علیرضا درویشی - تمرین 5 - بهینه سازی محدب . 96109674

3.37

فرض کنیم $Y \preceq 0$ برقرار است:

$$f(X,Y) = tr(XY) - tr(X^{-1}) \to \partial_X f = Y + X^{-2} = 0 \to X^{-2} = -Y \Rightarrow X^{2} = -Y^{-1} \Rightarrow X = (-Y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^*(Y) = tr((-Y)^{-\frac{1}{2}} Y) - tr(((-Y)^{\frac{1}{2}}) = tr(-(-Y)^{-\frac{1}{2}}(-Y)^{\frac{1}{2}}(-Y)^{\frac{1}{2}}) - tr(((-Y)^{\frac{1}{2}})$$

$$= -2\,tr(((-Y)^{\frac{1}{2}}) = -2\,tr(-Y)^{\frac{1}{2}}$$

از طرفی در مورد $dom\ f^*$: اگر $Y \succeq 0$ باشد:

$$Y = QDQ^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T \ , \ \lambda_i > 0$$

حال فرض کنیم $X = Q\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q^T = t q_1 q_1^T + \sum_{i=2}^{n} q_i q_i^T$. در این صورت:

$$tr(XY) - tr(X^{-1}) = t\lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i - \frac{1}{t} - (n-1)$$

و این تابع بر حسب t، بدون کران بزرگ می شود. پس f^* برای $Y \succeq 0$ مقدار ندارد.

3.47

تعریف می کنیم: $h(x) = -\log(f(x))$ حال: $\nabla h(x) = -\frac{1}{f(x)} \nabla f(x)$

با توجه به اینکه اگر و تنها اگر $h(x)$ محدب باشد، $f(x)$ log-concave است، داریم:

$h(x)$ محدب است $\Longleftrightarrow h(y) \geq h(x) + \nabla h(x)^T (y-x)$

پس: $-\log f(y) \geq -\log f(x) - \frac{\nabla f^T}{f}(y-x) \Rightarrow \frac{f(y)}{f(x)} \leq \exp\left(\frac{\nabla f^T (y-x)}{f}\right)$

3.48

$$f(\theta x+(1-\theta)y) \geq f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta}$$

$$f(\theta x+(1-\theta)y)-a \geq f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta}-a$$

از طرفی: $u_1v_1+u_2v_2 \leq (u_1^{\frac{1}{\theta}}+u_2^{\frac{1}{\theta}})^{\theta}(v_1^{\frac{1}{1-\theta}}+v_2^{\frac{1}{1-\theta}})^{1-\theta}$ پس:

$$(f(x)-a)^{\theta}(f(y)-a)^{1-\theta}+a^{\theta}a^{1-\theta} \leq (f(x)-a+a)^{\theta}(f(y)-a+a)^{1-\theta}=f(x)^{\theta}f(y)^{1-\theta}$$

$$\Rightarrow f(x)^{\theta}f(y)^{1-\theta}-a \geq (f(x)-a)^{\theta}(f(y)-a)^{1-\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\theta x+(1-\theta)y) \geq (f(x)-a)^{\theta}(f(y)-a)^{1-\theta}$$

3.51 فرض کنیم P یک چندجمله‌ای درجه n باشد:

$$P(x)=\alpha(x-s_1)(x-s_2)\dots(x-s_n)$$

که s_1 تا s_n ریشه‌های P است و $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ ، $\alpha>0$ است. حالت $\alpha<0$ را به طور مشابه می‌توان بررسی کرد. اگر بین s_k تا s_{k+1} مثبت باشد ، $n-k$ زوج است. پس:

$$\log P=\log\alpha+\sum_{i=1}^{n}\log(x-s_i)=\log\alpha+\sum_{i=1}^{k}\log(x-s_i)+\log[(x-s_{k+1})(x-s_{k+2})]+\log[\dots]+\dots$$
$$+\log[(x-s_{n-1})(x-s_n)]$$

حال برای $f(x)=\log((x-a)(x-b))$ نشان می‌دهیم $b<a\leq b$ $x<a\leq b$ مقعر است.

$$f'(x)=\frac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab} \quad , \quad f''(x)=\frac{2(x-a)(x-b)-(2x-(a+b))^2}{[x^2-(a+b)x+ab]^2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x-a)(x-b)-((x-a)+(x-b))^2}{[x^2-(a+b)x+ab]^2}=-\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{[x^2-(a+b)x+ab]^2} \leq 0$$

پس مجموع تعدادی تابع محدب است. توابع اولیه هم که به وضوح محدب هستند.

راه ۱ 3.52

$$F(x) = \log \phi(x) = \log \left[\int_0^\infty u^x f(u)\, du \right]$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\int_0^\infty (\ln u)\, u^x f(u)\, du}{\int_0^\infty u^x f(u)\, du} \longrightarrow \frac{d^2F}{dx^2} = \frac{\left[\int_0^\infty (\ln u)^2 u^x f(u) du\right]\left[\int_0^\infty u^x f(u) du\right] - \left[\int (\ln u) f(u) u^x du\right]^2}{\left[\int_0^\infty u^x f(u) du\right]^2}$$

صورت $\frac{d^2F}{dx^2}$ با توجه به نامساوی کوشی شوارتز انتگرالی، نامنفی است:

$$\left[\int P^2(x)\, dx\right]\left[\int q^2(x)\, dx\right] \geq \left[\int P(x)\, q(x)\, dx\right]^2 , \quad P(x) = \sqrt{(\ln u)^2 u^x f(u)} \, , \quad q(x) = \sqrt{u^x f(u)}$$

در این از $f(u) \geq 0$ استفاده شده است.

پس $\frac{d^2F}{dx^2} \geq 0$ است، و $\operatorname{dom} F(x) = R^+$ هم محدب است.

راه ۲.

به ازای هر $u>0$، برای x log-convex است $\longrightarrow$ $g(x,u) = u^x f(u)$

پس با توجه به تمرین کتاب، $\phi(x) = \int_0^\infty g(x,u)\, du = \int_0^\infty u^x f(u) du$ log-convex است.

Scanned by CamScanner