

ILUM ESCOLA DE CIÊNCIA

Alice Kageyama, Marina Barim e Pedro Thomazelli
Vinicius Francisco Wasques

Método das diferenças finitas

(ILUM/Análise Numérica - TCS)

Jul, 2023

Introdução

O método das diferenças finitas se baseia em aproximar soluções para Equações Diferenciais Parciais (EDP). Para isso, utiliza-se uma função que satisfaz certa relação, utilizando para isso as derivadas parciais com relação a tempo e espaço. Além disso, outra coisa de suma importância, são as condições de contorno. [1]

Ademais, utiliza-se da *discretização* destas equações diferenciais. Ou seja, ele transforma uma função contínua é transformada em um conjunto de pontos[2].

Assim, tendo as condições de contorno, o primeiro passo a ser tomado é dividir o domínio em um certo número de pontos. Ou seja, o método de diferenças finitas busca equações algébricas que aproximem a solução em cada ponto da partição. E, para isto, as derivadas são aproximadas a relações algébricas em diferentes pontos da partição.

Assim, temos três equações principais: a equação a direita, a equação esquerda e a equação no ponto central. Estas apresentam o seguinte formato, respectivamente:

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

$$D_cu(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

E, a partir disso, podemos aproximar para as mais diversas derivadas, sendo a principal utilizada neste trabalho a derivada de segunda ordem. A derivada de

primeira ordem já foi determinada, sendo a do ponto central. Então, para a de segunda ordem temos:

$$v''(t) = \frac{v(t+h) - 2v(t) + v(t-h)}{h^2}$$

Agora, precisamos aproximar essa equação pelo método das diferenças finitas:

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t+h) - u(x, t-h)}{2h} &= \\ = k \frac{u(x+p, t) - 2u(x, t) + u(x-p, t)}{p^2} &= \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(x, t+h) = u(x, t-h) + \frac{2hk}{p^2} [u(x+p, t) - 2u(x, t) + u(x-p, t)]$$

Assim, temos a equação que será utilizada para a resolução dos problemas.

Equação do Calor

A condução do calor é um fenômeno físico que acontece a partir de atividades atômicas e moleculares, na qual, quando há a colisão com moléculas vizinhas há a transferência de energia entre elas. Podemos quantificar a transferência de calor por meio da lei de resfriamento de Fourier. [4]

Podemos considerar uma barra homogênea com lateral isolada e faces de área A , mantidas constantemente com temperaturas T_1 e T_2 e paralelas entre si, com uma distância Δx . Segundo a lei de resfriamento de Fourier, haverá a transferência de calor de uma face para outra, a depender do material, tendo a necessidade de introdução do coeficiente k , que é a condutividade térmica, para que fosse possível calcular a taxa de transferência de calor q_x :

$$q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2)$$

Ao observar as secções transversais da barra em x e $x + \delta$, podemos analisar o fluxo de calor através da secção x no instante t . Podemos indicar a temperatura de um ponto de abscissa x num instante t como $u(x, t)$, e assim, $T_1 = u(x, t)$ e $T_2 = u(x + \delta, t)$. Assim, o fluxo de calor q será uma função de x e t . Ao tomarmos o sentido positivo do eixo x , utilizaremos a lei de Fourier, tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$ para obter a expressão:

$$q(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} kA \frac{\Delta T}{\delta} (x, t) = -kAu_x(x, t) \quad (3)$$

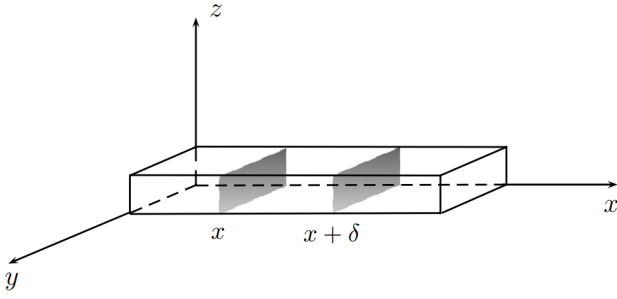


Figure 1: Barra posicionada sobre o eixo das abscissas, com lateral isolada termicamente e secção transversal de área A

Como o calor é transferido da secção mais quente para a mais fria da barra, foi necessário adicionar um sinal negativo na equação. Assim, se $u(x, t)$ crescer com x , a variação em x de u será positiva, sendo assim, o fluxo de calor será negativo. Da mesma forma, se $u(x, t)$ diminuir com x , u_x será negativo, e portanto, $q(x, t)$ será positivo. Ao selecionarmos uma seção da barra situada em x_0 e outra em $x_0 + \delta$, podemos determinar a quantidade total de calor, representada por Q , que entra em um segmento fixo entre x_0 e $x_0 + \delta$ durante o intervalo de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$. Essa determinação é feita com base no fluxo de calor $q(x, t)$.

