Вычислить определители, приводя их матрицы к треугольному виду.

**7.30.** $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$

◀ Вычтем последнюю строку из всех остальных. Получим

$$\begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n! \blacktriangleright$$

Исследовать на совместность и найти общее решение системы уравнений.

**21.6** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 & = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 & = -6 \end{cases}.$

◀ Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Меняем местами первую и четвертую строки, затем вычитаем из второй строки первую, умноженную на 3, из третьей первую, умноженную на 4 из четвертой первую, умноженную на 2.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -13 & -6 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -13 & -6 \\ 0 & -8 & 34 & 18 \\ 0 & -13 & 53 & 27 \\ 0 & -7 & 29 & 15 \end{array}\right) \sim$$

Далее вычитаем из второй строки четвертую и из третьей строки удвоенную четвертую, затем прибавляем к третьей строке вторую, а из четвертой строки вычитаем вторую, умноженную на 7, затем делим на -6 четвертую строку, меняем ее местами с третьей и меняем знак у второй строки.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -13 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -7 & 29 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -13 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -13 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Далее прибавляем к второй строке третью, умноженную на 5, и к первой строке третью, умноженную на 13, затем от первой строки отнимаем вторую, умноженную на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$ ▶

**21.7** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 & = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 & = 3 \end{cases}$

◀ Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Сначала мы из четвертой строки вычитаем первую, а затем меняем местами первую и третью строки.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Далее вычитаем из третьей строки утроенную первую, а из второй строки удвоенную первую. На следующем шаге из второй строки вычтем третью.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -8 & 4 & -14 & 20 & -8 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & -14 & 20 & -8 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Прибавляем к третьей строке вторую, умноженную на 8, и к четвертой вторую строку, умноженную на 3. Далее из третьей строки вычитаем удвоенную вторую.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array}\right).$$

Теперь третья строка соответствует несовместному линейному уравнению.
Ответ: Система несовместна. ▶

**21.15** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = 12 \end{cases}$

◀ Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Из второй строки вычитаем утроенную первую, из четвертой строки вычитаем первую, умноженную на 5.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right) \sim$$

Ко второй и четвертой строке прибавляем третью. Затем меняем местами вторую и третью строки.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Вычитаем из первой строки вторую.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ Теперь можем написать ответ.

Ответ: $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5,\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5,\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. ►

Найти общее решение следующих систем уравнений через их фундаментальные системы решений.

**22.16.** $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 & = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 & = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

◄ Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Вычтем четвертую строку из первой.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на 5, к третьей первую, умноженную на 7, к четвертой первую, умноженную на 4, затем сменим знак у первой строки, разделим вторую строку на $-2$, а третью строку на $-3$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 6 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Из третьей и четвертой строки вычтем вторую, затем вторую строку разделим на 4 и опустим нулевые строки.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -3 & -2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Из первой строки вычтем утроенную вторую.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 2 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Для свободных переменных $x_3, x_4, x_5$ выберем значения, соответствующие стандартному базису $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, и найдем соответствующие значения переменных $x_1, x_2$. Получаем следующие базисные решения.

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, 0) \parallel (-9, 3, 4, 0, 0)$,

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0) \parallel (-3, 1, 0, 2, 0)$,

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 1, 0, 0, 1)$

В качестве ответа берем их произвольную линейную комбинацию.

Ответ: $x = \alpha_1(-9, 3, 4, 0, 0)^T + \alpha_2(-3, 1, 0, 2, 0)^T + \alpha_3(-2, 1, 0, 0, 1)^T$. ►

**39.9.** Доказать, что конечное множество $G$, в котором определена ассоциативная алгебраическая операция, подчиняющаяся закону сокращения слева и справа, является группой.

◄ Поскольку $G$ конечно, для любого элемента $a$ среди бесконечного множества его степеней $a$, $a^2$, $a^3$, ... найдутся две совпадающих. Приравняв их и произведя максимально возможное число сокращений получим $a^{k_a+1} = a$, $k_a > 0$. $a^{k_a}$ является единицей группы. В самом деле. Для произвольного элемента $b$ имеем $ba^{k_a}a = ba$, поэтому $ba^{k_a} = b$ и $aa^{k_a}b = ab$, поэтому $a^{k_a}b = b$. Единица единственна и может быть получена аналогичными рассуждениями как степень любого элемента $b$. Пусть, например, $b^{k_b+1} = b$. Тогда $b^{k_b}$ является единицей и элемент $b^{k_b-1}$ является обратным к $b$. ►

**39.10.** Доказать, что если $a^2 = 1$ для любого элемента $a$ группы $G$, то эта группа абелева.

◄ Для любых элементов группы $a, b$ имеем $ab = b^2aba^2 = b(ba)^2a = ba$. ►

**39.14.** Доказать, что:

а) группа $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел по умножению изоморфна группе $\mathbb{R}$ всех действительных чисел по сложению;

б) группа $\mathbb{Q}_+$ положительных рациональных чисел по умножению не изоморфна группе $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел по сложению.

◄ а) В качестве изоморфизма возьмем функцию $\varphi(a) = e^a$. Проверяем основное свойство изоморфизма. $\varphi(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Обратным отображением служит отображение $\varphi^{-1}(b) = \ln(b)$.

б) Предположим противное. Пусть $\varphi$ изоморфизм. Тогда существует число $a$, такое что $\varphi(a) = 2$. Имеем $2 = \varphi(a) = \varphi\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \varphi\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{a}{2}\right) = \varphi\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Получили, что квадрат некоторого рационального числа равен двум, что, как мы знаем, невозможно. ►

**40.26.** Привести примеры колец матриц специального вида, обладающих несколькими правыми или несколькими левыми единицами.

◄ Первый пример это кольцо всевозможных числовых матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. В нем любая матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ будет левой единицей. Транспонируя ситуацию, получаем кольцо матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. В нем правыми единицами будут матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. ►

**40.31.** Показать, что поле матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $\quad a, b \in \mathbb{Q}$, изоморфно полю чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

◄ Вид изоморфизма $\varphi$ подсказан обозначениями, использованными в задаче. $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}\right) = a + b\sqrt{2}$. Нам надо проверить, что это изоморфизм. Пишем: $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2b+2d & a+c \end{bmatrix}\right) = a + c + (b+d)\sqrt{2} =$

$= a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = \varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}\right)$. То же для умножения. $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{bmatrix}\right) = ac + 2bd + (ad+bc)\sqrt{2} =$
$= ac + \sqrt{2}\sqrt{2}bd + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} = a(c + d\sqrt{2}) + b\sqrt{2}(c + d\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) =$
$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}\right)$. Далее нам надо доказать существование обратного отображения. Пусть имеется число $x$ вида $a + b\sqrt{2}$. Чтобы иметь право написать $\varphi^{-1}(x) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}\right)$, прежде всего надо доказать, что $a$ и $b$ могут быть однозначно определены по значению $x$. И в самом деле, пусть имеется неоднозначность, то есть $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Если $b = d$, то сокращая получаем $a = c$, и неоднозначности не будет. Итак $b \neq d$. Теперь из равенства разных представлений числа $x$ получаем $a - c = (d - b)\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b}$, но последнее равенство невозможно, поскольку число $\sqrt{2}$ иррационально. ►