L'eficàcia d'algunes mesures preventives per aturar la COVID-19

Alícia Chimeno Sarabia

NIU: 1565281

Universitat Autònoma de Barcelona

Febrer 2021

1 Introducció

La COVID-19 ha despertat l'interés en l'epidemiologia arreu del món. No només la comunitat científica hi està involucrada, sino degut al seu gran impacte cultural, econòmic i social, tots els sectors s'han hagut d'adaptar en funció l'evolució de la pandèmia. És per això que és imprescindible el treball dels matemàtics i les matemàtiques per crear models que descriguin la seva evolució. mj

2 Modelitzar la COVID-19

Un dels grans reptes dels matemàtics durant la pandèmia ha sigut i continua sent modelar les dades obtingudes per tal d'obtenir un o diversos models útils per poder fer prediccions.

2.1 Model SIR

El model SIR [1] és un model matemàtic introduït per William O. Kermack i Anderson G. MacKendrick el 1927 que pretén modelar la propagació de les malalties infeccioses mitjançant les equacions diferencials. Es caracteritza per dividir tota la població en 3 categories:

- S denota el nombre de persones susceptibles de contraure la malaltia.
- I denota el nombre de persones infectades i que poden transmetre la malaltia.
- R denota el nombre de persones que han passat la malaltia (recuperats o morts) que no poden transmeter-la.(denotarem per X per no confondre amb la posterior R factor de reproducció tal i com es fa a [1]).

L'evolució d'aquestes variables respecte el temps es veu reflexada d'acord amb les següents equacions diferencials:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \gamma I$$

On $\beta \cdot S \cdot I$ representa la velocitat amb què apareixen nous infectats i $\gamma \cdot I$ la velocitat amb què un cas passa a ser d'infectat a remogut .

2.2 Variables i paràmetres

Definim els següents conceptes:

- N: Nombre total de població.
- γ: Taxa diària de resolució : casos resolts per dia, entenem com a cas resolt el cas en que la persona en qüestió passa de ser considerada infectada a remoguda.
- γ^{-1}: promitg del nombre dies que es tarda a recuperar de la malaltia. $\gamma = 1/7$ dies^{-1} segons la font [3]
- k: Taxa de contagis : Contagis per infectat per unitat de temps. Varia depenent de
  - κ Nombre de contactes.
  - ω Probabilitat de transmissió. En aquesta variable i intervé l'ús de mascareta, distanciament social, higiene, les restriccions, vacunació ...
  - $\frac{S}{N}$ Proporció de susceptibles.
- R : Factor de reproducció: nombre mitjà de casos que deriven d'un mateix cas donat.

$$R = \frac{k}{\gamma}$$

- R_0 : Factor bàsic de reproducció es refereix al càlcul del factor de reproducció de les primeres instàncies de la encara-no epidèmia on gairebé tota la població pertany al grup dels susceptibles i hi ha un percentatge d'individus infectats molt baix.

En aquest model SIR es considera que si el factor de reproducció és més gran que 1 ($R > 1$) aleshores la pandemia prosperarà ja que el nombre de contagis augmentarà de forma exponencial i si contràriament és més petit que 1 ($R < 1$) i decreix o és manté constant al llarg del temps aleshores el nombre de contagis serà controlat i a la llarga l'epidèmia acabarà desapareixent.

2.3 Simplificacions adoptades

Per aquest model necessitem fer les següents suposicions:

- Per poder fer una modelització deterministica, considerem que hi ha transmissió comunitària, que es caracteritza per una gran quantitat d'infectats.
- Suposem que el total de la població N := S + I + R es manté constant. No neix, ni migra, ni mor gent.
- Suposem que tant les persones que han passat la malaltia com les que han estat vacunades tenen immunitat total. No considerem la reinfecció del remogut.
- Suposem que els paràmetres (que a la realitat variarien depenent de la persona) ω, κ, γ tenen el mateix valor per a tothom. Considerem el paràmetre γ constant

- Suposem que el número de contactes és proporcional a la població. $\kappa = \text{a}\cdot\text{N}$
- Suposem que no hi ha variants del virus i aquest no muta al llarg del temps.
- Considerem que només hi ha una mascareta homologada, que te una efectivitat determinada i l'utilització d'aquesta és d'un cert percentatge de la població.

