

۱.

به چند دلیل نمره‌ی دانش‌آموز یک متغیر تصادفی است.

- آمادگی جسمانی و مغزی شخص قبل و در حین آزمون تا حدی تصادفی است و روی نمره‌ی اون تاثیر دارد.
- سطح سختی یا آسانی سوالات یک متغیر تصادفی است که به مصحح بستگی دارد.
- با توجه به اینکه احتمالاً دانش‌آموز روی بخشی از مباحث بیشتر تسلط دارد و روی بخشی کمتر تسلط دارد، و با توجه به اینکه سوالات به صورت تصادفی از بخش‌های مختلف انتخاب می‌شوند، نمره‌ی دانش‌آموز تصادفی است.
- اگر بعداً نمره نمودار هم قرار باشد بخورد، مقدار نمودار به نمره‌ی بقیه‌ی شرکت‌کننده‌ها بستگی دارد و این متغیر هم تصادفی است.

۲.

(الف)

$$P(X \leq 6) = 1 - 9.865876e - 10$$

(ب)

$$P(X > 4) = 3.167124e - 5$$

(ج)

$$P(|X - 5| > 1) = P(X > 6) + P(X < -4) = 3.167223e - 05$$

۳.

(الف)

$$P(X_i > 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

(ب)

P(at least one fund outperform in all 10 years)

= 1 - P(no fund outperform in all 10 years)

= 1 - P(a single fund does not outperform in all 10 years)⁴¹⁷⁰

= 1 - (1 - P(a single fund outperform in all 10 years))^{number of funds}

$$1 - (1 - (0.5)^{10})^{4170} = 1 - e^{-4170/1024} = 0.983$$

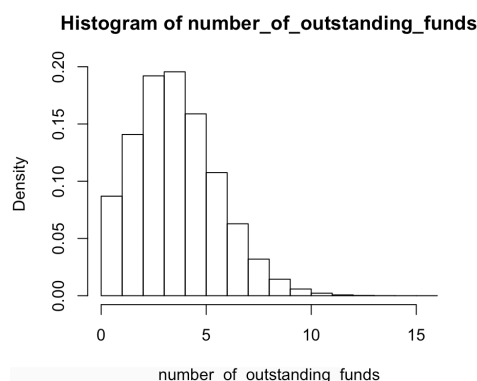
احتمال اینکه هیچ صندوقی هر ۱۰ سال از بازار بهتر عمل نکند بسیار کم است و این یعنی احتمال اینکه حداقل یک صندوق در هر ۱۰ سال از بازار بهتر عمل کند خیلی زیاد است و نزدیک به ۹۸ درصد است.

پس شاید برای افراد ریسک‌پذیرتر، سرمایه‌گذاری در صندوق بسیار بهتر از دنبال کردن شاخص است!

(ج)

$$p = 0.38356$$

```
nsim=10^5
n=4170
p=0.5
number_of_outstanding_funds = rep(0,nsim)
for (i in 1:nsim){
  market = rbinom(n=n,size=10,prob = p)
  number_of_outstanding_funds[i] = sum(market==10)
}
hist(number_of_outstanding_funds)
sum(number_of_outstanding_funds>=5)/nsim
```



۴.

$$P(X \geq 0.6) = 1 - F(0.6) = 0.352$$

۵.
(الف)

$$X \sim \text{binom}(p = 0.2, n = 12)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.8^{12} = 0.93$$

(ب)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 12 \times 0.2 \times 0.8^{11} - 0.8^{12} = 0.725$$

۶.

$$E[X] = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{27}x^3 \Big|_0^3 = 1$$

۷.

$$E[\sum x_i] = \sum E[x_i] = 8 \times 0.74 = 5.92$$

۸.

$$E[\sum w_i x_i] = \sum w_i E[x_i] = \frac{2}{9}3.5 + \frac{3}{9}3 + \frac{4}{9}3 = 3.11$$

۹.

$$E[x] = 52300\$$$

$$\sqrt{\text{Var}[x]} = 14600\$$$

۱۰.
(الف)

$$E(GPA | SAT = 800) = 2.3, E(GPA | SAT = 1400) = 3.5$$

(ب)

$$E[E[GPA | SAT]] = E[0.7 + 0.002 SAT] = 2.9$$

(ج)
خیر

میانگین معدل دانش آموزان با ست ۱۱۰۰ جواب بخش قبل است.
به عبارتی اگر یک دانش آموز تصادفی با ست ۱۱۰۰ انتخاب کنیم، معدل اون دانش آموز به طور میانگین ۲.۹ است.