بسمه تعالی

تمرین ۱ بهینه‌سازی

نیم‌سال دوم تحصیلی ۹۹–۹۸

کیارش بنی‌هاشم ۹۶۱۰۹۹۶۳

مدرس: دکتر مجتبی تفاق

---

۱. $A6.30$

(آ) با توجه به این که تنها داده‌هایی که داریم مربوط به برد و باخت است، باید احتمال هر داده را حساب کنیم و سپس لگاریتم بگیریم و جمع بزنیم و بیشینه کنیم. (چون لگاریتم ضرب همان جمع لگاریتم هاست و لگاریتم صعودی است، معادل با بیشینه کردن احتمال وقوع داده هاست.). به این منظور، دقت کنید که

$$P(j,k,y) = P((-1)^{\frac{y-1}{2}}(a_j - a_k + v) > 0)$$

با توجه به متقارن بودن توزیع v، v و $-v$ و $v\,(-1)^{\frac{y-1}{2}}$ هم توزیع هستند و در نتیجه احتمال فوق برابر است با

$$P(v < (-1)^{\frac{y-1}{2}}(a_j - a_k)) = F((-1)^{\frac{y-1}{2}}(a_j - a_k)) = F((Aa)_i)$$

از طرفی

$$F(t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{2t}{\sigma}}}$$

پس

$$-log(P(v < (-1)^{\frac{y-1}{2}}(a_j - a_k))) = log(1+e^{-\frac{2(Aa)_i}{\sigma}})$$

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$g_i(a,\sigma) = log(1+e^{\frac{-2(Aa)_i}{\sigma}})$$

این تابع برای هر سیگمای ثابت، بر حسب t محدب است زیرا در $(x_1,x_2) \to log(\sum_{i=1}^{2} e^{x_i})$ که محدب است و $a \to 0, (Aa)_i$ هم آفین است. در نتیجه مساله به شکل زیر در می‌آید

$$minimize_a \quad \sum_i g_i(a,\sigma)$$
$$s.t. \quad 0 \le a \le 1$$

۲. $A7.23$

(آ) در مورد شرط دوم دقت کنید که این شرط معادل است با این که فاصله‌ی مرکزها از جمع شعاع‌ها کمترمساوی باشد یعنی

$$||c_i - c_j||_2 \le r_i + r_j$$

این شرط محدب است زیرا سمت راست که آفین است و سمت چپ هم محدب است چون نرم $l2$ محدب است و عبارت داخل نرم هم آفین است. شرط اول هم که به وضوح آفین است (از نظر محاسباتی، احتمالا سریعتر است که نقاطی که فیکس هستند را اصلا متغیر در نظر نگیریم. در این صورت اگر دو تاز از نقاطی که فیکس هستند شرط را نقض کنند که بدون solver هم مشخص می‌شود که مساله قابل حل نیست. برای شروطی که یکی از نقاط فیکس هستند هم هنوز شرط محدب است.) تابعی که می‌خواهیم بهیه کنیم هم در هر دو حالت محدب است زیرا هم مساحت متناسب با r^2 و محیط برابر با r است و هر دو تابع محدب‌اند. در نتیجه (شرط نامنفی بودن شعاع را هم می‌گذاریم چون در غیر این صورت ممکن است که محیط منفی بی‌نهایت تولید شود.)

$$minimize \quad f(r,c)$$
$$s.t. \quad ||c_i - c_j||_2 \le r_i + r_j (i,j) \in I$$
$$c_i = c_i^{fix}, \quad r_i = r_i^{fix} \quad i = 1,...,k$$

$$r_i \geq 0 \quad i = 1, ..., n$$

که f در حالت محیط، $2\pi \sum r_i$ و در حالت مساحت $\pi \sum r_i^2$ است.

(ب) همانطور که از نتیجه مشخص است، در حالتی که مجموع محیط را کمینه می‌کنیم، تعداد بیشتری از شعاع‌ها بسیار نزدیک ۰ شده‌اند، از طرفی بیشترین مقدار ممکن شعاع در این حالت بیشتر از حالت کمینه کردن مساحت است. در واقع این‌جا، دوباره همان پدیده‌ی sparsity را مشاهده می‌کنیم که $l1$ بیشتر از $l2$ علاقه به تولید جواب sparse دارد. چون کمینه کردن محیط و مساحت به ترتیب معادل با کمینه کردن نرم $l1$ و نرم $l2$ی شعاع‌ها هستند، این پدیده انتظار هم می‌رفت. در واقع با توجه به شکل تابع x^2، هر چه ورودی بزرگتر باشد، مشتق هم بزرگتر است و در نتیجه یک واحد کاهش، خیلی تابع هدف را کاهش می‌دهد. پس تمرکز بهینه‌سازی روی اعداد بزرگتر است که آن ها را کم کند و کم کردن اعداد کوچکتر، یعنی مثلا تبدیل ۱.۰ به ۰، خیلی مهم نیست. در حالی که در حالت محیط، این اولویت دیگر وجود ندارد و در نتیجه جواب sparseتری تولید می‌شود.

