MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO 2019/2020

TRABALHO DE LABORATÓRIO Nº1

1. SIMULAÇÃO DO MOVIMENTO LIVRE DE UMA VIATURA

1.1) Mostre que $v = \frac{dy}{\partial t}$ é modulada pela equação diferencial $m\frac{\partial v(t)}{\partial t} = -\beta v(t)$, para $v(0) = v_0$.

A viatura desloca-se em regime livre, não lhe é aplicada nenhuma força motora, logo, o somatório das forças é constituído apenas pela força de atrito que é definida por $F_a = -\beta v(t)$.

Daqui, uma vez que $F_r = m \cdot a$, $F_r = \underbrace{\cancel{F_M}}_{\to 0} + F_a \Leftrightarrow F_r = F_a$.

Sabe-se que $v = \frac{dy}{\partial t}$, logo, $a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$

Mostra-se, então,

$$m\frac{\partial v(t)}{\partial t} = -\beta v(t) \quad // \text{ c.q.d}$$

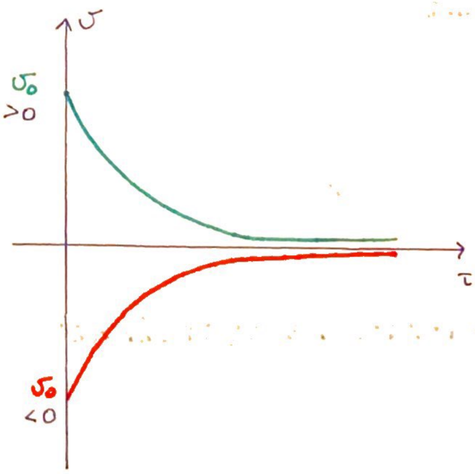
1.2)

1ª DERIVADA: $m\frac{d}{\partial t}v(t) = -\beta v(t) \Rightarrow \dot{v} = -\frac{\beta}{m} v$

2ª DERIVADA: $m\frac{d^2}{\partial t^2}v(t) = -\beta \frac{\partial}{\partial t} v(t) \Rightarrow \ddot{v} = -\frac{\beta}{m}\dot{v}$

CONDIÇÕES:

$$v_0 < 0 \begin{cases} \dot{v} = -\frac{\beta}{m} v > 0 \\ \ddot{v} = -\frac{\beta}{m}\dot{v} < 0 \end{cases} \qquad v_0 > 0 \begin{cases} \dot{v} = -\frac{\beta}{m} v < 0 \\ \ddot{v} = -\frac{\beta}{m}\dot{v} > 0 \end{cases}$$



1.3)

$$\frac{d}{\partial t}v(t) = -\frac{\beta}{m}v(t) \Leftrightarrow \frac{1}{v(t)}\,dv(t) = -\frac{\beta}{m}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{v}\,dv = -\frac{\beta}{m}\int_0^t dt \Leftrightarrow \ln(v)\Big|_{v(0)}^{v(t)} = -\frac{\beta}{m}t \Leftrightarrow \ln\left(\frac{v(t)}{v(0)}\right) = -\frac{\beta}{m}t$$

$$\Rightarrow \frac{v(t)}{v(0)} = e^{-\frac{\beta}{m}t} \Leftrightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad //$$

1.4) Equação diferencial que rege a posição horizontal do veículo y, considerando $y(0) = y_0$

Da alínea anterior, $v(\tau) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}\tau}$, logo, $\frac{d}{d\tau} y(\tau) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}\tau}$

$$\Rightarrow \int_{y(0)}^{y(\tau)} \partial y = \int_0^{\tau} v_0 e^{-\frac{\beta}{m}\tau} d\tau \Leftrightarrow y(\tau) - y(0) = v_0 \left(-\frac{m}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{m}\tau} \Big|_0^{\tau}$$

$$\Leftrightarrow y(\tau) = y_0 - v_0 \frac{m}{\beta} \left(e^{-\frac{\beta}{m}\tau} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow y(\tau) = y_0 + v_0 \frac{m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}\tau}\right) //$$

2. MODELO PREDADOR-PRESA

O modelo é dado por:

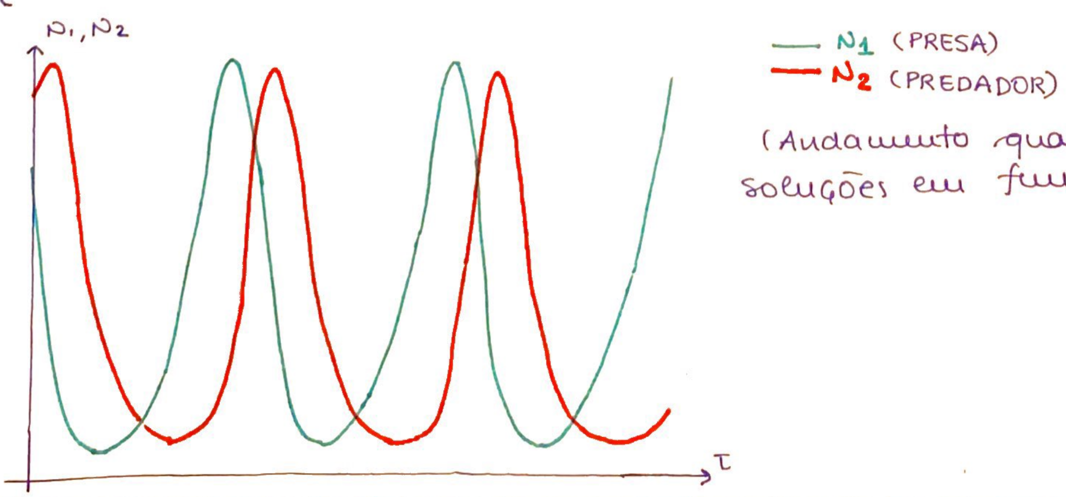
$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} N_1(\tau) = \delta_1 N_1(\tau) - \alpha_1 N_1(\tau) N_2(\tau) \\ \\ \frac{d}{d\tau} N_2(\tau) = \delta_2 N_2(\tau) + \alpha_2 N_1(\tau) N_2(\tau) \end{cases}$$

