اینجانب علیرضا درویشی متعهد می‌شوم در پاسخ به سؤالات این کوییز همانند جلسات حضوری امتحان عمل کنم و هیچ‌گونه استفاده از کتاب و جزوه، برگه‌های خلاصه و اینترنت و امثالهم نکنم و هیچ صحبت یا مشورتی نیز با کس دیگری انجام ندهم. همچنین مسئولیت هرگونه مجازات اعم از افتادن در درس و کاهش نمره را در صورت انجام این کارها می‌پذیرم.

۱- گزاره‌ی اصلی دلایل زیادی می‌تواند داشته باشد. یکی اینکه مردان با توجه به اینکه نرخ اشتغال بیشتری دارند، بیشتر در معرض خطر ابتلا هستند. دیگر اینکه شاید سیستم ایمنی زنان نسبت به این ویروس مقاوم‌تر است و به این دلیل آمار ابتلا زنان کمتر است. دلیل دیگر می‌تواند این باشد که شاید تست‌های گرفته شده از مردان بسیار بیشتر باشد طوری که در نهایت تعداد مبتلایان مرد، تشخیص داده شده بیشتر باشد و این دلیل نمی‌شود که واقعاً تعداد مبتلایان مرد بیشتر باشد. در نهایت ادعای سؤال هم می‌تواند درست باشد و یک عامل علیت و تاثیرگذار باشد!

-2

.a

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X^3] - E[X]E[X^2] = 0 - 0 = 0 \checkmark$$

.b خیر. به وضوح X و Y مستقل نیستند. چون:

$$P(Y=y \mid X=x) \neq P(Y=y)$$

$$P(Y=y \mid X=x) = P(Y=y)\,\delta(y, x^2)$$

یعنی توزیع شرطی Y با فرض دانستن x، مستقل از x نیست!

-3

.a

$$W = \frac{1}{n}\sum Y_i \rightarrow E[W] = E\left[\frac{1}{n}\sum Y_i\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum Y_i\right] = \frac{1}{n}\sum E[Y_i] = \frac{1}{n}\sum \mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\rightarrow E[W] - \mu = 0 \checkmark$$ بدون تورش

$$Var[W] = Var\left[\frac{1}{n}\sum Y_i\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum Y_i\right] \underset{\text{استقلال } Y\text{ها}}{=} \frac{1}{n^2}\sum Var[Y_i] = \frac{1}{n^2}\sum \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E[(W-\mu)^2] = Bias^2 + Var[W] = \frac{\sigma^2}{n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} E[(W-\mu)^2] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0 \checkmark$$ سازگار

Scanned with CamScanner

.b

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (Y_i-\bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i \left((Y_i-\mu)+(\mu-\bar{Y})\right)^2$$

$$E[S^2] = \frac{1}{(n-1)} E\left[\sum \left((Y_i-\mu)^2 + 2(Y_i-\mu)(\mu-\bar{Y}) + (\mu-\bar{Y})^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_i \left[E[(Y_i-\mu)^2] + 2E[(Y_i-\mu)(\mu-\bar{Y})] + E[(\mu-\bar{Y})^2]\right]$$

$E[(Y_i-\mu)^2] = \sigma^2 \checkmark$, $E[(\bar{Y}-\mu)^2] = Var(\bar{Y}-\mu) = Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} \checkmark$

$$E[(Y_i-\mu)(\mu-\bar{Y})] = E[Y_i\mu - \mu^2 + \mu\bar{Y} - \bar{Y}Y_i] = \mu E[Y_i] - \mu^2 + \mu E[\bar{Y}] - E[Y_i\bar{Y}] = \mu^2 - \mu^2 + \mu^2 - E[Y_i\bar{Y}]$$

$$E[Y_i\bar{Y}] = E\left[\sum_j Y_i \sum_k \frac{Y_k}{n}\right] = \frac{1}{n}E\left[Y_i^2 + \sum_{j\neq i} Y_iY_j\right] = \frac{1}{n}\left(E[Y_i^2] + (n-1)E[Y_i]E[Y_j]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sigma^2 + \mu^2 + (n-1)\mu^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sigma^2 + n\mu^2\right] = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow E[(Y_i-\mu)(\mu-\bar{Y})] = \mu^2 - \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) = -\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow E[S^2] = \frac{\sum}{n-1}\left[\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n}\right] = \frac{\sum}{n-1}\left(\sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sigma^2}{n-1}\,\frac{n(n-1)}{n} = \boxed{\sigma^2 \checkmark}$$

.c

$\sum Y_i = 272 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i = 17$

$\sum (Y_i-\bar{Y})^2 = 240 \Rightarrow S^2 = \frac{1}{15}240 = 16 \Rightarrow S = 4$

$\rightarrow$ بازه اطمینان ۹۵٪ $= (17 - 4\times \underbrace{2.5}_{(t_{2.5,\, df=15})} , 17 + 4\times 2.5)$

$\boxed{\Rightarrow \text{بازه اطمینان ۹۵٪} = (7 , 27)}$

Scanned with CamScanner

d.

اگر تعداد زیادی نمونه‌گیری انجام دهیم و از روش بازه‌ی اطمینان $(1-\alpha)$ درصد، بازه‌های اطمینان بسازیم، α درصد از مواقع، میانگین جامعه خارج از بازه‌ی اطمینان می‌افتد. حال چون مرکز همه‌ی این بازه‌های اطمینان، $\bar{Y}$ است، پس برای اینکه تعداد حالت‌هایی که میانگین واقعی خارج از بازه‌ی اطمینان می‌افتد در حالت $\alpha = 5\%$ بیشتر از $\alpha = 1\%$ باشد، نتیجه می‌گیریم که طول بازه‌ی $\alpha = 1\%$ بیشتر است. در واقع با اطمینان بیشتری می‌توانیم بگوییم میانگین در بازه است.

c.

راه ۱: چون 15.5 در بازه‌ی اطمینان 95% است، ادعای ادارا نمی‌توان با خطای کمتر از 5% رد کرد.

راه ۲:

$$t = \frac{17-15.5}{\frac{4}{\sqrt{16}}} = 1.5 < t_{0.025,\, df=5} = 2.5$$

ادعا را نمی‌توان رد کرد.

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 15.5 \\ H_1: & \mu \neq 15.5 \end{cases}$$