علیرضا درویشی 96109674 - تمرین 3 - اقتصاد سنجی

کتاب - سؤال 2

الف)
$$W_a = \sum a_i Y_i \rightarrow E[W_a] = E[\sum a_i Y_i] = \sum E[a_i Y_i] = \sum a_i E[Y_i] = \sum a_i \mu$$
$$= \mu \sum a_i \quad , \quad W_a - \mu = 0 \Rightarrow \boxed{\sum a_i = 1}$$

ب)
$$W_a = \sum a_i Y_i \Rightarrow Var[W_a] = Var[\sum a_i Y_i] = \sum Var(a_i Y_i) = \sum a_i^2 Var(Y_i)$$
$$= \sum a_i^2 \sigma^2 = \boxed{\sigma^2 \sum a_i^2}$$

ج)
$$\frac{(\sum a_i)^2}{n} \leq \sum a_i^2 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \sum a_i^2 \Rightarrow Var(W_a) \geq \frac{\sigma^2}{n} = Var(\bar{Y}) \Rightarrow \boxed{Var(W_a) \geq Var(\bar{Y})}$$

سؤال 6

الف) $H_0: \mu = 0$

ب) $\sim H_0: \mu < 0$

ج)
$$n = 900 ,\ \bar{Y} = -32.8 ,\ S = 466.4 \Rightarrow t = \frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{-32.8}{\frac{466.4}{30}} \Rightarrow t = -2.11$$

$$P\text{-value} = P_{n=900}(t < -2.11 \mid \mu = 0) = 0.017$$

با اطمینان ۹۵٪ می‌توان فرض صفر را رد کرد.

با اطمینان ۹۹٪ نمی‌توان فرض صفر را رد کرد.

د) نمی‌توان گفت که مقدار اندازه‌ی کم شدن مصرف بزرگ است چون واحدی برای آن تعیین نشده و قابل مقایسه نیست. ولی از نظر آماری قابل توجه است چون خطای آماره از مقدار خیلی کمتر شده.

هـ) فرض شده تمام عوامل تاثیرگذار دیگر روی مصرف نوشیدنی‌های الکلی بی‌تغییر مانده و فقط مالیات زیاد شده. برای مثال تغییر تکنولوژی باعث بهتر شدن طعم الکل‌ها نشده!

سئوال 7

الف)

$D = \{0.95, -0.4, 0.25, -0.5, 0.6, 0.75, 0.25, 0, 0.7, 0.55, -0.5, 0.35, 0, 0.25, 0.35\}$

$\bar{D} = 0.24 \quad , \quad S = 0.451 \Rightarrow SE = \frac{S}{\sqrt{n}} = 0.12 \qquad t_{0.05, \, df=14} = 2.14$

$\Rightarrow \mu = 0.24 \pm 0.25 \Rightarrow \boxed{\mu = [-0.01, 0.49]}$ بازه‌ی اطمینان 95٪

ب)

$H_0 : \mu = 0 \Rightarrow E(D_i) = 0$

$\sim H_0 : \mu > 0$

ج)

$t = \frac{0.24}{0.12} \simeq 2 \qquad P_{df=14}(t > 2 \mid \mu = 0) \simeq 0.03$

$\Rightarrow$ باسطح اطمینان 5٪ می‌توان H_0 را رد کرد

$\Rightarrow$ باسطح اطمینان 1٪ نمی‌توان H_0 را رد کرد

د)

$\boxed{P\text{-value} = 0.03}$

سئوال 9

الف)

$X = E(\Sigma x_i) = \Sigma E(x_i) = \sum_{n=200} 0.65 = 200 \times 0.65 = \boxed{130}$

ب)

$Var(X) = Var(\Sigma x_i) = \Sigma Var(x_i) = 200 \times 0.65(1 - 0.65) = 45.5$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{Var(X)} \Rightarrow \boxed{\sigma = 6.74}$

ج)

$Z = \frac{115 - 130}{6.74} = -2.23 \Rightarrow P(Z < -2.23) = \boxed{0.013}$

ح) با فرض اینکه محبوبیت شخص پیروز واقعاً ٪65 باشد، احتمال اینکه از 200 نفر که به طور اتفاقی انتخاب شده اند، 115 نفر یا کمتر به او رای مثبت بدهند کمتر از 1.3 درصد است.

