RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE I RÓŻNICOWE – SPRAWOZDANIE **METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH**			
Imię i nazwisko:	Alicja Salamon	Data:	15 października 2011 r.

1. Wyniki i opracowanie – tabele, wykresy

W każdym przypadku badamy otoczenie funkcji w punkcie $x = 1$.

a) Wielomiany

- **WIELOMIAN STOPNIA 3-go**
  Dla funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = 6x^2 + 6x + 4$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = 16$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = 12x + 6$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f''(1) = 18$.

h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	27	11	9	7	18	2	18	0
0,1	16,92	0,92	15,12	0,88	16,02	0,02	18	3,23E-13
0,01	16,0902	0,0902	15,9102	0,0898	16,0002	0,0002	18	6,42E-12
0,001	16,009	0,009002	15,991	0,008998	16	2,00E-06	18	2,81E-09
0,0001	16,0009	0,0009	15,9991	0,0009	16	2,00E-08	18	6,82E-08
1,00E-05	16,0001	9,00E-05	15,9999	9,00E-05	16	2,09E-10	18	1,49E-06

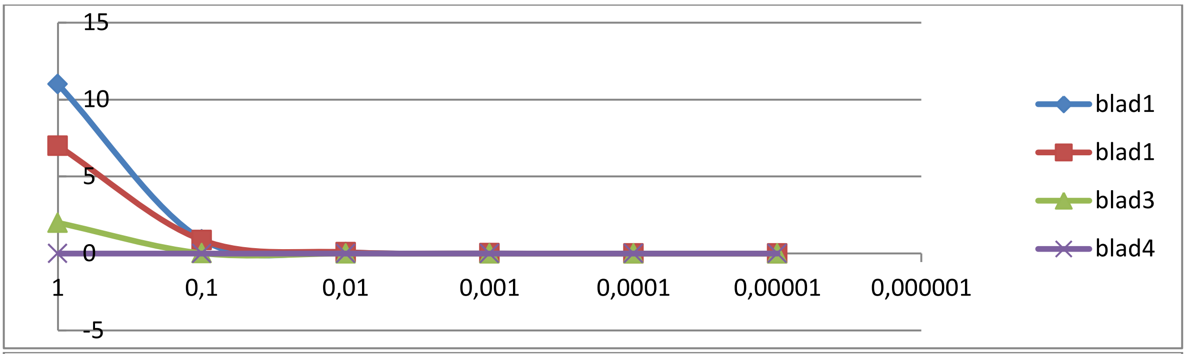
- **WIELOMIAN STOPNIA 4-go**
  Dla funkcji $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = 20$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = 12x^2 + 12x + 6$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f''(1) = 30$.

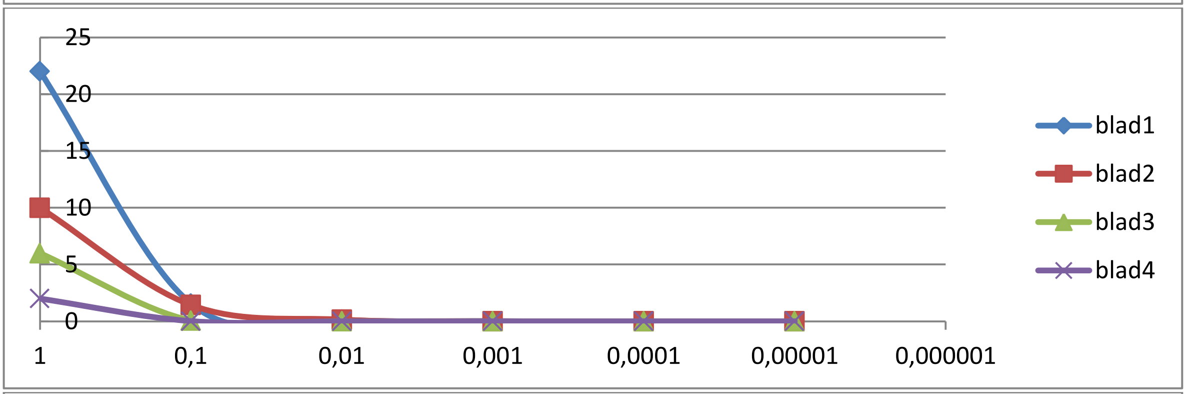
h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	42	22	10	10	26	6	32	2
0,1	21,561	1,561	18,559	1,441	20,06	0,06	30,02	0,02
0,01	20,1506	0,150601	19,8506	0,149401	20,0006	0,0006	30,0002	0,0002
0,001	20,015	0,015006	19,985	0,014994	20	6,00E-06	30	2,00E-06
0,0001	20,0015	0,0015	19,9985	0,0015	20	6,00E-08	30	4,69E-09
1,00E-05	20,0002	0,00015	19,9999	0,00015	20	5,93E-10	30	2,48E-06