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) - q(x_0 + \delta, t) dt \quad (4)$$

Ao retomarmos a equação 3, teremos:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} -k[u_x(x_0, t) - u_x(x_0 + \delta, t)]A dt \\ kA \int_a^b u_{xx}(x, t) dx &= kA[u_x(b, t) - u_x(a, t)] \\ Q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} u_{xx}(x, t) dx, dt \end{aligned} \quad (5)$$

O calor específico de uma substância, representado pela letra c , é a propriedade física que determina a quantidade de calor Q necessária para aquecer de ΔT uma massa m de determinado material. Como a barra é homogênea, é possível expressar a massa de uma secção a partir de sua área e da densidade de seu material, sendo assim, $m = \rho \cdot A$. Podemos, portanto, calcular a quantidade de calor que entrou uma secção x em um instante t por $q = c \cdot \rho \cdot A \cdot u_t(x, t)$. Assim, podemos expressar Q como:

$$Q = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\int_{t_0}^{t_0+\tau} cu_t(x, t)\rho A dt \right) dx \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x, t) dx dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (7)$$

A equação 7 é válida para todo $t_0 > 0$, todo $x_0 \in (0, L)$ e todos $\tau > 0$ e $\delta > 0$. Assim:

$$\begin{aligned} ku_{xx}(x, t) &= c\rho u_t(x, t) \\ u_t &= Ku_{xx} \end{aligned} \quad (8)$$

O coeficiente de difusibilidade térmica é $K = \frac{k}{c\rho}$, e aparece na expressão 8. Tal equação é uma das formas da equação do calor, que fisicamente representa a variação da temperatura $u(x, t)$ numa barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente. [5]

Aplicação do método das diferenças finitas na equação do calor

Para resolver a equação do calor utilizando o método das diferenças finitas, vamos discretizar o domínio espacial $[0, 1]$ e o domínio temporal $[0, 1]$ em intervalos uniformes.

Definimos o número de pontos de grade espacial η e o número de pontos de grade temporal μ . Vamos usar a seguinte notação:

- $p = \frac{1}{\eta}$ (tamanho do intervalo espacial)
- $h = \frac{1}{\mu}$ (tamanho do intervalo temporal)
- $\kappa = 0.5$

Após isso, inicializaremos a grade com os valores iniciais, portando:

- Para $t = 0$:
 $u(x_i, 0) = x_i(1 - x_i)^2$, para $i = 0, 1, \dots, \eta$
- Para $t > 0$:

Para $j = 1, 2, \dots, \mu$ e $i = 1, 2, \dots, \eta - 1$:

$$\begin{aligned} u(x, t + h) &= u(x, t - h) + \kappa \left(\frac{2h}{p^2} \right) \cdot \\ &\quad (u(x + p, t) - 2u(x, t) + u(x - p, t)) \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, t + h) &= 0 \\ u(1, t + h) &= 0 \end{aligned}$$

Esse é o procedimento para resolver a equação do calor utilizando o método das diferenças finitas centradas no tempo e no espaço. Utilizamos a fórmula de diferenças finitas para aproximar as derivadas parciais e atualizamos os valores de u em cada ponto da grade espacial e temporal.

Equação da Advecção

Para o ramo da física, a advecção trata do transporte de uma quantidade ou substância por um fluido, de modo que as propriedades, como sua energia, sejam mantidas. Como exemplo real, temos o carregamento de poluição por um rio.

No âmbito da matemática, o movimento do fluido pode ser descrito como um campo vetorial, enquanto o material transportado pode ser descrito como um campo escalar. Vale ressaltar que, por necessitar de correntes no fluido, a advecção não ocorre em sólidos.

Também temos esse fenômeno trabalhado na meteorologia, sendo o transporte de alguma substância pela atmosfera, sendo um fenômeno importante para a formação de nuvens orográficas e precipitação da água.