سایر سؤالات

۱.

$$E[(W-\theta)^2] = E[((W-E(W))+(E(W)-\theta))^2] = E[(W-E(W))^2] + E[(E(W)-\theta)^2] + 2E[(W-E(W))(E(W)-\theta)]$$

$$= Var(W) + (E(W)-\theta)^2 + 2(E(W)-\theta)\underbrace{E[(W-E(W))]}_{0} = Var(W) + Bias(W)^2$$

2.

الف)

$$E(W_1) = E\left(\frac{1}{n}\sum Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(Y_i) = \frac{n}{n}\mu = \mu \quad \checkmark$$

$$E(W_2) = E\left(\frac{1}{2}(Y_1+Y_n)\right) = \frac{1}{2}\times 2\mu = \mu \quad \checkmark$$

$$E(W_3) = \frac{n-2}{n^2}\times n\mu = \frac{n-2}{n}\mu \neq \mu \quad \times$$

ب)

$$Var(W_1) = Var\left(\frac{1}{n}\sum Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Var(W_1) = 0 \quad \checkmark$$

$$Var(W_2) = Var\left(\frac{1}{2}(Y_1+Y_n)\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2+\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} Var(W_2) \neq 0 \quad \times$$

$$Var(W_3) = \left(\frac{n-2}{n^2}\right)^2\times n\sigma^2 = \frac{(n-2)^2}{n^3}\sigma^2, \quad \lim_{n\to\infty} Var(W_3) = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} Bias(W_3) = 0 \quad \checkmark$$

$\checkmark$

ج) بهترین تخمین گر از بین این تخمین گرها W_1 است چون هم تورش ندارد هم سازگار است.

بعد از W_3 بهتر است چون سازگار است.

و نهایتاً W_2 خوب است چون تورش ندارد.

$$s^2 = \frac{1}{n} \Sigma (Y_i - \mu)^2$$

$$E[s^2] = \frac{1}{n} E[\Sigma (Y_i-\mu)^2] = \frac{1}{n} \Sigma E[(Y_i-\mu)^2] = \frac{1}{n} \Sigma [E(Y_i^2) - 2E(\mu Y_i) + E(\mu^2)]$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma [E(Y_i^2) - E^2(Y_i)] = \frac{n}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

پس ~~تخمین~~ تخمین‌گر بدون اریبی است ✓

$$E[(s^2-\sigma^2)^2] = E[s^4 - 2s^2\sigma^2 + \sigma^4] = E[s^4] - \sigma^4$$

$$E[s^4] = E[\frac{1}{n^2} (\Sigma (Y_i-\mu)^2)^2] = \frac{1}{n^2} E[(\sum_i (Y_i-\mu)^2)^2]$$

$$= \frac{1}{n^2} E[\sum_i (Y_i-\mu)^4 + \sum_{i\neq j} \sum_j (Y_i-\mu)^2 (Y_j-\mu)^2]$$

$$= \frac{1}{n^2} [\sum_i E[(Y_i-\mu)^4] + \sum_{i\neq j} \sum_j E[(Y_i-\mu)^2 (Y_j-\mu)^2]]$$

$$= \frac{1}{n^2} [n E[(Y-\mu)^4] + n(n-1)\sigma^4] = \frac{E[(Y-\mu)^4] - \sigma^4}{n} + \sigma^4$$

$$\Rightarrow E[(s^2-\sigma^2)^2] = \frac{E[(Y-\mu)^4] - \sigma^4}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} Var(S^2) = 0 \checkmark$$

پس تخمین‌گر سازگار است.