ottima usando il metodo di risoluzione grafica;
3. La soluzione trovata ha senso nella realtà? Perché?

Esercizio 3 – Candele

Un artigiano produce delle candele bianche e delle candele blu, impiegando diciotto minuti per ogni candela bianca e venti per ogni candela blu. Le spese di produzione di ogni candela bianca sono pari a 1 €, mentre quelle di ogni candela blu sono pari a 2 €. Ogni giorno l'artigiano lavora otto ore. In base alla sua esperienza e alla domanda dei clienti, l'artigiano sa che ogni giorno deve realizzare non meno di dieci ma non più di quindici candele bianche, e non meno di otto ma non più di dodici candele blu. Sapendo che il prezzo di vendita di ogni candela bianca è 6 € e quello di ogni candela blu è 8 €, quante candele gli conviene produrre giornalmente per massimizzare il suo guardagno?

Quesiti:

1. Fornire un modello di programmazione lineare del problema;
2. Trovare una soluzione ottima usando il metodo di risoluzione grafica;
3. La soluzione trovata ha senso nella realtà? Perché?

Esercizio 3 – Risoluzione grafica con i fasci di rette

Modellizzazione:
Chiamiamo x il n° di candele bianche e y il n° di candele blu

$$\max \quad (6-1)x + (8-2)y$$

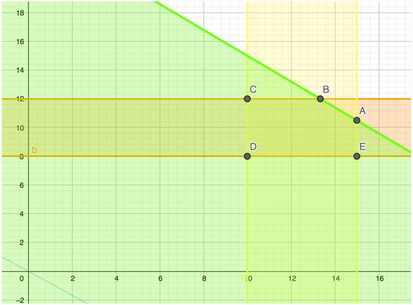
$$18x + 20y \leq 8 \cdot 60$$

$$10 \leq x \leq 15$$

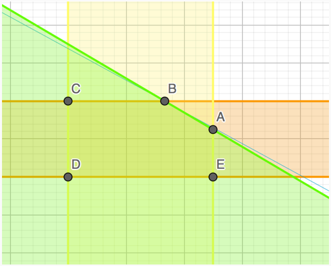
$$8 \leq y \leq 12$$

$$x, y \geq 0$$

Su **GeoGebra** disegniamo i vincoli e la funzione obiettivo nel piano cartesiano:



In realtà la funzione obiettivo l'abbiamo rappresentata come la retta del **fascio di rette improprio** $5x + 6y = 0$,
in forma esplicita $y = -\frac{5}{6}x + q$, con $q = 0$



Spostiamo la retta verso i vertici della regione ammissibile, notando che **il valore della funzione obiettivo aumenta andando verso valori più grandi di x e y (come ci aspettiamo)**.
L'**ultimo** vertice raggiunto è $B = (\frac{40}{3}, 12) \rightarrow$ In esso, la funzione obiettivo è massima e vale $5 \cdot \frac{40}{3} + 6 \cdot 12 = \frac{416}{3} = 138,67$.

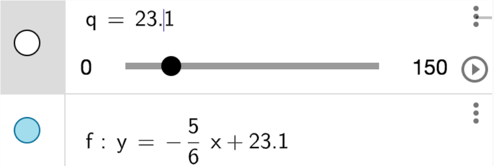
Per completezza, troviamo la retta del fascio
che si interseca con il punto $B = (\frac{40}{3}, 12)$:

in $y = -\frac{5}{6}x + q$ sostituiamo le coordinate del punto B:

$$12 = -\frac{5}{6} \cdot \frac{40}{3} + q$$

$$q = 12 + \frac{5}{6} \cdot \frac{40}{3} = \frac{416}{18} = 23,\overline{1}.$$

Il valore di q all'ottimo si può vedere anche su GeoGebra:



"Buongiornissimo! Kaffè?"

Una catena di bar ha stipulato un contratto commericale con un'industria di torrefazione per la fornitura esclusiva di caffè. L'industria ha a disposizione due impianti di torrefazione T_1 e T_2 con cui dovrà rifornire i tre bar B_1, B_2 e B_3 della catena. Vista la differente distanza tra gli impianti e i bar e i differenti mezzi di trasporto utilizzati, i costi di trasporto euro/chilogrammo di caffè da un impianto ad un bar risultano differenti e sono riassunti nella seguente tabella:

	B_1	B_2	B_3
T_1	$0,4$	$0,3$	$0,2$
T_2	$0,2$	$0,3$	$0,5$

Sapendo che gli impianti di torrefazione T_1 e T_2 possono produrre giornalmente al massimo 54 e 44 Kg di caffè e che i tre bar necessitano di 35, 30 e 33 Kg di caffè, qual è la quantità da trasportare da ogni impianto a ogni bar per minimizzare i costi?

