بسمه تعالی

تمرین ۱۳ بهینه‌سازی

نیم‌سال دوم تحصیلی ۹۹–۹۸

کیارش بنی‌هاشم ۹۶۱۰۹۹۶۳

مدرس: دکتر مجتبی تفاق

---

۱. از نمایش اول استفاده می‌کنیم و تعریف می‌کنیم $y_i = a_i x_i$. در این صورت

$$y_i \quad feasible \iff \exists x_i \geq 0, a_i : y_i = a_i x_i \wedge ||P_i a_i + q_i||_2 \leq 1 \tag{1}$$

اگر $y_i \neq 0$ باشد، $x_i \neq 0$ و در نتیجه $a_i = \frac{y_i}{x_i}$ پس شرط feasibility معادل است با

$$\exists x_i > 0, a_i : y_i = a_i x_i \wedge ||P_i \frac{y_i}{x_i} + q_i||_2 \leq 1 \iff ||P_i \frac{y_i}{x_i} + q_i||_2 \leq 1 \iff x_i ||P_i \frac{y_i}{x_i} + q_i||_2 \leq x_i$$

یا معادلا

$$||P_i y_i + q_i x_i|| \leq x_i \tag{2}$$

حال دقت کنید که ۲ محدب است زیرا سمت چپ که یک آفین درون یک محدب است و سمت راست هم آفین است. همچنین دقت کنید که ۱ و ۲ معادلند زیرا اگر $y_i \neq 0$ که ثابت کردیم، اگر $y_i = 0$ هم هر دو برقرارند چون کافیست قرار دهیم $x_i = 0$ و هر دو به نامساوی یا تساوی‌های بدیهی تبدیل می‌شوند. پس مساله به فرم زیر در آمد

$$\begin{aligned} &minimize \quad ||\sum y_i - b_i||_2 \\ &s.t. \quad ||P_i y_i + q_i x_i||_2 \leq x_i \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{aligned}$$

با حل مساله‌ی فوق و تعریف $a_i = \begin{cases} \dfrac{y_i}{x_i} & if \quad x_i \neq 0 \\ P_i^{-1} q_i \end{cases}$ مساله حل می‌شود.

۲. (آ)

$$f(u,v) = [u^T, v^T] \begin{bmatrix} Au + Bv \\ B^T u + Cv \end{bmatrix} = u^T A u + u^T B v + v^T B^T u + v^T C v = u^T A u + u^T (2Bv) + v^T C v$$

با فرض این که $A > 0$ باشد، برای یافتن نقطه‌ی مینیمم کافیست یک نقطه‌ی مشتق ۰ بیابیم زیرا تابع بر حسب u محدب است. در نتیجه داریم

$$2Au + 2Bv = 0 \iff u = -A^{-1}Bv$$

چون نقطه‌ی فوق همواره وجود دارد، این نقطه همواره بهینه است. با جایگذاری این نتیجه داریم

$$u = A^{-1}Bv \implies u^T = v^T B^T (A^{-1})^T \implies$$

$$\inf_u f(u,v) = v^T B^T (A^{-1})^T A A^{-1} B v - 2 v^T B^T (A^{-1})^T B v + v^T C v = v^T (C - B^T (A^{-1})^T B) v = v^T S v$$

که در انتها از $(A^{-1})^T = A^{-1}$ استفاده شده است.

(ب) قضیه‌ی اول را ثابت می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که $X > 0 \implies S > 0 \wedge A > 0$. به این منظور دقت کنید که اگر $v \neq 0 \in R^k$ و تعریف کنیم

$u = [v, 0_{n-k}]$ یعنی برداری که از چسباندن ۰ به ته v به دست می‌آید، داریم (دقت کنید که $u \neq 0$)

$$0 < u^T X u = v^T A v + 0 + 0 + 0 = v^T A v$$

پس A مثبت معین است. حال فرض کنید که v یک بردارد دلخواه $n-k$تایی ناصفر باشد و تابع $f(u, v)$ بخش قبل را در نظر بگیرید. طبق مثبت‌معین بودن X، $\forall u : f(u, v) > 0$. پس چون در بخش قبل ثابت کردیم که این تابع برای یک u^* ای مینیمم می‌شود (این که اینفیمم با یک مقدار u به دست می‌آید مهم است) و کمترین مقدارش هم $v^T S v$ است. در نتیجه

$$v^T S v = f(u^*, v) > 0$$

پس S هم مثبت نیمه‌معین است.
حال ثابت می‌کنیم که $S > 0 \wedge A > 0 \implies X > 0$. به این منظور، یک بردار دلخواه u, v در نظر بگیرید که $u \in R^k, v \in R^{n-k}$. و حداقل یکی از این بردارها ناصفر است. باید ثابت کنیم که

$$(u, v)^T X (u, v) = f(u, v) > 0$$

اگر $v = 0$ باشد که $f(u, v) = u^T A u > 0$. در غیر این صورت طبق بخش الف

$$f(u, v) \geq \inf_{u'} f(u', v) = g(v) = v^T S v > 0$$

پس هر دو طرف ثابت شدند و مساله حل شد.

۳. با توجه به این که مساله ۴ حالت دارد، این ۴ حالت را جدا، جدا و به ترتیب از خوب به بد بررسی می‌کنم.
بهترین حالت این است که بتوان در هر دو بخش، ضرر کرد. در نتیجه ابتدا این مساله‌ی feasibility را بررسی می‌کنیم. با توجه به آن چه در صورت سوال گفته شد، مساله به فرم زیر است.

$$0 \leq s \leq v$$

$$1^T s = c$$

$$\sum_{i=1}^{L} s_i \left(\frac{v_i - b_i}{v_i}\right) \leq 0$$

$$\sum_{i=L+1}^{n} s_i \left(\frac{v_i - b_i}{v_i}\right) \leq 0$$

اگر این مساله جواب داشته باشد که خب حل است. همه‌ی شرط‌ها هم آفین‌اند و در نتیجه مشکلی نداریم.
اگر جواب نداشته باشد، هر ۳ حالت دیگر را بررسی می‌کنیم و بینشان مینیمم می‌گیریم.

