HW13

May 31, 2020

1 HW13

1.1 Alireza Darvishi 96109674

[1]:
```
import numpy as np
import cvxpy as cp
import matplotlib.pyplot as plt
```

1.1.1 A14.31. b

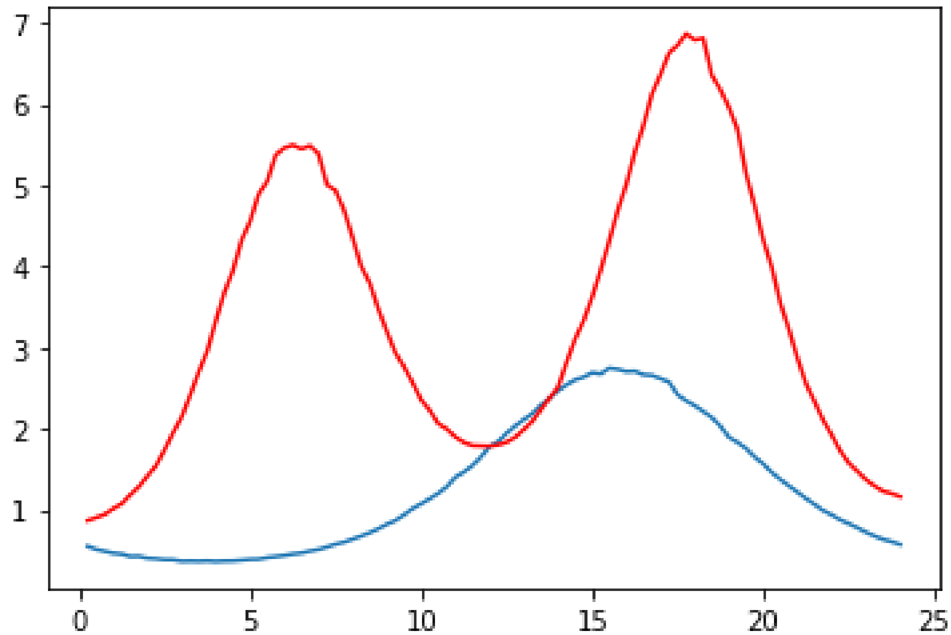
[2]:
```
b = np.array([400, 80, 400, 200, 400, 400, 80, 400, 100, 500])
v = np.array([500, 100, 500, 200, 700, 300, 120, 300, 150, 600])
n = 10
L = 4
rho_l = 0.2
rho_s = 0.3
C = 2300

s = cp.Variable(n)
g = cp.multiply( s , (v - b) / v )
N_l = cp.sum(g[:L])
N_s = cp.sum(g[L:])
base_constraints = [s >= 0,s <= v,cp.sum(s) == C ]
objective1 = cp.Minimize(rho_l*N_l+rho_s*N_s)
objective2 = cp.Minimize(rho_s*cp.pos(N_s+N_l))
objective3 = cp.Minimize(rho_l*cp.pos(N_s+N_l))
objective4 = cp.Minimize(0)

problem1 = cp.Problem(objective1,base_constraints+[N_l>=0 , N_s>= 0])
problem2 = cp.Problem(objective2,base_constraints+[N_l<=0 , N_s>= 0])
problem3 = cp.Problem(objective3,base_constraints+[N_l>=0 , N_s<= 0])
problem4 = cp.Problem(objective4,base_constraints+[N_l<=0 , N_s<= 0])

(t1,t2,t3,t4)=(problem1.solve(),problem2.solve(),problem3.solve(),problem4.
↪solve())
```

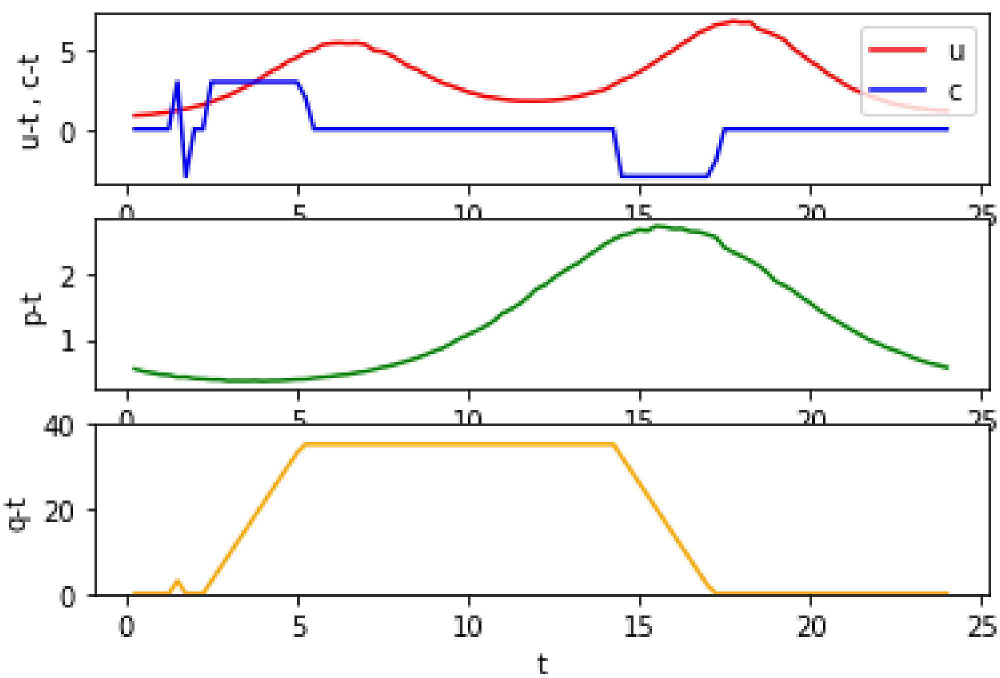
```
idx=np.argmin((t1,t2,t3,t4))
if(idx==0):
    problem1.solve()
elif(idx==1):
    problem2.solve()
elif(idx==2):
    problem3.solve()
else:
    problem4.solve()
print("best value is:",min((t1,t2,t3,t4)))
print("best s is:",np.round(s.value,2))
```

```
best value is: 16.000000002581334
best s is: [419.43  61.14 419.43 200.     0.   300.     0.   300.     0.   600.
]
```