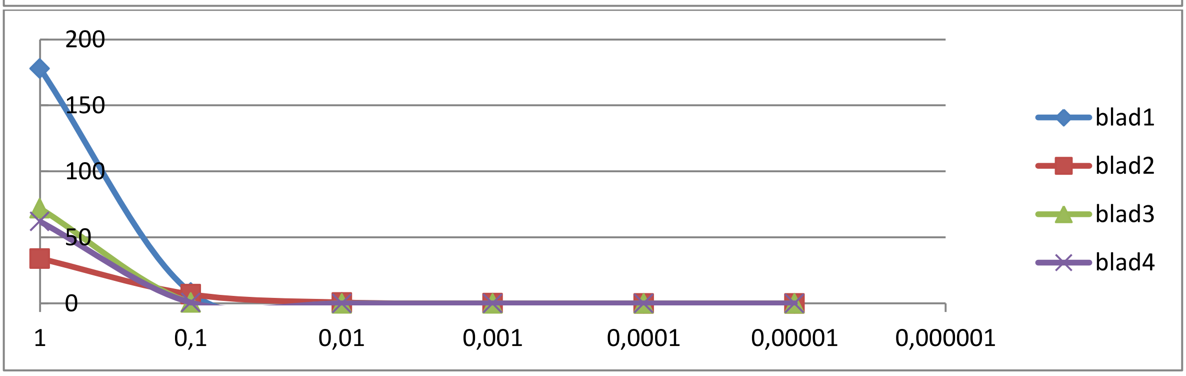
- **WIELOMIAN STOPNIA 5-go**
  Dla funkcji $f(x) = 6x^5 + x\hat{}4 + 2x^3 + 3x^2 + \ 4x + 5$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = 30x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = 50$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = \ 120x^3 + 12x^2 + 12x + 6$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f''(1) = 150$.

h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	228	178	16	34	122	72	212	62
0,1	58,1916	8,1916	43,1296	6,8704	50,6606	0,6606	150,62	0,62
0,01	50,7566	0,756631	49,2566	0,743431	50,0066	0,0066	150,006	0,0062
0,001	50,0751	0,075066	49,9251	0,074934	50,0001	6,60E-05	150	6,20E-05
0,0001	50,0075	0,007501	49,9925	0,007499	50	6,60E-07	150	3,32E-07
1,00E-05	50,0008	0,00075	49,9993	0,00075	50	6,62E-09	150	4,79E-05

Wykresy zależności wartości błędu od h (skala logarytmiczna na osi x) przedstawiają się następująco:







b) Sinusoidy

- **SIN(x)**
  Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = \cos(x)$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = \cos(1)$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = -\sin(x)$ czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'' = -\sin(1)$.

h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	0,067826	0,472476	0,841471	0,301169	0,454649	0,085654	-0,77365	0,067826
0,1	0,497364	0,042939	0,581441	0,041138	0,539402	0,0009	-0,84077	0,000701
0,01	0,536086	0,004216	0,544501	0,004198	0,540293	9,00E-06	-0,84146	7,01E-06
0,001	0,539881	0,000421	0,540723	0,000421	0,540302	9,01E-08	-0,84147	7,01E-08
0,0001	0,54026	4,21E-05	0,540344	4,21E-05	0,540302	9,00E-10	-0,84147	3,03E-09
1,00E-05	0,540298	4,21E-06	0,540307	4,21E-06	0,540302	1,11E-11	-0,84147	1,87E-06

