MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO 2019/2020

TRABALHO DE LABORATÓRIO Nº3

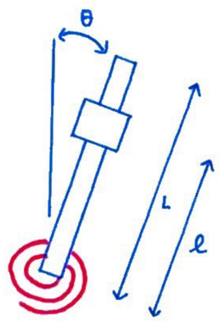
DINÂMICA DE UM METRÓNOMO BÁSICO

GRUPO 16

ALICE ROSA Nº 90007

BEATRIZ PEREIRA Nº 90029

K - const. da mola
β - coef. de atrito
$g \simeq 9.8\ m/s^2$



Braço de um metrónomo - barra metálica de comprimento L e massa M com uma massa adicional m à distância l do eixo de rotação

- Binário $K\theta\left(1+\frac{\theta^2}{100}\right)$
- Atrito $\beta\dot{\theta}$
- Binário Externo T

QUESTÃO 1 Equação diferencial (2ª ordem) que rege a evolução do ângulo θ

LEI DE NEWTON-EULER PARA CORPOS EM ROTAÇÃO

$$\sum T_{apli} = J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = J\ddot{\theta}$$

→ Somatório dos binários aplicados ao sistema
→ Aceleração angular
→ Momento de Inércia

- Momento de Inércia da massa m: $J_m = ml^2$
- Momento de Inércia da barra: $J_M = \int_0^L l^2 \frac{M}{L}\, dl = \frac{1}{3}ML^2$

$$J = J_m + J_M = ml^2 + \frac{M}{3}L^2$$

- Força gravítica da massa m: $Fg_m = mlg\,\text{sen}\,\theta$
- Força gravítica da barra: $Fg_M = g\int_0^L \frac{M}{L} l\,\text{sen}\,\theta\, dl = \frac{1}{2}gML\,\text{sen}\,\theta$

$$\Rightarrow J\ddot{\theta} = -K\theta\left(1+\frac{\theta^2}{100}\right) - \beta\dot{\theta} + mgl\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}gML\,\text{sen}\,\theta + T$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{J}\left[-K\theta\left(1+\frac{\theta^2}{100}\right) - \beta\dot{\theta} + g\,\text{sen}\,\theta\left(ml + \frac{1}{2}ML\right) + T\right] //$$

QUESTÃO ② Tomando como variáveis $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$ (posição e velocidade angular do braço) e admitindo pequenos ângulos de deflexão θ, obtenha uma descrição equivalente do sistema (linearizado) com um modelo de estado.

Tomando $\begin{cases} u = T \\ y = \theta = x_1 \end{cases}$ $\quad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

Em equilíbrio $\quad x_1 = x_2 = \dot{x}_2 = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \dfrac{T - Kx_1\left(1 + \frac{x_1^2}{100}\right) - \beta x_2 + g\,\mathrm{sen}(x_1)(m\ell + \frac{1}{2}ML)}{J} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g_1(x, u) \\ g_2(x, u) \end{cases}$$

LINEARIZAÇÃO

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g(m\ell + 1/2ML) - K}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}}_{A}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}}_{B}$$

- $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g(m\ell + 1/2ML) - K}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u$ $\qquad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

- $y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x \qquad D = [0]$

QUESTÃO 3 Função de transferência de um SLIT de 2ª ordem do tipo

$$G(s) = G \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

, em que ξ corresponde ao coeficiente de amortecimento e ω_n à frequência natural das oscilações não amortecidas.

