Date Year Month Day Subject

علیرضا درویشی_96109679_تمرین ۱۰_بهینه‌سازی محدب

3.10

الف)

$\mathbf{E}\, c^T x = c_0^T x$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \min & c_0^T x \\ \text{st.} & Ax \le b \end{array} \Bigg\} \to$$ یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی

ب)

$\mathbf{E}\, c^T x + \gamma \operatorname{Var}(c^T x) = c_0^T x + \gamma\, x^T c\, c^T x - \gamma\, x^T c_0 c_0^T x$

$= c_0^T x + \gamma\, x^T \Sigma x$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \min & c_0^T x + \gamma\, x^T \Sigma x \\ \text{st:} & Ax \le b \end{array} \Bigg\} \to$$ یک مسئله‌ی QP است.

برای $\gamma \ge 0$

ج) خیر. به ازای $\gamma < 0$، تابع هدف concave است.

د) $c^T x$ یک متغیر نرمال است که: $c^T x \sim N(c_0^T x, x^T \Sigma x)$

$$\Rightarrow \frac{c^T x - c_0^T x}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2} \sim N(0, 1) \Rightarrow P(c^T x > \beta) \le \alpha : P\left(\frac{c^T x - c^T x_0}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2} > \frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2}\right) \le \alpha$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2}\right) \le \alpha \Rightarrow (1-\alpha) \le \Phi\left(\frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2}\right)$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(1-\alpha) \le \frac{\beta - C_0^T x}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2}$$

$$\Rightarrow \|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2 \, \phi^{-1}(1-\alpha) + C_0^T x \le \beta$$

$$\Rightarrow \quad \min \ \beta$$

st:

$$\phi^{-1}(1-\alpha) \, \|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2 + C_0^T x \le \beta$$

$$Ax \le b$$

که یک مسئله‌ی SOCP است اگر $\alpha \le 0.5$ درنتیجه $\phi^{-1}(1-\alpha) \ge 0$

اگر $\alpha \ge 0.5$ مسئله‌ی جویای ریسک را حل می‌کنیم

3.32

الف) $(1+\lambda u)_+ \geq 1(u>0) = 1 - 1(u\leq 0)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (1+\lambda f_i(x))_+ \geq m - \underbrace{\sum 1(f_i(x)\leq 0)}$$

تعداد مساوی های که برقرار هستند

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (1+\lambda f_i(x))_+ \leq m-k$$ اگر شرط گفته شده برقرار باشد:

$$\Rightarrow m - \sum 1(f_i(x) \leq 0)_+ \leq m-k \Rightarrow k \leq 1(f_i(x)\leq 0)$$

تعداد شرط های برقرار شده از k بزرگتر است ✓

ب)

$$\lambda>0 \Rightarrow (1+\lambda f_i(x))_+ = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} + f_i(x)\right)_+$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (1+\lambda f_i(x))_+ \leq m-k \Rightarrow \lambda \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{\lambda} + f_i(x)\right)_+ \leq m-k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{\lambda} + f_i(x)\right)_+ \leq (m-k)\frac{1}{\lambda} \quad , \quad \frac{1}{\lambda} = v$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (v + f_i(x))_+ \leq v(m-k)$$

Date Year ____ Month ____ Day ____ Subject ____

$\Rightarrow \min \; f_0(x)$

$\text{st.} \quad \sum_{i=1}^{m} (v + f_i(x))_+ \leq v(m-k)$

$\qquad v \geq 0$

دلیل اضافه کردن $v=0$ هم این است که با $v=0$ ، همه‌ی شرط‌ها برقرار هستند.

4.3

$$\min \quad \sum_k x_k \log\left(\frac{x_k}{y_k}\right)$$

$$\text{st} \quad Ax = b, \quad 1^T x = 1$$

$$g(x, v, w) = \sum_k x_k \log\left(\frac{x_k}{y_k}\right) - v^T(Ax-b) - w(1^T x - 1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \log\left(\frac{x_k}{y_k}\right) + 1 - (A^T v)_k - w = \log\left(\frac{x_k}{y_k}\right) + 1 - a_k^T v - w = 0$$

$$\Rightarrow x_k = y_k e^{(w + a_k^T v - 1)}$$

$$\Rightarrow g = \sum_k y_k e^{(w+a_k^T v - 1)} (w + a_k^T v - 1) - \sum (A^T v)_k x_k + v^T b$$

$$- w \sum x_k + w$$

$$= \sum_k y_k e^{(w+a_k^T v-1)} (w + a_k^T v - 1) - \sum (a_k^T v) y_k e^{(w+a_k^T v-1)}$$

$$+ v^T b - w \sum y_k e^{(w+a_k^T v-1)} + w$$

$$\Rightarrow g(\nu, w) = \nu^T b + w - \sum_k y_k \, e^{(w + a_k^T \nu - 1)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w} = 1 - \sum_k y_k \, e^{(w + a_k^T \nu - 1)} = 1 - e^w \sum_k y_k \, e^{(a_k^T \nu - 1)}$$

$$\Rightarrow e^w = \frac{1}{\sum_k y_k \, e^{(a_k^T \nu - 1)}} \quad , \quad w = -\log\left(\sum_k y_k \, e^{(a_k^T \nu - 1)}\right)$$

$$\Rightarrow g(\nu) = \nu^T b - \log\left(\sum_k y_k \, e^{(a_k^T \nu - 1)}\right) - \frac{\sum_k y_k \, e^{(a_k^T \nu - 1)}}{\sum_k y_k \, e^{(a_k^T \nu - 1)}}$$

$$= \nu^T b - \log\left(\sum_k y_k \, e^{a_k^T \nu}\right) + 1 - 1$$

$\Rightarrow$ dual problem: $\max \quad \nu^T b - \log\left(\sum_k y_k \, e^{a_k^T \nu}\right)$

ok

Date Year Month Day

Subject

6.5

الف)

$$z_i = a_i^T x + v_i \Rightarrow v_i = z_i - a_i^T x$$

$$f_0 = \sum_i \log (P(v = v_i))$$

$$= \text{Const} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (z_i - a_i^T x)^2$$

$$z_{i+1} - z_i \leq \frac{\beta(y_{i+1} - y_i)}{\alpha} \quad \text{for } i=1 \text{ to } N-1$$

$$z_{i+1} - z_i \geq \frac{\alpha(y_{i+1} - y_i)}{\beta} \quad \text{for } i=1 \text{ to } N-1$$

$$\Rightarrow \min \quad \sum_i (z_i - a_i^T x)^2$$

$$\text{st:} \quad z_{i+1} - z_i \leq \frac{\beta(y_{i+1} - y_i)}{\alpha} \quad \text{for } i=1 \text{ to } N-1$$

$$z_{i+1} - z_i \geq \frac{\alpha(y_{i+1} - y_i)}{\beta} \quad \text{for } i=1 \text{ to } N-1$$