Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание двадцатое. М., 1985.

Глава II. Понятие о пределе

Вычислить пределы:

286. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{4}.$

288. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}+\ldots+\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10}}{1+\frac{10^{10}}{x^{10}}}=100.$

290. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right)}=1.$

292. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{7/3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^7}}-\sqrt[5]{x^{3-35/3}+4x^{-35/3}}\right)}{x^{7/3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}}=\dfrac{0}{1}=0.$

294. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}=\quad |t=\sqrt{1+x};\quad x=t^2-1;\quad t\to 1.|\quad=$
$=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{(t^2-1)^2}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1}{(t-1)(t+1)^2}=\infty.$

299. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\quad |t=\sqrt[3]{1+x^2};\quad x^2=t^3-1;\quad t\to 1.|\quad=$
$=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{t^3-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1}{t^2+t+1}=\dfrac{1}{3}.$

303. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1-2x}-1}{x+x^2}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-1}{x(x+1)[\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1]}-$
$-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x-1}{x(x+1)[\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1]}=0+\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}.$

304. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{x-1}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7+x^3-8}{(x-1)[\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{7+x^3}\cdot 2+4]}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3+x^2-4}{(x-1)(\sqrt{3+x^2}+2)}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{7+x^3}\cdot 2+4}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3+x^2}+2}=\dfrac{3}{4+4+4}-\dfrac{2}{2+2}=-\dfrac{1}{4}.$

Используем первый замечательный предел и его следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Вычислить пределы:

320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(2-\frac{\arcsin x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}.$

337. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4})}=\quad |t=\pi-x;\quad x=\pi-t;\quad t\to 0.|\quad =$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)\right]}=$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{t}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{t}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{t}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{t}{4}\right)}=$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{t}{4}}{\sin\frac{t}{2}\left(\sqrt{2}\sin\frac{t}{4}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t^2\cdot 2\cdot 4}{4^2\cdot t\cdot\sqrt{2}\cdot t}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

345. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-1-\cos x}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot x^2}{2^2\cdot x^2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}.$

349. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}3x}-\sqrt[3]{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg}2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\operatorname{arctg}3x-1+\arcsin 3x}{1-\arcsin 2x-1-\operatorname{arctg}2x}\times$
$\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\arcsin 2x}+\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}}{\sqrt[3]{(1+\operatorname{arctg}3x)^2}+\sqrt[3]{(1+\operatorname{arctg}3x)(1-\arcsin 3x)}+\sqrt[3]{(1-\arcsin 3x)^2}}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot(\frac{\operatorname{arctg}3x}{3x}+\frac{\arcsin 3x}{3x})}{-2x\cdot(\frac{\arcsin 2x}{2x}+\frac{\operatorname{arctg}2x}{2x})}\cdot\dfrac{2}{3}=-1.$

350. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\pi-\arccos x}{\sqrt{x+1}\cdot(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}.$
По смыслу задачи $\pi-\arccos x$ принадлежит первой четверти. Таким образом, выбирая знак плюс для синуса этой величины, имеем для нашего случая $\sin(\pi-\arccos x)=\sin\arccos x=+\sqrt{1-x^2}$. Поэтому $\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Преобразуя числитель в соответствии с этим равенством, вычисляем предел:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\arcsin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}\cdot(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}\cdot(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Используем второй замечательный предел и его следствия:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \text{ при } a>0 \text{ и } a\neq 1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1 \text{ при } \alpha\neq 0.$$

Вычислить пределы:

362. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right]^{\frac{(2x-1)x}{x^2-4x+2}}=$
$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}}=e^2.$

364. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}]^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=\sqrt{e}.$

373. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{e^x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2.$

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x(x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}=$
$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)}\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1-x^4}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\infty}=0.$

385. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\cos x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x-\cos x}{x+\cos x}=1-0=1.$

391. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot 2\sin^2\frac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{2}{4x^2}=1/2.$

395. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}.$
По смыслу задачи $\arcsin x$, $\operatorname{arctg}x$ и $\arcsin x-\operatorname{arctg}x$ близки к нулю и находятся в правой полуплоскости. Поэтому:
$\sin(\arcsin x-\operatorname{arctg}x)=x\cdot\cos\operatorname{arctg}x-\cos\arcsin x\cdot\sin\operatorname{arctg}x=$
$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}.$
В соответствии с этим равенством преобразуем числитель и вычисляем предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}\cdot x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\cdot x^3(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}=1/2.$$

399. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x-\sin x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x-x)}{x(x-\sin x)}}=1/e.$

Глава IV. Исследование функций и кривых линий

При вычислении кривизны и радиуса кривизны плоских линий используем следующие формулы:

$$y=y(x),\quad \varkappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},\quad R=\frac{1}{\varkappa}.$$

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \varkappa=\frac{|y''x'-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},\quad R=\frac{1}{\varkappa}.$$

$$\rho=\rho(\varphi),\quad \varkappa=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}},\quad R=\frac{1}{\varkappa}.$$

Найти кривизну данных линий.

1533. $y=\ln x$ в точке $(1,0)$.

$$\blacktriangleleft\ y'=\frac{1}{x},\quad y''=-\frac{1}{x^2},\quad \varkappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\left|\frac{1}{x^2}\right|\frac{x^{3/2}}{(x^2+1)^{3/2}}=\frac{1}{2^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.\ \blacktriangleright$$

Найти кривизну данных линий в произвольной точке (x,y).

1540. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

$$\blacktriangleleft\quad F(x)=x^{2/3}+y^{2/3}-a^{2/3};\quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2}{3}x^{-1/3};\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{3}y^{-1/3}.$$

$$y'=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/3}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3};$$

$$y''=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2/3}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{2/3}\cdot\frac{-x\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}-y}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{2/3}\cdot\frac{xy^{1/3}+x^{1/3}y}{x^{7/3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{y^{1/3}x^{4/3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^{2/3}}{x^{4/3}y^{1/3}}.$$

$$\varkappa=\frac{a^{2/3}}{3}\cdot\left|\frac{x}{x^{4/3}y^{1/3}(x^{2/3}+y^{2/3})^{3/2}}\right|=\frac{a^{2/3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{|xy|a}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{a|xy|}}.\ \blacktriangleright$$

Найти кривизну данных линий.

1547. $\rho = a^\varphi$ в точке $\rho = 1$, $\varphi = 0$.

◀ $\rho' = a^\varphi \ln a; \quad \rho'' = a^\varphi \ln^2 a.$

$$\varkappa = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{|(a^\varphi)^2 + 2(a^\varphi)^2 \ln^2 a - (a^\varphi)^2 \ln^2 a|}{((a^\varphi)^2 + (a^\varphi)^2 \ln^2 a)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1 + \ln^2 a}{a^\varphi (1 + \ln^2 a)^{3/2}} = \frac{1}{a^\varphi \sqrt{1 + \ln^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \ln^2 a}}. \text{ ▶}$$

1551. Показать, что радиус кривизны параболы равен удвоенному отрезку нормали, заключенному между точками пересечния нормали с параболой и ее директрисой.

◀ Каноническое уравнение повернутой параболы $x^2 = 2py$ или $y = \dfrac{x^2}{2p}$ ее директриса будет иметь уравнение $y = -\dfrac{p}{2}$. Вычислим радиус кривизны параболы в точке, абсцисса которой равна x_0.

$$y' = \frac{x}{p}, \quad y'' = \frac{1}{p}, \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = p(1 + x_0^2/p^2)^{3/2} = \frac{(p^2 + x_0^2)^{3/2}}{p^2}.$$

С другой стороны, нормаль к параболе в точке с координатами $\left(x_0; y_0 = \dfrac{x_0^2}{2p}\right)$ будет иметь уравнение $y - \dfrac{x_0^2}{2p} = -\dfrac{p}{x_0}(x - x_0)$ для $x_0 \neq 0$ и $x = 0$ для $x_0 = 0$. Абциссу пересечения нормали с директрисой находим, подставляя в уравнение нормали значение $y = -\dfrac{p}{2}$.

Для $x_0 \neq 0 \quad -\dfrac{p}{2} - \dfrac{x_0^2}{2p} = -\dfrac{p}{x_0}(x - x_0); \quad \dfrac{p}{2} + \dfrac{x_0^2}{2p} + p = \dfrac{p}{x_0}x; \quad x = \dfrac{x_0}{2} + \dfrac{x_0^3}{2p^2} + x_0.$

Эта же формула дает нам правильную абциссу и в случае, когда $x_0 = 0$ и нормаль вертикальна. Теперь можем вычислить удвоенную длину отрезка нормали:

$$2L = 2\sqrt{\left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_0^3}{2p^2}\right)^2 + \left(\frac{x_0^2}{2p} + \frac{p}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^4}{2p^2} + \frac{x_0^6}{4p^4} + \frac{x_0^4}{4p^2} + \frac{x_0^2}{2} + \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{p^6 + 3p^4 x_0^2 + 3p^2 x_0^4 + x_0^6}}{2p^2} = \frac{(p^2 + x_0^2)^{3/2}}{p^2}.$$

Мы видим, что вычисленные значения совпадают. ▶

1552. Показать, что радиус кривизны циклоиды в любой ее точке вдвое больше длины нормали в той же точке.

◀ Параметрические уравнения циклоиды

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t.$$

Вычисляем производные и направление касательной

$$x' = a - a\cos t, \quad y' = a\sin t.$$

Нормаль имеет направление $(-a\sin t; a - a\cos t)$. Ее уравнение таково:

$$\frac{x - at + a\sin t}{-a\sin t} = \frac{y - a + a\cos t}{a - a\cos t}.$$

Подставим в это уравнение $y = 0$, чтобы вычислить абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox

$$\frac{x - at + a\sin t}{-a\sin t} = \frac{-a + a\cos t}{a - a\cos t}; \quad x - at + a\sin t = a\sin t; \quad x = at.$$

Вычисляем длину нормали

$$L = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a - a\cos t)^2} = a\sqrt{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Теперь займемся радиусом кривизны. Для этого вычисляем вторые производные $x'' = a\sin t, \quad y'' = a\cos t$ и используем формулу для радиуса кривизны

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|y''x' - y'x''|} = \frac{((a - a\cos t)^2 + a^2\sin^2 t)^{3/2}}{|a\cos t(a - a\cos t) - a\sin t \cdot a\sin t|} = \frac{(2a^2 - 2a^2\cos t)^{3/2}}{|a^2\cos t - a^2|} =$$

$$= \frac{(4a^2\sin^2\frac{t}{2})^{3/2}}{2a^2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{8a^3\sin^3\frac{t}{2}}{2a^2\sin^2\frac{t}{2}} = 4a\sin\frac{t}{2}.$$

Радиус оказался вдвое больше длины нормали в той же точке. ►

1553. Показать, что радиус кривизны лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ обратно пропорционален соответствующему полярному радиусу.

