



۴ آبان ۱۳۹۸

آمار و کاربردها

تمرین : سری ۲

مهلت تحویل ۱۴ آبان

مدیر: دکتر محسن شریفی تبار

مسئله ۱

الف) کیسه ای شامل  $b$  مهره ی سیاه و  $r$  مهره ی قرمز است. به صورت تصادفی یکی از مهره ها را بیرون می آوریم و آن را همراه با  $c$  مهره ی هم رنگ با آن مهره به کیسه برمی گردانیم. حال فرض کنید مهره ی دیگری بیرون می کشیم. احتمال اینکه اولین مهره ای که بیرون آورده شد، سیاه باشد به شرطی که دومین مهره قرمز باشد، چقدر است؟

ب) مجموعه ی  $S = \{1, \dots, n\}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه هستند که مستقلا با احتمال یکسان از یکی از  $2^n$  زیرمجموعه ی  $S$  انتخاب شده اند. نشان دهید:

$$P\{A \subset B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ج) برای هر دو پیشامد  $E$  و  $F$  نشان دهید:

$$P(E|E \cup F) \geq P(E|F)$$

مسئله ۲

فرض کنید  $f_n$  تعداد راه هایی باشد که بتوان یک سکه را  $n$  بار پرتاب کرد به گونه ای که شیرهای متوالی رخ ندهد. نشان دهید:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

که در آن  $n \geq 2$  و  $f_0 = 1$  و  $f_1 = 2$ .

مسئله ی ۳

سکه ی سالمی را به صورت مستقل  $n$  بار پرتاب می کنیم به گونه ای که  $k$  بار توسط شخص  $A$  و  $n - k$  بار توسط شخص  $B$  پرتاب شود. نشان دهید که احتمال اینکه برای  $A$  و  $B$  به تعداد برابر شیر بیاید، برابر است با احتمال

اینکه در کل پرتاب ها  $k$  بار شیر بیاید.

#### مسئله ۴

فرض کنید کیسه ای شامل  $n + m$  مهره است که  $n$  تای آن ها قرمز و  $m$  تای آن ها سیاه هستند. هر بار یک مهره را به صورت تصادفی و بدون جایگذاری از کیسه خارج می کنیم. اگر  $X$  تعداد مهره های قرمزی باشد که قبل از اولین مهره ی سیاه از کیسه خارج شود، مقدار  $E[X]$  را بیابید.

#### مسئله ۵

فرض کنید  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . برای تمام مقادیر  $x \geq 0$  نشان دهید:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq P(Z \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

#### مسئله ۶

فرض کنید دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  دارای تابع چگالی توأم زیر باشد:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$$

که در آن  $x \geq 1$  و  $y \geq 1$ .

الف) تابع چگالی توأم  $U = XY$  و  $V = \frac{X}{Y}$  را محاسبه کنید.

ب) توابع چگالی حاشیه ای را محاسبه کنید.

#### مسئله ۷

فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای  $iid$  هستند. در این صورت مطلوب است محاسبه ی عبارت  $E[X_1 | X_1 + \dots + X_n = x]$  که در آن  $x$  یک عدد ثابت است.

#### مسئله ۸

الف) کیسه ای شامل ۳۰ گوی است که ۱۰ گوی آن قرمز و ۸ گوی آن آبی است. حال از این کیسه ۱۲ گوی را به طور تصادفی بیرون می آوریم، اگر  $X$  تعداد گوی های قرمز و  $Y$  تعداد گوی های آبی باشد، آنگاه  $Cov(X, Y)$  را به دست آورید.

ب) نشان دهید اگر تابع چگالی احتمال توام  $X$  و  $Y$  به صورت زیر باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x + y) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1)$$

در این صورت بین  $X$  و  $Y$  هیچ رابطه‌ی خطی‌ای وجود ندارد.

## مسأله ۹

می‌خواهیم با مطالعه بر روی افراد جامعه، نسبت افرادی را که از اختلافات عاطفی فصلی رنج می‌برند، تخمین بزنیم. چه تعداد از افراد جامعه را باید مورد مطالعه قرار دهیم تا با احتمال حداقل 99 درصد مطمئن باشیم که تخمین ما از مقدار واقعی حداکثر 0.02 اختلاف داشته باشد.