Modelação e Simulação

2019/20

Trabalho de Laboratório nº 3

Dinâmica de um metrónomo básico

Objectivos

Após realizar este trabalho, o aluno deverá ser capaz de:

1. Representar as equações do modelo de estado de um sistema linear no SIMULINK, quer utilizando blocos elementares (integradores, ganhos, funções estáticas, pontos de soma), quer utilizando o bloco que representa o modelo de estado linear.
2. Utilizar o modelo programado no SIMULINK para simular o sistema, obtendo representações no tempo, e no espaço de estados.
3. Verificar relações existentes entre a distribuição dos valores próprios de um sistema linear, a resposta no tempo e as trajectórias no espaço de estados.
4. Escolher condições iniciais no modelo de estado por forma a excitar apenas um modo do sistema.
5. Relacionar as características físicas de um sistema mecânico com o tipo da sua resposta dinâmica.

Bibliografia

[1] Acetatos dos módulos 2 e 4 de *Modelação e Simulação*.

[2] Franklin, Powell, Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, cap. 2 (dinâmica de um sistema de 2ª ordem).

Elementos a entregar

Cada grupo deverá entregar por email um relatório sucinto respondendo às questões do enunciado. As respostas às questões de preparação prévia, identificadas no enunciado como “Em casa”, deverão ser manuscritas e entregues em papel. A parte correspondente às questões de simulação deverá ser gerada automaticamente através da função “Publish” do MATLAB, e entregue por via electrónica conjuntamente com os ficheiros MATLAB/SIMULINK utilizados. Ambas as partes deverão conter um cabeçalho com a identificação do trabalho e a identificação dos alunos (número e nome dos alunos, número do grupo e turno de laboratório). As respostas a cada questão deverão ser identificadas pelo seu número. As respostas devem ser concisas.

Nota importante:

*Quer neste trabalho, quer nos subsequentes, os relatórios devem ser **originais** e corresponder ao **trabalho efetivamente realizado** pelo grupo que o subscreve.*

***Relatórios não originais** ou correspondentes a software ou outros elementos copiados terão **nota zero**, sem prejuízo de **procedimentos disciplinares** previstos pela Lei Portuguesa e de regulamentos do Instituto Superior Técnico e da Universidade de Lisboa.*

*Será utilizado o software de **deteção automática de plágio** MOSS, disponível em http://moss.stanford.edu.*

Dinâmica de um metrónomo básico

O metrónomo é um dispositivo de relojoaria que produz um sinal audível (e visual) de cadência regular, sendo utilizado sobretudo para fins de estudo ou interpretação musical. O metrónomo mecânico consiste num pêndulo cujas oscilações, reguladas pela posição de um peso numa haste, podem ser mais lentas ou mais rápidas, correspondendo a diferentes compassos.

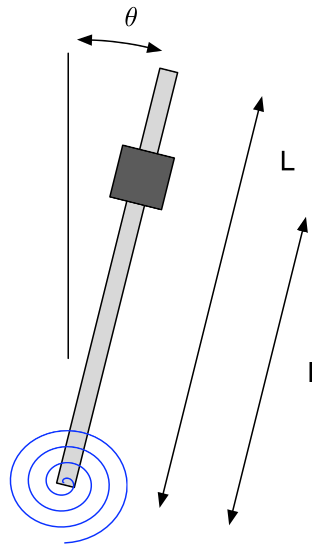

Fig. 1- Estrutura do braço do metrónomo.

A figura 1 ilustra de forma esquemática o braço de um metrónomo, constituído por uma barra metálica de comprimento *L* e massa *M*, onde se coloca uma massa *m* adicional à distância *l* (ajustável) do eixo de rotação. A barra está ligada a uma mola não linear que permite as oscilações mecânicas do sistema ao fornecer o binário $k\theta\left(1+\frac{\theta^2}{100}\right)$, onde *k* é a constante da mola. No seu movimento a mola está sujeita a atrito $\beta\dot{\theta}$, onde β é o coeficiente de atrito, e à aceleração de gravidade $g \approx 9.8\text{ms}^{-2}$, que na figura actua em sentido vertical descendente. O mecanismo de relojoaria do metrónomo permite aplicar um binário externo ao sistema da figura para o manter em oscilação, actuando sobre a deflexão da mola.