- $N_l \leq 0$: مساله به فرم زیر است.

$$minimize \quad \rho^s \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \left(\frac{v_i - b_i}{v_i}\right)\right)_+$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{L} s_i \left(\frac{v_i - b_i}{v_i}\right) \leq 0$$

$$1^T s = c$$

$$0 \leq s \leq v$$

دقت کنید که مساله محدب است زیرا $x \to x_+$ محدب است و precomposition آفین و محدب، محدب است. قیدها هم که آفین‌اند. دقت کنید که نیازی نیست $N_s \geq 0$ را بررسی کنیم چون اگر این حالت جواب داشت به این جا نمی‌رسیدیم.

- $N_s \leq ۰$: این حالت هم مشابه حالت قبل است و صرفا جای s, l عوض شده
- $N_s, N_l \geq ۰$:

$$minimize \quad \rho^l N^L + \rho^s N^s$$

$$s.t. \quad N^l \geq ۰, \quad N^s \geq ۰$$

$$N_l = \sum_{i=۱}^{L} s_i(\frac{v_i - b_i}{v_i})$$

$$N_s = \sum_{i=L+۱}^{n} s_i(\frac{v_i - b_i}{v_i})$$

$$۱^T s = c$$

$$۰ \leq s \leq v$$

هر ۳ حالت را حل می‌کنیم و هر کدام بهتر شد خروجی می‌دهیم.

۴. • برای یک c دلخواه تعریف کنید.

$$S_c = \{k : E(k) \leq c\}$$

باید ثابت کنیم که S_c محدب است. یعنی باید ثابت کنیم که

$$\left.\begin{matrix} x < y < z \\ x, z \in S_c \end{matrix}\right\} \implies y \in S_c$$

دقت کنید که ϕ برای $x \geq ۰$، نامنفی است و برای $x \leq ۰$ نامثبت. در نتیجه E برای $x \geq ۰$ صعودی و برای $x \leq ۰$ نزولی است. اگر x, z هر دو نامنفی باشند. در این صورت $\phi(x) \leq \phi(y) \leq \phi(z)$. در نتیجه $C \leq \phi(z) \leq \phi(y)$ و حکم ثابت می‌شود. اگر x, z هر دو نامثبت باشند هم به طور مشابه $\phi(y) \leq \phi(x) \leq C$. در حالتی که x نامثبت و z نامنفی باشد هم، اگر y مثبت باشد، $C \leq \phi(z) \leq \phi(y)$ و اگر هم منفی باشد $\phi(y) \leq \phi(x) \leq C$. پس ϕ، quasiconvex است.

• داریم

$$E' = \phi \implies E'' = \phi'$$

در نتیجه چون تحدب معادل با همواره مثبت بودن مشتق دوم است،

$$E' \quad convex \iff \forall t \in dom(\phi) : E''(t) \geq ۰ \iff \forall t \in dom(\phi) : \phi'(t) \geq ۰ \iff \phi \quad increasing$$

۵. (آ) طبیعتا هدف کمینه کردن هزینه است. مشخصا هزینه برابر است با $p^T(u + c)$. قیدهای مساله هم این هستند که اولا $u + c \geq ۰$ چون هرگز به شبکه‌ی برق انرژی بر نمی‌گردانیم و نیز شروطی که روی مقدار باتری و حداقل و حداکثر نرخ شارژ وجود داشت. در نتیجه مساله به فرم زیر است.

$$minimize \quad p^T(u + c)$$

$$s.t. \quad q_{t+۱} = q_t + c_t \quad \forall ۱ \leq t \leq T - ۱$$

$$۰ \leq q_t \leq Q, \quad \forall ۱ \leq t \leq T$$

$$q_T + c_T = q_۱, \quad u + c \geq ۰$$

$$-D \leq c_T \leq C$$

(ب) لطفا به فایل جوپیتر مراجعه کنید.

(ج) همانطور که از شکل مشخص است، با افزایش Q، تا یک جایی هزینه کاهش پیدا می‌کند اما از یک جایی به بعد، ثابت می‌ایستد. این که تا یک جایی کاهش پیدا می‌کند که طبیعی است چون یکی از قیدها را looseتر کرده‌ایم. علت این که از یک جایی به بعد دیگر بهتر نمی‌شود هم این است که جدا از ظرفیت باتری، باید یک مقداری شارژ شود و هر چه قدر هم که شارژ شد، دشارژ شود. در نتیجه ظرفیت از یک جایی به بعد به درد نمی‌خورد زیرا حتی اگر با حداکثر سرعت هم شارژ شود و دشارژ شود، حداکثر به اندازه‌ی $\frac{T}{2}C$ می‌توان از ظرفیت استفاده کرد مگر این که در ابتدا q را مثبت بگیریم. با توجه به این قید و نیز با توجه به این که اوج قیمت در اواخر بازه‌ی زمانی است، یک کران بالای بدیهی برای بیشترین Q به درد بخور وجود دارد. با در نظر گرفتن دیگر نکات مانند این که اگر چه قیمت در حالت کلی در اواخر بیشتر است اما در انتها دوباره کاهش می‌یابد و در نتیجه ارزشی ندارد که برای این زمان هم هزینه کنیم، طبیعتا بیشترین Qی سودمند کاهش می‌یابد.