◄ Дифференцируем по φ обе части уравнения лемнискаты и находим ρ'. Затем вычисляем ρ'^2 и ρ'':

$$2\rho\rho' = -2a^2\sin 2\varphi; \quad \rho' = -\frac{a^2\sin 2\varphi}{\rho};$$

$$\rho'^2 = \frac{a^4\sin^2 2\varphi}{\rho^2} = \frac{a^4 - a^4\cos^2 2\varphi}{\rho^2} = \frac{a^4 - \rho^4}{\rho^2} = \frac{a^4}{\rho^2} - \rho^2;$$

$$\rho'' = -\frac{2a^2\rho\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin 2\varphi}{\rho}\cdot a^2\sin 2\varphi}{\rho^2} = -\frac{2\rho^2a^2\cos 2\varphi + a^4 - a^4\cos^2 2\varphi}{\rho^3} =$$

$$= -\frac{2\rho^4 + a^4 - \rho^4}{\rho^3}.$$

Теперь по известной формуле записываем радиус кривизны:

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|} = \frac{(\rho^2 + \frac{a^4}{\rho^2} - \rho^2)^{3/2}}{\left|\rho^2 + 2 \cdot \frac{a^4 - \rho^4}{\rho^2} + \frac{2\rho^4 + a^4 - \rho^4}{\rho^2}\right|} =$$

$$= \frac{a^6}{\rho^3} \cdot \frac{\rho^2}{|\rho^4 + 2a^4 - 2\rho^4 + 2\rho^4 + a^4 - \rho^4|} = \frac{a^2}{3\rho}.$$

Мы видим, что радиус кривизны в данной точке обратно пропорционален полярному радиусу этой точки. ►

1555. Найти окружность кривизны гиперболы $xy = 1$ в точке $(1, 1)$.

◄ Находим радиус кривизны в точке $(1, 1)$.

$$y = \frac{1}{x}; \quad y' = -\frac{1}{x^2}; \quad y'' = \frac{2}{x^3}; \quad R = \frac{(1+1)^{3/2}}{2} = \sqrt{2}.$$

В точке $x = 1$ производная функции $y(x)$ равна -1, поэтому угловой коэффициент нормали будет равен 1. Нормаль в точке $(1, 1)$ имеет уравнение

$$(y - 1) = 1 \cdot (x - 1) \text{ или } x = 1,$$

то есть нормаль является биссектрисой первого квадранта. Центр окружности кривизны лежит на этой биссектрисе и находится со стороны вогнутости гиперболы на расстоянии $\sqrt{2}$ от точки $(1, 1)$. Очевидно, что он имеет координаты $(2, 2)$. По известному центру и радиусу окружности можно написать ее уравнение: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$. ►

Глава V. Определенный интеграл

Глава VI. Неопределенный интеграл

1676. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$

1677. $\displaystyle\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \int x^{n/m} = \frac{m}{n+m}\int x^{n+m/m}.$

1936. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}} = \quad \left| t = \sqrt{1+2x}, \quad x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = t\,dt. \right|$

$$= \int \frac{(t^2-1)\cdot t\,dx}{2t} = \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} = \frac{(1+2x)\sqrt{1+2x}}{6} - \frac{\sqrt{1+2x}}{2} = \frac{(x-1)\sqrt{1+2x}}{3}.$$

1941. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3}\ln(3x - 1 + \sqrt{9x^2 - 6x + 2}).$

1947. $\displaystyle\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 4\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$
$= 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).$

1954. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2x+3}} = \int \sqrt{x}\,d\sqrt{2x+3} = \sqrt{2x^2+3x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{2+\frac{3}{x}}\,dx =$
$\displaystyle= x\sqrt{2+\frac{3}{x}} - \frac{x}{2}\sqrt{2+\frac{3}{x}} + \frac{1}{2}\int x\,d\sqrt{2+\frac{3}{x}} = \frac{x}{2}\sqrt{2+\frac{3}{x}} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}} =$
$\displaystyle= \frac{\sqrt{2x^2+3x}}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\int \frac{d(x+3/4)}{\sqrt{(x+3/4)^2-(3/4)^2}} =$
$\displaystyle= \frac{\sqrt{2x^2+3x}}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right).$

1957. $\displaystyle\int x\sin x\,\cos x\,dx = \int x\sin x\,d\sin x = \frac{1}{2}\int x\,d\sin^2 x =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(x\sin^2 x - \int \sin^2 x\,dx\right) = \frac{x\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$
$\displaystyle= \frac{x - x\cos 2x}{4} - \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} = \frac{\sin 2x}{8} - \frac{x\cos 2x}{4}.$

1966. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} = \quad \left| t = e^x, \quad dt = e^x dx = t\,dx, \quad dx = \frac{dt}{t} \right|$
$\displaystyle= \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\frac{e^x}{e^x+1}.$

1974. $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)\,dx}{\sin 2x} = \quad \left| t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}. \right|$
$\displaystyle= \int \frac{(1+t)(1+t^2)\,dx}{2t(1+t^2)} = \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$

1984. $\displaystyle\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \quad |x = \sin u, \quad dx = \cos u.| \quad = \int \frac{\sin^4 u \cdot \cos u}{\cos^3 u}\,du =$
$\displaystyle= \int \frac{d\operatorname{tg} u}{(1+\operatorname{ctg}^2 u)^2} = \int \frac{\operatorname{tg}^4 u\,d\operatorname{tg} u}{(1+\operatorname{tg}^2 u)^2} = \quad |t = \operatorname{tg} u| \quad = \int \frac{t^4\,dt}{(1+t^2)^2} =$
$\displaystyle= \int dt - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} - \int \frac{(1+t^2)\,dt}{(1+t^2)^2} = t - \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} =$
Отдельно вычислим интеграл
$\displaystyle-\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int t\cdot d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t.$
Подставим в основной интеграл
$\displaystyle t - \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{2t^3+3t}{2(1+t^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t =$
Учитывая, что $\displaystyle t = \operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, получаем

$$= \left(\frac{2x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \Big/ \left(2 + \frac{2x^2}{1-x^2} \right) - \frac{3}{2} \arcsin x =$$
$$= \frac{3x - x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1-x^2}{2} - \frac{3}{2} \arcsin x = \frac{3x - x^3}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2} \arcsin x.$$

Еще один вариант решения задачи.

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{1}{2} \int \frac{x^3 d(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int x^3 d\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - 3 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{2} \int \frac{x\, d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + 3 \int x\, d\sqrt{1-x^2} =$$
$$= \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + 3x\sqrt{1-x^2} - 3 \int \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

Отдельно вычислим интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Для этого положим

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x.$$

Отсюда находим: $I = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$

Теперь вычисляем сам интеграл задачи:

$$= \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + 3x\sqrt{1-x^2} - \frac{3x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{3}{2} \arcsin x =$$
$$= \frac{2x^3 + 3x - 3x^3}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2} \arcsin x = \frac{3x - x^3}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2} \arcsin x.$$

1992. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = \qquad \left| t = \sqrt{1+x}, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t\, dt. \right|$

$$= \int \frac{2t\, dt}{(t^2+1)t} = 2 \operatorname{arctg} t = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x}.$$

2009. $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}} =$

$$= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

2018. $\displaystyle\int \frac{32x\, dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} = \int \frac{32x\, dx}{(2x-1)(2x-3)(2x-5)} =$

$$= \int \left(\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{2x-5} \right) dx = \ldots$$

$32x = A(2x-3)(2x-5) + B(2x-1)(2x-5) + C(2x-1)(2x-3).$

$x = 1/2, \quad A = 2. \quad x = 3/2, \quad B = -12, \quad x = 5/2, \quad C = 10.$

$$\ldots = \int \left(\frac{2}{2x-1} - \frac{12}{2x-3} + \frac{10}{2x-5} \right) dx =$$
$$= \int \frac{d(2x-1)}{2x-1} - 6 \int \frac{d(2x-3)}{2x-3} + 5 \int \frac{d(2x-3)}{2x-5}, dx =$$

$= \ln|2x-1| - 6\ln|2x-3| + 5\ln|2x-5|$.

2023. $\displaystyle\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x}\right) dx = \ldots$

$(x+2)^2 = Ax(x-1) + Bx + C(x-1)^2$.

$x=1, \quad B=9, \quad x=0, \quad C=4, \quad x=-1, \quad 1=2A-9+16, \quad A=-3.$

$\displaystyle\ldots = \int \left(-\frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{4}{x}\right) dx - == 4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1}.$

2034. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}\right) dx = \ldots$

$x^3 - 2x^2 + 4 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3 =$

$= (A+D)x^4 + (-4A+B-2D+E)x^3 + (4A-4B+C)x^2 + (4B-4C)x + 4C.$

$$\begin{cases} A+D=0 \\ -4A+B-2D+E=1 \\ 4A-4B+C=-2 \\ 4B-4C=0 \\ 4C=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} D=-1/4 \\ E=1/2 \\ A=1/4 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}.$$

$\displaystyle\ldots = \int \left(\frac{1/4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1/4}{x-2} + \frac{1/2}{(x-2)^2}\right) dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{2(x-2)} = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)}.$

2047. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4} = \int \frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} =$

$\displaystyle\int \left(\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) dx = \ldots$

$1 = (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1).$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} C=-A \\ \sqrt{2}A+B+\sqrt{2}A-B=-1 \\ A+\sqrt{2}B-A+\sqrt{2}B=\sqrt{2} \\ D=1-B \end{cases};$$

$$\begin{cases} C=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ A=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$\displaystyle\ldots = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx =$

$\displaystyle= -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx +$

$\displaystyle+ \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{d(x-\sqrt{2}/2)}{(x-\sqrt{2}/2)^2+1/2} +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{d(x+\sqrt{2}/2)}{(x+\sqrt{2}/2)^2+1/2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} = .$$

2053. $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = \int \left(\frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}\right) dx = \dots$

$2x = A(1+x^2)^2 + (Bx+C)(1+x)(1+x^2) + (Dx+E)(1+x)$.