Quesito: fornire un modello di programmazione lineare del problema.

Parte 2:
Lavoro di gruppo – Problema di PL a due variabili

Problema

Dolce Pasqua

La pasticceria Torinese *UnPoDiCacao* produce colombe e agnelli pasquali e per esigenze di produzione è costretta a rispettare i seguenti vincoli:

- il triplo del numero di colombe più il numero degli agnelli non deve essere inferiore a 750;
- il doppio del numero di colombe più il triplo del numero di agnelli non deve essere inferiore a 850;
- la differenza fra numero di colombe e quello di agnelli non deve superare 500;
- il numero di agnelli non deve superare 900.

Sapendo che il costo di vendita unitario per colombe e agnelli è rispettivamente 1,50 euro e 2,40 euro, quali sono le quantità dei due dolci che la pasticceria deve produrre per ottenere massimizzare il proprio ricavo?

Lavoro di gruppo

Modello

Variabili:
$x \geq 0$ = numero di colombe prodotte
$y \geq 0$= numero di agnelli prodotti

Funzione obiettivo:

$$\max \quad 1,5x + 2,4y$$

Vincoli:

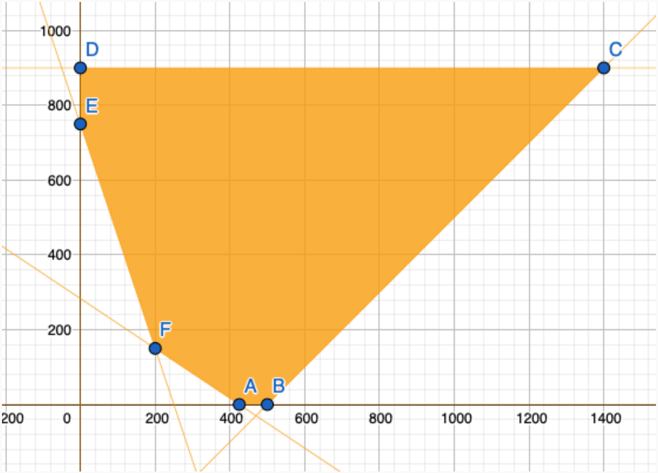
$$3x + y \geq 750$$

$$2x + 3y \geq 850$$

$$x - y \leq 500$$

$$y \leq 900$$

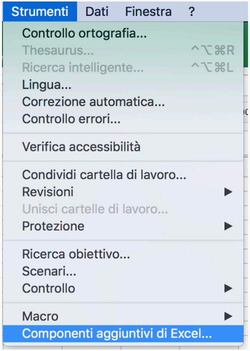
Risoluzione grafica

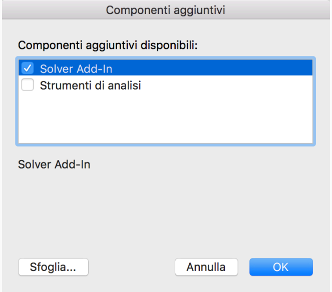


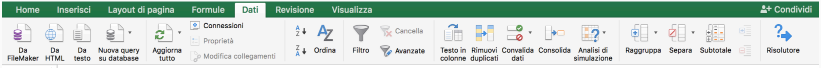
Per ottenere il ricavo massimo (4710 euro), la pasticceria deve produrre 1400 colombe e 900 agnelli (**punto C**).

Parte 3:
Introduzione a Excel Solver

Excel Solver







Demo – Esercizio 3 di compito

Esercizio 3 – Candele

Un artigiano produce delle candele bianche e delle candele blu, impiegando diciotto minuti per ogni candela bianca e venti per ogni candela blu. Le spese di produzione di ogni candela bianca sono pari a 1 €, mentre quelle di ogni candela blu sono pari a 2 €. Ogni giorno l'artigiano lavora otto ore. In base alla sua esperienza e alla domanda dei clienti, l'artigiano sa che ogni giorno deve realizzare non meno di dieci ma non più di quindici candele bianche, e non meno di otto ma non più di dodici candele blu. Sapendo che il prezzo di vendita di ogni candela bianca è 6 € e quello di ogni candela blu è 8 €, quante candele gli conviene produrre giornalmente per massimizzare il suo guardagno?

