علیرضا درویشی 96109674 - تمرین 3 - بهینه محدب

1.3

$$\Gamma(x) = \psi(\phi(x)) = \psi\left(\frac{Ax+b}{c^T x+d}\right) = \frac{E\,\frac{Ax+b}{c^Tx+d}+f}{g^T\frac{Ax+b}{c^Tx+d}+h} = \frac{E(Ax+b)+f(c^Tx+d)}{g^T(Ax+b)+h(c^Tx+d)}$$

$$= \frac{(EA+fc^T)x+(Eb+fd)}{(g^TA+hc^T)x+(g^Tb+hd)} \Rightarrow \boxed{M = \begin{bmatrix} EA+fc^T & Eb+fd \\ g^TA+hc^T & g^Tb+hd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & f \\ g^T & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}}$$

1.4

$$K^* = \left\{(u,v,w) \mid xu+yv+zw \geq 0,\ \text{for all } (x,y,z),\ y>0,\ ye^{\frac{x}{y}} \leq z\right\}$$

z از بالا بی‌کران است. پس $w \geq 0$ است

x از پایین بی‌کران است. پس $u \leq 0$ است.

حال:

$$\left.\begin{array}{l} xu+yv+zw \geq 0 \\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow v \geq \frac{1}{y}\left[-xu-zw\right] = -u\frac{x}{y} - w\frac{z}{y}$$

$$\Rightarrow v \geq \max_{(\frac{x}{y},\frac{z}{y})}\left[-u\frac{x}{y}-w\frac{z}{y}\right],\quad e^{\frac{x}{y}} \leq \frac{z}{y},\quad w \geq 0,\ u \leq 0$$

$$\Rightarrow v \geq \max_{(\frac{x}{y})}\left[-u\frac{x}{y}-we^{\frac{x}{y}}\right] \Rightarrow -u-we^{\frac{x}{y}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln\left(-\frac{u}{w}\right),\ e^{\frac{x}{y}} = -\frac{u}{w}$$

$$\Rightarrow v \geq \left[-u\ln\left(-\frac{u}{w}\right) - w\left(-\frac{u}{w}\right)\right] \Rightarrow v \geq u - u\ln\left(-\frac{u}{w}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{K^* = \left\{(u,v,w) \mid u \leq 0,\ w \geq 0,\ v \geq u - u\ln\left(-\frac{u}{w}\right)\right\}}$$

الف)

$C\cap D$: Cone: $x\in C\cap D \Rightarrow \begin{cases} x\in C \Rightarrow \theta x\in C \\ x\in D \Rightarrow \theta x\in D \\ \theta\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta x\in C\cap D \\ \theta\geq 0\end{cases} \Rightarrow C\cap D$ is Cone ✓

Convex: $x\in C\cap D \Rightarrow x\in C, x\in D$, $y\in C\cap D \Rightarrow y\in C, y\in D$ $\Rightarrow \begin{cases}\theta x+(1-\theta)y\in C \\ \theta x+(1-\theta)y\in D \\ 0\leq\theta\leq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta x+(1-\theta)y\in C\cap D \\ 0\leq\theta\leq 1\end{cases} \Rightarrow C\cap D$ is Convex ✓

C^*+D^*:

Cone: $x\in C^*+D^* \Rightarrow x=u+v, u\in C^*, v\in D^*$, C^* is Cone, D^* is Cone $\Rightarrow \begin{cases}\theta u\in C^* \\ \theta v\in D^*\end{cases} \Rightarrow \theta x=\theta(u+v)=\theta u+\theta v\in C^*+D^*$

$\Rightarrow C^*+D^*$ is Cone ✓

Convex: $x\in C^*+D^* \Rightarrow x=u+v,\ u\in C^*, v\in D^*$
$y\in C^*+D^* \Rightarrow y=r+s,\ r\in C^*, s\in D^*$
C^*, D^* is Convex
$\Rightarrow \begin{cases}\theta x+(1-\theta)y=\underbrace{[\theta u+(1-\theta)r]}_{\in C^*}+\underbrace{[\theta v+(1-\theta)s]}_{\in D^*} \\ 0\leq\theta\leq 1\end{cases}$