1.1.2 A17.9. b

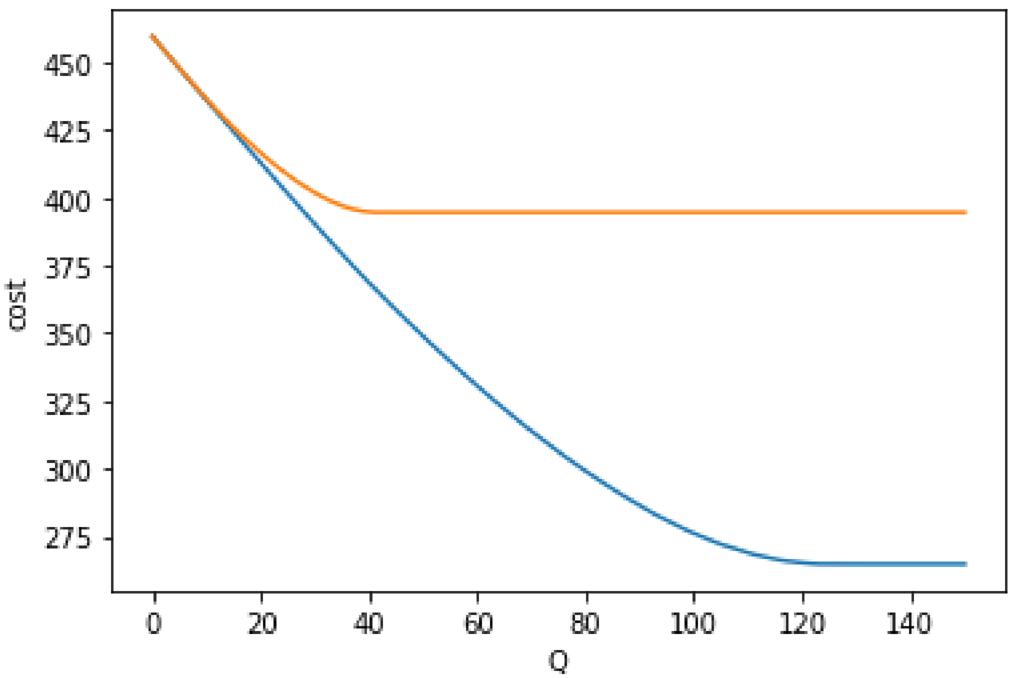
[3]:
```
from storage_tradeoff_data import *
c= cp.Variable(T)
objective = cp.Minimize(p.T * (u.reshape(T,)+c))
Q = cp.Parameter(value = 35)
C = cp.Parameter(value = 3)
D= cp.Parameter(value = 3)
constraint = [-D*np.ones(T)<=c , c<= C*np.ones(T), cp.cumsum(c)<=Q*np.ones(T),␣
↪0<=cp.cumsum(c) , cp.sum(c)==0 ]
problem = cp.Problem(objective,constraint)
problem.solve()

plt.figure(1)
ts = np.linspace(1, T, num=T).reshape(T,1)/4
plt.subplot(3,1,1)
plt.plot(ts, u, 'r');
plt.plot(ts, c.value, 'b');
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('u-t , c-t')
plt.legend(['u','c'])
plt.subplot(3,1,2)
plt.plot(ts, p, 'g');
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('p-t')
plt.subplot(3,1,3)
plt.plot(ts, cp.cumsum(c).value, 'orange');
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('q-t')
plt.ylim((0, 40));
```





[4]:
```
Qs=np.linspace(0 , 150 , 151)
values = np.zeros((151 , 2))
for q in Qs:
```

```
    C.value = 3
    D.value = 3
    Q.value = q
    problem.solve()
    values[int(q) , 0]= problem.value
    C.value = 1
    D.value = 1
    problem.solve()
    values[int(q) , 1]= problem.value
plt.plot(Qs,values[:,0],Qs , values[:,1]);
plt.ylabel("cost");
plt.xlabel("Q");
```



علیرضا درویشی - 96109671 - تمرین 13 - بهینه سازی محدب

5.23) از تابع Perspective برای $a_i x_i$ استفاده می کنیم

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} P(x_i, t_i) - b \right\|_2 = f_0(x_i, t_i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min & \left\| \sum P(x_i, t_i) - b \right\|_2 \\ st: & \| P_i x_i + q_i \|_2 \leq 1 \end{cases}$$

قیدهای مسئله محدب هستند پس مشکلی نیست

تابع هدف هم نرم یک تابع affine است و از $P(x_i, t_i)$ ، تابع P هم Convex است.