Trabalho a realizar

1 (Em casa) Estabeleça a equação diferencial (de 2ª ordem) que rege a evolução do ângulo θ.

Nota: Para o cálculo do momento de inércia associado à massa *m*, assuma que esta é pontual. Para o cálculo do momento de inércia associado à massa *M* assuma que a massa está uniformemente distribuída ao longo da barra.

2 (Em casa) Tomando como variáveis $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$ (posição e velocidade angular do braço), e admitindo pequenos ângulos de deflexão θ, obtenha uma descrição equivalente do sistema (linearizado) com um modelo de estado. Tome como entrada o binário externo aplicado à mola e como saída o ângulo de deflexão θ.

3 (Em casa) Uma maneira padrão de escrever a função de transferência de um SLIT de 2ª ordem é

$$G \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

em que ζ (coeficiente de amortecimento) e ω_n (frequência natural das oscilações não amortecidas) são parâmetros cujos valores definem a resposta do sistema. Sugere-se que relembre a relação entre o valor destes parâmetros e as respostas no tempo e na frequência recorrendo à referência bibliográfica [2].

Obtenha a função de transferência correspondente ao sistema mecânico modelado na questão anterior, e comparando com a função de transferência padrão obtenha expressões para G, ζ e ω_n em termos dos parâmetros físicos do sistema.

4 (Em casa) Com base nas expressões que obteve em 3), diga:

- **a)** Se a resposta do sistema será sempre oscilatória (como pretendido);

b) Se as oscilações se podem manter indefinidamente, sem aplicação de binário externo;

c) Se a posição da massa *m* sobre a haste influencia a rapidez das oscilações;

d) Que alterações antevê na frequência se a posição do sistema da figura 1 for alterada, passando a oscilar num plano horizontal, em vez da configuração vertical especificada?

5. Nesta alínea e nas seguintes, salvo indicação em contrário, considere que o binário aplicado é nulo. Recorrendo ao SIMULINK simule as equações de estado que obteve em 2). Nesta alínea **não** pode utilizar o bloco que permite simular directamente o modelo de estado. Deverá utilizar apenas integradores, ganhos e outros blocos elementares.

Utilize os seguintes valores numéricos para os parâmetros do modelo:

$$L = 0.5\ \mathrm{m},\ M = 0.15\ \mathrm{Kg},\ l = 0.4\ \mathrm{m},\ m = 0.2\ \mathrm{Kg},\ k = 3\ \mathrm{Nm/rad},\ \beta = 0.1\ \mathrm{Nms/rad}$$

Represente os gráficos das variáveis de estado em função do tempo e no espaço de estados. Tome como condição inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/4 \end{bmatrix}.$$

6. Modifique agora o diagrama de simulação no SIMULINK por forma a utilizar o bloco com o modelo de estado pré-definido. Repare que neste caso tem que definir as matrizes B, C e D do modelo com dimensões adequadas. Para efeitos da simulação, como convém escolher a matriz C? De aqui em diante deverá usar este diagrama para o sistema linearizado, a menos que especificado em contrário.

7. Considere os parâmetros e condições iniciais dados acima, e para β considere duas situações distintas:

a) $\beta = 0$ e b) $\beta = 1$

Trace as respostas no tempo das variáveis de estado e a correspondente evolução no plano de estado.

Em gráficos à parte, trace ainda respostas sobrepostas no plano de estado para algumas condições iniciais que considere significativas para caracterizar o retrato de fase do sistema. Sobreponha a estes gráficos o campo de vectores que define a equação diferencial. Este campo é definido associando a cada ponto do espaço de estados x o vector Ax que indica a direcção seguida pelas trajectórias de estado nesse ponto. O campo de vectores pode ser traçado com a função *quiver*.

