MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO 2019/2020

TRABALHO DE LABORATÓRIO Nº 2:

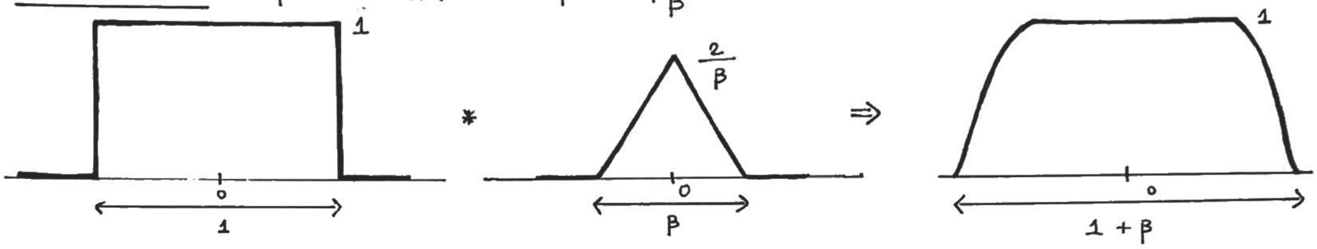
OPTIMIZAÇÃO DO SERVOMECANISMO DE UM DISCO RÍGIDO

GRUPO 16

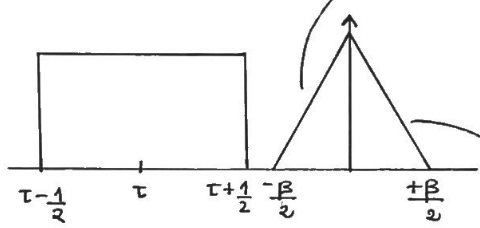
ALICE ROSA Nº 90007

BEATRIZ PEREIRA Nº 90029

QUESTÃO 1: expressão analítica para $p_\beta(\tau)$



caso ①



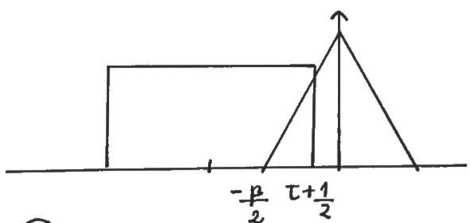
$$y_1(\tau) = \frac{4}{\beta^2}\tau + \frac{2}{\beta}$$

$$\tau + \frac{1}{2} < -\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \tau < -\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x_1(\sigma)x_2(\tau-\sigma) = 0 \Leftrightarrow p_\beta(\tau) = 0$$

$$y_2(\tau) = -\frac{4}{\beta^2}\tau + \frac{2}{\beta}$$

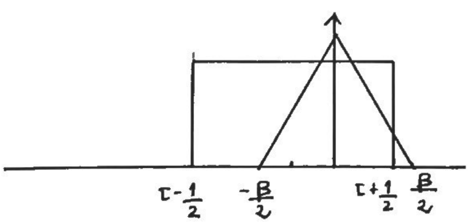
caso ②



$$\tau + \frac{1}{2} > -\frac{\beta}{2} \wedge \tau + \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \tau > -\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \wedge \tau < -\frac{1}{2}$$

$$p_\beta(\tau) = \frac{y_1(\tau + 1/2) * (\tau + 1/2 + \beta/2)}{2} = \frac{\left[4/\beta^2(\tau + 1/2) + 2/\beta\right] \times \left[\tau + 1/2 + \beta/2\right]}{2}$$

caso ③

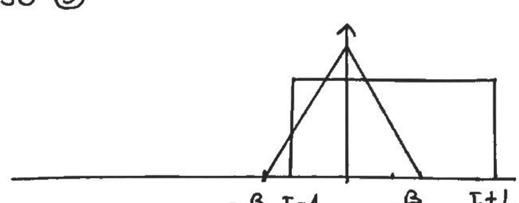


$$\tau + \frac{1}{2} > 0 \wedge \tau + \frac{1}{2} < \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \tau > -\frac{1}{2} \wedge \tau < \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}$$

$$p_\beta(\tau) = 1 - \frac{y_2(\tau + 1/2) \times \left[\beta/2 - (\tau + 1/2)\right]}{2} = 1 - \frac{\left[-4/\beta^2(\tau + 1/2) + 2/\beta\right] \times \left[\beta/2 - (\tau + 1/2)\right]}{2}$$

caso ④ $\tau + \frac{1}{2} > \frac{\beta}{2} \wedge \tau - \frac{1}{2} < -\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \tau > \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \wedge \tau < -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}$ $\quad p_\beta(\tau) = 1$

