علیرضا درویشی 96109674

۱ـ کافی است $2n$ مسئله حل کنیم که در هر مسئله $f = e_i$ یا $f = -e_i$ است. اگر چند وجهی بی کران باشد، یکی از $2n$ مسئله، جواب $p^* = +\infty$ دارد.

$$LP_i: \quad \max f^T x$$
$$st: \ Ax \le b$$
$$Cx = d$$
$$f_i = \begin{cases} e_i & i = 1, \dots, n \\ -e_i & i = n+1, \dots, 2n \end{cases}$$

حال می توان تمام مسائل را در یک مسئله خلاصه کرد:

بردار x را برداری تعریف می کنیم که از پشت سر هم قرار دادن x_1 تا x_{2n} درست آمده و هر x_1 تا x_{2n}، برداری n-تایی است حال:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & A \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{2n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{d} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$$

و مسئله‌ی زیر را حل می کنیم.

$$\max \tilde{f}^T x$$
$$st: \ \tilde{A}x \le \tilde{b}$$
$$\tilde{C}x = \tilde{d}$$

اگر حداقل یکی از $2n$ مسئله‌ی بالا بی کران باشد، مسئله‌ی گفته شده هم بی کران است.

۲- از شرط مشتق دوم استفاده می کنیم:

$$\nabla^2 f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{f}{x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{f}{x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = \alpha_1 x_2 \frac{f}{x_1 x_2}$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1(\alpha_1-1) f}{x_1^2} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 f}{x_1 x_2} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2 f}{x_1 x_2} & \frac{\alpha_2(\alpha_2-1) f}{x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{f}{x_1^2 x_2^2}\begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_1-1) x_2^2 & \alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 \\ \alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 & \alpha_2(\alpha_2-1) x_1^2 \end{pmatrix}$$

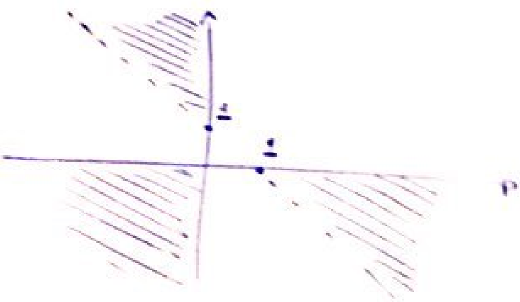
برای محدب بودن، باید ماتریس هسیان مثبت معین باشد: $\nabla^2 f \geq 0$

برای مثبت معین بودن ماتریس متقارن کافی است دترمینان های گوشه ای اش مثبت معین باشند یعنی

$$\begin{cases} \alpha_1(\alpha_1 - 1)\, x_2^2 \geq 0 \\ \left[\alpha_1(\alpha_1-1)\alpha_2(\alpha_2-1) - \alpha_1^2\alpha_2^2\right] x_1^2 x_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1(\alpha_1 - 1) \geq 0, \quad \alpha_1\alpha_2\left[1 - \alpha_1 - \alpha_2\right] \geq 0$$

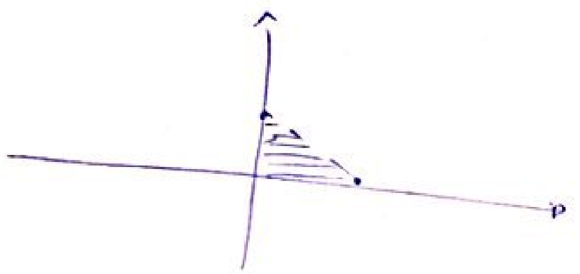
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \geq 1, \quad \alpha_2 \leq 0, \quad \alpha_2 \geq 1 - \alpha_1 \\ \alpha_1 \leq 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 \leq 0 \\ \alpha_2 \geq 1 - \alpha_1 \end{cases} \end{cases}$$



شرط مقعر بودن :

$\nabla^2 f \leq 0 \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 - 1) \leq 0 \ , \ \alpha_1\alpha_2[1-\alpha_1-\alpha_2] \leq 0$