$x=-1, \quad -2=4A, \quad A=-1/2.$

$x=i, \quad 2i=(E-D)+(D+E)i, \quad E=1, \quad D=1.$

$2 = \left.((Bx+C)(1+x)2x + (Dx+E) + D(1+x))\right|_{x=i};$

$2 = -2(B+C) + 2(C-B)i + i + 1 + 1 + i;$

$B+C=0, \quad B-C=1, \quad B=1/2, \quad C=-1/2.$

$$\dots = \int \left(-\frac{1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{2(1+x^2)} + \frac{x+1}{(1+x^2)^2}\right) dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{4}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} + \int\frac{dx}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(1+x^2)} + \int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$
$$= \frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(1+x^2)} + \int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Имеем: $\displaystyle\operatorname{arctg} x = \int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} =$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{dx}{1+x^2} - 2\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x - 2\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Отсюда получаем: $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right).$

Ответ: $\displaystyle\frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1-x}{2(1+x^2)}.$

2057. $\displaystyle\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \int\left(\frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1}\right) dx = \dots$

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B(x^2+1)-2x(Bx+C)}{(x^2+1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1};$$

$4x^2-8x = -A(x^4+2x^2+1) + B(x^2-2x+1)(x^2+1) -$
$-\, 2x(x^2-2x+1)(Bx+C) + D(x-1)(x^4+2x^2+1) +$
$+\,(x^2-2x+1)(x^2+1)(Ex+F);$

$x=1, \quad -4=-4A, \quad A=1.$

$x=i, \quad -4-8i = -2i\cdot(-2i)(C+Bi) = -4C-4Bi,$

$B=2, \quad C=1.$

$0x^5 = (D+E)x^5,$
$-8x = (-2B - 2C + D - 2F + E)x = (-6 + D - 2F + E)x,$
$0 = -A + B - D + F = 1 - D + F.$

$$\begin{cases} D+E=0 \\ D-2F+E=-2 \\ D-F=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} D+E=0 \\ -2F=-2 \\ D-F=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} E=-2 \\ F=1 \\ D=2 \end{cases}.$$

$$\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1} + \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+1} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x =$$
$$= \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x.$$

2066. $$\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{(x-1)^3(x+1)^2}\,dx =$$
$$= \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)^2(x+1)} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1} \right) dx = \ldots$$
$$\frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{(x-1)^3(x+1)^2} =$$
$$= \frac{(x-1)^2(x+1)(2Ax+B) - [2(x^2-1)+(x-1)^2](Ax^2+Bx+C)}{(x-1)^4(x+1)^2} +$$
$$+ \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}.$$
$(5-3x+6x^2+5x^3-x^4)(x-1) = (x-1)^2(x+1)(2Ax+B) -$
$-(x-1)(3x+1)(Ax^2+Bx+C) + (x-1)^3(x+1)^2D + (x-1)^4(x+1)E.$
$5-3x+6x^2+5x^3-x^4 = (x^2-1)(2Ax+B) - (3x+1)(Ax^2+Bx+C) +$
$+(x-1)^2(x+1)^2D + (x-1)^3(x+1)E.$
$-x^4 = (D+E)x^4. \quad 5x^3 = (2A-3A-2E)x^3.$
$6x^2 = (B-A-3B-2D)x^2. \quad -3x = (-2A-3C-B+2E)x.$
$5 = -B-C+D-E.$

$$\begin{cases} D+E=-1 \\ -A-2E=5 \\ -A-2B-2D=6 \\ -2A-B-3C+2E=-3 \\ -B-C+D-E=5 \end{cases}; \quad \begin{cases} E=-1-D \\ -A+2D=3 \\ -A-2B-2D=6 \\ -2A-B-3C-2D=-1 \\ -B-C+2D=4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} E=-1-D \\ A=2D-3 \\ -2B-4D=3 \\ -B-3C-6D=-7 \\ -B-C+2D=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} E=-1-D \\ A=2D-3 \\ 2C-8D=-5 \\ -2C-8D=-11 \\ -B=C-2D+4 \end{cases}; \quad \begin{cases} E=-2 \\ A=-1 \\ C=3/2 \\ D=1 \\ B=-7/2 \end{cases}.$$

$$\ldots = \frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)} + \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)} + \ln\frac{|x-1|}{(x+1)^2}.$$

2075. $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \int \frac{\sqrt[4]{x-1}\,dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{x+2}} =$$

$$\left| \frac{x-1}{x+2} = t^4, \quad x-1 = t^4(x+2), \quad x = \frac{1+2t^4}{1-t^4}, \quad x-1 = \frac{3t^4}{1-t^4}, \right.$$

$$\left. x+2 = \frac{3}{1-t^4}, \quad dx = \frac{8t^3(1-t^4)+4t^3(1+2t^4)}{(1-t^4)^2}\,dt = \frac{12t^3\,dt}{(1-t^4)^2}. \right|$$

$$= \int \frac{t(1-t^4)^2 12t^3\,dx}{3t^4\cdot 3\cdot(1-t^4)^2} = \frac{4}{3}\int dt = \frac{4}{3}t = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}.$$

2080. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \qquad \left| x^{-3}+1 = t^3, \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}, \quad dx = -\frac{t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}. \right|$$

$$= -\int \frac{\sqrt[3]{t^3-1}\cdot t^2\,dt}{t\sqrt[3]{(t^3-1)^4}} = -\int \frac{t\,dt}{t^3-1} = -\int\left(\frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}\right)dt = \ldots$$

$t = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1). \quad t=1, \quad A = 1/3.$
$t=0, \quad 0 = C-A, \quad C = A = 1/3.$
$t=-1, \quad -1 = 1/3 + (B-1/3)\cdot 2, \quad B = -1/3.$

$$\ldots = -\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\ln|t-1| - \frac{1}{2}\int\frac{(2t+1)\,dt}{t^2+t+1} + \frac{3}{2}\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}, \quad t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$$

2089. $$\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx =$$

$$\left|1+\sqrt[4]{x} = t^3, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt\right|$$

$$= 12\int t^3(t^3-1)^3\,dt = 12\left(\frac{t^{13}}{13} - \frac{3t^{10}}{10} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right), \quad t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$$

2092. $$\int\frac{dx}{\cos x\sin^3 x} = \int\frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)\sin^3 x} = \int\frac{dt}{(1-t)(1+t)t^3} =$$

$$\int\left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} + \frac{E}{t^3} + \right)dt = \ldots$$

$1 = A(1+t)t^3 + B(1-t)t^3 + C(1-t^2)t^2 + D(1-t^2)t + E(1-t^2).$
$t=1, \quad A = 1/2. \quad t=-1, \quad B = -1/2, \quad t=0, \quad E = 1.$
$0t^3 = (A+B-D)t^3, \quad D = 0. \quad 0t^4 = (A-B-C)t^4, \quad C = 1.$

$$\ldots = \int\left(\frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + \ln|t| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|1-t^2| + \ln|t| - \frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-\sin^2 x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} =$$
$$= \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x}.$$

2099. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = \qquad \left| x = \operatorname{arcctg} t, \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2} \quad t = \operatorname{ctg} x. \right|$

$$= -\int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt = -\int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = -\frac{t^3}{3} + t + \operatorname{arcctg} t =$$
$$= \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + x.$$

2111. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \qquad \left| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \right|$

$$= \int \frac{2\,dt}{(5+\frac{8t}{1+t^2})(1+t^2)} = \int \frac{2\,dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{(t+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}} =$$
$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5t+4}{3} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}.$$

2120. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right).$

2127. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}} = \qquad \left| t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}. \right|$

$$1-\sin^4 x = 1 - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2}.$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}} = \int \frac{(1+t^2)\,dt}{(1+t^2)\sqrt{1+2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(t + \sqrt{t^2+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg}^2 x + 1}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg}^2 x + 1}\right) + C.$$

2139. $\displaystyle\int \operatorname{cth}^2 x\,dx = \int \operatorname{ch} x\cdot\frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh}^2 x} = -\int \operatorname{ch} x\,d\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right) =$

$$= -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} + \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x}\,dx = x - \operatorname{cth} x.$$

2150. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\operatorname{sh}^4 x} = 16\int \frac{e^x\,d(e^x)}{(e^x-e^{-x})^4} = 16\int \frac{t\,dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^4} = 16\int \frac{\frac{1}{t^3}\,dt}{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^4} =$

$$= 8\int \frac{d\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^4} = 8\int \frac{d\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^4} = -\frac{8}{3\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^3} = -\frac{8t^3}{3\left(t-\frac{1}{t}\right)^3} =$$

$$= -\frac{8(e^x)^3}{3\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)^3} = -\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}.$$

2154. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{(1+x)(2-x)}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1+x}{2-x}} \cdot \frac{dx}{x(1+x)} =$$

$$\left| \frac{1+x}{2-x} = t^2, \quad 1+x = (2-x)t^2, \quad x = \frac{2t^2-1}{t^2+1}, \quad x+1 = \frac{3t^2}{t^2+1}, \right.$$

$$\left. dx = \frac{(t^2+1)4t - 2t(2t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{6t\,dt}{(t^2+1)^2} \right|$$

$$= \int \frac{t(t^2+1)^2 \cdot 6t\,dt}{(2t^2-1)\cdot 3t^2(t^2+1)^2} = \int \frac{dt}{t^2-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}/2}{t+\sqrt{2}/2}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1}\right| = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{2\cdot\frac{1+x}{2-x} + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{2-x}} + 1}{2\cdot\frac{1+x}{2-x} - 1}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{2(1+x) + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+x-x^2} + 2 - x}{2(1+x)-(2-x)}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{4+x+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+x-x^2}}{3x}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right| =$$

$$= C - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|.$$

2162. $$\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})} = -\int \frac{(x-\sqrt{1+x^2})}{x^2}\,dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx = -\ln|x| + \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Оставшийся интеграл вычисляем подстановкой Абеля.

$$t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad t^2(1+x^2) = x^2, \quad x^2 = \frac{t^2}{1-t^2}; \quad t\sqrt{1+x^2} = x,$$

$$dt\sqrt{1+x^2} + \frac{tx\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = dx, \quad dt\sqrt{1+x^2} + t^2\,dx = dx, \quad \frac{dt}{1-t^2} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^2(1-t^2)} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Ответ: $\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

2170. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}};$

$$\frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}}+$$
$$+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}};$$

$x^4 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+4x+5)+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(x+2)+\lambda;$

$1 = 3A+A, \quad 0 = 12A+2B+2A+B, \quad 0 = 15A+8B+C+2B+C,$

$0 = 10B+4C+2C+D; \quad 0 = 5C+2D+\lambda.$

$$A=\frac{1}{4}, \quad B=-\frac{7}{6}, \quad C=-\frac{15}{2}A-5B=-\frac{15}{8}+\frac{35}{6}=\frac{140-45}{24}=\frac{95}{24},$$

$$D=\frac{70}{6}-\frac{6\cdot 95}{24}=\frac{280-570}{24}=-\frac{290}{24}=-\frac{145}{12},$$

$$\lambda=-\frac{5\cdot 95}{24}+\frac{145}{6}=\frac{580-475}{24}=\frac{105}{24}=\frac{35}{8}.$$