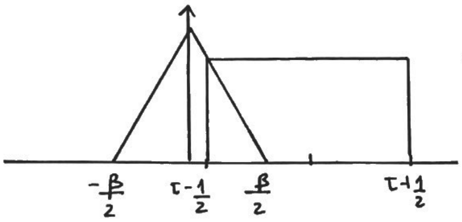
caso ⑤



$$\tau - \frac{1}{2} > -\frac{\beta}{2} \wedge \tau - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \tau > -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \wedge \tau < \frac{1}{2}$$

$$p_\beta(\tau) = 1 - \frac{\left[4/\beta^2(\tau - 1/2) + 2/\beta\right] \times \left[\tau - 1/2 + \beta/2\right]}{2}$$

caso 6



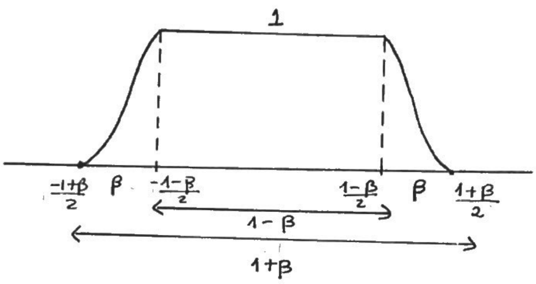
$\tau - \frac{1}{2} > 0 \wedge \tau - \frac{1}{2} < \frac{\beta}{2}$

$$P_\beta(\tau) = \frac{\left[-\frac{4}{\beta^2}(\tau - 1/2) + \frac{2}{\beta}\right] \times \left[\frac{\beta}{2} - (\tau - 1/2)\right]}{2}$$

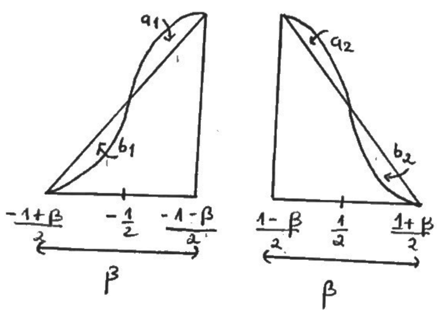
QUESTÃO 4: Verifique que o protótipo tem área unitária, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} p_\beta(\tau)\,d\tau = 1$. Calcule a área de uma versão escalada em amplitude e no tempo, $\int_{-\infty}^{\infty} U p_\beta\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau = U\mu$.

Para calcular a área de $p_\beta(\tau)$, aproximou-se o protótipo a um trapézio, dividido num triângulo de base 2β e um retângulo de base $1-\beta$.

Para que tal seja válido, tem de se comprovar que esta aproximação é exata, através de relações de simetria.



Ao analisar o esquema acima, reparamos que nos intervalos $\frac{-1+\beta}{2} < \tau < \frac{-1-\beta}{2}$ e $\frac{1-\beta}{2} < \tau < \frac{1+\beta}{2}$, cada uma das curvas pode ser dividida em duas parábolas com concavidades simétricas e em que uma sofreu uma translação.



Por simetria, $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Escolhendo o intervalo $\tau = \frac{1-\beta}{2}$ a $\tau = \frac{1+\beta}{2}$ e integrando as expressões obtidas na questão 1, temos:

$$\int_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\left[\frac{4}{\beta^2}(\tau-\frac{1}{2})+\frac{2}{\beta}\right]\left[\tau-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\right]}{2}\right) d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\beta}{2}} \frac{\left[-\frac{4}{\beta^2}(\tau-\frac{1}{2})+\frac{2}{\beta}\right]\left[\frac{\beta}{2}-\tau+\frac{1}{2}\right]}{2} d\tau$$

$$= \int_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,d\tau - \int_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\left[\frac{4}{\beta^2}(\tau-\frac{1}{2})+\frac{2}{\beta}\right]\left[\tau-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right]}{2} d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\beta}{2}} \frac{\left[-\frac{4}{\beta^2}(\tau-\frac{1}{2})+\frac{2}{\beta}\right]\left[\frac{\beta}{2}-\tau+\frac{1}{2}\right]}{2} d\tau = \int_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,d\tau = \tau\Big|_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$= \frac{\beta}{2}$, que corresponde à área do triângulo de base β.

Daqui, concluímos que como a área das parábolas é a mesma, ao integrar no mesmo intervalo, as suas contribuições <u>anulam-se</u>.