$\in C^*+D^* \Rightarrow C^*+D^*$ is Convex

ب)

$x\in C^*+D^* \Rightarrow x=u+v,\ u\in C^*, v\in D^* \Rightarrow y^Tu\geq 0$ for all $y\in C$, $y^Tv\geq 0$ for all $y\in D$

$\Rightarrow y^T(u+v)=y^Tu+y^Tv\geq 0$ for all $y\in C\cap D \Rightarrow (u+v)\in (C\cap D)^* \Rightarrow x\in (C\cap D)^*$

$\Rightarrow C^*+D^*\subseteq (C\cap D)^*$ ✓

ج)

$x\in (C^*+D^*)^* \Rightarrow y^Tx\geq 0$ for all $y\in C^*+D^* \Rightarrow (u+v)^Tx\geq 0$ for all $u\in C^*, v\in D^*$

$u=0 \Rightarrow v^Tx\geq 0$ for all $v\in D^* \Rightarrow x\in (D^*)^*=D$
$v=0 \Rightarrow u^Tx\geq 0$ for all $u\in C^* \Rightarrow x\in (C^*)^*=C$
$\Rightarrow x\in C\cap D \Rightarrow (C^*+D^*)^*\subseteq C\cap D$

از طرفی با توجه به تعریف Dual :

$K_1\subseteq K_2 \Rightarrow K_1^*\supseteq K_2^*$

$\Rightarrow (C\cap D)^* \subseteq (C^*+D^*)^{**}=C^*+D^* \overset{(ب)}{\Rightarrow} C^*+D^*=(C\cap D)^*$

(۲

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} \rightarrow S_i = \{x \mid a_i^T x \geq 0\} \rightarrow V = \bigcap_i S_i$$

$$\rightarrow V^* = S_1^* + S_2^* + \dots + S_m^*$$

$$S_i^* = \{x \mid x = \theta_i a_i ,\ \theta_i \geq 0\} \rightarrow V^* = \{\sum_i \theta_i a_i \mid \theta_i \geq 0\}$$

$$\rightarrow V^* = \{A^T v \mid v \geq 0\} \checkmark$$

1.6

الف) نشان دهید C° محدب است.

به ازای $y_1 \in C^\circ$, $y_2 \in C^\circ$, $0 \le \theta \le 1$

$y_3 = \theta y_1 + (1-\theta) y_2 \to$ for any x in C: $y_3^T x = \theta y_1^T x + (1-\theta) y_2^T x$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \in C^\circ \Rightarrow y_1^T x \le 1 \Rightarrow \theta y_1^T x \le \theta \\ y_2 \in C^\circ \Rightarrow y_2^T x \le 1 \Rightarrow (1-\theta) y_2^T x \le 1-\theta \end{array}\right\} \Rightarrow y_3^T x \le 1 \Rightarrow y_3 \in C^\circ \Rightarrow C^\circ \text{ is convex}$$

ب) فرض کنیم $y \in C^\circ$ است. حال:

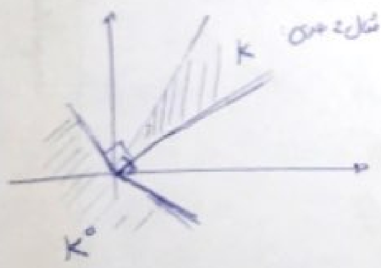
$y^T x \le 1$ for all $x \in C$

برای که $x \in C$ می‌دانیم $\theta x \in C$ برای $\theta \ge 0$. پس:

$y^T x \le 1$, $y^T(\theta x) \le 1 \xrightarrow{\theta \ge 0} \theta(y^T x) \le 1$, $\theta \ge 0 \Rightarrow y^T x \le 0$

$\to C^\circ_{cone} = \{y \mid y^T x \le 0\}$ (for all x in C) $\to$

حال نشان می‌دهیم C°_{cone} خود مخروط است:



شکل دو بعدی

$y \in C^\circ_{cone} \Rightarrow y^T x \le 0$ for all x in C

$\Rightarrow \theta \ge 0 \to (\theta y^T) x \le 0 \to \theta y^T \in C^\circ_{cone}$

ج)

جواب: گوی واحد نرم دوگان است.