۳. $A14.7$

(آ) شرط دوم معادل است با این که

$$\nexists p : p \geq 0, 1^T p = 1, R^T p = 0 \tag{1}$$

علتش هم ساده است. اگر p شرایط جدید را داشته باشد شرایط قبلی را هم دارز زیرا $1 \neq 0 = 1^T 0$. اگر هم یک p شرایط قبلی را داشته باشد، $1^T p > 0$ و در نتیجه می‌توان با تعریف $p' = \frac{1}{1^T p} p$ به بردار p' رسید که $R^T p' = 0, 1^T p' = \frac{1^T p}{1^T p} = 1$.

تعریف کنید.

$$b \in R^{n+1}, \quad c = -e_{n+1}$$

و

$$R' = \begin{bmatrix} R & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت ۱ معادل است با

$$\nexists p : R'^T p + c = 0, p \geq 0$$

که طبق لم فارکاس معادل است با

$$\exists x' \in R^{n+1} : R' x \leq 0 \wedge c^T x' < 0$$

یا معادلا (به جای x، منفی x را بگیریم)

$$\exists x' \in R^{n+1} : R' x' \geq 0 \wedge c^T x' > 0$$

یا معادلا، اگر قرار دهیم $x' = [x, k]$،

$$\exists x \in R^n, k \in R : k < 0, Rx + k1 \geq 0$$

یا معادلا

$$\exists x \in R^n, k \in R : k > 0, Rx \geq k \tag{2}$$

که به وضوح معادل است با

$$\exists x \in R^n : Rx > 0 \tag{3}$$

زیرا ۲ که به وضوح ۳ را نتیجه می‌دهد. برعکسش هم با انتخاب $k = min(Rx)_i$ به دست می‌آید.

(ب) با توجه به بخش قبل یک استراتژی خفن وجود دارد اگر و تنها اگر شرط ۱ برقرار باشد یعنی p یافت نشود که

$$R^T p = 0, \quad p \geq 0, \sum p_i = 1$$

که شرط اول معادل است با

$$(R^Tp)_i = \sum_{j\neq i} -p_j + \lambda_i p_i = ۰ \iff -۱ + (\lambda_i + ۱)p_i = ۰ \iff p_i = \frac{۱}{۱+\lambda_i}$$

در نتیجه استراتژی خفن وجود دارد اگر و تنها اگر

$$\sum \frac{۱}{۱+\lambda_i} \neq ۱ \vee \exists i : \frac{۱}{۱+\lambda_i} < ۰$$

اما دقت کنید که $\lambda_i \geq ۰$ و در نتیجه شرط دوم برقرار نیست. در واقع $\lambda_i \geq ۰$ در صورت سوال ذکر نشده است، اما اگر برقرار نباشد، حکم غلط است چون ستون iام، همه‌ی درایه‌هایش منفی می‌شوند و در نتیجه می‌توان با پول منفی گذاشتن روی این ستون، همیشه برد. دقت کنید که از $\sum \frac{۱}{۱+\lambda_i} = ۱$ نمی‌توان به $\lambda_i \geq ۰$ رسید زیرا بدیهتا با توجه به پیوستگی مثال نقض دارد. کافیست یک λ_i را مثلا برابر با -۲ بگذاریم و ۴ تا λ_i را برابر با مثبت ۱.

۴. $A۱۴,۳۰$ ابتدا شرط‌های feasibility را بررسی می‌کنیم به وضوح برای این که جمع اعداد هر ستون از مقداری که داریم بیشتر نشوند، داریم

$$X^T ۱ \leq c^{init}$$

حال فرض کنید که پس از معاملات، از هر ارز به اندازه‌ی c داشته باشیم. طبیعتا شرط feasibiilty دوم یعنی این که از هر ارز به اندازه‌ی کافی داشته باشیم این است که

$$c \geq c^{req}$$

از طرفی دقت کنید که اگر معاملات را با X انجام دهیم، به مقدار $(X^T ۱)_i$ از ارز i از دست می‌دهیم و به مقدار

$$\sum_j X_{ji}/F_{ji} = div(X,F)۱$$

به دست می‌آوریم که منظور از $div(X,F)$، تقسیم درایه‌به‌درایه‌ی X بر F است. . پس

$$c = c^{init} + div(X,F)۱ - X^T ۱$$

برای تابعی که باید کمینه کنیم هم، دقت کنید که ارزش بردار c برابر است با $c^T k$ که k_i ارزش هر واحد از ارز i است. در نتیجه مساله به فرم زیر در می‌آید.