پس تابع هدف هم ~~...~~ Convex است

10.2)

a)
$$f(u,v) = (u^T, v^T) \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u^T\ v^T) \begin{pmatrix} Au + Bv \\ B^T u + Cv \end{pmatrix} = u^T A u + u^T B v + v^T B^T u + v^T C v$$

$$\Rightarrow f(u,v) = u^T A u + 2u^T B v + v^T C v$$

$$\nabla_u f(u,v) = 2Au + 2Bv = 0 \Rightarrow u = -A^{-1} B v \ , \ \nabla_u^2 f(u,v) = A$$

اگر f روی u کمینه شود، $A \succ 0$ است. پس:

$$g(v) = v^T B^T A^{-T} A A^{-1} B v - 2 v^T B^T A^{-T} B v + v^T C v$$

$$g(v) = v^T (C - B^T A^{-1} B) v = \boxed{v^T S v}$$

Scanned with CamScanner

b)

- اگر $X>0$:

پس $f(u,v)>0$ است. پس $f(u,0)>0$ که نتیجه می‌دهد $A>0$.

از طرفی دیگر $g(v)=\min_u f(u,v)$ پس $g(v)>0$ برای v ناصفر پس $S>0$

اگر $A>0$, $S>0$:

از بخش قبل دیدیم.

$f(u,v) \geq g(v) = v^T S v > 0 \Rightarrow A>0$ ✓

- $A>0$ پس : $f(u,v) \geq g(v)$

حال اگر $X \geq 0$ ، پس $f(u,v) \geq 0$ برای تمام u,v ها. پس $g(v)=\inf_u f(u,v) \geq 0$

پس $S \geq 0$.

اگر $S \geq 0$ پس $f(u,v) \geq g(v) \geq 0$ پس $X \geq 0$ ✓

-

14.31

مسئله را در هر 4 حالت حل می‌کنیم و جواب‌ها را کمینه‌ی 4 جواب در نظر می‌گیریم

حالت اول :

min $P_L N_L + P_S N_S$

st $N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i$

$N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$

$0 \le S \ , \ S \le V$

$\sum S_i = C$

$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$

$N_L \geq 0 \ , \ N_S \geq 0$

شرط‌های $N_L \geq 0$ و $N_S \geq 0$ را به شرط‌های مسئله اضافه می‌کنیم تا مطمئن باشیم تابع حالات در محدوده‌ی درست قرار دارد.
اگر مسئله infeasible بود، جواب را ∞ در نظر می‌گیریم.

حالت دوم :

min ~~...~~ $P_S \times Pos(N_S + N_L)$

st: $N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i \ , \ N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$

$0 \le S \ , \ S \le V$

$\sum S_i = C$

$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$

$N_S \geq 0 \ , \ N_L \leq 0$

همانند بخش قبل شرط $N_S \geq 0$ و $N_L \leq 0$ اضافه شده. در تابع هدف هم از $Pos(\ )$ استفاده شده، که محدب است.

حالت سوم :

min $P_L \times P_{oS}(N_L + N_S)$

$$N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i \quad , \quad N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$$

$$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$$

$$0 \le S \quad , \quad S \le V$$

$$\sum S_i = C$$

$$N_L \ge 0 \quad , \quad N_S \le 0$$

حالت چهارم :

min 0

$$N_L = \sum_{i=1}^{L} g_i \quad , \quad N_S = \sum_{i=L+1}^{n} g_i$$

$$g_i = \frac{S_i}{V_i}(V_i - b_i)$$

$$0 \le S \quad , \quad S \le V$$

$$\sum S_i = C$$

$$N_L \le 0 \quad , \quad N_S \le 0$$

15.11)

a) برای $0 \le x \le x_{max}$ ، $\phi(x) \ge 0$ پس E صعودی است.

برای $x_{min} \le x \le 0$ ، $\phi(x) \le 0$ پس E نزولی است.

پس E ، Quasi-Convex است.

b) اگر E ، Convex باشد پس $E'' = \phi' \ge 0$ که یعنی ϕ صعودی است.

اگر ϕ صعودی باشد پس $\phi' \ge 0$ که یعنی $E'' \ge 0$ که یعنی E Convex است.

Scanned with CamScanner

(17.9

(a

$\min \quad p^T(u+c)$

s.t.:

$-D\mathbf{1} \preceq c$

$c \preceq C\mathbf{1}$

$q_{t+1} = q_t + c_t \quad$ for $t = 1$ to $T-1$

$q_1 = q_T + c_T$

$0 \preceq q \preceq Q\mathbf{1}$