Demo – Modellizzazione

$$\max \quad (6-1)x + (8-2)y$$

$$18x + 20y \leq 8 * 60$$

$$10 \leq x \leq 15$$

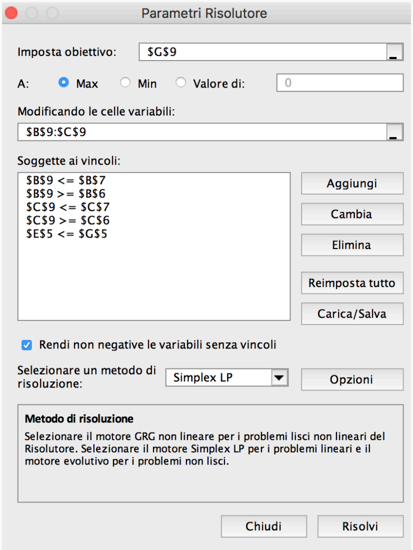
$$8 \leq y \leq 12$$

$$x, y \geq 0$$

Demo – Inserimento dati in Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Candele bianche**	**Candele blu**					
2	**ProfittoUnitario**	6	8					
3	**SpesaUnitaria**	1	2					
4					**Tempo usato**			
5	**TempiUnitari**	18	20		0	≤	480	**TempiLavorazione**
6	**QuantitàMinime**	10	8					
7	**QuantitàMassime**	15	12					
8								
9	**UnitàProdotte**	0	0				0	**GuadagnoTotale**
10								
11								

Demo – Risolutore

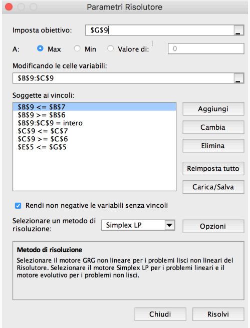


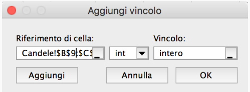
Demo – Soluzione ottima

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Candele bianche**	**Candele blu**					
2	**ProfittoUnitario**	6	8					
3	**SpesaUnitaria**	1	2					
4					**Tempo usato**			
5	**TempiUnitari**	18	20		480	≤	480	**TempiLavorazione**
6	**QuantitàMinime**	10	8					
7	**QuantitàMassime**	15	12					
8								
9	**UnitàProdotte**	13,33333333	12				138,666667	**GuadagnoTotale**
10								

Demo – Soluzione ottima intera

La soluzione ottenuta è tuttavia frazionaria. Possiamo aggiungere un ulteriore vincolo per ottenere solo soluzioni intere:





	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Candele bianche	Candele blu					
2	ProfittoUnitario	6	8					
3	SpesaUnitaria	1	2					
4					Tempo usato			
5	TempiUnitari	18	20		474	≤	480	TempiLavorazione
6	QuantitàMinime	10	8					
7	QuantitàMassime	15	12					
8								
9	UnitàProdotte	13	12				137	GuadagnoTotale
10								

Problema 1

Su due ruote

L'azienda Passione2ruote di Catania produce tre prodotti: biciclette, ciclomotori, e tricicli per bambini. Per un periodo di produzione, sono disponibili i seguenti dati riguardanti il profitto, il costo di produzione (in euro) e lo spazio occupato in magazzino (storage, in m^3) di ogni unità prodotta:

	Biciclette	**Ciclomotori**	**Tricicli**
Profitto	100	300	50
Costo	300	1200	120
Storage	0.5	1	0.5

L'azienda dispone di un capitale massimo di 93.000 euro e possiede uno storage disponibile di 101 m^3. Quante unità di ciascun prodotto dovrebbero essere prodotte per massimizzare il profitto totale?