Ответ: $\displaystyle\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right).$

2174. $\displaystyle\int\frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}} =$

$$=\int\frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}+\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

1) $\displaystyle\int\frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}} = 2\int\frac{d\sqrt{x^2+2x+4}}{x^2+2x+3} = 2\int\frac{dt}{t^2-1} =$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}\right|.$$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}} = \ldots$

$$t=\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}, \quad x+1=t\sqrt{x^2+2x+4},$$

$x^2+2x+1=(x^2+2x+4)t^2, \quad x^2+2x+4-3=(x^2+2x+4)t^2,$

$$x^2+2x+4=\frac{3}{1-t^2}, \quad x^2+2x+3=\frac{2+t^2}{1-t^2},$$

$$dx=dt\sqrt{x^2+2x+4}+t^2dx, \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

$$\ldots=\int\frac{dt}{2+t^2}=-\frac{1}{\sqrt2}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{t}{\sqrt2}=-\frac{1}{\sqrt2}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\displaystyle\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}\right|-\frac{1}{\sqrt2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C.$

2177. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx=\frac{3}{4}\int x\,d[(a+x)^{4/3}]=\frac{3}{4}x(a+x)^{4/3}-\frac{3}{4}\int(a+x)^{4/3}dx=$

$$= \frac{3}{4}x(a+x)^{4/3} - \frac{9}{28}(a+x)^{7/3}dx = \frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}.$$

2185. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx = \int x^2 d(\operatorname{ch} x) = x^2 \operatorname{ch} x - 2\int x \operatorname{ch} x\,dx =$

$\displaystyle= x^2 \operatorname{ch} x - 2\int x\,d(\operatorname{sh} x) = x^2 \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + 2\int \operatorname{sh} x\,dx =$

$= x^2 \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x.$

2191. $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx = \quad \left|t = \sqrt{x}, \quad x = t^2\right| \quad = 2\int t \sin t\,dt =$

$\displaystyle= -2\int t\,d(\cos t) = -2t\cos t + 2\int \cos t\,dt = -2t\cos t + 2\sin t =$

$= 2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}).$

2197. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}} = \int \frac{dx}{x^3(1+x)\sqrt{1+x}} =$

$\left|\sqrt{1+x} = t, \quad x = t^2 - 1 \quad dx = 2t\,dt.\right|$

$\displaystyle= \int \frac{2\,dt}{t^2(t^2-1)^3} = \int \left(\frac{A}{t^2} + \frac{B}{t^2-1} + \frac{C}{(t^2-1)^2} + \frac{D}{(t^2-1)^3}\right) dt = \ldots$

$2 = (t^2-1)^3A + t^2(t^2-1)^2B + t^2(t^2-1)C + t^2D.$

$t^2 = 0, \quad A = -2. \quad t^2 = 1, \quad D = 2.$

$0t^2 = 3A + B - C + D, \quad B - C = 4.$

$0t^4 = -3A - 2B + C, \quad 2B - C = 6. \quad B = 2, \quad C = -2.$

$\displaystyle\ldots = \int \left(-\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^2-1} - \frac{2}{(t^2-1)^2} + \frac{2}{(t^2-1)^3}\right) dt = \ldots$

$\displaystyle I_n = \int \frac{dt}{(t^2-1)^n} = \frac{t}{(t^2-1)^n} + 2n\int \frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^{n+1}} =$

$\displaystyle= \frac{t}{(t^2-1)^n} + 2n\int \frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2-1)^{n+1}} + 2n\int \frac{dt}{(t^2-1)^{n+1}} =$

$\displaystyle= \frac{t}{(t^2-1)^n} + 2nI_n + 2nI_{n+1}. \quad I_{n+1} = -\frac{2n-1}{2n}I_n - \frac{t}{2n(t^2-1)^n}.$

$\displaystyle I_2 = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{t}{2(t^2-1)}. \quad I_3 = \frac{3}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{3t}{8(t^2-1)} - \frac{t}{4(t^2-1)^2}.$

$\displaystyle\ldots = \frac{2}{t} + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{t}{t^2-1} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{3t}{4(t^2-1)} - \frac{t}{2(t^2-1)^2} =$

$\displaystyle= \frac{15}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{8(t^2-1)^2 + 4t^2(t^2-1) + 3t^2(t^2-1) - 2t^2}{4t(t^2-1)^2} =$

$\displaystyle= \frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + \frac{8x^2 + 7(x+1)x - 2(x+1)}{4x^2\sqrt{1+x}} =$

$\displaystyle= \frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}} + \frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|.$

2203. $\displaystyle\int x\ln(1+x^3)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^3)\,d(x^2) = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^3) - \frac{3}{2}\int \frac{x^4dx}{1+x^3}.$

$$\int \frac{x^4 dx}{1+x^3} = \int \left(x - \frac{x}{(1+x)(1-x+x^2)} \right) dx = \int \left(x + \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} \right) dx.$$
$-x = (1-x+x^2)A + (1+x)(Bx+C). \quad x=-1, \quad A = 1/3.$
$x=0, \quad 0 = A+C, \quad C=-1/3. \quad x=1, \quad -1 = A+2B+2C, \quad B = -1/3.$
$$\int \frac{x^4 dx}{1+x^3} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{1-x+x^2}$$

2210. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int \frac{2\sin x \cos x\, dx}{(1+\operatorname{tg}^4 x)\cos^4 x} = \int \frac{2\operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^4 x} =$
$\displaystyle = \int \frac{d(\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^4 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x).$

2216. $\displaystyle\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}} = \quad \left| 1+e^x = t^2, \quad x = \ln(t^2-1), \quad dx = \frac{2t\, dt}{t^2-1}. \right|$
$\displaystyle = \int \frac{\ln(t^2-1)\cdot(t^2-1)\cdot 2t\, dt}{t\cdot(t^2-1)} = 2\int \ln(t^2-1)\, dt =$
$\displaystyle = 2t\ln(t^2-1) - 4\int \frac{t^2 dt}{t^2-1} = 2t\ln(t^2-1) - 4t - 2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$
$\displaystyle = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|.$

2222. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} = \quad \left| e^x = t, \quad x = \ln t, \quad dx = \frac{dt}{t}. \right|$
$\displaystyle = \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}} = \quad \left| t = \frac{1}{u}, \quad dt = -\frac{du}{u^2}. \right| \quad = -\int \frac{u\cdot u\, du}{u^2\sqrt{u^2+u+1}} =$
$\displaystyle = -\int \frac{d\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left|u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+1}\right| =$
$\displaystyle = \ln\left|\frac{1}{u+\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+1}}\right| = \ln\left|\frac{u+1-\sqrt{u^2+u+1}}{\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+u+1}}\right| =$
$\displaystyle = \ln 2 + \ln\left|\frac{u+1-\sqrt{u^2+u+1}}{u-1+\sqrt{u^2+u+1}}\right| == \ln\left|\frac{1+e^x-\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}\right| + C.$

Далее оцениваем радикал. Имеем: $\sqrt{1+e^x+e^{2x}} = \sqrt{\left(e^x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} < e^x + \frac{1}{2}$; $\sqrt{1+e^x+e^{2x}} = \sqrt{(e^x+1)^2-e^x} > e^x+1$. Теперь мы обнаруживаем, что числитель и знаменатель дроби положителен, и мы можем снять знак модуля. Окончательный ответ: $\displaystyle\ln\frac{1+e^x-\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} + C.$

2225. $\displaystyle\int \frac{(3+x^2)^2 x^3 dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{(3+x^2)^2 x^2 d(1+x^2)}{(1+x^2)^3} = \quad \left|1+x^2 = t\right|$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \frac{(t+2)^2(t-1)\, dt}{t^3} = \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{3}{t}-\frac{4}{t^3}\right) dt =$
$\displaystyle = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{(x^2+1)^2} + C.$

2227. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^4 x + 1)\cos^4 x} = \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1)\, d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^4 x + 1} =$

$$= \int \frac{(t^2+1)\,dt}{t^4+1} = \int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,dt}{t^2+\frac{1}{t^2}} = \int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{t^2+\frac{1}{t^2}} = \int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(\sin^2 x - \cos^2 x)}{2\sin x \cos x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x).$$

Глава VII. Способы вычисления определенных интегралов. Несобственные интегралы

2237. $\displaystyle\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx = \qquad |e^x = t| \qquad = \int_1^e (t-1)^4 dt = \frac{(t-1)^5}{5}\bigg|_1^e = \frac{(e-1)^5}{5}.$

2245. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3 dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)}} = -\frac{1}{4}\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{d\left(\frac{5}{8}-x^4\right)}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)^{3/2}} =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-x^4\right)^{-1/2}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-\frac{9}{16}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{16}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}(4-4/3) =$ $4/3$.

2252. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\, dx = -2\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\, d(\cos x) = -\,2\cdot\frac{\cos^7 x}{7}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{7}.$

2260. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx = x\sin x\big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$

2267. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx.$

◀ $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx = e^{2x}\sin x\big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\, dx =$

$$= e^{\pi} + 2\int_0^{\pi/2} e^{2x} d(\cos x) = e^{\pi} + 2e^{2x}\cos x\big|_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx =$$

$\displaystyle= e^{\pi} - 2 - 4I; \quad I = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$ ▶

2271. Составить рекуррентную формулу и вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^n e^x\, dx$ (n – целое положительное число).

$$\blacktriangleleft \int_{-1}^{0} x^n e^x\,dx$$

$$I_n = \int_{-1}^{0} x^n e^x\,dx = x^n e^x\Big|_{-1}^{0} - n\int_{-1}^{0} x^{n-1}e^x\,dx = -\frac{(-1)^n}{e} - nI_{n-1}.$$

$$I_0 = 1-\frac{1}{e},\quad I_1 = -1+\frac{2}{e},\quad I_2 = 2-\frac{5}{e},\quad I_3 = -2\cdot 3+\frac{16}{e},\ldots$$

$$I_n = (-1)^n n!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{1!}+\frac{1}{0!}\right)\right]. \blacktriangleright$$

2281*. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^6\frac{x}{2}\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^3 dx =$

$$= \frac{1}{8}\int_0^\pi (1-3\cos x+3\cos^2 x-\cos^3 x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\sin x\Big|_0^\pi + \frac{3}{8}\int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - \frac{1}{8}\int_0^\pi (1-\sin^2 x)d\sin x =$$

$$= \frac{\pi}{8} - 0 + \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{16}\sin 2x\Big|_0^\pi - \left(\frac{\sin x}{8} - \frac{\sin^3 x}{24}\right)\Big|_0^\pi = \frac{5\pi}{16}.$$

