§29. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Преобразуйте произведение в сумму:

29.1. а) $\sin 23^\circ \sin 32^\circ = \frac{1}{2}[\cos(-9^\circ) - \cos(55^\circ)] = \frac{1}{2}[\cos(9^\circ) - \cos(55^\circ)]$.

г) $2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1}{2}\left[\sin\dfrac{13\pi}{40} + \sin\dfrac{-3\pi}{40}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\sin\dfrac{13\pi}{40} - \sin\dfrac{3\pi}{40}\right]$.

29.2. в) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{1}{2}[\cos\alpha + \cos\beta]$.

29.3. а) $\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta) - \sin(-\beta)] = \frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta) + \sin\beta]$.

29.4. а) $\sin 10^\circ \cos 8^\circ \cos 6^\circ = \sin 10^\circ \cdot \dfrac{1}{2}(\cos 2^\circ + \cos 14^\circ) =$

$= \dfrac{1}{2}(\sin 10^\circ \cos 2^\circ + \sin 10^\circ \cos 14^\circ) = \dfrac{1}{4}(\sin 12^\circ + \sin 8^\circ + \sin 24^\circ - \sin 4^\circ)$.

29.5. б) $\cos x \cos y \cos z = \cos x \cdot \dfrac{1}{2}[\cos(y-z) + \cos(y+z)] =$

$\dfrac{1}{2}[\cos x\cos(y-z) + \cos x\cos(y+z)] =$

$= \dfrac{1}{4}[\cos(x-y+z) + \cos(x+y-z) + \cos(x-y-z) + \cos(x+y+z)] =$

$= \dfrac{1}{4}[\cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) + \cos(x+y-z) + \cos(x+y+z)]$.

29.6. б) $\cos^2 2x \sin 3x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 4x)\sin 3x = \dfrac{1}{2}(\sin 3x + \cos 4x \sin 3x) =$

$= \dfrac{1}{4}(2\sin 3x + \sin 7x - \sin x)$.

Докажите тождество:

29.7. а) $2\sin t\sin 2t + \cos 3t = \cos t$.
$2\sin t\sin 2t + \cos 3t = 2\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t = \cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t =$
$= \cos(t-2t) = \cos t$.

29.8. а) $\sin^2 x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \dfrac{1}{4}$.

Преобразуем левую часть.

$\dfrac{1-\cos 2t}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\cos(-2t) + \cos\dfrac{2\pi}{3}\right] = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2t}{2} + \dfrac{\cos 2t}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

29.9. б) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\operatorname{tg} 3x.$

Первый способ преобразованием произведения в сумму.

$$\frac{\sin x\sin(\frac{\pi}{3}-x)\sin(\frac{\pi}{3}+x)}{\cos x\cos(\frac{\pi}{3}-x)\cos(\frac{\pi}{3}+x)}=\frac{\sin x\cdot\frac{1}{2}(\cos(-2x)-\cos\frac{2\pi}{3})}{\cos x\cdot\frac{1}{2}(\cos(-2x)+\cos\frac{2\pi}{3})}=\frac{\sin x(\cos 2x+\frac{1}{2})}{\cos x(\cos 2x-\frac{1}{2})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin(-x)+\sin x)}{\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos(-x)-\cos x)}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\operatorname{tg} 3x.$$

Второй способ с использованием формулы тангенса суммы. Преобразуем левую часть.

$$\operatorname{tg} x\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} x\cdot\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} x\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Преобразуем правую часть.

$$\operatorname{tg} 3x=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}=\frac{\operatorname{tg} x+\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}{1-\operatorname{tg} x\cdot\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{(\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg} x)(1-\operatorname{tg}^2 x)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}^2 x)}=$$

$$=\operatorname{tg} x\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}.$$ Совпадают.

29.10. $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha.$

Преобразуем левую часть.

$$\frac{1+\cos(90^\circ-2\alpha)}{2}-\frac{1+\cos(120^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{1}{2}[\sin(150^\circ-2\alpha)-\sin 2\alpha]=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sin(30^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{\sin(30^\circ+2\alpha)}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{2}=\sin 2\alpha.$$

29.11. а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$

Для доказательства домножим и разделим левую часть тождества на $\sin\dfrac{x}{2}$.

$$\frac{\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{-2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin(-\frac{nx}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

б) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$

Для доказательства домножим и разделим левую часть тождества на $\sin\dfrac{x}{2}$.

$$\frac{\sin\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$= \frac{\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{-\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Вычислите:

29.12. а) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 4^\circ \cos 2^\circ = \cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \dfrac{1}{2}(\cos 6^\circ - \cos 2^\circ) =$

$= \cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \dfrac{1}{2}(2\cos 3^\circ - 1 + 2\cos 1^\circ - 1) = 1.$

29.13. б) $\dfrac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 40^\circ} + 4\cos 100^\circ = \dfrac{\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ \sin 40^\circ \cos 100^\circ}{\cos 60^\circ \sin 40^\circ} =$

$\dfrac{\sin 60^\circ + 2\sin 40^\circ \cos 100^\circ}{\frac{1}{2}\sin 40^\circ} = \dfrac{2[\sin 60^\circ + \sin 140^\circ + \sin(-60^\circ)]}{\sin 40^\circ} = 2 \cdot \dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 2.$

29.14. а) $2\sin 87^\circ \cos 57^\circ - \sin 36^\circ = \sin 144^\circ + \sin 30^\circ - \sin 36^\circ =$
$\sin 36^\circ + \dfrac{1}{2} - \sin 36^\circ = \dfrac{1}{2}.$

29.15. б) $2\cos 28^\circ \cos 17^\circ - 2\sin 31^\circ \sin 14^\circ - 2\sin 14^\circ \sin 3^\circ =$

