علیرضا درویشی - 96109674 - بهینه سازی محدب - تمرین 15

5.12

ابتدا مسئله را بدون جایگشت و با فرض $P=I$ و با نرم ℓ_1 حل می‌کنیم چون نسبت به داده‌های پرت، کم‌تر حساس است. سپس می‌توان چند کار انجام داد. یکی اینکه پیشبینی‌هایی که با داده‌های اصلی متفاوت هستند را به عنوان آن‌هایی که جابجا شده‌اند در نظر بگیریم و جابجا کنیم. یکی اینکه آن‌هایی که باقی‌مانده زیادی دارند را حذف کنیم و مدل را فیت کنیم و پیشبینی دوباره انجام دهیم.

می‌توانیم این کارها را به صورت بازگشتی انجام دهیم تا جایی که دیگر داده‌ی پرت شناسایی نکنیم.

13.3

$$E u_i^2 \le 1 \Rightarrow \operatorname{diag}(uu^T) \le 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{diag}\left[\sigma^2 F(I-GF)^{-1}(I-GF)^{-T}F^T\right] \le 1$$

$$E y_i^2 = (yy^T)_{ii} = \left(\sigma^2 (I-GF)^{-1}(I-GF)^{-T}\right)_{ii}$$

$$\Rightarrow \min \quad \sigma^2 \max_{i=1,\dots,n} \quad (I-GF)^{-1}(I-GF)^{-T}$$

$$\text{st:} \quad \operatorname{diag}\left(F(I-GF)^{-1}(I-GF)^{-T}\right) \le \frac{1}{\sigma^2}$$

اما این مسئله Convex نیست. برای حل این مشکل تغییر متغیر زیر را می‌دهیم.

$$X = F(I-GF)^{-1} \Rightarrow X(I-GF) = F \Rightarrow X = F + XGF \Rightarrow F = (I+XG)^{-1}X$$

از طرفی

$$I = (I-GF)(I-GF)^{-1} = (I-GF)^{-1} - GF(I-GF)^{-1}$$

$$\Rightarrow (I-GF)^{-1} = I + GX$$

پس :

$$\min \quad \sigma^2 \max_{i=1,\dots,n} \left((I + GX)(I+GX)^T \right)_{ii}$$

$$\text{st} \quad \operatorname{diag}(XX^T) \leq \frac{1}{\sigma^2}$$

1304

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{S_i}$$

$$\Rightarrow \min \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{S_i}$$

$$\text{st:} \quad \frac{1}{2} m S_{i+1}^2 + mgh_{i+1} = \frac{1}{2} m S_i^2 + mgh_i + n f_i - dC_D S_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_i + \frac{PT}{\eta} \leq F$$

$$f_i \geq 0$$

$$n f_0 = \frac{1}{2} m S_1^2$$

با وجود اینکه فرم مسئله محدب است اما چون در تساوی، مسئله خطی نیست، نمی‌توان از CVXPY برای حل مسئله استفاده کرد. با تغییر متغیر $Z_i = \sqrt{S_i}$ ، این مشکل برطرف می‌شود:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{N} d/\sqrt{Z_i}$$

$$\text{st} \quad \frac{1}{2} m Z_{i+1} + mgh_{i+1} = \frac{1}{2} m Z_i + mgh_i + n f_i - dC_D Z_i$$

$$\sum f_i + \frac{P}{\eta} \sum \frac{d}{\sqrt{Z_i}} \leq F$$

$$f_i \geq 0$$

$$n f_0 = \frac{1}{2} m Z_1$$

a) اگر $x+tv$ انتخاب کنیم، چون $1^Tv=0$ پس در شرط صدق می‌کند و تابع هدف را بی‌کران زیاد می‌کند برای $t>0$.

b)

$$\min \quad -\sum P_j \log y_j$$

$$\text{st} \quad y = R^T x$$

$$1^T x = 1$$

$$\Rightarrow L(x,y,v,\lambda) = -\sum P_j \log y_j + v^T(y - R^T x) + \lambda(1^T x - 1)$$

که اگر $Rv = \lambda 1$ باشد، کراندار از پایین است بعد از کمینه کردن روی x.

حال به ازای $y_j = \frac{P_j}{v_j}$، L کمینه می‌شود:

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = -\frac{P_j}{y_j} + v_j = 0 \Rightarrow y_j = \frac{P_j}{v_j}, \quad v_j > 0$$

پس:

$$g(v,\lambda) = -\sum P_j \log\left(\frac{P_j}{v_j}\right) + 1 - \lambda$$

$$\text{st:} \quad Rv = 1\lambda$$

14.10 برای اینکه محدب بودن مسئله از بین نرود، بتوانیم از cvxpy استفاده کنیم، از متغیرهای کمکی S^+ و S^- کمک می‌گیریم:

$$B_t - E_t + I_t = S_t^+ - S_t^-, \quad S^+ \geq 0, \quad S^- \geq 0$$

$$, B_{t+1} = (1+r_+) S_t^+ - (1+r_-) S_t^-$$

پس:

$$\min \quad B_0 + \sum P_i x_i$$

$$\text{st} \quad Ax = I$$

$$x \geq 0, \quad B_0 \geq 0, \quad S^+ \geq 0, \quad S^- \geq 0$$

$$B_1 = (1+r_+) B_0$$

$$B_T - E_T + I_T = 0$$

$$B_{t+1} = (1+r_+) S_t^+ - (1+r_-) S_t^-, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$B_t - E_t + I_t = S_t^+ - S_t^-$$