2288. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx = \qquad |x=\sin u,\quad dx=\cos x\,dx|$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^4 u\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos 2u)^2}{4}\,du =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{4} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2u}{2}\,du + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 2u}{4}\,du =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\sin 2u}{4}\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 4u}{8}\,du = \frac{\pi}{8} + 0 + \frac{\pi}{16} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 4u}{8}\,du =$$

$$= \frac{3\pi}{16} + \frac{\sin 4u}{32}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16} + 0 = \frac{3\pi}{16}.$$

2295. $\displaystyle\int_{\sqrt{8/3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}} = \qquad |x=\sqrt{2}\sec u,\quad dx=\sqrt{2}\sec u\,\mathrm{tg}\,u\,du|$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{2}\sec u\,\mathrm{tg}\,u\,du}{\sqrt{2}\sec u\cdot 2^{5/2}\cdot \mathrm{tg}^5 u} = \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{du}{\mathrm{tg}^4 u} =$$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл.

$$\int \frac{du}{\mathrm{tg}^4 u} = -\int \mathrm{ctg}^2 u\cos^2 u\,d\,\mathrm{ctg}\,u = -\int \mathrm{ctg}^2 u\cos^2 u\,d\,\mathrm{ctg}\,u =$$

$$= -\int \mathrm{ctg}^2 u\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 u}\right) d\,\mathrm{ctg}\,u = -\int \left(\mathrm{ctg}^2 u - 1 + \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 u}\right) d\,\mathrm{ctg}\,u =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^3 u}{3} + \mathrm{ctg}\,u + u.$$

Теперь продолжаем вычисление определенного интеграла.

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\frac{\mathrm{ctg}^3 u}{3} + \mathrm{ctg}\,u + u\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{8\sqrt{3}}{27} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{48}.$$

2298. Вычислить среднее значение функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

◀ $\dfrac{\int_0^\pi \sin x\,dx}{\pi} = \dfrac{-\cos x\big|_0^\pi}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}.$

$\dfrac{\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{\pi} = \dfrac{\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx}{2\pi} = \dfrac{\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x\,d(2x)}{2\pi} = \dfrac{\pi - 0}{2\pi} = \dfrac{1}{2}.$ ▶

2305. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} =$

$\left|t = \sqrt{x+1};\quad t^2 = x+1;\quad x = t^2 - 1;\quad dx = 2t\,dt.\right|$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{t+t^3} = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

2312. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3} =$ $\qquad \left|t = \tan\frac{x}{2};\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\right|$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{\left(2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\right)(1+t^2)} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{2(1-t^2) + 3(1+t^2)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{5+t^2} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2319. Решить уравнение $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}.$

◀ Сначала вычислим интеграл: $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^x \frac{d(x^2)}{x^2\sqrt{x^2-1}} =$

$\left|\sqrt{x^2-1} = t;\quad x^2 = t^2 + 1;\quad d(x^2) = 2t\,dt.\right|$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{2t\,dt}{(t^2+1)\cdot t} = \operatorname{arctg} t\Big|_1^{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4}.$$

Теперь можем решить уравнение:

$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12};\quad \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} = \dfrac{\pi}{3};\quad \sqrt{x^2-1} = \sqrt{3};\quad x^2 = 4;$
$x = \pm 2.$

Подынтегральное выражение в уравнении не имеет смысла на интервале $(-1, 1)$ поэтому при $x = -2$ интеграл также не имеет смысла. Ответ: 2. ▶

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2371. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \ln x\,d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_0^{+\infty}.$

Интеграл расходится.

2381. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx.$

◀ $\displaystyle I=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax}d(\sin bx)=$

$\displaystyle =\frac{1}{b}\cdot e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx=0-\frac{a}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}d(\cos bx)=$

$\displaystyle =-\frac{a}{b^2}\cdot e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}I.$

$\displaystyle I=\frac{a}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}I;\quad \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I=\frac{a}{b^2};\quad I=\frac{ab^2}{b^2(a^2+b^2)}=\frac{a}{a^2+b^2}.$ Ответ: $\displaystyle\frac{a}{a^2+b^2}.$ ▶

Исследовать сходимость интегралов

2388. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx.$

◀ Подынтегральная функция не превосходит функции, интеграл от которой сходится: $\displaystyle\frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}<\frac{x^{13}}{(x^5)^3}=\frac{1}{x^2}.$ Ответ: Сходится. ▶

2393. $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}.$

◀ $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}=\int_e^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{3/2}}=-2\cdot\frac{1}{(\ln x)^{1/2}}\Big|_e^{+\infty}.$ Ответ: Сходится. ▶

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2395. $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}.$

◀ $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_0^2\frac{d(x-2)}{(x-2)^2-1}=\lim_{a\to1-0}\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_0^a+\lim_{a\to1+0}\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{1-x}\Big|_a^2.$
Оба интеграла расходятся. Ответ: Расходится. ▶

2403. $\displaystyle\int_3^5\frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}=\qquad\Big|t=x-4;\quad x=t+4;\quad dx=dt.\Big|$

$\displaystyle =\int_{-1}^1\frac{t^2+8t+16}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\,dt=-\int_{-1}^1\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt+4\int_{-1}^1\frac{2t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}+17\int_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$

$\displaystyle =-\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,dt-4\int_{-1}^1\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}+17\int_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$

Первый интеграл – полукруг – равен $\pi/2$.

$\displaystyle =-\frac{\pi}{2}-8\sqrt{1-t^2}\Big|_{-1}^1+17\arcsin x\Big|_{-1}^1=-\frac{\pi}{2}-8\cdot0+17\pi=\frac{33}{2}\pi.$

2410. $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \quad \left| x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{dt}{t^2}; \quad t = \frac{1}{x}. \right| \quad = \int_{-\infty}^{-1} te^t dt =$

$= te^t \Big|_{-\infty}^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} e^t dt = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}.$

Исследовать сходимость интегралов.

2417. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$

◀ Подынтегральная функция стремится к $-\infty$ при $x \to 0+0$. При этом в некоторой окрестности нуля $\sin x > x/2$ и $\ln x > \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Поэтому отрицательную подынтегральную функцию можно оценить снизу следующим образом:

$$\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} > \frac{\ln(x/2)}{\sqrt{x}} > -\frac{1}{\sqrt[3]{x/2}\cdot\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{x^{5/6}}.$$

Интеграл от последней функции сходится. Поэтому исходный интеграл от функции, которая больше (меньше по абсолютной величине), также сходится. ▶

2422. Можно ли найти такое k, чтобы интеграл $\int_0^{+\infty} x^k dx$ сходился?

◀ При $k \le -1$ данный интеграл расходится в нуле, при $k \ge -1$ интеграл расходится в $+\infty$. Таким образом, параметра k, при котором интеграл сходился бы, не существует. ▶

Вычислить несобственные интегралы.

2429. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ $\quad$ (n – целое положительное число).

◀ Обозначим $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}.$

Для $n > 1$ имеем

$I_{n-1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\Big|_0^{+\infty} + 2(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n} =$

$= 0 + 2(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - 2a^2(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} =$

$2(n-1)I_{n-1} - 2a^2(n-1)I_n$. Откуда $I_n = \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}.$

Ответ: $I_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$. ▶

2432. $\int_0^1 (\ln x)^n dx$ $\quad$ (n – целое положительное число).

◀ Обозначим $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$. $\quad I_1 = \int_0^1 \ln x\, dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0-1 = -1.$

$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx = x(\ln x)\Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx = -nI_{n-1}.$

$I_2 = 1\cdot 2, \quad I_3 = -1\cdot 2\cdot 3, \quad I_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, \quad \ldots, \quad I_n = (-1)^n n!.$ ▶

2434*. $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\, dx$ $\quad$ (n – целое положительное число).

◀ $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\, dx = \quad \left| x = \sin^2 t, \quad dx = 2\sin t\cos t\, dt. \right|$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2 t)^n\cdot 2\sin t\cos t\, dt}{\sin t} = 2\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n+1} dt = 2I_{2n+1}.$

$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n+1} dt = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n} d\sin t =$

$= (\cos t)^{2n}\sin t\Big|_0^{\pi/2} + 2n\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-1}\sin^2 t\, dt =$

$= 0 + 2n\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-1}(1-\cos^2 t)\, dt = 2n(I_{2n-1} - I_{2n+1}).$

$(2n+1)I_{2n+1} = 2nI_{2n-1}; \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}.$

$I_{2n+1} = \frac{2n\cdot(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\ldots 3} I_1 = \frac{2n\cdot(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\ldots 3}\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt =$

$= \frac{2n\cdot(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\ldots 3}.$ $\qquad$ Ответ: $2\frac{2n\cdot(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\ldots 3}.$ ▶

2437*. Доказать, что $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = 0.$

◀ Сначала выведем следующее равенство:

$\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = \quad \left| x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| \quad = \int_1^0 \frac{-\ln t}{t}\cdot\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{-1}{t^2}\, dt =$

$= \int_1^0 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt = -\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx.$ Теперь можно написать:

$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = 0.$ ▶

Вычислить интегралы, пользуясь формулами

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (интеграл Пуассона)},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \text{ (интеграл Дирихле)}.$$

2441*. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\, d(e^{-x^2})dx =$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}x\, e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

2443. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x}\,d(2x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$

2447. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx.$

◀ Имеем формулу: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Откуда $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{\sin 3x}{4}$. Теперь можно написать

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$ ▶

Вычислить интегралы

2450. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$

◀ $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\,dx =$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} \ln 2\,dx + \int_0^{\pi/2} \ln\sin\frac{x}{2}\,dx + \int_0^{\pi/2} \ln\cos\frac{x}{2}\,dx =$

Первый интеграл вычисляем, во втором интеграле делаем замену $\dfrac{x}{2} = t$, в третьем – замену $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} = t$.

$\displaystyle I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.$ Отсюда $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. Ответ: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$ ▶

2452*. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cot x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cdot\frac{d(\sin x)}{\sin x} = \int_0^{\pi/2} x\,d(\ln\sin x) =$

$\displaystyle = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ (Интеграл из задачи **2450.**) $= \dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

2454. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \quad \left|x = \sin t, \quad dx = \cos t\,dt.\right|$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin t\cdot\cos t\,dt}{\cos t} = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt$ (Интеграл из задачи **2450.**) $= -\dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

Глава VIII. Применения интеграла

2459. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2+8x=16$ и $y^2-24x=48$.