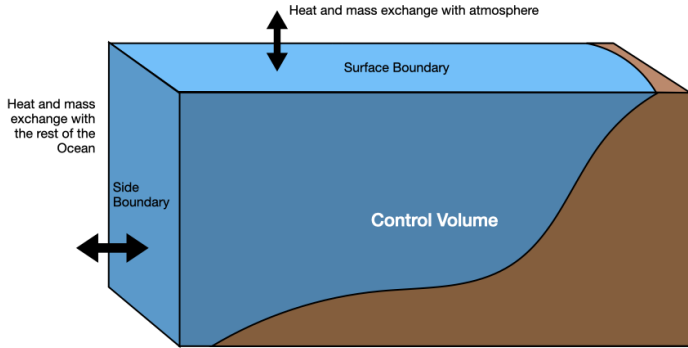


Figure 2: Exemplo de fenômeno de advecção na natureza.

Matemática

A equação da advecção é uma equação diferencial parcial, que representa o movimento de um campo escalar conservado, a partir de um campo de velocidades vetoriais já conhecidos [3].

Assim, temos como a nossa equação diferencial parcial sendo:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) \quad (9)$$

Logo, destrinchando a equação 9:

$$u_t + \mu u_x = 0 \quad (10)$$

Temos:

1. $\mu = 0,25$;
2. $u(x, 0) = \eta(x) = x(1 - x)$;
3. $u(x, t) = \eta(x - \mu t)$

Para resolução do problema, aplicamos a Equação 1.

O método das diferenças finitas foi aplicado para a equação da advecção de modo a ser possível determinar a quantidade de um outro material qualquer estaria presente em um outro fluido. Desse modo, poderíamos observar o comportamento da advecção quando aplicada a esse problema. O resultado pode ser observado na 4.

Implementação e Resultados

Finalmente, para de fato realizar os cálculos numéricos dos valores reais de $u(x, t)$ de forma matricial tal que $u(i, j) = U_{ij}$, foi implementado um código em Python, na forma de um Jupyter notebook - o qual pode ser encontrado no repositório do GitHub de link <<https://github.com/alicevk/diferencas-finitas>>.

Ao aplicar o Método de Diferenças Finitas, o domínio do problema foi discretizado e as derivadas parciais foram aproximadas por diferenças finitas. Isso permitiu a obtenção de soluções aproximadas para as EDPs, que foram representadas graficamente nas Figuras 3 e 4.

Os resultados obtidos demonstraram a eficácia do Método de Diferenças Finitas na resolução de problemas complexos de EDPs. As soluções numéricas foram capazes de capturar as características principais dos fenômenos físicos modelados pelas EDPs, fornecendo uma boa aproximação para as soluções exatas.

Partindo para uma breve análise de cada resultado, pode-se observar que a Figura 3 representa uma solução numérica da equação do calor, enquanto a Figura 4 representa a da advecção. O eixo x em cada gráfico representa a posição espacial (0 a 1) e o eixo t representa o tempo (0 a 1). O eixo z representa o valor da função $u(x, t)$, que é a solução da equação do calor e da advecção para cada figura respectiva.

O primeiro gráfico mostra a evolução da função u ao longo do tempo, onde a solução se propaga e difunde ao longo do domínio espacial. Você pode observar como a temperatura se distribui ao longo do tempo e como

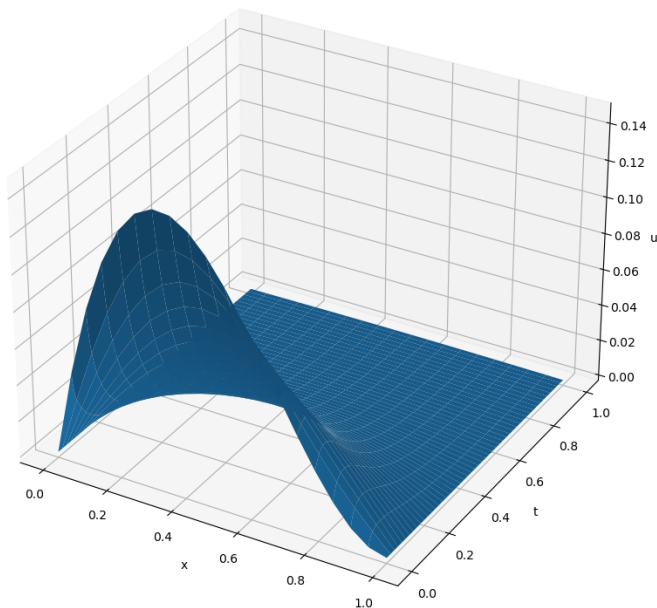


Figure 3: Plotagem da solução obtida para o problema da equação do calor.