2.1) Supondo que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, observa-se, pelas expressões do modelo, que $\frac{d}{d\tau} N_1(\tau)$ vai diminuir e $\frac{d}{d\tau} N_2(\tau)$ vai aumentar, o que significa que N_1 diminui com o aumento de N_2.

Daqui, conclui-se que N_1 corresponde à presa enquanto N_2 corresponde ao predador.

→ PONTOS DE EQUILÍBRIO

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} N_1(\tau) = 0 \Leftrightarrow \delta_1 N_1(\tau) = \alpha_1 N_1(\tau) N_2(\tau) \Rightarrow N_2(\tau) = \frac{\delta_1}{\alpha_1} // \\ \\ \frac{d}{d\tau} N_2(\tau) = 0 \Leftrightarrow \delta_2 N_2(\tau) = -\alpha_2 N_1(\tau) N_2(\tau) \Rightarrow N_1(\tau) = -\frac{\delta_2}{\alpha_2} // \end{cases}$$



(Andamento qualitativo das soluções em função do tempo)

Quando o número de presas é elevado (abundância de presas), o número de predadores aumenta, resultando uma diminuição do número de presas.

Como consequência da diminuição de presas, há um aumento da mortalidade dos predadores o que reduz a abundância da população, resultando num novo aumento do número de presas.

Este ciclo repete-se ao longo do tempo, correspondendo a uma solução oscilatória.

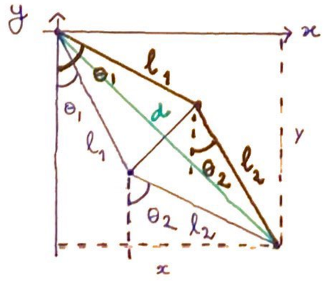
Os sinais algébricos de δ_1 e δ_2 influenciam o tipo de solução do modelo, sendo que se $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 < 0$ este responde com a solução oscilatória descrita anteriormente.

Ao analisar as expressões matemáticas que descrevem o modelo, conclui-se que quando $\delta_1 < 0$ e $\delta_2 > 0$, $\frac{d}{d\tau} N_1(\tau)$ vai ter sempre valores negativos e $\frac{d}{d\tau} N_2(\tau)$ vai ser sempre positivo, logo, eventualmente as presas vão-se extinguir e a população de predadores vai crescer indefinidamente. O mesmo se verifica quando $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$.

Quando $\delta_1 < 0$ e $\delta_2 < 0$, $\frac{d}{d\tau} N_1(\tau)$ é sempre negativo, logo, a população de presas vai diminuir e extinguir-se, enquanto que $\frac{d}{d\tau} N_2(\tau)$ demonstra que a população de predadores vai, também, diminuir mas mais lentamente, acabando por extinguir, eventualmente.

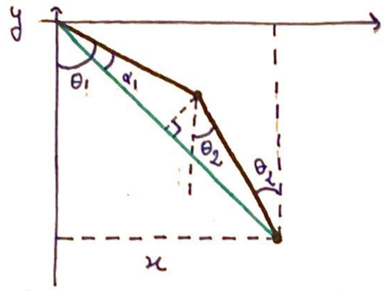
3. SISTEMA CAÓTICO

3.3) Considera-se o ponto (x, y) tal que $\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\ell$.
Observe-se o seguinte esquema com duas configurações de articulação do pêndulo (azul e preto).



$$\begin{cases} x = \ell(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \\ y = \ell(\cos\theta_2 + \cos\theta_1) \end{cases}$$

Tal como ilustrado acima, na maioria dos casos existem duas soluções para o mesmo problema (configuração simétrica da articulação do pêndulo), no entanto, optou-se pela solução que apresenta maior energia potencial gravítica.



Ao observar o esquema acima e considerando $d = \sqrt{x^2+y^2}$, tem-se:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{d}{2\ell} \Leftrightarrow \alpha_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\ell}\right)$$

Logo,

$$\theta_1 = \alpha_1 + \arccos\left(-\frac{y}{d}\right) \Leftrightarrow \theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\ell}\right) + \arccos\left(-\frac{y}{d}\right)$$

Da mesma forma,

$$\ell\cos\theta_2 = -y - \ell\cos\theta_1 \Leftrightarrow \cos\theta_2 = -\frac{y}{\ell} - \cos\theta_1$$

$$\Leftrightarrow \theta_2 = \arccos\left(-\frac{y}{\ell} - \cos\theta_1\right)$$

GRUPO 16

ALICE ROSA, Nº 90007

BEATRIZ PEREIRA, Nº 90029