Calcule os valores e vectores próprios da matriz A para cada valor de β, bem como para o valor usado na questão 5, e discuta a sua relação com as respostas obtidas no plano de estado[1].

8. (Em casa – justificar a escolha, relacionando-a com os modos do sistema) Nas condições anteriores, com $\beta = 1\,\mathrm{Nms/rad}$, escolha dois conjuntos de condições iniciais que conduzam a trajectórias rectilíneas no plano de fase. Ilustre ambas as situações no plano de fase.

9. (Em casa – descrever a estratégia de dimensionamento) Para $L = 0.25\,\mathrm{m}$, $M = 0.1\,\mathrm{Kg}$, $k = 0.35\,\mathrm{Nm/rad}$ e $\beta = 0.001\,\mathrm{Nms/rad}$ dimensione a massa m no sistema mecânico da figura 1 e defina dois valores para o comprimento $l \geq 0.05\,\mathrm{m}$ que permitam obter no metrónomo as cadências de 50 BPM[2] (*lento*) e 150 BPM (*allegro*). O código desenvolvido deve permitir refazer o projecto para outras frequências (que serão oportunamente fornecidas a cada grupo) com um mínimo de intervenção do operador. Confirme por simulação o dimensionamento que efectuou[3], tomando $\theta_0 = 45^{\mathrm{o}}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$. Nos gráficos com as respostas temporais sobreponha a envolvente teórica da posição angular, comentando a sua adequação às observações e as diferenças observadas para as duas cadências.

---

[1] Pode usar o comando *eig* para obter os valores e vectores próprios de uma matriz.

[2] BPM significa *beats per minute,* ou seja, é o número de vezes por minuto que o braço oscilante do metrónomo atinge **uma das duas** posições extremas. Assim, a frequência de batimentos corresponde ao **dobro** da frequência de oscilação.

[3] Para estimar a frequência empírica de oscilação use o comando *findpeaks* para localizar os máximos/mínimos da posição angular ao longo do tempo.

10. Simule o modelo não linear do metrónomo que obteve inicialmente e caracterize os desvios de frequência observados. Proponha e teste uma forma de refinar o dimensionamento das posições da massa *m* para que as cadências de oscilação se aproximem mais dos valores pretendidos.

11. Modifique o modelo do sistema não linear para simular a existência de um mecanismo de relojoaria no metrónomo que impulsiona (aplicando binário externo) durante breves instantes o pêndulo quando este passa pela vertical, contrariando assim o natural decaimento para zero da amplitude das oscilações. A presença deste sistema afecta significativamente a frequência de oscilação pretendida?

12. Considerando que o binário externo é diferente de zero e que a saída é a posição angular θ, utilize a função *bode* para traçar as curvas de resposta em frequência para as duas posições da massa determinadas na questão 9. Comente as diferenças relevantes entre as curvas. Que dispositivo poderia fornecer a este sistema mecânico o tipo de entrada subjacente ao diagrama de Bode?

13. (Em casa – descrever a estratégia de medição da massa) Embora o dispositivo para aplicação de binário externo referido na questão anterior não seja útil para um metrónomo (porquê?), pode ser usado em conjunto com o sistema mecânico para criar uma "balança" que permite medir a massa *m* sem calcular a frequência natural de oscilação do pêndulo. Suponha então que pode aplicar um binário externo sinusoidal com frequência ajustável, ou até realizar um varrimento, mas **desconhecendo a sua amplitude**. Podendo observar apenas a **amplitude de oscilação** para cada frequência, explique como poderia determinar a massa *m* conhecendo a sua posição *l* sobre a barra. Realize uma simulação (com o sistema linearizado) que ilustre o desempenho do método proposto.