3 Eines per aturar la COVID-19

3.1 Vacuna

3.1.1 Enunciat

A molts llocs se'ns diu que per aturar la Covid-19 cal vacunar el 70% de la població. Però difícilment se'ns explica d'on surt aquest valor concret. Podries explicar-ho? Podem estar segurs que és suficient aquest percentatge? Com depèn el factor de reproducció de la malaltia del percentatge de població immune?

3.1.2 Notació

- Proporció de vacunats del total de la població ($\frac{V}{N}$)
- Eficàcia de la vacuna (e)

3.1.3 Discussió

Per tal d'aturar una epidèmia, s'ha d'aconseguir que aquest famós factor R anomenat factor de reproducció sigui més petit que 1. El factor de reproducció és un indicador rellevant a salut pública, ja que és un clar indicador de l'estat actual de la malaltia. Què podem fer per tal de disminuir aquest valor? El factor R es representat matemàticament com $R = \frac{k}{\gamma}$ i depèn de les variables que hem detallat anteriorment.
Per tant tenim definida R com:

$$R = \frac{\kappa \cdot \omega \frac{S}{N}}{\gamma}$$

A continuació volem calcular el percentatge de la població que s'ha de vacunar per tal d'aconseguir que l'epidèmia desaparegui. És a dir, volem calcular $\frac{V}{N}$, sigui $R < 1$
El que podem observar és que la vacunació de la població afectarà principalment la variable S/N, en concret farà que disminueixi la probabilitat que un individu sigui susceptible. Tenim que $\frac{S}{N} = \frac{N-X}{N} = 1 - \frac{X}{N}$.
Si suposem el cas que tota la població és succeptible, S=N, llavors ens trobem amb la situació just al començament de la pandèmia . El factor de reproducció és $R_0 = \frac{\kappa \cdot \omega \cdot 1}{\gamma}$ per tant obtenim que: $R = R_0 \cdot \frac{S}{N}$

Càlcul del percentatge de vacunació necessari considerant que únicament tenen immunitat els vacunats
Sigui X=V. Com que volem que $R < 1$. Utilitzant les dades proporcionades a [5] on es calcula el factor de reproducció de la COVID-19 $R_0 = 3.28$ obtenim,

$$R < 1 \Leftrightarrow R_0 \cdot (1 - \frac{X}{N}) < 1 \Leftrightarrow (1 - \frac{X}{N}) < \frac{1}{R_0} \Leftrightarrow \frac{X}{N} > 1 - \frac{1}{R_0} = 1 - \frac{1}{3.28} \simeq 0.6951 \simeq 0.7$$

Per tant concloem que per tal que la pandèmia vagi desapareixent($R < 1$) sembla raonable pensar que serà suficient de vacunar el 70% de la població. A més a més, en aquest model només hem tingut en compte les persones vacunades com a remoguts, això ens indica que possiblement el llindar de vacunació serà més baix ja que no estem considerant les persones que han passat el COVID i per tant, tenen immunitat.

Càlcul del percentatge de vacunació necessari considerant els que han passat la malaltia tenen immunitat:

Suposem doncs que X = H + M + V, on X són els remoguts, H els recuperats, M els morts, V els vacunats. Amb el que hem vist anteriorment podem dir que,

$$R < 1 \Leftrightarrow \frac{V}{N} + \frac{H+M}{N} > 1 - \frac{1}{R_0} \Leftrightarrow \frac{V}{N} > 1 - \frac{1}{R_0} - \frac{H+M}{N}$$

En concret utilitzant les dades del COVID de Catalunya del dia 1 de gener del 2021 [5]: Hi havien H+M= 406.443 total de casos acumulats (des del començament de l'epidèmia) i la població total de Catalunya era de 7.722.203 segons [??]. Obtenim que el percentatge de vacunació hauria de ser almenys de:

$$\frac{V}{N} > 0.642 \Rightarrow 64,2\%$$

Per tant, com era d'esperar, el percentatge de vacunació necessari serà inferior si considerem que els que han passat la malaltia tenen immunitat.