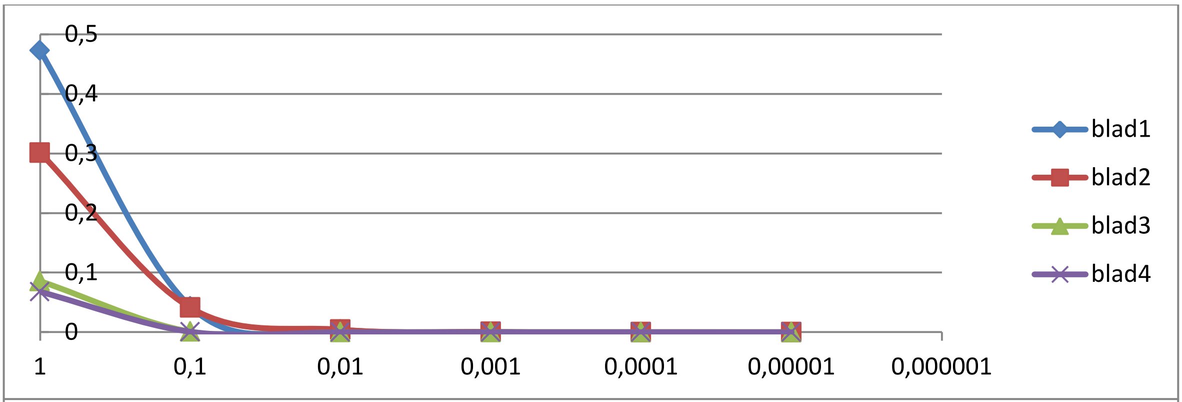
- **SIN(2x)**
  Dla funkcji $f(x) = \sin(2x)$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = 2\cos(2x)$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = 2\cos(2)$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = -4\sin(2x)$ czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'' = -4\sin(2)$.

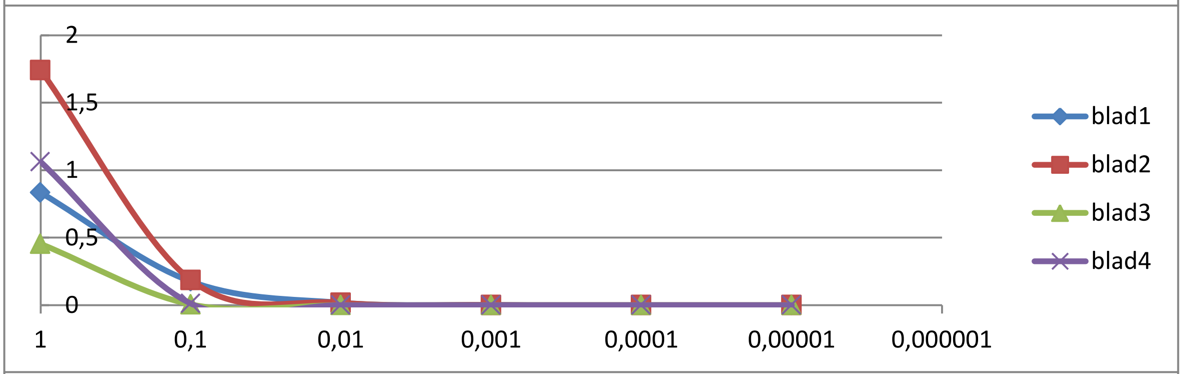
h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	-1,6661	0,833806	0,909297	1,74159	-0,3784	0,453892	-2,5754	1,06179
0,1	-1,00801	0,175717	-0,6455	0,186792	-0,82676	0,005538	-3,62508	0,012108
0,01	-0,85042	0,01813	-0,81405	0,018241	-0,83224	5,55E-05	-3,63707	0,000121
0,001	-0,83411	0,001818	-0,83048	0,001819	-0,83229	5,55E-07	-3,63719	1,21E-06
0,0001	-0,83248	0,000182	-0,83211	0,000182	-0,83229	5,55E-09	-3,63719	2,33E-09
1,00E-05	-0,83231	1,82E-05	-0,83228	1,82E-05	-0,83229	5,78E-11	-3,63719	8,41E-07