$$minimize \quad k^T(div(X,F)۱ - X^T ۱)$$

$$s.t. \quad c^{init} + div(X,F)۱ - X^T ۱ \geq c^{req}$$

$$c^{init} - X^T ۱ \geq ۰$$

$$X_{ij} \geq ۰ \quad \forall i,j$$

۵. $A۱۸,۲۱$

(آ) تابع $g(x) = max\{۰, x\}^۲$ را در نظر بگیرید. این تابع محدب است (در کتاب اشاره شده، همان pos_square است.) حال دقت کنید که

$$E_i(S_i) = \frac{k_i^{ext}}{۲} g(s - N_i) + \frac{k_i^{comp}}{۲} g(N_i - s)$$

بررسی این ادعا هم ساده است. اگر $s_i - N_i \geq ۰$، $g(N_i - s)$ ۰ است و $g(s - N_i)$، $(s - N_i)^۲$ است.
در صورتی که $s_i - N_i < ۰$ باشد هم که مشابه حالت قبل، این بار عبارت اول ۰ شده و عبارت دوم مقدار تابع را تولید می‌کند.
پس چون g محدب است و k_iها نامنفی‌اند $E_i(S_i)$ محدب است. در نتیجه مساله‌ی بهینه‌سازی به فرم زیر است.

$$minimize \quad \sum_i E_i(S_i)$$

$$s.t. \quad \sum s_i = W - \sum w_i$$

دقت کنید که w_iها متغیر نیستند.

(ب) با مشتق‌گیری از g، داریم

$$g'(x) = ۲\max\{x, ۰\}$$

دقت کنید که این تابع پیوسته است. در نتیجه g به طور پیوسته مشتق‌پذیر است. حال دقت کنید که در مساله‌ی اصلی، چون اصلا شرط نامساوی نداریم، slater برقرار است و duality gap ۰ است.

حال شروط KKT را به ترتیب صفحه‌ی ۲۴۳ بررسی می‌کنیم. شرط ۱ و ۳ و ۴ که وجود ندارند چون قیدنامساوی نداشتیم. برای ۲ شرط دیگر هم داریم

$$\sum s_i = W - \sum w_i$$

و ۰ بودن مشتق لاگرانژین که لاگرانژین برابر است با

$$\mathcal{L}(s, v) = \sum E_i(s_i) + v(w' - \sum s_i)$$

که $w' = W - \sum w_i$ در نتیجه با ۰ قرار دادن مشتق داریم.

$$t_i(s_i) - v = ۰$$

که

$$t_i(x) = \begin{cases} k_i^{ext}(x - N_i) & if \quad x \geq N_i \\ k_i^{comp}(x - N_i) & o.w. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\forall i : t_i(s_i) = v$$

نکته‌ی مهم در مورد t_i این است که علامت مشتق برای $s_i > N_i$ مثبت و برای $s_i < N_i$ منفی است. در نتیجه با توجه به علامت v، یکی از ۳ حالت زیر رخ می‌دهد.

i. $v > ۰$

$$v > ۰ \implies \forall i : s_i > N_i \implies t_i(s_i) = k_i^{ext}(s_i - N_i) \implies s_i = \frac{v}{k_i^{ext}} + N_i \implies v(\sum \frac{۱}{k_i^{ext}}) = w' - \sum N_i$$

در نتیجه با تعریف $a = w' - \sum N_i$، نتیجه می‌گیریم که $a > ۰$. دقت کنید که علامت a قبل از حل مساله‌ی بهینه‌سازی مشخص است. حال دقت کنید که در این حالت

$$v = \frac{a}{\sum \frac{۱}{k_i^{ext}}} \implies s_i = \frac{\frac{a}{k_i^{ext}}}{\sum \frac{۱}{k_{jext}}} + N_i$$

ii. $v < ۰$: به طور مشابه

$$s_i = \frac{\frac{a}{k_i^{int}}}{\sum \frac{۱}{k_{jint}}} + N_i$$

و به طور مشابه در این حالت نتیجه می‌گیریم که $a < ۰$.

iii. $v = ۰$: چون k_iها همه مثبتند،

$$s_i - N_i = ۰ \implies s_i = N_i \quad \implies a = ۰$$

در نتیجه چون در هر ۳ حالت، علامت v با علامت a یکسان بود، با توجه به علامت a، مشخص است که s_iها برابر با کدام‌یک از مقادیر شوند.