Problema 1 – Modellizzazione

$$\max \quad 100x_{BICI} + 300x_{CIC} + 50x_{TRI}$$

$$300x_{BICI} + 1200x_{CIC} + 120x_{TRI} \leq 93000$$

$$0.5x_{BICI} + x_{CIC} + 0.5x_{TRI} \leq 101$$

$$x_{BICI}, x_{CIC}, x_{TRI} \geq 0$$

Problema 1 – Inserimento dati in Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Biciclette**	**Ciclomotori**	**Tricicli**					
2	**ProfittoUnitario**	100	300	50					
3									
4						**Risorse usate**			
5	**CostoUnitario**	300	1200	120		0	≤	93000	**Capitale**
6	**StorageUnitario**	0,5	1	0,5		0	≤	101	**Storage**
7									
8									
9	**UnitàProdotte**	0	0	0				0	**ProfittoTotale**
10									

Problema 1 – Vincolo di capitale

F5 | =MATR.SOMMA.PRODOTTO(B5:D5;B9:D9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Biciclette**	**Ciclomotori**	**Tricicli**					
2	**ProfittoUnitario**	100	300	50					
3									
4						**Risorse usate**			
5	**CostoUnitario**	300	1200	120		93000	≤	93000	**Capitale**
6	**StorageUnitario**	0,5	1	0,5		101	≤	101	**Storage**
7									
8									
9	**UnitàProdotte**	94	54	0				25600	**ProfittoTotale**
10									

Problema 1 – Vincolo di storage

F6 =MATR.SOMMA.PRODOTTO(B6:D6;B9:D9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Biciclette**	**Ciclomotori**	**Tricicli**					
2	**ProfittoUnitario**	100	300	50					
3									
4						**Risorse usate**			
5	**CostoUnitario**	300	1200	120		93000	≤	93000	**Capitale**
6	**StorageUnitario**	0,5	1	0,5		101	≤	101	**Storage**
7									
8									
9	**UnitàProdotte**	94	54	0				25600	**ProfittoTotale**
10									
11									

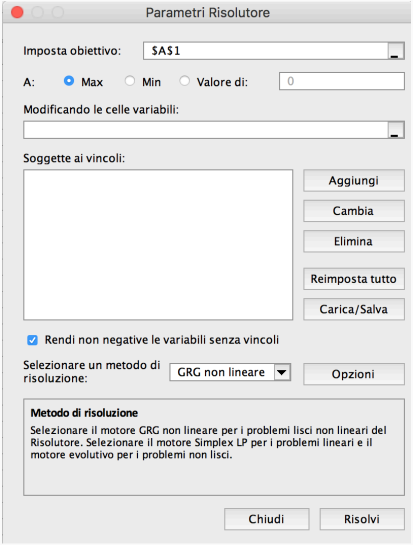
Problema 1 – Funzione obiettivo

H9 =MATR.SOMMA.PRODOTTO(B9:D9;B2:D2)

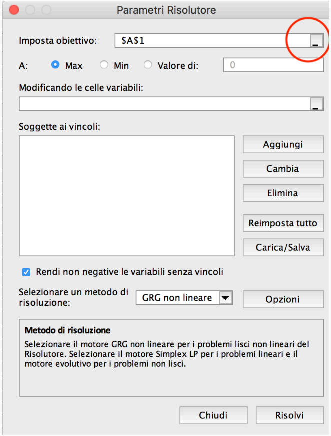
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Biciclette**	**Ciclomotori**	**Tricicli**					
2	**ProfittoUnitario**	100	300	50					
3									
4						**Risorse usate**			
5	**CostoUnitario**	300	1200	120		93000	≤	93000	**Capitale**
6	**StorageUnitario**	0,5	1	0,5		101	≤	101	**Storage**
7									
8									
9	**UnitàProdotte**	94	54	0				25600	**ProfittoTotale**
10									

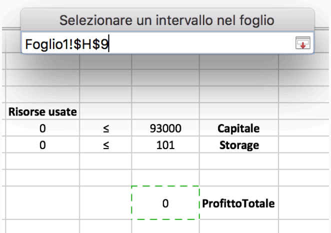
Problema 1 – Usando il risolutore

Menu → Dati → Risolutore



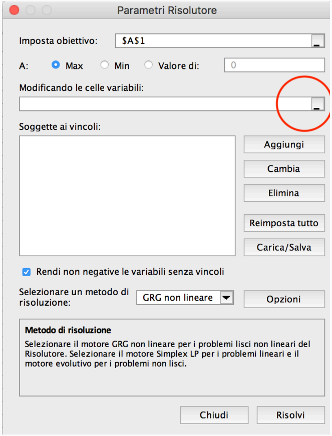
Problema 1 – Impostare la funzione obiettivo

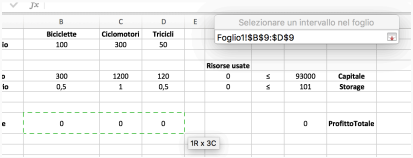




Scegliamo la cella dove è presente la formula che definisce la funzione obiettivo e poi “Max” o “Min” a seconda dello scopo.