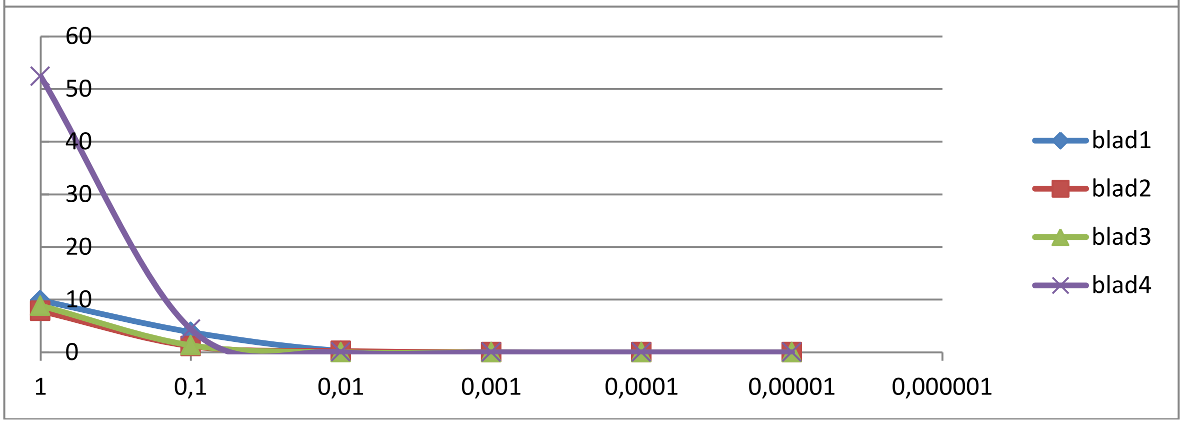
- **SIN(10x)**
  Dla funkcji $f(x) = \sin(10x)$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = 10\cos(10x)$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = 10\cos(10)$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = -100\sin(10x)$ czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'' = -100\sin(10)$.

h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	1,45697	9,84768	-0,54402	7,84669	0,456473	8,84719	2,00099	52,4011
0,1	-4,55969	3,83102	-9,5614	1,17068	-7,06054	1,33017	50,0171	4,38506
0,01	-8,10495	0,285761	-8,64852	0,257806	-8,37674	0,013978	54,3568	0,04532
0,001	-8,36337	0,027341	-8,41778	0,027061	-8,39058	0,00014	54,4017	0,000453
0,0001	-8,38799	0,002722	-8,39343	0,002719	-8,39071	1,40E-06	54,4021	4,54E-06
1,00E-05	-8,39044	0,000272	-8,39099	0,000272	-8,39072	1,40E-08	54,4021	1,61E-06

Wykresy zależności wartości błędu od h (skala logarytmiczna na osi x) przedstawiają się następująco:







c) Funkcje eksponencjalne

- **EXP(0.1x)**
  Dla funkcji $f(x) = \mathrm{e}^{0.1\mathrm{x}}$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = 0.1\mathrm{e}^{0.1\mathrm{x}}$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = 0.1\mathrm{e}^{0.1}$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = \ 0.01\mathrm{e}^{0.1\mathrm{x}}$ czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'' = 0.01\mathrm{e}^{0.1}$

h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	0,116232	0,005715	0,105171	0,005346	0,110701	0,000184	0,011061	9,21E-06
0,1	0,111072	0,000554	0,109966	0,000551	0,110519	1,84E-06	0,011052	9,21E-08
0,01	0,110572	5,53E-05	0,110462	5,52E-05	0,110517	1,84E-08	0,011052	9,19E-10
0,001	0,110523	5,53E-06	0,110512	5,53E-06	0,110517	1,84E-10	0,011052	1,36E-10
0,0001	0,110518	5,53E-07	0,110517	5,53E-07	0,110517	1,72E-12	0,011052	1,98E-11
1,00E-05	0,110517	5,53E-08	0,110517	5,53E-08	0,110517	8,57E-13	0,011051	1,14E-06