Podemos, então, calcular a área do protótipo $p_\beta(\tau)$, somando a área das duas metades do triângulo e a área do retângulo central.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} p_\beta(\tau)\,d\tau = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + 1 - \beta = 1 - \beta + \beta = 1 \quad \text{c.q.d}$$

Com base neste resultado, para calcular a área de uma versão escalada em amplitude e tempo, procede-se a uma mudança de variável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U p_\beta\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} U p_\beta(x)\mu\, dx = U\mu \int_{-\infty}^{\infty} p_\beta(x)\, dx = U\mu$$

$$x = \frac{\tau}{\mu} \Leftrightarrow \tau = x\mu \Rightarrow d\tau = \mu dx$$

<u>QUESTÃO 5:</u> Para uma entrada $u(\tau)$ constante, mostre que no plano de fase $(y, \dot{y})$, o estado do sistema percorre uma trajetória parabólica.

Pelas equações do movimento, com $\ddot{y} = u$

$$y = y_0 + \dot{y}(0)\tau + \frac{1}{2}\ddot{y}\tau^2 = y_0 + \dot{y}_{(0)}\tau + \frac{1}{2}u\tau^2$$

$$\dot{y} = \dot{y}(0) + \ddot{y}\tau \Leftrightarrow \tau = \frac{\dot{y} - \dot{y}(0)}{\ddot{y}} = \frac{\dot{y} - \dot{y}(0)}{u}$$

Daqui,

$$y = y_{(0)} + \dot{y}(0)\left(\frac{\dot{y} - \dot{y}(0)}{u}\right) + \frac{1}{2}u\left(\frac{\dot{y} - \dot{y}(0)}{u}\right)^2$$

$$= y(0) + \frac{\dot{y}(0)\dot{y}}{u} - \frac{\dot{y}(0)^2}{2} + \frac{1}{2}u\left(\frac{\dot{y}^2}{u^2} - \frac{2\dot{y}\dot{y}(0)}{u^2} + \frac{\dot{y}(0)^2}{u^2}\right)$$

$$= y(0) + \frac{\dot{y}(0)\dot{y}}{u} - \frac{\dot{y}(0)^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2u} - \frac{\dot{y}(0)\dot{y}}{u} + \frac{\dot{y}(0)^2}{2u}$$

$$= y(0) - \frac{1}{2}\frac{\dot{y}(0)^2}{u} + \frac{1}{2}\frac{\dot{y}^2}{u}$$

$$y = \left(\dot{y}^2 - \dot{y}(0)^2 + y(0)2u\right)\cdot\frac{1}{2u}$$

Comprova-se, então, que o sistema percorre uma trajetória parabólica, uma vez que se trata de uma equação de segundo grau.

QUESTÃO 6: Dados α e β pretende-se determinar os parâmetros U_1, U_2 e T para que $u(\tau)$ conduza o sistema da configuração inicial $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$ para a configuração final desejada $y(T)=0$, $\dot{y}(T)=0$ em tempo mínimo.

• Relacionar as amplitudes das duas réplicas, U_1 e U_2, para que

$$\dot{y}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, d\tau = 0$$

$$\begin{cases} u_1(\tau) = -U_1\, p_\beta\left[\dfrac{\tau - \frac{T_1}{2}}{\mu_1}\right], & \mu_1 = \dfrac{T_1}{1+\beta} \\ u_2(\tau) = U_2\, p_\beta\left[\dfrac{\tau - \left(T_2 + \frac{T_2}{2}\right)}{\mu_2}\right], & \mu_2 = \dfrac{T_2}{1+\beta}, \quad T_2 = \alpha T_1 \end{cases}$$

Da questão 4, temos que $\int_{-\infty}^{\infty} U\, p_\beta\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \partial\tau = U\mu$.
Assim,

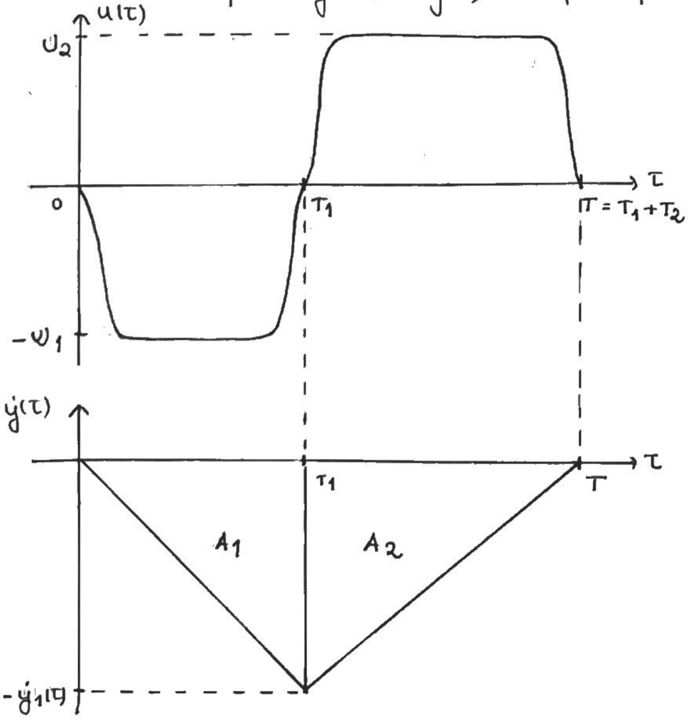
$$\dot{y}_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)\, d\tau = -\int_{-\infty}^{\infty} U_1\, p_\beta\left(\frac{\tau - \frac{T_1}{2}}{\mu_1}\right) \partial\tau = -U_1\mu_1 = -U_1\left[\frac{T_1}{1+\beta}\right]$$