$\alpha_1(\alpha_1 - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha_2 \leq 1 - \alpha_1$



$$f_\alpha = \prod_i x_i^{\alpha_i}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i x_j} = \alpha_i \alpha_j \frac{f}{x_i x_j} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \alpha_i(\alpha_i - 1)\frac{f}{x_i^2}$$

$$\Rightarrow H = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_1-1)\frac{1}{x_1^2} & \frac{\alpha_1\alpha_2}{x_1 x_2} & \frac{\alpha_1\alpha_3}{x_1 x_3} & \cdots & \frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\alpha_1\alpha_n}{x_1 x_n} & - & - & - & \frac{\alpha_n(\alpha_n-1)}{x_n^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f \geq 0 \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1-1) \geq 0 \, , \begin{vmatrix} \alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2(\alpha_2-1) \end{vmatrix} \geq 0$$

$$, \begin{vmatrix} \alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2(\alpha_2-1) & \alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 & \alpha_3(\alpha_3-1) \end{vmatrix} \geq 0 , \ldots$$

Scanned with CamScanner

4 - الف)

این 2 مسئله، strong alternative هم هستند. یعنی دوگان مسئلهی feasibility اول، مسئلهی feasibility دوم است. و با توجه به معروف بودن قیدها و قضیه‌ی دوگان قوی، گزاره صحیح است.

$\left.\begin{array}{l} Sv=c \\ v\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} S^TH\leq 0 \\ H^Tc\leq 0 \end{array}\right.$

اما یک طرف را به راحتی می‌توان به طریق دیگری نشان داد:

$$\left.\begin{array}{l} Sv=c \\ v\geq 0 \\ S^TH\leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H^TSv=H^Tc \Rightarrow (S^TH)^Tv=H^Tc \left.\begin{array}{l} \\ S^TH\leq 0 \\ v\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H^Tc\leq 0$$

ب) طبق صورت سؤال اگر $Sv=0 \Rightarrow Sv\geq 0 \Rightarrow Sv=0$

حال تعریف می‌کنیم $b_i=\varepsilon e_i$ و $\varepsilon>0$

در این صورت طبق فرض سؤال $Sv\geq b_i$ جواب ندارد.

حال طبق لم فارکاش، یکی از صورت‌هایش، اگر $Ax\leq b$ جواب ~~نداشته~~ ندارد اگر و تنها اگر $y\geq 0$ وجود داشته باشد که $y^TA=0$ و $y^Tb<0$ باشد.

حال: $(-S)v\leq -b_i \rightarrow$ جواب ندارد $\rightarrow m_i\geq 0$ وجود دارد $m_i^T(-S)=0$ و $m_i^T(-b_i)<0$

پس: $m_i^TS=0$ و مؤلفه‌ی i از m_i اکیداً مثبت است.

حال n بار به ازای $i=1 \ldots n$ این کار را انجام می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $m=\sum m_i$

در این صورت m در گزاره‌های سؤال صدق می‌کند.

5- شرط‌های سئوال:

$$L w^{-1} \leq 2$$
$$1 \leq L w^{-1}$$
$$300 \leq L \times w$$
$$10 \leq w$$
$$w \leq 20$$
$$20 \leq L$$
$$L \leq 30$$

تابع هدف:

$$f_0 = 2L + \pi w + 2Lw$$

تمام شرط‌های سئوال را می‌توان به شکل monomial تغییر داد. تابع هدف هم Posynomial است. پس باید تغییر متغیر داریم. $y_1 = \log(L),\ y_2 = \log(w)$

$$\text{st} \begin{cases} y_1 - y_2 - \log 2 \leq 0 \\ y_2 - y_1 \leq 0 \\ -y_1 - y_2 + \log(300) \leq 0 \\ -y_2 + \log(10) \leq 0 \\ y_2 - \log(20) \leq 0 \\ -y_1 + \log(20) \leq 0 \\ y_1 - \log(30) \leq 0 \end{cases}$$

$$\min \log\left(e^{y_1 + \log(2)} + e^{y_2 + \log(\pi)} + e^{y_1 + y_2 + \log(2)}\right)$$

6. الف)

متغیرهای d ، k را به عنوان قطر D و K تعریف می‌کنیم. حال $A = D + KG$

درایه‌ای از هر

، هر سطر از A جمعی از درایه‌های d یا k است. حال هدف این است که $\lambda_{max}(A)$

را کمینه کنیم. برای این کار از GP استفاده می‌کنیم.

A_{ij} : یک پوزی نومیال از dها و kها است

طبق جزوه و کتاب:

$$\min \ \lambda$$

$$\text{st} \quad \sum_{j=2}^{n} (A_{ij} v_j)/(\lambda v_i) \le 1 \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\gamma \left(\sum \frac{1}{d_i} \right) + \sum \frac{1}{k_i} \le u$$

یک برنامه‌ریزی GP برای حل سوال است.

