Date Year Month Day Subject

علیرضا ملک‌دولتشی - تمرین 7 - 96109674 - بهینه سازی محدب

22- اگر شرط $x^Tx \le 1$ را برداریم داریم:

$$\min \ \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r = f(x)$$

$\Rightarrow \nabla f = Px + q^T = 0 \Rightarrow$ اگر $x^Tx<1$ داریم $Px+q^T=0$

اما اگر $Px+q^T=0$ به ازای x خارج از کره‌ی یک شعاع یک رخ دهد، نقطه‌ی مینیمم f روی مرز کره رخ می دهد. و این نقطه طوری است که گرادیان نقطه‌ی مرزی

$Px+q=-\lambda x$ برای $\lambda>0$ ، یعنی گرادیان در جهت بردار شعاع است.

پس $x^* = -(P+\lambda I)^{-1} q$ ، $\lambda = \max(0, \bar{\lambda})$

که: $q^T(\bar{\lambda} I + P) q = 1$

L_∞: $\min \max (|a_i^T x - b_i|)$

معادل با : $\min \; t$

$\text{st:} \; |a_i^T x - b_i| < t \quad \text{for } i=1,\dots,m$

$\rightarrow \min \; t$

$$\text{st.} \left\| \begin{pmatrix} Re(a_i^T) & -Im(a_i^T) \\ Im(a_i^T) & Re(a_i^T) \end{pmatrix} z - \begin{pmatrix} Re(b) \\ Im(b) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq t$$

L_1: $\min \; \Sigma t_i$

$\text{s.t} \; |a_i^T x - b_i| < t_i$

$\Rightarrow \min \; \Sigma t_i$

$$\left\| \begin{pmatrix} Re(a_i^T) & -Im(a_i^T) \\ Im(a_i^T) & Re(a_i^T) \end{pmatrix} z - \begin{pmatrix} Re(b) \\ Im(b) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq t_i$$

- 243

$$\min \|Ax-b\|_4 = \left[\sum (a_i^T x - b_i)^4\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \min \sum (a_i x - b_i)^4$$

حل :
$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_i z_i^2 \\ \text{s.t:} \quad z_i \geq y_i^2 \\ \qquad y_i = a_i^T x - b_i \end{array} \right\}$$

-24

L_2: $\min \|Ax-b\|_2 \rightarrow \min \|Ax-b\|_2^2$

$$\|Ax-b\|_2^2 = \|Re(Ax-b)\|_2^2 + \|Im(Ax-b)\|_2^2$$

$$= \|Re(A)Re(x) - Im(A)Im(x) - Re(b)\|_2^2$$

$$+ \|Im(A)Re(x) + Re(A)Im(x) - Im(b)\|_2^2$$

$$z = \begin{pmatrix} | \\ Re(x) \\ | \\ | \\ Im(x) \\ | \end{pmatrix} \Rightarrow \|Ax-b\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix} z - \begin{pmatrix} Re(b) \\ Im(b) \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Date Year Month Day Subject

-25

شرط‌های $a'^Tx+b'>0$, $a'^Tx+b'<0$ را می‌توان به $a^Tx+b\geq 1$, $a^Tx+b\leq 1$ تبدیل کرد. حال:

$$\inf_{\|u\|_2\leq 1}\left(a^TP_iu+a^Tq_i+b_i\right) = -\|P_i^Ta\|_2 + a^Tq_i+b_i \geq 1 \quad \text{for 1 to } L$$

$$\sup_{\|u\|_2\leq 1}\left(a^TP_iu+a^Tq_i+b_i\right) = \|P_i^Ta\|_2 + a^Tq_i+b_i \leq -1 \quad \text{for } L+1 \text{ to } K+L$$

پس:

$$\begin{cases} -\|P_i^Ta\|_2 + a^Tq_i + b \geq 1 & \text{for } i=1 \text{ to } L \\ \|P_i^Ta\|_2 + a^Tq_i + b \leq -1 & \text{for } i=L+1 \text{ to } K+L \end{cases}$$

JAHAN NAMA

الف)

$$V = WW^T \Rightarrow P = f^T V f = f^T W W^T f$$

w_i: ستون iام ماتریس W $\Rightarrow P = f^T\left(\sum_{i=1}^{r} w_i w_i^T\right) f = \sum_{i=1}^{r} (w_i^T f)^2$

که به فرم SOS است.

از طرفی:

$$P = \sum_{i=1}^{r} (w_i^T f)^2 \Rightarrow P = f^T V f \,,\; V = \sum_{i=1}^{r} w_i w_i^T$$

ب)

$$P = \sum_{i,j} V_{ij} f_i f_j$$

با برابر گذاشتن ضرایب در دو طرف معادله، حکم اثبات می‌شود.

پ)

$$f_1 = 1,\; f_2 = x_1,\; f_3 = x_2,\; f_4 = x_1^2,\; f_5 = x_1 x_2,\; f_6 = x_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} & V_{15} & V_{16} \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$P = C_1 + C_2 x_1 + C_3 x_2 + C_4 x_1^2 + C_5 x_1 x_2 + C_6 x_2^2 + C_7 x_1^3 + C_8 x_1^2 x_2 + C_9 x_1 x_2^2 + C_{10} x_2^3 + C_{11} x_1^4 + C_{12} x_1^3 x_2 + C_{13} x_1^2 x_2^2 + C_{14} x_1 x_2^3 + C_{15} x_2^4$$

Date Year Month Day

Subject

$\Rightarrow C_1 = V_{11}, \; C_2 = 2V_{12}, \; C_3 = 2V_{21}, \; C_4 = V_{22} + 2V_{15}$

$C_5 = 2V_{23} + 2V_{16}, \; C_6 = V_{33} + \dots, \; C_{15} = V_{55} + \dots$