علیرضا درویشی - 96109674 - تمرین دوم - بهینه محدب

2.16

نشان می‌دهیم به ازای هر دو نقطه‌ی $s_1 \in S$ ، $s_2 \in S$ ، نقاط بین s_1, s_2 هم در S است:

$$s_1 = (x_1, y_{11} + y_{12}), \quad s_2 = (x_2, y_{21} + y_{22})$$

$$0 \le t \le 1 \to s_3 = t s_1 + (1-t) s_2 = (t x_1 + (1-t) x_2, \; t y_{11} + t y_{12} + (1-t) y_{21} + (1-t) y_{22})$$

$$= (t x_1 + (1-t) x_2, (t y_{11} + (1-t) y_{21}) + (t y_{12} + (1-t) y_{22}))$$

و طبق فرض:

$$\left.\begin{array}{l} (t x_1 + (1-t) x_2, t y_{11} + (1-t) y_{21}) \in S_1 \\ (t x_1 + (1-t) x_2, t y_{12} + (1-t) y_{22}) \in S_2 \end{array}\right\} \to s_3 \in S \checkmark$$

2.18

$$Q = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix} \to Q \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ c^T x + d \end{pmatrix}$$

$$P(x,t) = \frac{x}{t}, \quad P^{-1}(x) = \{ t(x,1) \mid t > 0 \}$$

$$\to f(x) = P(Q(P^{-1}(x))) \to P(Q(P^{-1}(x))) = f^{-1}(x)$$

2.19

الف)

$$f^{-1}(C) = \left\{ x \mid g^T \frac{(Ax+b)}{c^T x + d} \le h, \; c^T x + d > 0 \right\}$$

$$= \{ x \mid g^T A x + g^T b \le h c^T x + hd, \; c^T x + d > 0 \}$$

$$= \{ x \mid (g^T A - h c^T) x \le hd - g^T b, \; c^T x + d > 0 \}$$

$$= \{ x \mid (A^T g - hc)^T x \le hd - g^T b, \; c^T x + d > 0 \} \to$$ اشتراک دامنه‌ی f با یک نیم‌فضا

ب)

$$f^{-1}(C) = \left\{x \;\middle|\; G\frac{(Ax+b)}{C^Tx+d} \le h,\ C^Tx+d>0\right\}$$

$$= \{x \mid GAx + Gb \le hC^Tx + hd,\ C^Tx+d>0\}$$

$$= \{x \mid (GA - hC^T)x \le hd - Gb,\ C^Tx+d>0\} \longrightarrow$$ اشتراک دامنه f با یک پلی هدرا

ج)

$$f^{-1}(C) = \left\{x \;\middle|\; \frac{(Ax+b)^T}{C^Tx+d} P^{-1} \frac{(Ax+b)}{C^Tx+d} \le 1,\ C^Tx+d>0\right\}$$

$$= \{x \mid (Ax+b)^T P^{-1}(Ax+b) \le (C^Tx+d)^2,\ C^Tx+d>0\}$$

$$= \{x \mid x^TA^TP^{-1}Ax + b^TP^{-1}b + 2b^TP^{-1}Ax \le x^TCC^Tx + 2dC^Tx + d^2,\ C^Tx+d>0\}$$

$$= \{x \mid x^TQx + 2q^Tx \le r,\ C^Tx+d>0\},\quad Q = A^TP^{-1}A - CC^T,\quad q^T = b^TP^{-1}A - dC^T,\quad r = d^2 - b^TP^{-1}b$$

د)

$$f^{-1}(C) = \left\{x \;\middle|\; \frac{(Ax+b)_1}{C^Tx+b}A_1 + \dots \le B\right\}$$

$$(Ax+b)_i = a_i^Tx + b_i \to f^{-1}(C) = \left\{x \;\middle|\; \sum (a_i^Tx + b_i)A_i \le B(C^Tx+b)\right\}$$

$$\to f^{-1}(C) = \left\{x \;\middle|\; \sum G_ix_i \le H,\ C^Tx+d>0\right\},\quad G_i = \sum_j a_{ji}A_j,\quad H = dB - \sum b_iA_i$$

اشتراک دامنه f، همان شکل اول است.