$$\dot{y}_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_2(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} U_2\, p_\beta\left(\frac{\tau - T_2 - \frac{T_2}{2}}{\mu_2}\right) d\tau = U_2\mu_2 = U_2\left[\frac{T_2}{1+\beta}\right]$$

Como $\dot{y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, d\tau = 0 \iff \dot{y}_1(\tau) + \dot{y}_2(\tau) = 0$

$$\Rightarrow U_1\left[\frac{T_1}{1+\beta}\right] = U_2\left[\frac{T_2}{1+\beta}\right] \iff \frac{U_1}{U_2} = \frac{T_2}{T_1} \iff U_1 = \frac{\alpha T_1}{T_1} U_2 \iff \boxed{U_1 = \alpha U_2}$$

• Calcular $y(T) = y(0) + \int_0^T \dot{y}(\tau)\, d\tau$ em função de U_1, T_1, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.
Atendendo a que $y(T) - y(0) = -1$, expressar U_1 em função de T_1.



As áreas podem ser aproximadas a um triângulo, uma vez que existe simetria entre a variação das condições inicial e final. Logo,

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2} T_1 U_1 \left(\dfrac{T_1}{1+\beta}\right) = \dfrac{1}{2} U_1 \dfrac{T_1^2}{(1+\beta)} \\ A_2 = \dfrac{1}{2} T_2 U_2 \left(\dfrac{T_2}{1+\beta}\right) = \dfrac{1}{2} U_1 \dfrac{\alpha T_1^2}{(1+\beta)} \end{cases}$$

Daqui,

$$\int_0^T \dot{y}(\tau)\, d\tau = \int_0^{T_1} \dot{y}_1(\tau)\, d\tau + \int_{T_1}^{T_2} \dot{y}_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= -A_1 - A_2 = \frac{-U_1 T_1^2 (1+\alpha)}{2(1+\beta)}$$

$$y(T) - y(0) = -1 \Leftrightarrow \int_0^T \dot{y}(\tau)\, d\tau = -1 \Leftrightarrow -v_1 \frac{T_1^2 (1+\alpha)}{2(1+\beta)}$$

Posto isto, conclui-se

$$\begin{cases} \boxed{v_1 = \dfrac{2(1+\beta)}{T_1^2 (1+\alpha)}} \\ \boxed{v_2 = \dfrac{v_1}{\alpha} = \dfrac{2(1+\beta)}{\frac{T_2^2}{\alpha}(1+\alpha)}} \end{cases}$$

• Obter valor mínimo admissível para T em função de α e β, impondo a restrição $|v_1|, |v_2| \leq 1$

$$|v_1|, |v_2| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2(1+\beta)}{T_1^2(1+\alpha)} \leq 1 \Leftrightarrow T_1 \geq \sqrt{\dfrac{2(1+\beta)}{1+\alpha}} \\ \dfrac{2(1+\beta)}{\frac{T_2^2}{2}(1+\alpha)} \leq 1 \Leftrightarrow T_2 \geq \sqrt{\dfrac{2(1+\beta)\alpha}{1+\alpha}} \end{cases}$$

Uma vez que, $T = T_1 + T_2$ e $T_2 = \alpha T_1$ tem-se que $T_1 = \dfrac{T}{1+\alpha}$ e $T_2 = \dfrac{\alpha T}{1+\alpha}$

A partir daqui,

$$\begin{cases} T \geq \sqrt{2(1+\beta)(1+\alpha)} \Rightarrow T_{min} = \sqrt{2(1+\beta)(1+\alpha)} \\ T \geq \sqrt{\dfrac{2}{\alpha}(1+\alpha)(1+\beta)} \Rightarrow T_{min} = \sqrt{\dfrac{2}{\alpha}(1+\beta)(1+\alpha)} \end{cases}$$

• Valor de α que minimiza o tempo.

$$\sqrt{2(1+\beta)(1+\alpha)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}(1+\beta)(1+\alpha)} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = 1,\ \alpha > 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$