برای محدب شدن سوال کافی است از $f = \log(f)$ برای هر تابع استفاده کنیم و

از جایگذاری $y = \log(x)$ برای هر متغیر استفاده کنیم.

۶ ب) متغیرهای d ، k را تعریف می‌کنیم. حال: $D = diag(d)$ ، $K = diag(k)$

$$G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = D + K * G = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_2 & k_3 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2d_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & 2d_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & 2d_3 \end{pmatrix}$$

حال برای کمینه کردن بیشینه‌ی λ ی A ، از GP کمک می‌گیریم:

$$\min \quad \lambda$$

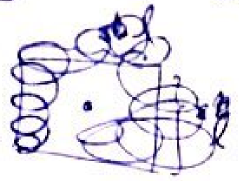
$$st: \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j / (\lambda v_i) \leq 1 \qquad for \ i = 1, \dots, n$$

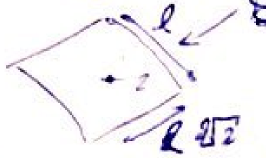
$$\gamma\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}\right) + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right) \leq u$$

تمام قیدهای مسئله ، تابع هدف پوزی نومیال هستند پس با تغییر متغیرهای $f_i = \log(f_i)$ و $y_i = \log(x_i)$ می‌توان مسئله را محدب کرد.

7.

الف) به وضوح کران بالایی برای تعداد دانشجویان وجود دارد. یعنی به دور هر دانشجو، مربعی

با طول l باید خالی باشد:  حال مساحت کلاس تقسیم بر l^2



برابر با حداکثر دانشجویان ممکن است.

ب) تست می‌کنیم آیا امکان دارد که n دانشجو در کلاس باشند یا خیر. اگر نشد،

برای $n=\frac{wL}{l^2}$

از n یکی کم می‌کنیم و باز هم این کار را تکرار می‌کنیم تا یک n فیزیبل بیابیم. یا اینکه

binary سرچ می‌کنیم و از $\frac{n}{2}$ شروع می‌کنیم و اگر شد، سراغ $\frac{3n}{4}$ می‌رویم و اگر نشد

سراغ $\frac{n}{4}$ و الی آخر.

ب) برای چک کردن feasiblity ی n:

$$|x_i - x_j| + |y_i - y_j| \geq 2$$

به تعداد $\binom{n}{2}$ شرط داریم:

ب) شرط‌ها محدب نیستند. برای اینکه محدب شوند، $4^{\binom{n}{2}}$ مسئله‌ی محدب حل می‌کنیم که

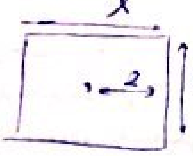
در هر کدام فرض می‌کنیم $x_i \geq x_j$ و $y_i \geq y_j$ و بعد از برداشتن قدر مطلق‌ها به

مسئله‌ای خطی می‌رسیم. حال بعد از حل مسئله بررسی می‌کنیم که فرض‌های ما نیز برقرار

هستند یا خیر. پس ~~تعداد~~ کران بالا برای تعداد مسائل:

$$\boxed{m \leq \underbrace{\log_2 n}_{\text{باینری سرچ}} \times \underbrace{4^{\binom{n}{2}}}_{\text{چک کردن هر } n}} \qquad n = \frac{wL}{l^2}$$

7- ب) بازهم کران بالای برای تعداد دانشجویان هست. در هر مربع با طول l فقط یک دانشجو حضور دارد. پس l



، $l = 4$. پس حداکثر $n = \frac{w^2}{16}$ قابل قبول است.

بخش ناپذیری سرچ الگوریتم مثل بخش قبل است. اما برای چک کردن فیزیبیلیتی n داریم:

به تعداد $\binom{n}{2}$ شرط داریم که: $|y_i - y_j| \ge 2$ یا $|x_i - x_j| \ge 2$

که محدب نیست. بازهم $4^{\binom{n}{2}}$ حالت درنظر میگیریم. در هر حالت یکی از 4 شرط $(x_i - x_j) \ge 2$ ، $x_i - x_j \le -2$ ، $y_i - y_j \le -2$ ، $y_i - y_j \ge 2$ را هم در شرط‌ها می‌آوریم.

اگر یکی از این مسائل فیزیبل باشند، n فیزیبل است.

پس کران بالای تعداد مسائل محدب

$$m \le \log_2^n \times 4^{\binom{n}{2}}$$

است.

Scanned with CamScanner