Date Year Month Day Subject

علیرضا درویشی - 96109674 - بهینه سازی محدب - تمرین ۹

۱۰.

a)

$$\min \ \log\det X^{-1}$$
$$\text{st:} \quad x \succeq 0$$
$$1^T x = 1$$
$$X = \sum_i x_i v_i v_i^T$$

$$L(X, x, \nu, z, Z) = \log\det X^{-1} + \mathrm{tr}\left(ZX - Z\sum_i x_i v_i v_i^T\right) - z^T x + \nu(1^T x - 1)$$

$$= \log\det X^{-1} + \mathrm{tr}(ZX) - \sum x_i v_i^T Z v_i - z^T x + \nu(1^T x - 1)$$

$$= \log\det X^{-1} + \mathrm{tr}(ZX) + \sum_i x_i(-v_i^T Z v_i - z_i + \nu) - \nu$$

برای مینیمم کردن روی $x_i$ ، جملهٔ داخل پرانتز اگر صفر نباشد ، $L$ از پایین بی‌کران است. برای مینیمم کردن روی $X$:

$$\nabla_X L = -X^{-1} + Z = 0 \Rightarrow X^{-1} = Z$$

$$\Rightarrow g(Z, z, \nu) = \begin{cases} \log\det Z + n - \nu, & \nu - v_i^T Z v_i = z_i \\ -\infty, & \text{else} \end{cases}$$

پس مسئله‌ی دوگان :

$$\max \ \log\det Z + n - v$$
$$\text{st}: \ v_i^T Z v_i \leq v$$

برای ساده کردن مسئله :

$$W = \frac{1}{v} Z$$

$$\max \ \log\det W + n + n\log v - v$$
$$\text{st}: \ v_i^T W v_i \leq 1$$

که می‌توان روی $v$ به‌سادگی max کرد :

$$\frac{n}{v} = 1 \Rightarrow n = v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max \ \log\det W + n\log n \\ \text{st}: \ v_i^T W v_i \leq 1 \end{cases}$$

Date Year Month Day Subject

b)

$$\min \quad tr(X^{-1})$$

st: $X = \sum x_i v_i v_i^T$

$x \succeq 0$

$1^T x = 1$

$$\Rightarrow L(X, x, Z, z, \nu) = tr(X^{-1}) + tr(ZX) - \sum x_i v_i^T Z v_i - z^T x + \nu(1^T x - 1)$$

$$= tr(X^{-1}) + tr(ZX) + \sum x_i(-v_i^T Z v_i - z_i + \nu) - \nu$$

مینیمم گرفتن روی $x_i$ ، اگر ضرایبش برابر صفر باشد کراندار است.

مینیمم روی $X$ :

$$\nabla L_X = -X^{-2} + Z = 0 \Rightarrow X^{-2} = Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = Z^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow \text{برای } Z \succ 0$$

$$\Rightarrow \inf_{X \succ 0} \left(tr(X^{-1}) + tr(ZX)\right) = \begin{cases} 2tr(Z^{\frac{1}{2}}) & Z \succeq 0 \\ -\infty & \text{else} \end{cases}$$

$$g(Z, z, \nu) = \begin{cases} -\nu + 2tr(Z^{\frac{1}{2}}) & Z \succeq 0, \; v_i^T Z v_i + z_i = \nu \\ -\infty & \text{else} \end{cases}$$