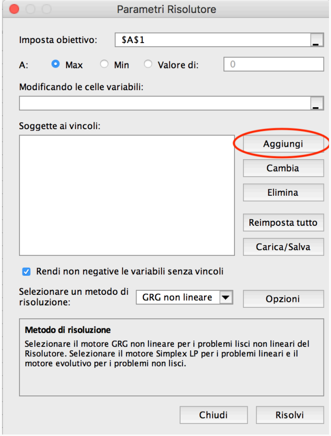
Problema 1 – Indicare le variabili

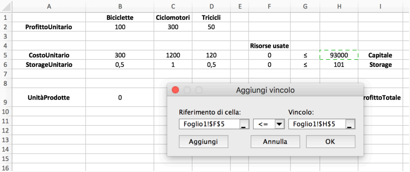


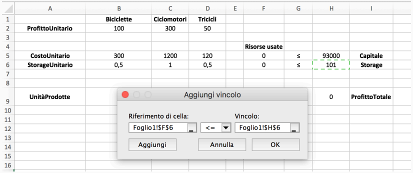


Indichiamo le celle dove sono contenuti i valori delle variabili, inizialmente posti a zero (poi sarà lo stesso Excel a modificarli!).

Problema 1 – Aggiungere i vincoli

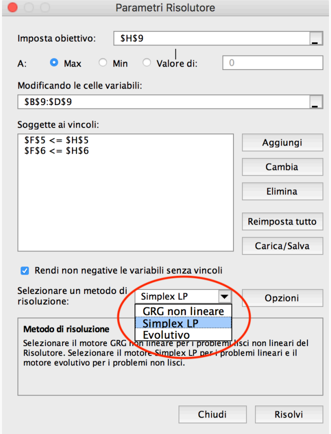






Indichiamo le celle dove sono definiti i due vincoli.

Problema 1 – Scegliere il solver



Selezioniamo il solver giusto e poi clicchiamo su “Risolvi”.

Problema 1 – Soluzione ottima

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Biciclette**	**Ciclomotori**	**Tricicli**					
2	**ProfittoUnitario**	100	300	50					
3									
4						**Risorse usate**			
5	**CostoUnitario**	300	1200	120		93000	≤	93000	**Capitale**
6	**StorageUnitario**	0,5	1	0,5		101	≤	101	**Storage**
7									
8									
9	**UnitàProdotte**	94	54	0				25600	**ProfittoTotale**
10									

Soluzione ottima:

- sono prodotti 94 biciclette, 54 ciclomotori e 0 tricicli;
- il profitto totale è pari a 25.600 euro;
- i due vincoli sono soddisfatti entrambi proprio a uguaglianza (si dice che sono "*tight*").

Parte 4:
Lavoro di gruppo – Excel Solver

Problema 2

Vecchie chiavette USB...

Volete realizzare una playlist musicale avendo a disposizione una raccolta di brani alta risoluzione e una vecchia chiavetta USB, parzialmente usata, in cui sono disponibili soltanto 140 MB. Volete che la vostra playlist consti almeno di 6 brani di cui al massimo 2 con titolo inglese. L'indice di gradimento (in una scala da 1 a 10) e la dimensione in MB di ogni file sono riportati nella tabella seguente:

Canzone	Gradimento	Dimensione (MB)
Perfect	9,5	25
No roots	8	20
La musica non c'è	9	30
Musica leggerissima	7	20
Zitti e buoni	6,5	18
Resta qui	9	22
Famous blue raincoat	10	27
Rolling in the deep	8,5	19

Volete decidere quali canzoni inserire sulla chiavetta, in modo tale da massimizzare il gradimento complessivo senza eccedere la capacità disponibile.

Quesiti:

1. Formulare il problema come un problema di Programmazione Lineare.
2. Risolvere il problema utilizzando Excel Solver.
3. La canzone “Resta qui” sarà inserita sulla chiavetta?