◀ Запишем уравнение парабол в каноническом виде: $y^2=-8(x-2)$ и $y^2=24(x+2)$ из уравнений видно, что первая парабола имеет вершину в точке (2,0) и ее ветви направлены влево, вторая парабола имеет вершину в точке (-2,0) и ее ветви направлены вправо. Абциссу точек пересечения парабол находим из уравнения $-8(x-2)=24(x+2)$; $\quad -x+2=3x+6)$; $\quad x=-1$. Теперь можем записать площадь:

$$S=2\int_{-2}^{-1}\sqrt{48+24x}\,dx+2\int_{-1}^{2}\sqrt{16-8x}\,dx=$$

$$=2\int_{-2}^{-1}\sqrt{48+24x}\,dx+2\int_{-1}^{2}\sqrt{16-8x}\,dx=$$

$$=\frac{2}{24}\int_{-2}^{-1}\sqrt{48+24x}\,d(48+24x)-\frac{2}{8}\int_{-1}^{2}\sqrt{16-8x}\,d(16-8x)=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(48+24x)\sqrt{48+24x}\Big|_{-2}^{-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(16-8x)\sqrt{16-8x}\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot 24\sqrt{24}+\frac{1}{6}\cdot 24\sqrt{24}=\frac{2}{9}\cdot 48\sqrt{6}=\frac{32}{3}\sqrt{6}.$$ ▶

2464. Найти площадь фигуры, ограниченной дугой гиперболы и ее хордой, проведенной из фокуса перпендикулярно к действительной оси.

◀ Вычислим интеграл, который нам понадобится в дальнейшем. Имеем:

$$I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{(x^2-a^2)\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-I-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$ Отсюда находим:

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|.$$

Теперь находим площадь фигуры.

$$S=\frac{2b}{a}\int_{a}^{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{b}{a}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|\right)\Big|_{a}^{\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot(\sqrt{a^2+b^2}\cdot b-a^2\ln(\sqrt{a^2+b^2}+b)+a^2\ln a)=\frac{b^2c}{a}-ab\ln\frac{c+b}{a}.$$ ▶

2465. Окружность $x^2+y^2=a^2$ разбивается гиперболой $x^2-2y^2=a^2/4$ на три части. Определить площади этих частей.

◀ От окружности радиусом a и площадью πa^2 гипербола отрезает две симметричные дольки. Сначала вычислим площадь одной такой дольки. Координаты точек пересечения окружности и гиперболы находим из системы:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2-2y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ -3y^2=-\frac{3a^2}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ y=\pm\frac{a}{2} \end{cases}.$$

Гипербола пересекает ось Ox в точках $x=\pm a/2$, а окружность пересекает эту ось в точках $x=\pm a$. Теперь мы можем написать площадь правой дольки:

$$S_1=\sqrt{2}\int_{a/2}^{a\sqrt{3}/2}\sqrt{x^2-a^2/4}\,dx+2\int_{a\sqrt{3}/2}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Теперь нам понадобится два неопределенных интеграла:

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|,$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},$$

вычисление которых можно посмотреть в задачах **2464** и **1984** соответственно. Пользуясь ими, получаем площадь дольки:

$$S_1=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2/4}-\frac{a^2}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2/4}|\right)\Bigg|_{a/2}^{a\sqrt{3}/2}+$$

$$+\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{a\sqrt{3}/2}^{a}=\sqrt{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a^2}{8}\ln\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)-$$

$$-\sqrt{2}\left(-\frac{a^2}{8}\ln\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a^2\pi}{2}\right)-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}+\frac{a^2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{a^2\sqrt{2}}{8}\ln\frac{a(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}+\frac{a^2\sqrt{2}}{8}\ln\frac{a}{2}+\frac{a^2\pi}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$=a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right].$$

Площадь второй дольки S_2 такая же, а площадь средней части получаем вычитанием площадей долек из площади круга:

$$S_3=\pi a^2-S_1-S_2=\pi a^2-2a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]=$$

$$=a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right].\ ▶$$

2469. Найти площадь фигуры, ограниченной осью ординат и линией $x=y^2(y-1)$.

◀ График функции $x=y^2(y-1)$ пересекает ось ординат в точках $x=0$ и $x=1$ и уходит между этими точками в отрицательную область. Площадь этой области равна

$$S=-\int_0^1 y^2(y-1)\,dy=-\left(\frac{y^4}{4}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.\ ▶$$

2475. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2=x^2-x^4$.

◀ Кривая представляет собой восьмерку, симметричную относительно осей Ox

и Oy и пересекающую ось Ox в точках -1, 0 и 1. Площадь четверти этой восьмерки расположенной в первой четверти равна интегралу

$$S/4 = \int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad S = \frac{4}{3}. \blacktriangleright$$

2480. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, осью Ox и двумя прямыми, параллельным оси Oy, проведенными через точки экстремума функции y.

◀ Найдем точки экстремума. Берем производную функции y:

$y' = (e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2)' = -e^{-x}(x^2+3x+1) + e^{-x}(2x+3) =$
$= e^{-x}(-x^2-x+2)$.

Производная обращается в нуль, когда квадратный трехчлен равен нулю:

$$-x^2 - x + 2 = 0 \qquad x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1\mp 3}{2}; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$$

В полученных точках проверяем знак второй производной:

$y'' = (e^{-x}(-x^2-x+2))' = -e^{-x}(-x^2-x+2) + e^{-x}(-2x-1) = e^{-x}(x^2-x-3)$.
$y''(-2) > 0, \quad y''(1) < 0$. То есть, в точке $x=-2$ мы имеем минимум, а в точке $x = 1$ – максимум. Учитывая, что $y(-2) = e^2((-2)^2 - 3\cdot 2 + 1) - e^2 = 0$, делаем вывод, что функция y больше нуля на интересующем нас интервале $(-2, 1)$, а искомая площадь выражается интегралом

$$S = \int_{-2}^1 (e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2)\, dx = -\int_{-2}^1 (x^2+3x+1)\, de^{-x} + 3e^2 =$$

$$= -\left(e^{-x}(x^2+3x+1)\right)\Big|_{-2}^1 + \int_{-2}^1 e^{-x}(2x+3)\, dx + 3e^2 =$$

$$= -(e^{-1}\cdot 5 - e^2\cdot(-1)) + 3e^2 - \int_{-2}^1 (2x+3)\, de^{-x} =$$

$$= 2e^2 - \frac{5}{e} - \left(e^{-x}(2x+3)\right)\Big|_{-2}^1 + 2\int_{-2}^1 e^{-x}\, dx = 2e^2 - \frac{5}{e} - \frac{5}{e} - e^2 - 2\, e^{-x}\Big|_{-2}^1 =$$

$$e^2 - \frac{10}{e} - \frac{2}{e} + 2e^2 = 3e^2 - \frac{12}{e}. \blacktriangleright$$

2527. Найти периметр одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абцисс и линиями $y = \ln\cos x$ и $y = \ln\sin x$.

◀ Периметр складывается из отрезка $[0, \pi/2]$, расположенного на оси Ox и двух симметричных кривых, одна из которых вычисляется интегралом

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\ln\cos x)'^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{d(\sin x)}{\cos^2 x} = -\int_0^{\pi/4} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1).$$

Сложив длины отрезка и двух кривых, получаем ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$. ►

2530. Найти длину линии $(y-\arcsin x)^2=1-x^2$.

◄ $(y-\arcsin x)^2=1-x^2; \quad y=\arcsin x\pm\sqrt{1-x^2}. x=\sin t, \quad y=t\pm\cos t.$

$$L=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t+1-2\sin t+\sin^2 t}\,dt=2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin t}\,dt=$$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}-2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}\,d\frac{t}{2}=$$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\,d\frac{t}{2}=4\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8. ►$$

2534. Найти длину линии $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$.

$$◄\ L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{25a^2\cos^8 t\sin^2 t+25a^2\sin^8 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=20a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}\,dt=$$

$$=10a\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1-\sin^2 t)^3+\sin^6 t}\,d(\sin^2 t)=$$

$$=10a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-3\sin^2 t+3\sin^4 t}\,d(\sin^2 t)=$$

$$=10a\int_0^1\sqrt{1-3u+3u^2}\,du=10\sqrt{3}a\int_0^1\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\,d\left(u-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=5\sqrt{3}a\left(\left(u-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}-\frac{1}{12}\ln\left(u-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\right)\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=5\sqrt{3}a\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{12}\ln\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{12}\ln\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)=$$

$$=5a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{12}\ln(2+\sqrt{3})^2\right)=5a\left(1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right). ►$$

2559. Криволинейная трапеция, ограниченная линией $y=xe^x$ и прямыми $x=1$ и $y=0$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

$$◄\ V=\pi\int_0^1(xe^x)^2dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2\,d(e^{2x})=\frac{\pi}{2}\left(x^2e^{2x}\big|_0^1-\int_0^1 x\,d(e^{2x})\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(e^2-xe^{2x}\big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,d(2x)\right)=\frac{\pi}{2}\left(e^2-e^2+\frac{1}{2}\,e^{2x}\big|_0^1\right)=\frac{\pi(e^2-1)}{4}. ►$$

2563. Найти объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией $y=\arcsin x$, с основанием $[0,1]$ вокруг оси Ox.

$$◀\ V=\pi\int_0^1 \arcsin^2 x\,dx = \qquad |x=\sin t.| \qquad = \pi\int_0^{\pi/2} t^2\,d\sin t =$$
$$=\pi\left((t^2\sin t)\big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} t\sin t\,dt\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4}+2\int_0^{\pi/2} t\,d\cos t\right) =$$
$$=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}+2\,(t\cos t)|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4}+0-2\,\sin t|_0^{\pi/2}\right) =$$
$$=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right). ▶$$

2568. Одна арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вращается вокруг своего основания. Вычислить объем тела, ограниченного полученной поверхностью.

$$◀\ V=\pi\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,d[a(t-\sin t)] =$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt =.$$

По формуле $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ имеем: $-\cos^3 t = -\dfrac{1}{4}\cos 3t - \dfrac{3}{4}\cos t$.

По формуле $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ имеем: $3\cos^2 t = \dfrac{3}{2}\cos 2t + \dfrac{3}{2}$.

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}-\frac{15}{4}\cos t+\frac{3}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\cos 3t\right)\,dt =$$
$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-\frac{15}{4}\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 3t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. ▶$$

2584. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $2z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ и конусом $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z^2$.

