علیرضا درویشی - 96109679 - تمرین 12 - بهینه سازی محدب

6.30

الف) برای هر بازی، درستنمایی نتیجه‌ی بازی برابر با:

$$\mathrm{Prob}\left(v \geq -y_i\left(a_j^{(i)} - a_k^{(i)}\right)\right)$$

است که در نتیجه درستنمایی کل برابر خواهد بود با:

$$\prod_{i=1}^{m} \left(1 - F\left(-y_i\left(a_j^{(i)} - a_k^{(i)}\right)\right)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 + e^{-\frac{2y_i(a_j - a_k)}{\sigma}}}$$

حال با لگاریتم گرفتن از تابع درستنمایی داریم:

$$f = -\sum_{i=1}^{m} \log\left(1 + e^{-\frac{2y_i(a_j - a_k)}{\sigma}}\right)$$

که باید بیشینه شود. هر یک از اعداد در توان هم یکی از عناصر بردار ستونی $-2\frac{Aa}{\sigma}$ هستند. پس:

مسئله‌ی نهایی :

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{m} \log\left(1+e^{-\frac{2}{\sigma}(Aa)_i}\right)$$

$$0 \le a \le 1$$

(7.23

آ) شرط اشتراک داشتن دایره‌ها را می‌توان به شکل

$$\|C_i - C_j\|_2 \le r_i + r_j$$

نوشت. یعنی فاصله‌ی مرکز دو دایره‌ی فوق کمتر یا مساوی مجموع شعاع آن‌ها باشد. پس:

$$\min \quad f(r)$$

$$\|C_i - C_j\| \le r_i + r_j \quad \text{for } (i,j) \in I$$

$$C_i = C_i^{fix}, \quad r_i = r_i^{fix} \quad \text{for } i=1,\dots,k$$

$$r_i \ge 0 \quad \text{for } i=1,\dots,n$$

که برای کمینه کردن مساحت، $f(r) = \sum r_i^2$ است

و برای کمینه کردن محیط ، $f(r) = \sum r_i$ است .

14.7

آ). شرط دوم را به شکل زیر بازنویسی می کنیم :

- وجود ندارد p طوری که : $(1)\quad p \geq 0 ,\quad 1^T p = 1 ,\quad R^T p = 0$

چون اگر p شرایط قبلی را داشته باشد ، کافی است در یک ضریب ضرب شود و به $p' = \frac{p}{1^T p}$ تبدیل شود. از طرفی اگر $1^T p = 1$ باشد ، $1^T p \neq 0$ برقرار است . حال :

$$R' = \begin{bmatrix} R & 1 \end{bmatrix}$$

پس (1) معادل است با : $\nexists p : R'^T p = e_{n+1} ,\quad p \geq 0$

که طبق لم فارکاش معادل است با :

$$\exists x' \in R^{n+1} : R' x' \leq 0 ,\quad e_{n+1}^T x' > 0$$

حال اگر در x' به جای x' از $-x'$ استفاده کنیم داریم:

$$\exists x' \in R^{n+1} : \quad R'x' \geq 0 \;, \quad e^{n+1}x' < 0$$

اگر قرار دهیم: $x' = [x, k]$ داریم:

$$\exists x \in R^n , k \in R : \quad Rx + k\,1 \geq 0 \;, \; k < 0$$

پس:

$$\exists x \in R^n , k \in R : \quad k > 0 \;, \; Rx \geq k$$

که معادل است با:

$$\exists x \in R^n , \quad Rx > 0$$

ب) با توجه به بخش قبل استراتژی خوب وجود دارد اگر و تنها اگر

P یافت نشود که: $R^TP = 0 \,, \; P \geq 0 \,, \; \sum P_i = 1$

$$(R^TP)_i = \sum_{j \neq i} -P_j + \lambda_i P_i = 0 \Rightarrow -1 + (\lambda_i + 1) P_i = 0$$

$$\Rightarrow P_i = \frac{1}{1+\lambda_i}$$

Date Year Month Day

Subject

پس استراتژی خوب وجود دارد اگر و تنها اگر:

