

پاسخنامه کوییز اول

سوال اول: ۲۰ نمره (با توجه به استدلال‌های مطرح شده نمره داده می‌شود)

این ادعا نمی‌تواند نشان‌دهنده علیت باشد چراکه مردان به دلایل مختلفی از جمله وظایف و مسئولیت‌های شخصی و اجتماعی، مجبور هستند ساعات بیشتری را در بیرون از منزل سپری کنند در حالیکه بسیاری زنان چنین اجباری ندارند و به راحتی می‌توانند در منزل بمانند. بنابراین مردان بیشتر در معرض بیماری هستند و چه بسا در شرایط یکسان مردان به اندازه زنان و یا حتی کمتر از آنان به این بیمار دچار شوند. البته این ادعا که مردان کمتر از زنان اصول بهداشتی را رعایت می‌کنند نیز قابل بررسی است و می‌تواند دلیلی بر ابتلای بیشتر مردان باشد اما قطعاً دلیل اصلی آن نیست. از طرفی ممکن است ساختار این ویروس به گونه ای باشد که اساساً بر بدن مردان اثر بیشتری بگذارد و یا بدن مردان بیشتر آن را جذب کند. بحث دیگری که می‌توان مطرح کرد اینست که بسیاری از مردم ممکن است به این ویروس آلوده شوند اما هیچگونه علائمی نداشته باشند حال نکته اینجاست که مردان به دلیل کار در بیرون از منزل فرصت کمتری برای استراحت دارند و در نتیجه چنانچه ویروس وارد بدن آن‌ها شود علائم شدیدتری نشان می‌دهد در حالیکه اگر فردی که امکان استراحت در منزل را دارد (مثلاً زنان) بیمار شود به دلیل استراحت ممکن است هیچ علائمی نداشته باشد و یا سریع‌تر بهبود یابد و اصلاً هیچگاه متوجه نشود که بیماری او چه بوده و تصور کند یک سرماخوردگی ساده بوده‌است. در نتیجه این ادعا با اینکه می‌تواند تا حدی درست باشد به هیچ‌وجه ادعای دقیقی نیست و برای پاسخ به این سوال باید همه ی موارد ممکن را بررسی کرد و سپس چنین ادعایی را مطرح کرد. (هر استدلال درست دیگری قابل قبول است)

سوال دوم:

الف. ۱۰ نمره (۵ نمره برای نوشتن فرمول و ۵ نمره برای جواب اخر)

$$\text{cov}(x, y) = \text{cov}(x, x^2) = E(x \cdot x^2) - E(x)E(y) = 0 - 0 = 0$$

ب. ۱۰ نمره (۵ نمره برای رد آن و ۵ نمره برای استدلال)

خیر مشخص است که Y کاملاً به X وابسته است و درواقع تابعی از X است و تنها دلیلی که کوواریانس در اینجا صفر شد مقادیر در نظر گرفته شده برای امید ریاضی متغیرهاست و دلیل استقلال آن‌ها نیست. در این مثال X و Y مستقل تنها خطی هستند زیرا COV آن‌ها صفر است ولی برای مستقل بودن لازم است چگالی احتمال به صورت زیر باشد. $F(X, Y) = F(X)F(Y)$

سوال سوم:

الف. ۲۰ نمره (۱۰ نمره بدون تورش بودن و ۱۰ نمره سازگاری)

برای اینکه نشان دهیم تخمین‌زن گفته‌شده، تخمین‌زنی بدون تورش است باید میانگین آن را حساب کنیم:

$$E(w) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[Y_i] = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \mu \right) = \frac{n}{n} \mu = \mu$$

بنابراین تخمین‌زن مورد نظر تخمین‌زنی بدون تورش است.

برای نشان دادن سازگاری لازم است واریانس این تخمین زن را نیز به دست آوریم.

$$\begin{aligned} \text{var}(w) &= \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \left(\text{استقلال مشاهدات}\right) \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \text{var}(Y_i)\right) \\ &= \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

وقتی که تعداد مشاهدات به بی نهایت می کند واریانس نیز به صفر میل می کند و میانگین نیز دقیقاً برابر امید ریاضی جامعه است. بنابراین این تخمین زن سازگار است.