◀ Тело образует кольцеобразную область, расположенную между плоскостями $z=0$ и $z=2$. Точки тела находятся вне конуса и внутри параболоида. Сечение тела плоскостью $z=z_0$ представляет собой эллипс с полуосями $2\sqrt{2z_0}$ и $3\sqrt{2z_0}$ из которого выброшена внутренность в виде эллипса с полуосями $2z_0$ и $3z_0$.
$$V=\int_0^2(\pi\cdot 2\sqrt{2z}\cdot 3\sqrt{2z}-\pi\cdot 2z\cdot 3z)\,dz = 6\pi\int_0^2(2z-z^2)\,dz = 6\pi\left(z^2-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$
$$=6\pi\left(4-\frac{8}{3}\right) = 8\pi. ▶$$

2591. Круг переменного радиуса перемещается таким образом, что одна из точек его окружности остается на оси абсцисс, центр движется по окружности $x^2+y^2=r^2$, а плоскость этого круга перпендикулярна к оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

◀ $V = 2\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = 2\pi \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi r^3.$ ▶

2597. При вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большой оси получается поверхность, называемая удлинённым эллиспоидом вращения, при вращении вокруг малой – поверхность, называемая укороченным эллипсоидом вращения. Найти площадь поверхности удлиненного и укороченного эллипсоидов вращения.

◀
1) Удлиненный эллипсоид вращения.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad y'^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}.$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 4\pi \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\,dx =$$

$$= 4\pi \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx = 4\pi \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left(x\sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} + \frac{a^4}{a^2 - b^2} \arcsin \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left(\frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{a^4}{a^2 - b^2} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) =$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab \cdot a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon.$$

2) Укороченный эллипсоид вращения.

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad x' = -\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \quad x'^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2(b^2 - y^2)}.$$

$$S = 2\pi \int_{-b}^{b} x\sqrt{1 + x'^2}\,dy = 4\pi \frac{a}{b} \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2(b^2 - y^2)}}\,dy =$$

$$= 4\pi \frac{a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\,dy = 4\pi \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \int_0^b \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2}\,dy =$$

$$= 2\pi \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \left(y\sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2} - \frac{b^4}{a^2 - b^2} \ln \left| y + \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2} \right| \right)\Bigg|_0^b =$$

$$= 2\pi a^2 - \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\ln \left| b + \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right| - \ln \left| \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right| \right) =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2} + a} = 2\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{b^2}{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2} =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{b^2(a - \sqrt{a^2 - b^2})}{(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a^2 - a^2 + b^2)} =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \ln \frac{1 - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{1 + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

►

2603. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ вокруг оси абсцисс.

◄ $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

$$S = 4\pi \int_0^{\pi/2} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\, d(\sin t) = \frac{12}{5}\pi a^2 \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

►

2610. Вычислить статический момент прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его основания.

◄ $M = \int_0^h ay\, dy = \frac{a}{2}y^2\Big|_0^h = \frac{ah^2}{2}.$ ►

2618. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

◄ P – масса фигуры, M_y – статический момент фигуры относительно оси Oy, C_x и C_y – координаты центра тяжести.

$$y = x - 2\sqrt{ax} + a. \quad P = \int_0^a (x - 2\sqrt{ax} + a)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4\sqrt{a}}{3}x^{3/2} + ax\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2}{6}.$$

$$M_y = \int_0^a x(x - 2\sqrt{ax} + a)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4\sqrt{a}}{5}x^{5/2} + \frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)a^3 = \frac{a^3}{30}. \quad C_x = \frac{M_y}{P} = \frac{a}{5}.$ Симметричным образом $C_y = \frac{a}{5}.$ ►

2625. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = ax^3 - x^4$.

◄ $y = x\sqrt{ax - x^2}. \quad P = 2\int_0^a x\sqrt{ax - x^2}\, dx =$

$$\left|\sqrt{ax - x^2} = xt, \quad ax - x^2 = x^2t^2, \quad x = \frac{a}{t^2+1}, \quad dx = -\frac{2at\, dt}{(t^2+1)^2}.\right|$$

$$= -2\int_{-\infty}^0 \frac{a}{t^2+1} \cdot \frac{at}{t^2+1} \cdot \frac{2at\, dt}{(t^2+1)^2} = 4a^3 \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^4} - \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^3}\right).$$

$$M_x = 2\int_0^a x^2\sqrt{ax - x^2}\, dx = -2\int_{-\infty}^0 \frac{a^2}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{at}{t^2+1} \cdot \frac{2at\, dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 4a^4 \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^5} - \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^4}\right).$$

$$I_n = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n}\Bigg|_{-\infty}^0 + n\int_{-\infty}^0 \frac{x \cdot 2x\, dx}{(x^2+1)^{n+1}} =$$

$$= 0 + 2n\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = 2nI_n - 2nI_{n+1}.$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

$$I_4 = \frac{5}{6}I_3. \quad I_5 = \frac{7}{8}I_4 = \frac{35}{48}I_3. \quad C_x = \frac{4a^4(I_5 - I_4)}{4a^3(I_4 - I_3)} = a\frac{\frac{35}{48} - \frac{5}{6}}{\frac{5}{6} - 1} = \frac{5}{48}\cdot\frac{6}{1}a = \frac{5}{8}a.$$

$C_y = 0.$ ►

2634. Найти центр масс сектора круга радиуса R с центральным углом, равным 2α.

◄ Центр тяжести лежит на биссектрисе угла сектора. Расположим начало координат в центре круга, а ось Ox направим по биссектрисе. Масса сектора равна αR^2. Статический момент сектора относительно оси Oy равен

$$M_y = 2\int_{0}^{R\cos\alpha}\tan\alpha x^2 dx + 2\int_{R\cos\alpha}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2\frac{R^3\tan\alpha\cos^3\alpha}{3} - \int_{R\cos\alpha}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,d(R^2-x^2) =$$

$$= \frac{2R^3\tan\alpha\cos^3\alpha}{3} - \frac{2}{3}\left.(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2}\right|_{R\cos\alpha}^{R} =$$

$$= \frac{2R^3\tan\alpha\cos^3\alpha}{3} + \frac{2R^3\sin^3\alpha}{3} = \frac{2R^3\sin\alpha}{3}. \quad C_x = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}, \quad C_y = 0.$$ ►

2640. На каком расстоянии от геометрического центра лежит центр масс полушара радиуса R?

◄ Масса полушара равна $\frac{2\pi R^3}{3}$. Расположим начало координат в центре шара и направим ось Ox по оси симметрии. Тогда статический момент полушара относительно плоскости Oyz будет равен

$$M_{yz} = \pi\int_{0}^{R} x(R^2-x^2)\,dx = \pi\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \pi\frac{R^4}{4}. \quad C_x = \frac{3}{8}R.$$ ►

2650. Найти момент инерции полукруга радиуса R относителльно его диаметра.

◄ $I = 2\int_{0}^{R} x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \qquad |x = R\sin t, \quad dx = R\cos t\,dt|$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} R^2\sin^2 x\cdot R\cos t\cdot R\cos t\,dt = \frac{R^4}{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{R^4}{4}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi R^4}{8}.$$ ►

2656. Эллипс с полуосями a и b вращается вокруг одной из своих осей. Найти момент инерции получающегося тела (эллипсоид вращения) относительно оси вращения.

◄ Бесконечно тонкий слой на расстоянии x от оси вращения Oy и с толщиной dx имеет форму цилиндра с радиусом $|x|$ и высотой $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ имеет момент инерции $x^2 \cdot 2\pi|x|\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Поэтому момент инерции тела вращения относительно оси Oy выражается интегралом

$$I_y = \frac{4\pi b}{a}\int_0^a x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2\pi b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,d(x^2) = \ldots$$

$$t^2 = a^2 - x^2, \quad x^2 = a^2 - t^2, \quad d(x^2) = -2t\,dt.$$

$$\ldots - = \frac{2\pi b}{a}\int_a^0 (a^2-t^2)t\cdot 2t\,dt = \frac{4\pi b}{a}\int_0^a (a^2t^2-t^4)\,dt = \frac{4\pi b}{a}\left(\frac{a^2a^3}{3}-\frac{a^5}{5}\right) = \frac{8\pi a^4 b}{15}.$$

Симметричным образом, если мы будем вращать эллипс вокруг другой оси, то получим тело с моментом инерции $\dfrac{8\pi ab^4}{15}$. ►

2657. Найти момент инерции параболоида вращения, радиус основания которого R, высота H, относительно оси вращения.

◄ Рассмотрим часть параболы $y = H\left(1-\dfrac{x^2}{R^2}\right)$, расположенную в первом октанте. При ее вращении вокруг оси Oy получается параболоид с параметрами, описанными в условии задачи. Цилиндр толщины dx радиуса x и высоты y имеет момент инерции $x^2\cdot 2\pi x H\left(1-\dfrac{x^2}{R^2}\right)dx$. Интегрируя этот момент от нуля до R мы получим момент параболоида.

$$I_y = 2\pi H\int_0^R x^3\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)dx = 2\pi H\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6R^2}\right)\Bigg|_0^R = \pi HR^4/6. \ ►$$

2659. Криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, вращается: 1) вокруг оси Ox, 2) вокруг оси Oy. Вычислить момент инерции получающегося тела относительно оси вращения.

◄

$$1)\ I_x = \int_0^1 x^2\cdot 2\pi x\,dx + \int_1^e x^2\cdot 2\pi x(1-\ln x)\,dx = 2\pi\int_0^e x^3dx - 2\pi\int_1^e x^3\ln x\,dx =$$

$$= \frac{\pi e^4}{2} - \frac{\pi}{2}\int_1^e \ln x\,d(x^4) = \frac{\pi e^4}{2} - \frac{\pi}{2}x^4\ln x\Big|_1^e + \frac{\pi}{2}\int_1^e x^3\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^e x^3\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}x^4\Big|_1^e = \frac{\pi}{8}(e^4-1).$$

$$2)\ I_y = \int_0^1 x^2\cdot 2\pi x\cdot e^x dx = 2\pi\int_0^1 x^3e^x dx = 2\pi\ x^3e^x\big|_0^1 - 6\pi\int_0^1 x^2e^x dx =$$

$$= 2\pi e - 6\pi\ x^2e^x\big|_0^1 + 12\pi\int_0^1 xe^x dx = -4\pi e + 12\pi\ xe^x\big|_0^1 - 12\pi\int_0^1 e^x dx =$$

$$= 8\pi e - 12\pi\ e^x\big|_0^1 = -4\pi e + 12\pi = 4\pi(3-e).$$

►

2664. Эллипс с осями $AA_1 = 2a$ и $BB_1 = 2b$ вращается вокруг прямой, параллельной оси AA_1 и отстоящей от нее на расстояние $3b$. Найти объем тела, которое при этом получается.

◀ Площадь эллипса равна πab. Центр тяжести эллипса находится в точке пересечения осей и отстоит от оси вращения на расстояние $3b$. Длина окружности, которую описывает центр тяжести при вращении равна $6\pi b$. Применяя вторую теорему Гульдина получаем объем тела вращения $6\pi^2 ab^2$. ▶

2666. Фигура, образованная первыми арками циклоид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

и

$$x = a(t - \sin t), \quad y = -a(1 - \cos t),$$

вращается вокруг оси ординат. Найти объем и поверхность тела, которое при этом получается.