Sabe-se que $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g(me+1/2ML)-K}{J} x_1 - \frac{\beta}{J} x_2 + \frac{1}{J} u \end{cases}$ e $y = x_1$

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = \frac{g(me+1/2ML)-K}{J} x_1 - \frac{\beta}{J}\dot{x}_1 + \frac{1}{J}u$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_1 + \frac{\beta}{J}\dot{x}_1 - \frac{g(me+1/2ML)-K}{J} x_1 = \frac{u}{J}$$

TL $\hookrightarrow$ $s^2 X_1(s) + \frac{\beta}{J} s X_1(s) - \frac{g(me+1/2ML)-K}{J} X_1(s) = \frac{1}{J} U(s)$

$$\Rightarrow \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1/J}{s^2 + \left(\frac{\beta}{J}\right)s - \frac{g(me+1/2ML)-K}{J}}$$ (Função transferência)

$$\begin{cases} G\omega_n^2 = 1/J \Leftrightarrow G = \frac{1}{J}\cdot\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{K-g(me+1/2ML)} \\ \omega_n^2 = \frac{K-g(me+1/2ML)}{J} \Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K-g(me+1/2ML)}{J}} \\ 2\xi\omega_n = \frac{\beta}{J} \Leftrightarrow \xi = \frac{\beta}{J}\cdot\frac{1}{2\omega_n} = \frac{\beta}{2J\sqrt{\frac{K-g(me+1/2ML)}{J}}} \end{cases}$$

QUESTÃO 4 Com base nas expressões obtidas na questão 3:

a) Para que a resposta do sistema seja sempre oscilatória é necessário que não haja atrito, logo, $\beta = 0$. Para isso, o coeficiente de amortecimento, ξ, terá de ser nulo.

b) Para $T = 0$, não é possível manter as oscilações indefinidamente, pois atuam sobre o sistema forças de atrito sem binário para as contrariar, logo este vai perdendo energia e há um natural decaimento da amplitude da frequência para zero.

c) A posição da massa m sobre a haste influencia a rapidez das oscilações, pois esta é definida por ℓ, parâmetro de que depende a frequência natural das oscilações não amortecidas.

Por $\omega_n = \sqrt{\frac{K - g(m\ell + \frac{1}{2}ML)}{J}}$, conclui-se que quanto maior o valor de ℓ, menor frequência angular.

d) Se o sistema passar a oscilar num plano horizontal, em vez da configuração vertical especificada, a aceleração gravítica deixa de atuar no sistema e $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$, logo, a frequência angular aumenta.

QUESTÃO 8 Justificação da escolha, relacionando-a com os modos do sistema.

Escolhe-se como valores iniciais os vetores próprios da matriz A calculados anteriormente, pois desta forma a direção na qual a solução avança é a mesma para que o sistema evolui, logo, a trajectória é rectilínea.

QUESTÃO 9 Descrição da estratégia de dimensionamento.

Começa-se por criar vários pares (m, ℓ) e calcula-se, para cada um, a sua frequência natural das oscilações não amortecidas, $\omega_n = \sqrt{\frac{K - g(m\ell + 1/2 ML)}{J}}$.

Sabe-se que o número de batimentos por minuto (BPM) é o dobro da frequência de oscilação $f_{osc.} = \frac{\omega_n}{2\pi}$, logo, $BPM = 2 f_{osc.}$.

A partir daqui, procura-se na matriz com os vários valores de BPM obtidos o par (m, ℓ_1) que mais se aproxima de 50 BPM (lento).

Por fim, fixa-se o valor da massa e volta-se a percorrer a matriz das frequências de batimentos por minuto, apenas para a linha correspondente a esse valor de m, para encontrar o valor l_2 que se encontra mais perto de 150 BPM (allegro).

Utiliza-se a aproximação $\omega_a = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \simeq \omega_n$, para valores muito pequenos de β.

QUESTÃO 13 Descrição da estratégia de medição da massa.

O dispositivo para aplicação de binário externo referido na questão anterior não é útil para um metrónomo, porque não mantém a frequência constante ao longo do tempo.

Para medir a massa desconhecida, faz-se o varrimento das frequências do binário externo sinusoidal de modo a encontrar a frequência a que corresponde o valor máximo de amplitude de oscilação, ou seja, o ω_n.

Daqui, manipulou-se a expressão obtida para a frequência natural das oscilações não amortecidas de modo a obter a massa, ou seja,

$$m = \frac{K - J\omega_n^2 - g\,1/2\,ML}{g\ell}$$