علیرضا درویشی - 96109671 - تمرین 13 - بهینه سازی محدب

5.23) از تابع Perspective برای $a_i x_i$ استفاده می کنیم

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} P(x_i, t_i) - b \right\|_2 = f_0(x_i, t_i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min & \left\| \sum P(x_i, t_i) - b \right\|_2 \\ \text{st}: & \| P_i x_i + q_i \|_2 \le 1 \end{cases}$$

قیدهای مسئله محدب هستند پس مشکلی نیست

تابع هدف هم نرم یک تابع affine است و از $P(x_i, t_i)$ ، تابع P هم Convex است.

پس تابع هدف هم Convex است

10.2)

a)

$$f(u,v) = (u^T, v^T) \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u^T \; v^T) \begin{pmatrix} Au + Bv \\ B^T u + Cv \end{pmatrix} = u^T A u + u^T B v + v^T B^T u + v^T C v$$

$$\Rightarrow f(u,v) = u^T A u + 2u^T B v + v^T C v$$

$$\nabla_u f(u,v) = 2Au + 2Bv = 0 \Rightarrow u = -A^{-1} B v \; , \; \nabla_u^2 f(u,v) = A$$

اگر f روی u کمینه شود، $A \succ 0$ است. پس:

$$g(v) = v^T B^T A^{-T} A A^{-1} B v - 2 v^T B^T A^{-T} B v + v^T C v$$

$$g(v) = v^T (C - B^T A^{-1} B) v = \boxed{v^T S v}$$

b)

- اگر $X>0$:

پس $f(u,v)>0$ است. پس $f(u,0)>0$ که نتیجه می‌دهد $A>0$.

از طرفی دیگر $g(v)=\min_u f(u,v)$ پس $g(v)>0$ برای v ناصفر پس $S>0$ پس $S>0$

اگر $A>0$, $S>0$:

از بخش قبل داریم.

$$f(u,v) \geq g(v) = v^T S v > 0 \Rightarrow A>0 \checkmark$$

- $A>0$ پس : $f(u,v) \geq g(v)$

حال اگر $X \geq 0$ ، پس $f(u,v) \geq 0$ برای تمام u,v ها. پس $0 \leq g(v) = \inf_u f(u,v)$

پس $S \geq 0$.

اگر $S \geq 0$ پس $f(u,v) \geq g(v) \geq 0$ پس $X \geq 0$ $\checkmark$

-

14.31

مسئله را در هر 4 حالت حل می‌کنیم و جواب‌ها را کمینه‌ی 4 جواب در نظر می‌گیریم

حالت اول :

$$\min \ P_L N_L + P_S N_S$$

$$\text{st} \quad N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i$$

$$N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$$

$$0 \le S \ , \ S \le V$$

$$\sum S_i = C$$

$$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$$

$$N_L \ge 0 \ , \ N_S \ge 0$$

شرط‌های $N_L \ge 0$ و $N_S \ge 0$ را به شرط‌های مسئله اضافه می‌کنیم تا مطمئن باشیم تابع مالیات در محدوده‌ی درست قرار دارد.
اگر مسئله infeasible بود، جواب را ∞ در نظر می‌گیریم.

حالت دوم :

$$\min \ P_S \times Pos(N_S + N_L)$$

$$\text{st:} \quad N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i \ , \ N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$$

$$0 \le S \ , \ S \le V$$

$$\sum S_i = C$$

$$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$$

$$N_S \ge 0 \ , \ N_L \le 0$$

همانند بخش قبل شرط $N_S \ge 0$ و $N_L \le 0$ اضافه شده. در تابع هدف هم از pos( ) استفاده شده، که محدب است.

حالت سوم :

$$\min \; P_L \times P_{0.3}(N_L \cdot N_S)$$

$$N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i \;, \quad N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$$

$$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$$

$$0 \le S \;, \quad S \le V$$

$$\sum S_i = C$$

$$N_L \ge 0 \;, \quad N_S \le 0$$

حالت چهارم :

$$\min \quad 0$$

$$N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i \;, \quad N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$$

$$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$$

$$0 \le S \;, \quad S \le V$$

$$\sum S_i = C$$

$$N_L \le 0 \;, \quad N_S \le 0$$

(15.11

a) برای $0 \le x \le x_{max}$ ، $\phi(x) \ge 0$ پس E صعودی است.

برای $x_{min} \le x \le 0$ ، $\phi(x) \le 0$ پس E نزولی است.

پس E ، Quasi-convex است.

b) اگر E ، Convex باشد پس $E'' = \phi' \ge 0$ که یعنی ϕ صعودی است.

اگر ϕ صعودی باشد پس $\phi' \ge 0$ که یعنی $E'' \ge 0$ که یعنی E Convex است.

(17.9

(a

$$\min \quad p^T(u+c)$$

s.t.:

$$-D\mathbf{1} \preceq c$$

$$c \preceq C\mathbf{1}$$

$$q_{t+1} = q_t + c_t \quad \text{for } t = 1 \text{ to } T-1$$

$$q_1 = q_T + c_T$$

$$0 \preceq q \preceq Q\mathbf{1}$$

Scanned with CamScanner