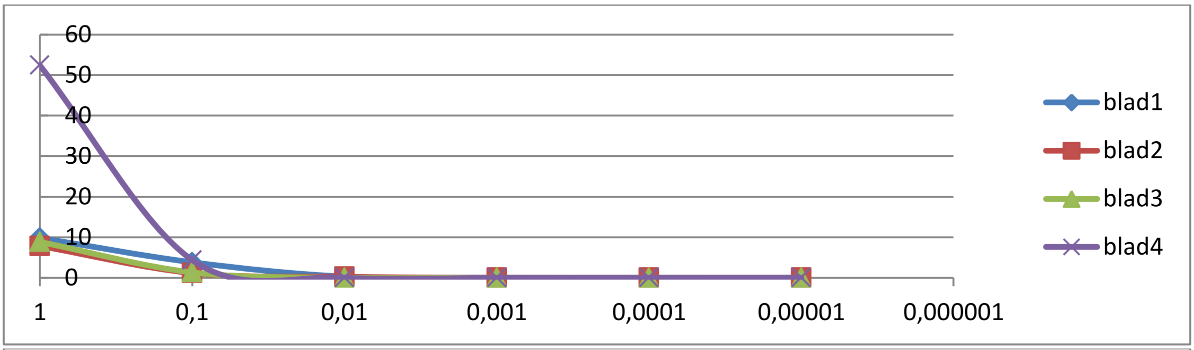
- **EXP(x)**
  Dla funkcji $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ pierwsza i druga pochodna wynosi $f'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = \mathrm{e}$, $f''(x) = \mathrm{e}$.

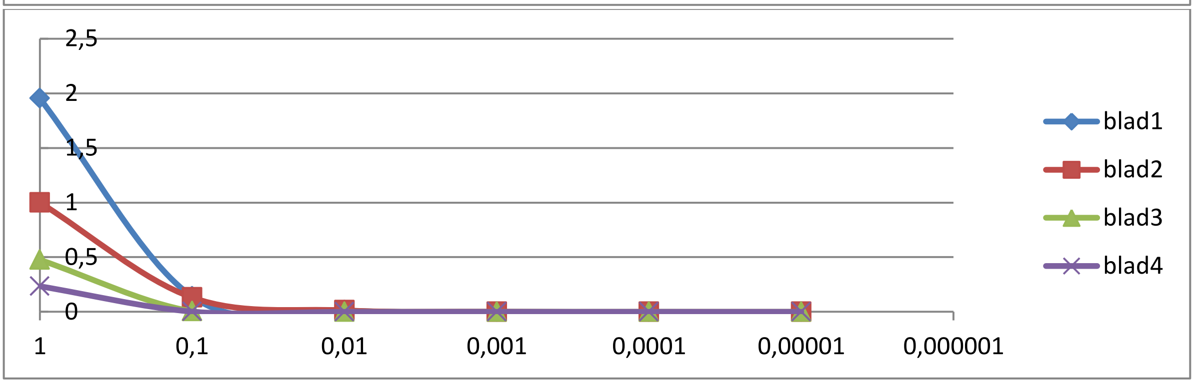
h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	4,67077	1,95249	1,71828	1	3,19453	0,476246	2,95249	0,234211
0,1	2,85884	0,14056	2,58679	0,131495	2,72281	0,004533	2,72055	0,002266
0,01	2,73192	0,013637	2,70474	0,013546	2,71833	4,53E-05	2,7183	2,27E-05
0,001	2,71964	0,00136	2,71692	0,001359	2,71828	4,53E-07	2,71828	2,26E-07
0,0001	2,71842	0,000136	2,71815	0,000136	2,71828	4,53E-09	2,71828	8,88E-09
1,00E-05	2,7183	1,36E-05	2,71827	1,36E-05	2,71828	5,35E-11	2,71828	3,10E-06