Càlcul del percentatge de vacunació necessari tenint en compte l'eficàcia de la vacuna

Repetirem el procediment afegint un nou paràmetre que anomenarem e que denota l'efectivitat de la vacuna. En el territori català es suministren de 3 models diferents de vacunes: la Pfizer, la Moderna i la d'Oxford, que tenen un 95%, 94.1%, 59.5% d'eficacia respectivament (extret de la font [6]). Suposarem sense perdua de generalitat que el nostre paràmetre és e=0.94.
Tenim que: $R = R_0 \cdot \frac{S}{N} \Rightarrow R = R_0 \cdot (1 - \frac{V \cdot e}{N})$
per tant,

Pel cas on X=V:

$$R < 1 \Leftrightarrow R_0 \cdot (1 - \frac{V \cdot e}{N}) < 1 \Leftrightarrow (1 - \frac{V \cdot e}{N}) < 1/R_0 \Leftrightarrow 1 - 1/R_0 < \frac{V \cdot e}{N}$$
$$\Leftrightarrow \frac{V}{N} > (1 - \frac{1}{R_0}) \cdot \frac{1}{e} = (1 - \frac{1}{3,28}) \cdot \frac{1}{0.94} \simeq 0.739 \Rightarrow 73,9\%$$

Pel cas on X = H + M + V

$$R < 1 \Leftrightarrow \frac{V}{N} > (1 - \frac{1}{R_0} - \frac{H+M}{N}) \cdot \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{V}{N} > (1 - \frac{1}{3.28} - \frac{406.443}{7.722.203}) \frac{1}{0,94} \simeq 0.683 \Rightarrow 68,3\%$$

Per tant si tenim amb compte que l'eficàcia de la vacuna no és del 100% el nombre de vacunats hauria de ser una mica més alt. En conclusió, el model més aproximat a la realitat és el que considerem que la vacuna té una eficàcia determinada i la població que ha passat la malaltia ja té immunitat i per tant no cal que sigui vacunada. Es correspon a aquest 68,3% calculat, per tant considerant un cert marge d'error, el fet de vacunar al 70% de la població sembla un molt acceptable percentatge.

3.2 Mascareta

3.2.1 Enunciat del problema

Una altra eina per a lluitar contra la Covid-19 són les mascaretes. Suposem que només usa mascareta un cert percentatge de la població. Suposem també que una mascareta impedeix el pas del virus amb una certa probabilitat. Com influeixen aquests paràmetres en el factor de reproducció de la malaltia? Podries fer una estimació de com hauria evolucionat l'epidèmia si no haguéssim usat mascareta?

3.2.2 Notació

- m Part de la població que usa mascareta
- m_1 Eficàcia de la mascareta per impedir el pas del virus de la boca a l'exterior.
- m_2 Eficàcia de la mascareta per protegir-te de l'entrada del virus.

3.2.3 Discussió

En aquesta secció volem veure com afecta l'ús de la mascareta a l'evolució de la pandèmia. Essencialment volem veure com queda afectat el factor de reproducció R. Per tant únicament tindrem en compte l'ús de la mascareta com a restricció variant.
Com hem definit abans, el comportament de la societat, ús de mascareta, distanciament social fa que varii la probabilitat de transmissió, anteriorment anomenada ω. És clar que com més població utilitzi la mascareta més gran serà aquest paràmetre m i per tant més baix serà la probabilitat de transmissió. Però, a més a més tindrem en compte l'eficàcia de la mascareta en sentit bidireccional.

Considerem $R_0 = \frac{\kappa \cdot \omega_0 \cdot 1}{\gamma}$ el factor bàsic de reproducció que té una probabilitat de transmissió ω_0 que no considera l'ús de mascaretes.
Considerem per tant totes les mesures son constants menys l'us de la mascareta, tenim $\omega = (1 - m \cdot m_1) \cdot (1 - m \cdot m_2) \cdot \omega_0$ on ω és la probabilitat de transmissió associada a R
Calculem per combinatòria $(1 - m - m_1)$ que és la probabilitat que la persona susceptible no porti mascareta (Quan hi ha un contacte entre un susceptible i un infectat) i $(1 - m \cdot m_2)$ és la probabilitat que la persona infectada no porti mascareta, definim $\delta = (1 - m \cdot m_1) \cdot (1 - m \cdot m_2)$. Observem que $0 \leq \delta \leq 1$.
Per tant el factor de reproducció es veurà afectat per l'ús de les mascaretes de la següent forma:

$$R = \frac{\kappa \cdot \omega \cdot \frac{S}{N}}{\gamma} = R_0 \cdot (1 - m \cdot m_1)(1 - m \cdot m_2) \cdot \frac{S}{N} \Rightarrow R = R_0 \cdot \delta \cdot \frac{S}{N}$$