Scanned with CamScanner

الف) اگر $x\le y\ ,\ u\le v \Rightarrow x+u\le v+y$

$$\left.\begin{array}{l} x\le y \Rightarrow y-x\in K\\ u\le v\Rightarrow v-u\in K\end{array}\right\} \Rightarrow (y-x)+(v-u)\in K \Rightarrow (y+v)-(x+u)\in K \Rightarrow x+u\le y+v$$

ب) اگر $x\le y\ ,\ y\le z \Rightarrow x\le z$

$$\left.\begin{array}{l} x\le y \Rightarrow y-x\in K\\ y\le z\Rightarrow z-y\in K\end{array}\right\} \Rightarrow (z-y)+(y-x)\in K \Rightarrow z-x\in K \Rightarrow x\le z$$

ج) اگر $x\le y\ ,\ \alpha\ge 0 \Rightarrow \alpha x\le \alpha y$

$$\left.\begin{array}{l} x\le y \Rightarrow y-x\in K\\ \alpha\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(y-x)\in K \Rightarrow \alpha y-\alpha x\in K \Rightarrow \alpha x\le \alpha y$$

د) $x\le x$:

$$\left.\begin{array}{l} x-x=0\\ 0\in K\end{array}\right\} \Rightarrow x\le x$$

هـ) اگر $x\le y\ ,\ y\le x \Rightarrow x=y$.

$$\left.\begin{array}{l} x\le y \Rightarrow y-x\in K\\ y\le x\Rightarrow x-y\in K\end{array}\right\} \Rightarrow y-x=-(x-y) \Rightarrow y-x=0 \Rightarrow x=y$$

و) اگر $x_i\le y_i\ ,\ x_i\to x\ ,\ y_i\to y \Rightarrow x\le y$:

$$\left.\begin{array}{l} x_i\le y_i \Rightarrow y_i-x_i\in K\\ K \text{ بسته است}\end{array}\right\} \Rightarrow y-x\in K \Rightarrow x\le y$$

الف) اگر $x<y \Rightarrow x\le y$

$x<y \Rightarrow y-x\in \operatorname{int} K \Rightarrow y-x\in K \Rightarrow x\le y$

ب) اگر $x<y\ ,\ u\le v \Rightarrow x+u<y+v$.

$$\left.\begin{array}{l} y-x\in \operatorname{int} K \Rightarrow (y-x)+z\in K \ \text{، برای } z \text{ کوچک}\\ v-u\in K\end{array}\right\} \Rightarrow (y-x)+z+(u-v)\in K \ \text{، } z \text{ کوچک}$$

$$\Rightarrow x+v < u+y$$

ج) اگر $x<y$, $\alpha>0$ $\Rightarrow$ $\alpha x<\alpha y$.

$y-x\in \text{int}\, k \Rightarrow y-x+z\in k$

$\Rightarrow \alpha(y-x+z)\in k \Rightarrow \alpha y-\alpha x+z'\in k \Rightarrow \alpha x<\alpha y$

د) $x \nless x$

$0\notin \text{int}\, k$

هـ) اگر $x<y$ ⟸ برای u,v دلخواه که $u<v$ داریم $x+u<y+v$

طبق مورد دیگر $y-x\in \text{int}\, k \Rightarrow (y-x)+(v-u)\in \text{int} \Rightarrow$

2.37 الف) مجموعه‌ی معرف بسته است چون اشتراک تعداد زیادی نیم فضای بسته است و به وضوح یک cone است

ب) فرض کنید $x_i=\sum_{m+n=i+1} Y_{mn}$ برای $Y\succeq 0$ می‌توان دید

$$P(t)=x_1+x_2t+\dots+x_{2k+1}t^{2k}=\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{m+n=i+1} Y_{mn}t^{i-1}=\sum_{m,n=1}^{k+1} Y_{mn}t^{m+n-2}=\sum_{m,n=1}^{k+1} Y_{mn}t^{m-1}t^{n-1}$$

$$=v^T Y v$$

که $v=(1,t,\dots,t^k)$ پس $P(t)\geq 0$

برعکس فرض کنید $x\in k_{p.c}$ پس

$P(t)=r(t)^2+s(t)^2 : r(t)=a_1+a_2t+\dots+a_{k+1}t^k , s(t)=b_1+\dots+b_{k+1}t^k$

ضرایب t^{i-1} در $r(t)^2+s(t)^2$, $\sum_{m+n=i+1}(a_ma_n+b_mb_n)$ است. پس

$$x_i=\sum_{m+n=i+1}(a_ma_n+b_mb_n)=\sum_{m+n=i+1} Y_{mn}$$ برای $Y=aa^T+bb^T$

ج) $Z \in K^*_{pol}$ است اگر و فقط اگر $x^T Z \geq 0$ برای همه $x \in K_{pol}$

با توجه به بخش قبل این معادل است با این شرط که $Y \succeq 0$ برای همه Y ها

$$\sum_{i=1}^{2k-1} Z_i \sum_{m+n=i+1} Y_{mn} = \sum_{m,n=1}^{k} Y_{mn} Z_{m+n-1} = \mathrm{tr}(Y H(z)) \geq 0 \rightarrow H(z) \succeq 0$$

Scanned with CamScanner