علیرضا درویشی ۹۶۱۰۹۶۷۴
تمرین سری اول
بهینه سازی محدب بهار ۹۸-۹۹
۹۸/۱۲/۱

۲.۷

$$(x-a)^T(x-a) \le (x-b)^T(x-b)$$
$$x^Tx - 2a^Tx + a^Ta \le x^Tx - 2b^Tx + b^Tb$$
$$2(b-a)^Tx \le b^Tb - a^Ta$$

۲.۸
الف)

$$s_1 = y_{11}a_1 + y_{12}a_2 \ , \ s_2 = y_{21}a_1 + y_{22}a_2$$
$$s_3 = ts_1 + (1-t)s_2 \ , \ 0 \le t \le 1$$
$$s_3 = (ty_{11} + (1-t)y_{21})a_1 + (ty_{12} + (1-t)y_{22})a_2$$
$$-1 \le y_{11} \le 1 \ , \ -1 \le y_{21} \le 1 \Rightarrow -t \le ty_{11} \le t \ , \ -(1-t) \le (1-t)y_{21} \le 1-t \Rightarrow -1 \le ty_{11} + (1-t)y_{21} \le 1$$

به طریق مشابه برای y_{12} و y_{22} هم همین نامساوی را می‌توان اثبات کرد. پس:

$$s_3 \in S \Rightarrow S \ is \ convex$$

اما از طرفی دیگر می توان نشان داد S پلی‌هدرا هم هست:
اگر a_1 و a_2 موازی نباشند:
از دو بردار a_1 و a_2 ، با استفاده از گرام اشمیت پایه ای برای فضای R^n می‌سازیم:

$$R^n = span\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

سپس می‌توانیم هر بردار دلخواه $x \in R^n$ را به صورت ترکیب خطی از a_i ها بنویسیم:

$$x = \sum x_i a_i$$

حال داریم:

$$S = \{x | Ax \le b\}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \ , b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که این به شکل مورد بحث است.
ب)

$$S = \{x | Ix \le 0, \ Fx = g\}$$
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \end{pmatrix} \ , g = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

پ)
به راحتی می‌توان دید که مجموعه‌ی S در ۲ بعد ربع دایره‌ی مثبت است که پلی‌هدرا نیست.
ت)
می‌توان مجموعه‌ی S را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$S = \{x \in R^n | Ax \le b\}$$
$$A = \begin{pmatrix} -I_n \\ I_n \end{pmatrix} \ , b = \begin{pmatrix} 0_n \\ 1_n \end{pmatrix}$$

۲.۹

الف)

$$\| x - x_0 \| \leq \| x - x_i \|$$
$$\| x \|^2 + \| x_0 \|^2 - 2x_0^T x \leq \| x \|^2 + \| x_i \|^2 - 2x_i^T x$$
$$2(x_i - x_0)^T x \leq x_i^T x_i - x_0^T x_0$$
$$\Rightarrow V = \{x \in R^n | Ax \leq b\}$$
$$A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \cdot \\ A_K^T \end{pmatrix} , A_i = 2(x_i - x_0) \ , \ b_i = x_i^T x_i - x_0^T x_0$$

ب)

با فرض مستقل بودن سطرهای ماتریس A داریم:

$$A_i = 2(x_i - x_0) \Rightarrow x_i = x_0 + \frac{A_i}{2} \Rightarrow x_i^T x_i = x_0^T x_0 + A_i x_0 + \frac{A_i^T A_i}{4}$$
$$b_i = x_i^T x_i - x_0^T x_0$$
$$\Rightarrow b_i - \frac{A_i^T A_i}{4} = A_i^T x_0$$

۲.۱۳

باتوجه به فرض مسئله $XX^T \geq 0$ و نشان میدهیم rank ترکیب خطی ماتریس های نیمه مثبت معین با rank برابر با k حداقل برابر با k است.

برای ماتریس A و B نیمه مثبت معین با rank برابر با k داریم:

$$x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx = 0 \ , \ x^T Ax \geq 0 \ , \ x^T Bx \geq 0 \Rightarrow x^T Ax = x^T Bx = 0$$
$$\Rightarrow null(A + B) \in null(A) \cap null(B) \Rightarrow rank(A + B) \geq k$$
$$\Rightarrow conic\ hull : \{X | X \in R^{n \times n}, X \geq 0, k \leq rank(X)\}$$

۲.۱۵

الف)

محدب است

چون اشتراک دو مجموعه‌ی محدب محدب است و مجموعه ی اول که محدب است. مجموعه ی دوم هم به راحتی می‌توان دید محدب است چون پلی‌هدرون است.

ب)

محدب است.

چون اشتراک نیم صفحه با سیمپلکس است.

ج)

محدب است.

با نوشتن مسئله به شکل زیر می‌توان دید که مجموعه یک نیم صفحه است:

$$\sum p_i(|x|^3 - \alpha|x|) \leq 0$$

د)

محدب است.

به طور مشابه با قسمت قبل:

$$\sum p_i a_i^2 \leq 0$$

ه)

محدب است.

به طور مشابه با قسمت قبلی:

$$\sum p_i a_i^2 \geq 0$$

و)

محدب نیست و مثال نقض می توان زد.

اگر دو تابع توزیع داشته باشیم که هرکدام در یک نقطه برابر با یک باشند، به وضوح واریانس هرکدام برابر با صفر است. اما ترکیب این دو تابع توزیع واریانس غیر صفر دارد که می تواند در شرط مورد نظر صدق نکند.