Ara, per veure l'ordre de la magnitud, farem les següents consideracions no contrastades ja que al cercar les dades, m'he trobat que varien molt depenent de cada font. Tot i això, sembla aparentment raonable suposar :
56% de la població utilitza mascareta, eficàcia de la mascareta de surtida del virus és m_1 = 65% i l'eficàcia de la mascareta per l'entrada del virus és m_2=30%, .
Dades extretes de les fonts [2],[4] i [5] a Catalunya : N=7.722.203, total de casos confirmats: 406.443, Total persones vacunades amb segona dosi: V=182.338, $R_0 = 3.28$
$S = 7.722.203 - 406.443 - 182.338 = 7.133.422$, S/N=$\frac{7.133.422}{7.722.203}$ = 0.923 , obtenim una estimació del factor de reproducció R: $R = R_0 \cdot (1 - 0.56 \cdot 0.65)(1 - 0.56 \cdot 0.30) \cdot 0.923 = 1.602$

Per tant el que observem és que implementant una restricció, que és l'ús de mascaretes, la pandèmia continuaria evolucionant negativament ja que el factor de reproducció continuaria sent més gran que 1. Tot i que s'hauria reduit considerablement.

EVOLUCIÓ DE L'EPIDÈMIA SI NO HAGUÉSSIM USAT MASCARETA
Ara volem veure analiticament com la pandèmia hauria evolucionat si no haguéssim utilitzat mascaretes. Per veure l'evolució, compararem dos models SIR: un sense l'ús de mascaretes i l'altre amb ús de mascaretes. Podrem veure les diferències a través de com varien la quantitat de susceptibles, infectats i remoguts al llarg del temps. En principi si coneixem l'estat inicial, és a dir S(0), I(0), R(0) i els paràmetres β i γ aleshores les equacions diferencials determinaran l'evolució futura.

Model SIR amb ús de mascareta està descrit per les seguents ED:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI \qquad \frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = \gamma I$$

Model SIR sense ús de mascareta; està descrit per les seguents ED (per distingir-lo amb l'anterior, utlitzarem les cometes):

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = -\beta' S' I' \qquad \frac{\partial I'}{\partial t} = \beta' S' I' - \gamma I' \qquad \frac{\partial X'}{\partial t} = \gamma I'$$

Sigui k la taxa de contagis i δ la probabilitat de portar mascareta, tenim una nova k' que en concret no considera l'us de les mascaretes $k' = \frac{k}{\delta}$. Per tant també podem dir que $R' = \frac{R}{\delta}$ és el nou factor de reproducció sense tenir en compte l'us de mascaretes.
Per 2.3 sabem que κ=aN i hem definit k = κ ω $\frac{S}{N} \Rightarrow k = a\omega S = \beta \cdot S \Rightarrow k = \beta \cdot S$
Tenim $\beta' = \frac{k'}{S} = \frac{k}{S \cdot \delta}$
Si considerem $S = S'$ en l'instant inicial i calculem $R = \frac{\beta \cdot S}{\gamma}$ i $R' = \frac{\beta' \cdot S}{\gamma}$
Fent manipulacions algebraiques obtenim: $\delta \cdot R' = R = \frac{\beta \cdot S}{\gamma} \Rightarrow \frac{\beta' \cdot S}{\gamma} \cdot \delta = \frac{\beta \cdot S}{\gamma} \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta' = \beta \cdot \delta$
Així que finalment tenim les ED que descriuràn l'evolució de la epidèmia sense l'ús de mascaretes :

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = -\beta S' I' \delta \qquad \frac{\partial I'}{\partial t} = \beta S' I' \delta - \gamma I' \qquad \frac{\partial X'}{\partial t} = \gamma I'$$

La primera diferència clara entre els dos models és que $\frac{dS}{dt} \leq \frac{dS'}{dt}$, és a dir, el nombre de susceptibles per unitat de temps disminueix més rapidament al model SIR sense l'utilització de les mascaretes, per tant el creixement dels infectats és més ràpid, hi ha una major velocitat de contagi.
En quant al pic d'infectats, observem que el màxim nombre d'infectats s'assoleix quan $\frac{dI}{dt} = 0$ i $\frac{dI'}{dt} = 0$. Si considerem I,I' $\neq 0$, tenim que al pic el primer model $\beta S = \gamma$ i al segon model $\beta S' \delta = \gamma$ com que hem suposat γ és constant $\rightarrow \beta S = \beta S' \delta \rightarrow S = S' \delta \leq S'$ per tant el nombre de susceptibles quan els infectats es troben al pic de la corba és menor en el model amb l'ús de mascareta.