ب. ۱۰ نمره

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1} \sum (Y_i - \bar{Y})^2\right) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum (Y_i - \mu + \mu - \bar{Y})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left[E \sum (Y_i - \mu)^2 + E \sum (\mu - \bar{Y})^2 + E \sum 2(Y_i - \mu)(\mu - \bar{Y}) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[n\sigma^2 + n \frac{\sigma^2}{n} - 2n \frac{\sigma^2}{n} \right] = \sigma^2 \end{aligned}$$

ج. ۱۵ نمره (۵ نمره محاسبه واریانس و امید ریاضی، ۵ نمره نوشتن عبارت مربوط به فاصله اطمینان، ۵ نمره جایگذاری و جواب آخر)

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{272}{16} = 17, \quad s^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{240}{15} = 16 \rightarrow s = 4$$

$$\left[\bar{Y} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_{2.5\%}, \bar{Y} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{2.5\%} \right] = \left[17 - \frac{4}{4} 2.5, 17 + \frac{4}{4} 2.5 \right]$$

$$[14.5, 19.5]$$

د. ۱۰ نمره

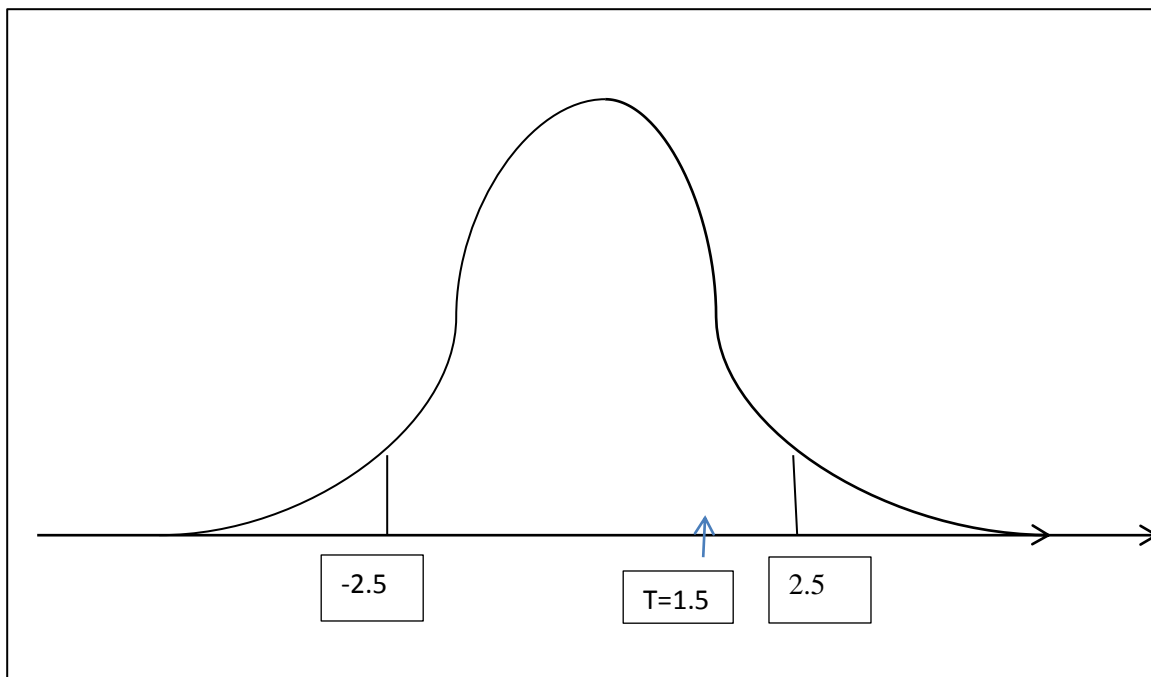
بدیهی است که فاصله اطمینان ۹۹ درصد بزرگتر از ۹۵ درصد خواهد بود زیرا فاصله اطمینان ۹۵ درصد زیرمجموعه‌ای از فاصله اطمینان ۹۹ درصد است.

ه. ۱۵ نمره (۵ نمره نوشتن فرض صفر و یک، ۵ نمره نوشتن فرمول t و ۵ نمره برای جایگذاری و جواب آخر)

$$H_0: \mu = 15.5$$

$$H_1: \mu \neq 15.5$$

$$t = \frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{17 - 15.5}{\frac{4}{4}} = 1.5$$



همانطور که در شکل مشاهده می کنید مقدار محاسبه شده در ناحیه رد فرض قرار نگرفته است بنابراین می توان گفت فرض صفر رد نمی شود. (توجه شود نمی توان گفت فرض صفر قبول می شود تنها می توان گفت رد نمی شود)