$\|z\|_* = \sup\{z^T x \mid \|x\| \le 1\}$

$C^\circ = \{y \mid y^T x \le 1$ for all $x : \|x\| \le 1\}$

گوی واحد نرم دوگان: $B_{1*} = \{y \mid \|y\|_* \le 1\} = \{y \mid \sup\{z^T x \mid \|x\| \le 1\} \le 1\} = \{y \mid$ for all $x, \|x\| \le 1, y^T x \le 1\}$

$= C^\circ$ ✓

2)

$C=\{x \mid \sum x_i = 1,\ x_i \geq 0\}$

$C^\circ=\{y \mid \sum x_i y_i \leq 1,\ \sum x_i = 1,\ x_i \geq 0\}$

می‌توان قید بالا را به ازای هر $x_i=1$ جداگانه نوشت. در این صورت داریم، $y_i \leq 1$

در صورتی که این n شرط برقرار باشند، به وضوح برای تمامی مقادیر دیگر x هم برقرار خواهد بود چون:

$y_i \leq 1 \Rightarrow x_i y_i \leq x_i \Rightarrow \sum x_i y_i \leq \sum x_i = 1$ ✓

$\Rightarrow \boxed{C^\circ=\{y \mid y_i \leq 1\}}$

ب)

$x_0 \in C$

به ازای هر $z \in C^\circ$ داریم. $z^T x \leq 1$ for all $x \in C$ است. پس $z^T x_0 \leq 1$ است.

پس $x_0 \in C^{\circ\circ}$ است. پس $C \subset C^{\circ\circ}$ است.

حال یک x_0 خارج از C انتخاب می‌کنیم. $x_0 \notin C$. نشان می‌دهیم این x_0 در $C^{\circ\circ}$ هم نیست.

چون C بسته و محدب و ناتهی است، یک صفحه‌ی جدا کننده بین x_0 و C وجود دارد:

$a^T z < b < a^T x_0$ for all $z \in C$

و چون $0 \in C$ است: $0<b$

پس: $\frac{a^T}{b} x < 1 < \frac{a^T}{b} x_0$ for all $x \in C$

$\frac{a^T}{b} x < 1 \Rightarrow \frac{a^T}{b} \in C^\circ$

$1 < \frac{a^T}{b} x_0 \Rightarrow x \notin C^{\circ\circ} \Rightarrow C^{\circ\circ} \subseteq C \rightarrow C^{\circ\circ} = C$ ✓

1.7

الف)

$K = \{0\} \to K^* = ?$

هر برداری به شکل $x \in R^2$ را در نظر بگیرید.

$x^T 0 = 0 \geq 0$

پس:

$K^* = R^2$

ب)

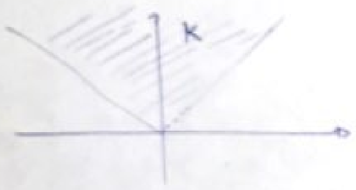
$K = R^2 \to K^* = ?$

هر بردار غیر از بردار ۰ در R^2 را که در نظر بگیریم.

$$\left.\begin{matrix} x \in R^2 \\ -x \in R^2 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\} \quad -x^T x < 0 \Rightarrow x \notin K^* \Rightarrow K^* = \{0\}$$

ج)

$K = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\} \to K^* = ?$



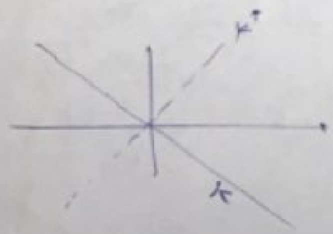
به وضوح هر بردار داخل K ، ضرب داخلی بزرگتر از ۰ با هر بردار دیگر داخل K دارد چون زاویه راس K ، ۹۰ است. به ازای هر بردار خارج از K هم می توان یک بردار داخل K پیدا کرد که ضرب داخلی آن منفی شود.

پس:

$K^* = K$

د)

$K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\} \to K^* = ?$



تنها نقاطی از $x \in R^2$ که ضرب داخلی بزرگتر یا مساوی با نقاط عضو K دارند ، خط عمود بر خط K است.

$K^* = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$