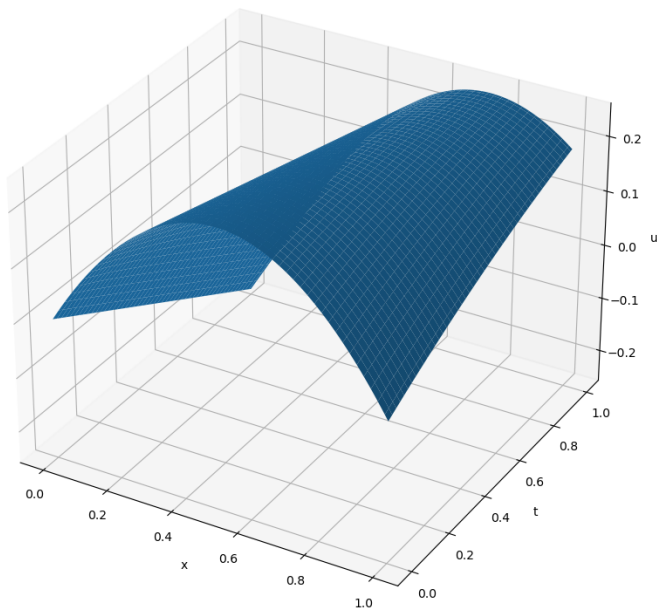


Figure 4: Plotagem da solução obtida para o problema da equação da advecção.

ela se comporta nas diferentes posições do domínio. A condição inicial dada, como explicado anteriormente, é uma função quadrática de x , onde a função $u(x, 0)$ aumenta de 0 a 1 e, em seguida, diminui de 1 para 0. A solução numérica é calculada iterativamente usando o método de diferenças finitas para discretizar a

equação do calor. Conforme o tempo avança, a solução numérica mostra como essa distribuição inicial de temperatura se propaga e se difunde através do material.

Diferentemente da equação do calor, em que a temperatura se difunde, no gráfico da equação da advecção, a condição inicial definida afeta a distribuição inicial da propriedade no domínio espacial; observa-se então que a propriedade física é transportada pelo campo de velocidade constante. Isso significa que a forma da distribuição inicial é preservada, mas ela se move ao longo do domínio espacial de acordo com o campo de velocidade definido.

A interpretação física desse gráfico envolve observar como a propriedade física é transportada e como ela se comporta ao longo do tempo. É possível identificar regiões onde a concentração da propriedade é maior ou menor e analisar como ela se desloca pelo domínio espacial.

Colaborações

- Alice Kageyama: Implementação do código e conclusão;
- Marina Barim: Equação de calor e como o método das diferenças finitas foi utilizado;
- Pedro Thomazelli: Equação da advecção e introdução.

References

- [1] WASQUES, V. Notas de Aula - Análise Numérica.
- [2] FONTANA, É. Introdução ao Método das Diferenças Finitas com Aplicações em Engenharia Química. Disponível em: <https://fontana.paginas.ufsc.br/files/2017/02/apostila_metII_20191.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2023.
- [3] Yin, C.; Kareem, A. (2014). "Probability advection for stochastic dynamic systems. Part I: Theory". In Deodatis, George; Ellingwood, Bruce R.; Frangopol, Dan M. (eds.). Safety, Reliability, Risk and Life-Cycle Performance of Structures and Infrastructures. CRC Press. pp. 1149–1156. ISBN 978-1-138-00086-5
- [4] DE ARAÚJO, P. N. Equações diferenciais parciais: um estudo sobre a equação do calor. Disponível em: <https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/114388/mod_resource/content/0/Vers%C3%A3o%20Final.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2023.

[5] 2a Aula do cap. 19 Calor e Mudança de Estado Físico. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://sistemas.eel.usp.br/docentes/arquivos/2166002/LOB1019/2_a_Aulacap19Calor.pdf>.