Per tant si no haguéssim portat mascareta,la pandèmia hauria evolucionat caracteritzada per una major velocitat de contagi. Això implicaria un major nombre d'infectats respecte el temps i un pic d'infectats major. En canvi si utilitzem mascareta podem "aplanar la corba"d'infectats i suavitzar-la. Això tindria diversos beneficis:hi hauria una millor distribució d'infectats al llarg del temps, que faria que el sistema sanitari no col·lapsés i les persones tinguéssin un millor accès a la atenció sanitària i guanyariem temps per poder desenvolupar vacunes eficaces i tractaments.

4 Consideracions

Per tal de fer aquest model més aproximat a la realitat, es podríen fer els següents refinaments:

- Considerar les possibles variants del virus. Això afectaria a l'eficàcia de la vacuna, ja que pot ser que determinada vacuna no sigui igual d'eficaç per un tipus de variant del virus que per una altra.
- Distingir entre l'implementació d'una vacuna o d'una altra, ja que l'eficàcia varia depenent de la vacuna.
- Considerar la possible reinfecció, és a dir, si has estat infectat pot ser que al cap d'un temps puguis tornar a ser infectat (de la mateixa variant del virus o d'una altra)
- Considerar altres restriccions (al marge de l'ús de mascaretes) com el distanciament social, toc de queda, restriccions a l'hora de viatjar i altres recomanacions de la OMS 7 Això afectaria a la probabilitat de transmissió.
- Distingir entre el tipus de mascareta que s'utilitza, ja que l'eficacia tant d'entrada com de sortida del virus pot variar depenent la mascareta.

5 Conclusions

Per tal que l'epidèmia vagi desapareixent, necessitem mantenir el factor de reproducció R menor que 1. Com molts científics indiquen, la vacuna és l'eina que ens permetrà arribar a aquest objectiu. Per aconseguir-ho, ara sí podem afirmar que és suficient la vacunació del 70% de la població per tenir immunitat de grup (tenint el compte les suposicions del model).

Hem parlat també d'una de les mesures més importants al llarg de l'epidèmia, la mascareta, i la seva efectivitat envers una millora significativa de la pandèmia. El cert és que aquest és un tema més delicat, ja que l'ús de la mascareta no és homogeni, depèn de molts factors: el tipus de mascareta, el bon ús, també varia depenent de la situació social en el que ens trobem..., per tant les estimacions poden variar molt depenent de la font en que ens radiquem. El que ens trobem és que el factor de reproducció disminueix, però no de forma considerada. És a dir, que no només amb l'ús de la mascareta podrem disminuir el factor de reproducció per sota d'1, sinó que necessitem altres mesures per poder-ho fer.

6 Referències

1. Xavier Mora. 2020. *El nombre de reproducció de la COVID-19 i el model SIR. L'efecte dels retards de comptabilització.* Universitat Autònoma de Barcelona. [1]
2. Generalitat de Catalunya, Institut d'Estadística, *Població de Catalunya a 1 de gener* [2]
3. Steffen E. Eikenberry, 2020. *To mask or not to mask: Modeling the potential for face mask use by the general public to curtail the COVID-19 pandemic.* Arizona State University, School of Mathematical and Statistical Sciences. [3]

4. Ying Liu. 2020 *The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus.* Journal of Travel Medicine. [4]

5. Generalitat de Catalunya, Institut d'Estadística: *Dades, Incidència setmanal de la covid-19.* [5]

6. Centers for Disease Control and Prevention. 2020 *Vaccines & Immunizations. Interim Clinical Considerations for Use of mRNA COVID-19 Vaccines Currently Authorized in the United States.* [6]

7. Organización Mundial de la Salud OMS, *Brote de enfermedad por coronavirus (COVID-19): orientaciones para el público.* [7]