Date Year Month Day Subject

پس مسئله دوگان:

$$\max \quad -v + 2\operatorname{tr}(Z^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{st:} \quad v_i^T Z v_i \le v$$

$$Z \succeq 0$$

برای ساده‌سازی بیشتر:

$$W = \frac{1}{v} Z$$

$$\Rightarrow \max \quad -v + 2\sqrt{v}\,\operatorname{tr}(W^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{st:} \quad v_i^T W v_i \le 1$$

$$W \succeq 0$$

با ماکسیمم کردن روی $v$:

$$-1 + \frac{\operatorname{tr}(W^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{v}} = 0 \Rightarrow \sqrt{v} = \operatorname{tr}(W^{\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow \max \quad (\operatorname{tr}(W^{\frac{1}{2}}))^2$$

$$\text{st:} \quad v_i^T W v_i \le 1$$

$$W \succeq 0$$

JAHAN NAMA

-37

$Py = y,\ y \geq 0,\ 1^T y = 1$ , $P^T 1 = 1$

$Py = Iy \Rightarrow (P-I)y = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} P-I \\ 1^T \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,\ y \geq 0$

لم فارکاش : اگر معادله‌ی بالا جواب نداشته باشد، وجود دارد $w$ و $z$ ای که :

$(P-I)^T z + w 1 \geq 0$ , $w < 0$ $\Rightarrow P^T z > z$

چون هر درایه‌ی $P$ غیرصفر است و مجموع هر سطر $P$ صفر است،

پس هر سطر از $P^T z$ میانگین وزن‌دار $z$ است. پس

به ازای حداقل یکی از سطرهای $z$ که از بقیه بیشتر است، این نامساوی غلط

است و تناقض است.

.40

$$\min \quad \frac{1}{t}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum x_i v_i v_i^T \succeq tI$$

$$x \succeq 0$$

$$1^T x = 1$$

$$L(t, x, Z, z, v) = \frac{1}{t} - \mathrm{tr}\left(Z\left(\sum_{i=1}^{p} x_i v_i v_i^T - tI\right)\right) - z^T x + v(1^T x - 1)$$

$$= \frac{1}{t} + t.\mathrm{tr}(Z) + \sum_i x_i(-v_i^T Z v_i - z_i + v) - v$$

مینیمم گرفتن روی $x_i$ اگر هر ضریب صفر باشد کراندار است .

مینیمم کردن روی $t$ :

$$\Rightarrow \inf_{t>0}\left(\frac{1}{t} + t\,\mathrm{tr}Z\right) = \begin{cases} 2\sqrt{\mathrm{tr}Z} & Z \succeq 0 \\ -\infty & \text{else} \end{cases}$$

پس تابع دوگان :

$$g(Z, z, v) = \begin{cases} 2\sqrt{\mathrm{tr}Z} - v & v_i^T Z v_i + z_i = v, Z \succeq 0 \\ -\infty & \end{cases}$$

پس مسئله‌ی دوگان :

$$\max \quad 2\sqrt{\mathrm{tr}Z} - v$$

$$\text{st:} \quad v_i^T Z v_i \le v$$

$$Z \succeq 0$$

Date Year Month Day

Subject

برای ساده سازی داریم: $W = \frac{1}{v} Z$

$$\max \quad 2\sqrt{v}\sqrt{\operatorname{tr} W} - v$$

$$\text{st:} \quad v_i^T W v_i \leq 1$$

$$W \succeq 0$$

با بهینه کردن روی $v$ داریم:

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tr} W}}{\sqrt{v}} = 1 \Rightarrow v = \operatorname{tr} W$$

$$\max \quad \operatorname{tr} W$$

$$\text{st:} \quad v_i^T W v_i \leq 1$$

$$W \succeq 0$$

.432

$$\min \quad C^T x$$

$$\text{st} \quad Ax \preceq_K b \rightarrow Ax - b \preceq_K 0$$

$$L(x,\lambda) = C^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

$$g(\lambda) = \inf_x \left( C^T x + \lambda^T (Ax - b) \right) = \begin{cases} -b^T \lambda & , A^T \lambda + C = 0 \\ -\infty & \text{else} \end{cases}$$

پس سؤال دوگان $\lambda$ به این شکل است:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & -b^T \lambda \\ \text{st:} & A^T \lambda + C = 0 \\ & \lambda \succeq_{K^*} 0 \end{array} \right\}$$