Lavoro di gruppo

Modello: variabili

Variabili:

$$x_1 \in \{0,1\} = \begin{cases} 1 \text{ se inserisco il brano } \textit{Perfect} \text{ nella chiavetta;} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$x_2 \in \{0,1\} = \begin{cases} 1 \text{ se inserisco il brano } \textit{No roots} \text{ nella chiavetta;} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$\downarrow$$

$$x_i \in \{0,1\} = \begin{cases} 1 \text{ se inserisco il brano } i \text{ nella chiavetta;} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Modello: funzione obiettivo e vincoli

$$\max \quad 9,5x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 6,5x_5 + 9x_6 + 10x_7 + 8,5x_8$$

$$25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 18x_5 + 22x_6 + 27x_7 + 19x_8 \leq 140$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 6$$

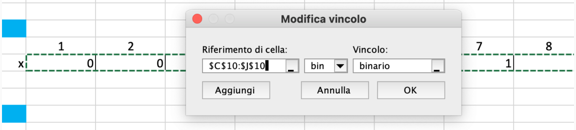
$$x_1 + x_2 + x_7 + x_8 \leq 2$$

Risoluzione con Excel Solver

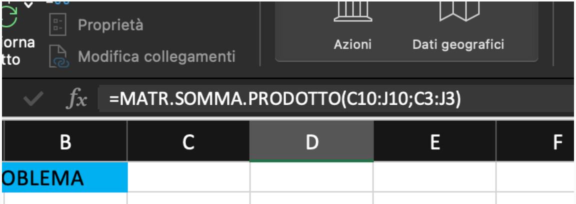
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	DATI DEL PROBLEMA									
2										
3		gradimento	9,5	8	9	7	6,5	9	10	8,5
4										
5		dimensione	25	20	30	20	18	22	27	19
6										
7										
8	VARIABILI									
9			1	2	3	4	5	6	7	8
10		x	0	0	1	1	1	1	1	1
11										
12										
13	MODELLO									
14										
15		funzione obiettivo		50						
16										
17		vincoli:	al massimo 140MB		136	<=	140			
18			almeno 6 brani		6	>=	6			
19			al massimo 2 titoli inglesi		2	<=	2			
20										

Risoluzione con Excel Solver

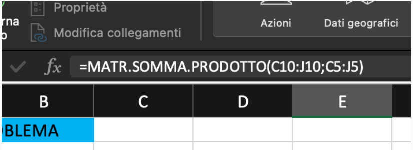
Variabili binarie:



Funzione obiettivo:

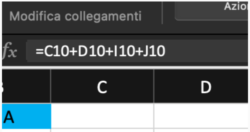


Primo membro vincolo al massimo 140 MB:



Primo membro vincolo almeno 6 brani:

Primo membro vincolo al massimo 2 titoli inglesi:



Conclusione

Compiti per sabato 24 aprile

Risolvere i problemi che erano di compito per oggi:

- sfruttando i fasci di rette per individuare una soluzione ottima ("*BrumBrumBrum*", "*Collane d'oro e d'argento*");
- attraverso Excel Solver ("*Buongiornissimo! Kaffè?*").

Creare un modello per il problema nella slide successiva e risolverlo con Excel Solver:

Compiti per sabato 24 aprile

Trasporto di acqua minerale

Un'industria di acque minerali ha tre stabilimenti (Viterbo, Castelforte e Bagnoregio) e tre impianti di imbottigliamento (Napoli, Roma e Frosinone). L'industria ha la necessità di trasportare giornalmente l'acqua minerale dagli stabilimenti ai tre impianti di imbottigliamento che devono essere riforniti giornalmente rispettivamente di almeno 150, 50 e 90 ettolitri di acqua. Gli stabilimenti giornalmente possono disporre di 150, 50 e 90 ettolitri ciascuno. La tabella che segue riporta il costo (in euro) per trasportare un ettolitro di acqua minerale da ciascuno stabilimento a ciascun impianto di imbottigliamento.

	Napoli	Roma	Frosinone
Viterbo	250	100	85
Castelforte	120	80	150
Bagnoregio	100	100	100

Si costruisca un modello di Programmazione Lineare che permetta di determinare le quantità di acqua minerale da trasportare giornalmente da ciascuno stabilimento a ciascun impianto in modo da minimizzare il costo complessivo di trasporto, tenendo in considerazione che per motivi logistici almeno la metà dell'acqua all'impianto di Napoli deve provenire da Bagnoregio.

Sondaggio finale

www.menti.com

Codice: 4318 9443