$= \cos 11^\circ + \cos 45^\circ - (\cos 17^\circ - \cos 45^\circ) - (\cos 11^\circ - \cos 17^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

29.16. а) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ =$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 40^\circ + \cos 20^\circ) \cdot \dfrac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) =$

$= \dfrac{1}{4}(\cos 40^\circ \cos 120^\circ + \cos 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 20^\circ \cos 120^\circ + \cos 20^\circ \cos 20^\circ) =$

$= \dfrac{1}{8}(\cos 160^\circ + \cos 80^\circ + \cos 60^\circ + \cos 20^\circ + \cos 140^\circ + \cos 100^\circ + \cos 40^\circ + \cos 0^\circ) =$

$= \dfrac{1}{8}(-\cos 20^\circ + \cos 80^\circ + \dfrac{1}{2} + \cos 20^\circ - \cos 40^\circ - \cos 80^\circ + \cos 40^\circ + 1) = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{16}.$

29.17. Сравните числа:
а) $a = \sin 1 \cos 2,\ b = \sin 3 \cos 4.$
$a - b = \sin 1 \cos 2 - \sin 3 \cos 4 = \dfrac{1}{2}(\sin 3 - \sin 1) - \dfrac{1}{2}(\sin 7 - \sin 1) = \dfrac{1}{2}(\sin 3 - \sin 7) =$
$= \dfrac{1}{2}[2\sin(-2)\cos 5] = -2\sin 2\cos 5$. Это выражение меньше нуля, поскольку угол 2 принадлежит второй четверти и $\sin 2 > 0$, а угол 5 принадлежит четвертой четверти и $\cos 5 > 0$. Таким образом, $a < b$.

29.18. Докажите неравенство:
б) $\cos(2x - 3)\cos(2x + 3) > \sin(1 + 2x)\sin(1 - 2x)$.
$\cos(2x - 3)\cos(2x + 3) - \sin(1 + 2x)\sin(1 - 2x) = \dfrac{1}{2}(\cos 4x + \cos 6) - \dfrac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2) = \dfrac{1}{2}(\cos 6 - \cos 2) = \dfrac{1}{2}(-2\sin 4\sin 2) = -\sin 4\sin 2$. Это выражение больше

нуля, поскольку угол 4 принадлежит третьей четверти и $\sin 4 < 0$, а угол 2 принадлежит второй четверти и $\sin 2 > 0$. Таким образом, неравенство доказано.

29.19. а) Зная, что $\cos x = \frac{3}{4}$, вычислите $16 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$.

$16 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 8(\cos x - \cos 2x) = 8(\cos x - 2\cos^2 x + 1) = 8\left(\frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{9}{16} + 1\right) =$
$= 8 \cdot \frac{12 - 18 + 16}{16} = 5.$

Решите уравнение:

29.20. б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$

$\frac{1}{2}\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin \frac{\pi}{2}\right] = 1;\ \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = 1;\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1;$
$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$

29.21. а) $2 \sin x \cos 3x + \sin 4x = 0.$
$\sin 4x + \sin(-2x) + \sin 4x = 0;\ 2\sin 4x - \sin 2x;\ 4 \sin 2x \cos 2x - \sin 2x) = 0;$
$\sin 2x(4 \cos 2x - 1) = 0. \sin 2x = 0;\ 2x = k\pi;\ x = \frac{k\pi}{2}.$
$4 \cos 2x - 1 = 0;\ \cos 2x = \frac{1}{4};\ 2x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2k\pi;\ x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + k\pi.$
Ответ: $\frac{k\pi}{2},\ \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + k\pi.$

29.22. в) $\sin 2x \cos x = \sin x \cos 2x.$
$\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) = \frac{1}{2}[\sin 3x + \sin(-x)];\ \sin x = -\sin x;\ \sin x = 0;\ x = k\pi.$

29.23. Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корень уравнения:
а) $\sin x \sin 3x = 0{,}5.$
$\frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 4x] = 0{,}5;\ \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = 1;\ \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$
$\cos 2x = 0;\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$
$1 - 2\cos 2x = 0;\ \cos 2x = \frac{1}{2};\ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi.$
Ответ: $\frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6}.$

29.24. При каких значениях x числа $a,\ b,\ c$ образуют геометрическую прогрессию, если:
б) $a = \sin 2x,\ b = \sin 3x,\ c = \sin 4x.$
$\frac{b}{a} = \frac{c}{b};\ ac = b^2;\ \sin 2x \sin 4x = \sin^2 3x;\ \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x);$
$\cos 2x = 1;\ 2x = 2k\pi;\ x = k\pi.$

Ответ: при $x = k\pi$.

29.25. Решите неравенство:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right) < 0.$

$\frac{1}{4}\left(\cos 2x - \cos\frac{\pi}{4}\right) < 0;\ \cos 2x < \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi;$

$\frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{7\pi}{8} + k\pi.$

29.26. Решить систему уравнений :

б) $\begin{cases}\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{4}\\ \sin(x+y)\sin(x-y) = \frac{3}{4}\end{cases}.$

$\begin{cases}\frac{1}{2}(\cos 2y + \cos 2x) = \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x) = \frac{3}{4}\end{cases};\quad \begin{cases}\cos 2y + \cos 2x = \frac{1}{2}\\ \cos 2y - \cos 2x = \frac{3}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}\cos 2y = 1\\ \cos 2x = -\frac{1}{2}\end{cases}.$

$\cos 2x = -\frac{1}{2};\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;\ \cos 2y = 1;\ 2y = 2n\pi;\ y = n\pi.$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ y = n\pi.$

29.27. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции:

а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\frac{\pi}{6}\right] =$

$= \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{4}.$

Ответ: Наименьшее значение $-\frac{1}{4}$, наибольшее значение $\frac{3}{4}$.