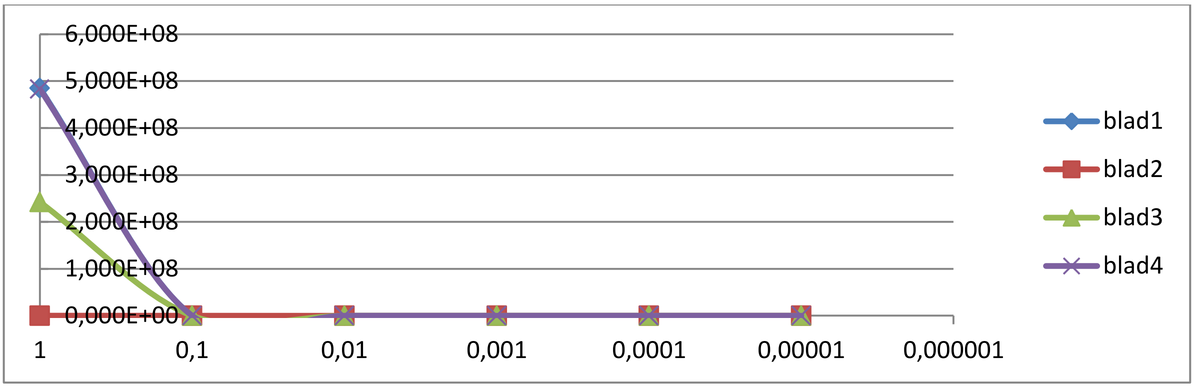
- **EXP(10x)**
  Dla funkcji $f(x) = \mathrm{e}^{10\mathrm{x}}$ pierwsza pochodna wynosi $f'(x) = 10\mathrm{e}^{10\mathrm{x}}$, czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'(1) = 10\mathrm{e}^{10}$. Druga pochodna wynosi $f''(x) = 100\mathrm{e}^{10\mathrm{x}}$ czyli w punkcie $x = 1$ jest równa $f'' = 100\mathrm{e}^{10}$

h	Różnica lewostronna	błąd	Różnica prawostronna	błąd	Różnica centralna	błąd	Druga różnica centralna	błąd
1	4,85E+08	4,85E+08	22025,5	198239	2,43E+08	2,42E+08	4,85E+08	4,83E+08
0,1	378477	158212	139234	81030,8	258855	38590,6	2,39E+06	189783
0,01	231654	11389,7	209610	10655,1	220632	367,291	2,20E+06	1836,15
0,001	221370	1105	219167	1097,66	220268	3,6711	2,20E+06	18,3554
0,0001	220375	110,169	220155	110,096	220265	0,036711	2,20E+06	0,183247
1,00E-05	220276	11,0136	220254	11,0129	220265	0,000367	2,20E+06	0,021987

Wykresy zależności wartości błędu od h (skala logarytmiczna na osi x) przedstawiają się następująco:







2. **Wnioski:**

- Dla wszystkich rodzajów badanych funkcji (wielomiany, sinusoidy, funkcje eksponencjalne) kształt wykresu dokładności aproksymacji od h jest bardzo podobny.

- Im mniejsze h, tym wynik dokładniejszy. W przybliżeniu można powiedzieć, że z każdym - zmniejszeniem h o rząd wielkości, dokładność zwiększa się również o rząd wielkości.

- Dla funkcji przyjmujących większe wartości, wartość błędu również wydaje się dużo większa, ale biorąc pod uwagę błąd względny zamiast bezwzględnego, stosunek błędu do wartości pochodnej jest podobny.

.

- W aproksymacji pierwszej pochodnej zawsze najlepsze wyniki daje metoda różnic centralnych, niezależnie od kształtu wykresu funkcji.