(به ازای یک i: $\frac{1}{1+\lambda_1} < 0$) یا $\left(\sum \frac{1}{1+\lambda_i} \neq 1 \right)$

اما چون $\lambda_i > 0$ پس شرط دوم اتفاق نمی افتد

14.30

ابتدا شرایط مسئله را می نویسیم:

مجموع پول های تبدیل شده از هر واحد نباید از مقدار اولیه بیشتر شود. پس

$$X^T 1 \leq C^{init}$$

حال برای بدست آوردن مقدار نهایی هر ارز داریم،

$$C^f = C^{init} - X^T 1 + diag\left(X \odot \frac{1}{F^T} \right)$$

که:

$$\left(\frac{1}{F^T}\right)_{ij} = (F^T)_{ij}^{-1}$$

حال کافی است:

$$C^f \geq C^{req}$$

حال تابع هدف را باید برحسب بردار v ، ارزش هر ارز برحسب دلار نوشت.

$$f = v^T C^f$$

پس:

$$\max \; v^T c^f$$

$$s.t. \quad c^f \geq c^{req}$$

$$c^f = c^{init} - x^T 1 + diag\left(x \; \frac{1}{F^T} \right)$$

$$x^T 1 \leq c^{init}$$

$$x \geq 0$$

مسئله‌ی خطی است.

18.21

الف) $E_i(S_i)$ را می‌توان به کمک تابع $Pos(x)$ نوشت

$$Pos(x) = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حال:

$$E_i(S_i) = \frac{1}{2} K_i^{ext} \, Pos(S_i - N_i)^2 + \frac{1}{2} K_i^{comp} \, Pos(N_i - S_i)^2$$

چون برای $S_i \geq N_i$ بخش دوم صفر است، برای $S_i \leq N_i$ بخش اول صفر است. در این حالت $E_i(S_i)$ به سادگی محدب است.

چون $Pos(x)$ محدب است و از روی ترکیب های

معدب به $E_i(S_i)$ رسیده‌ایم. حال:

$$\min \quad \sum E_i(S_i)$$

$$\text{st.} \quad \sum S_i = W - \sum w_i$$

ب) شرط‌های ۱، 2، 3 به دلیل عدم وجود نامساوی، فقط

همان: $\sum S_i = W - \sum w_i$ است.

شرط گرادیان:

$$\frac{d}{dx} Pos(x)^2 = 2Pos(x) \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} Pos(-x)^2 = -2Pos(-x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial S_i} E_i(S_i) = K_i^{ext} Pos(S_i - N_i) - K_i^{comp} Pos(N_i - S_i)$$

حال داریم:

$$L(S,v) = \sum E_i(S_i) + v(W' - \sum S_i) \quad , \quad W' = W - \sum w_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = \frac{\partial E_i(S_i)}{\partial S_i} - v = 0$$

حال با توجه به اینکه $\frac{\partial E(s_i)}{\partial s_i} > 0$ برای $s_i > N_i$ ، $\frac{\partial E(s_i)}{\partial s_i} < 0$

برای $s_i < N_i$. این ۳ حالت برای v داریم:

(1) $v = 0$:

$$\frac{\partial E(s_i)}{\partial s_i} = 0 \Rightarrow s_i = N_i \Rightarrow \boxed{W = \sum W_i + \sum N_i}$$

(2) $v > 0$:

$$s_i > N_i \Rightarrow k_i^{ext}(s_i - N_i) = v \Rightarrow s_i = N_i + \frac{v}{k_i^{ext}}$$

$$\sum s_i = \sum N_i + v\left(\sum \frac{1}{k_i^{ext}}\right) = W - \sum W_i \Rightarrow v = \frac{W - \sum W_i - \sum N_i}{\sum \frac{1}{k_i^{ext}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_i = N_i + \frac{1}{k_i^{ext}}\left[\frac{W - \sum W_i - \sum N_i}{\sum \frac{1}{k_i^{ext}}}\right]}$$

(3) $v < 0$

$s_i < N_i$

$$\Rightarrow \boxed{s_i = N_i + \frac{1}{k_i^{comp}}\left[\frac{W - \sum W_i - \sum N_i}{\sum \frac{1}{k_i^{comp}}}\right]}$$