◀ Точка описывает первую арку циклоиды, когда параметр t изменяется от 0 до 2π. Основание арки имеет длину $2\pi a$. Из соображений симметрии центр тяжести фигуры образованной арками отстоит от оси ординат на расстояние πa, а длина окружности, которую описывает центр при вращении равна $2\pi^2 a$. Теперь нам надо вычислить площадь фигуры. Она равна интегралу

$$S = 2\int_0^{2\pi} y\,dx = 2a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,d(t-\sin t) = 2a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$
$$= 2a^2\cdot 2\pi - 4a^2\cdot 0 + 2a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = 4\pi a^2 + a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt =$$
$$= 4\pi a^2 + 2\pi a^2 + a^2\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt = 6\pi a^2.$$

Используя вторую теорему Гульдина мы можем написать объем:
$V = 6\pi a^2 \cdot 2\pi^2 a = 12\pi^3 a^3$.

Вычислим площадь поверхности. Центр тяжести контура фигуры тот же, что и сама фигура, поэтому и длина окружности, которую он описывает при вращении будет той же – $2\pi^2 a$. Теперь вычислим длину контура фигуры. Она равна интегралу

$$L = 4\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 4a\int_0^{\pi}\sqrt{(t-\sin t)'^2 + (1-\cos t)'^2}\,dt =$$
$$= 4a\int_0^{\pi}\sqrt{1 - 2\cos t + \cos t^2 + \sin^2 t}\,dt = 8a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt =$$
$$= 16a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2} = -\,16a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 16a.$$

Теперь по первой теореме Гульдина получаем площадь поверхности
$S_{\text{пов.}} = 16a \cdot 2\pi^2 a = 32\pi^2 a^2$. ▶

2676. С какой силой материальная ломаная $y = |x| + 1$ притягивает материальную точку массы m, находящуюся в начале координат? (Линейная плотность равна γ.)

◀ Поскольку лучи ломаной симметричны относительно оси Oy, составляющие сил тяготения от этих лучей, направленные вдоль оси Ox уравновешивают друг друга и дают нулевую сумму, а составляющие, направленные вдоль оси Oy равны и одинаково направлены. Таким образом, искомая сила тяготения в два раза больше чем составляющая силы тяготения от одного луча, направленная вдоль оси Oy. Возьмем луч, расположенный в правой полуплоскости. Рассмотрим бесконечно малый участок луча с координатой x и соответствующий длине dx оси Ox. Его масса равна $\gamma\sqrt{2}\,dx$, расстояние участка от начала координат равно $\sqrt{x^2+(x+1)^2}=\sqrt{2x^2+2x+1}$, а косинус угла между направлением силы тяготения и осью Oy равен $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$. Теперь мы можем записать искомую силу интегралом:

$$F=2\int_0^\infty \frac{km\sqrt{2}\gamma}{2x^2+2x+1}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\,dx=2\sqrt{2}km\gamma\int_0^\infty\frac{(x+1)\,dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}=$$

$$=2\sqrt{2}km\gamma\int_0^\infty\frac{(x+1/2)\,dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}+\sqrt{2}km\gamma\int_0^\infty\frac{dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}.$$

Первый интеграл приводится к интегралу степенной функции:

$$\frac{\sqrt{2}km\gamma}{2}\int_0^\infty\frac{d(2x^2+2x+1)}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}=-\left.\frac{\sqrt{2}km\gamma}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\right|_0^\infty=\sqrt{2}km\gamma.$$

Ко второму интегралу применяем подстановку Абеля:

$$t=\frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}},\quad 2x+1=t\sqrt{2x^2+2x+1},\quad 4x^2+4x+1=t^2(2x^2+2x+1),$$

$$2(2x^2+2x+1)-1=t^2(2x^2+2x+1),\quad 2x^2+2x+1=\frac{1}{2-t^2},$$

$$2\,dx=dt\sqrt{2x^2+2x+1}+t^2dx,\quad (2-t^2)\,dx=\sqrt{2x^2+2x+1}\,dt,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}=\frac{dt}{2-t^2}.$$

$$\sqrt{2}km\gamma\int_0^\infty\frac{dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}=\sqrt{2}km\gamma\int_1^{\sqrt{2}}dt=\sqrt{2}km\gamma(\sqrt{2}-1).$$

Окончательный ответ: $\sqrt{2}km\gamma+\sqrt{2}km\gamma(\sqrt{2}-1)=2km\gamma$. ▶

2682. Вычислить работу, которую необходимо затратить, для того чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой $H=5$ м, имеющий в основании круг радиуса $R=3$ м.

◀ Бесконечно тонкий горизонтальный слой воды толщины dx имеет объем $\pi R^2\,dx$ Его вес в ньютонах $\pi R^2 1000g\,dx$. Если слой расположен на глубине x, то работа в джоулях, требующаяся для подъема воды этого слоя до уровня верхней кромки резервуара, равна $\pi R^2 1000gx\,dx$. Работа по выкачиванию всей воды равна интегралу

$$\int_0^H \pi R^2 1000gx\,dx=\pi R^2 500gH^2=3{,}14\cdot 3^2\cdot 500\cdot 10\cdot 5^2=3{,}5325\cdot 10^6\ \text{Дж.}$$ ▶

2691. Круглый цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота H, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна γ. Найти кинетическую энергию цилиндра.

◀ Кинетическая энергия равна $I\omega^2/2$, а момент инерции равен интегралу

$$I = \int_0^R x^2 \cdot 2\pi x H\gamma\, dx = 2\pi H\gamma \int_0^R x^3 dx = 2\pi H\gamma \cdot \frac{R^4}{4}.$$

Теперь мы можем вычислить энергию, которая равна $\pi R^4 H\omega^2\gamma/4$. ▶

Глава IX. Ряды

Доказать сходимость следующих рядов с помощью признака Даламбера.

2755. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} + \ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} < 1$. Сходится. ▶

2756. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} + 2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} + \ldots + n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2^{n+1}} + \ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} \cdot \dfrac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2^{n+2}} \cdot \dfrac{2^{n+1}}{\pi} =$
$= 1/2 < 1$. Сходится. ▶

2759. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{3\cdot 6} + \ldots + \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!} + \ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \dfrac{3^n \cdot n!}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3(n+1)} =$
$= 2/3 < 1$. Сходится. ▶

2762. $\dfrac{2}{2} + \dfrac{2\cdot 3}{4\cdot 2} + \ldots + \dfrac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} + \cdot$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!\cdot 2^n \cdot n!}{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2} < 1$. Сходится. ▶

Доказать сходимость следующих рядов с помощью радикального признака Коши.

2764. $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$. Сходится. ▶

2765. $\arcsin 1 + \arcsin^2 \dfrac{1}{2} + \ldots + \arcsin^n \dfrac{1}{n} + \ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin \dfrac{1}{n} = 0 < 1$. Сходится. ▶

Вопрос о сходимости следующих рядов решить с помощью интегрального признака Коши.

2768. $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\ln n}+\ldots$

◀ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}=\int_2^\infty \frac{d\ln x}{\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^\infty$. Интеграл и ряд расходятся. ▶

2769. $\left(\dfrac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\dfrac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

◀ $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2 dx=\int_1^\infty \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,dx+\int_1^\infty \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}=$
$\displaystyle=\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}+\int_1^\infty \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_1^\infty-\frac{1}{1+x^2}\Big|_1^\infty$. Интеграл и ряд сходятся.
▶

Выяснить, какие из следующих рядов сходятся, какие расходятся.

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+\ldots$

◀ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq 0$. Общий член ряда не стремится к нулю. Ряд расходится.
▶

2777. $\dfrac{1}{1+1^2}+\dfrac{2}{1+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{1+n^2}+\ldots$

◀ Сравниваем данный ряд с расходящимся рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$. Вычисляем предел отношения общих членов: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=1$. Предел конечный и не равен нулю, поэтому исходный ряд также расходится. ▶

2778. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{3^n}+\ldots$

◀ Применяем интегральный признак. Для этого сначала вычислим неопределенный интеграл:
$\displaystyle\int\frac{2x-1}{3^x}\,dx=-\frac{1}{\ln 3}\int(2x-1)\,d(3^{-x})=-\frac{2x-1}{\ln 3\cdot 3^x}+\frac{2}{\ln 3}\int 3^{-x}dx=$
$\displaystyle=-\frac{2x-1}{\ln 3\cdot 3^x}-\frac{2}{(\ln 3)^2\cdot 3^x}.$
Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty\frac{2x-1}{3^x}\,dx$ сходится, поэтому данный ряд также сходится. ▶

Доказать каждое из следующих соотношений с помощью ряда, общим членом которого является данная функция.

2785. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$. ◀ Доказываем сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{a^n}{n!}$ методом Даламбера:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0.$
Теперь можно применить необходимый признак сходимости ряда. ▶

2788. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$. ◀ Доказываем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$ методом Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=0.$$

Теперь можно применить необходимый признак сходимости ряда. ▶

Найти функцию по данному полному дифференциалу.

Вычислить двойные интегралы, взятые по прямоугольным областям интегрирования D, заданным условиями в скобках.

3479. $\displaystyle\iint_D\frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy \qquad (0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1).$

◀ $$\iint_D\frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\int_0^1 x^2dx\cdot\operatorname{arctg}y\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}.$$ ▶

Вычислить интегралы.

3508. $\displaystyle\iint_D(x^2+y)\,dx\,dy$, D – область, ограниченная параболами $y=x^2$ и $y^2=x$.

◀ $$\iint_D(x^2+y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)\,dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=$$
$$=\int_0^1\left(x^{5/2}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{2}{7}x^{7/2}+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{10}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=\frac{33}{140}.$$
▶

3519. $$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz=\int_0^a dx\int_0^x dy\cdot xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^y=\frac{1}{2}\int_0^a dx\int_0^x xy^3dy=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^a dx\cdot x\frac{y^4}{4}\Big|_0^x=\frac{1}{8}\int_0^a x^5dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^a=\frac{a^6}{48}.$$

3523. $\displaystyle\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz$, Ω – область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z=xy$ и плоскостями $x+y=1$ и $z=0$ $(z\ge 0)$.

◀ $$\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}y\,dy\int_0^{xy}dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}y\,dy\cdot xy=$$
$$=\int_0^1 x^2\,dx\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x}=\frac{1}{3}\int_0^1(x^2-3x^3+3x^4-x^5)\,dx=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{60}=\frac{1}{180}.$$ ▶

Перейти в двойном интеграле $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ к полярным координатам ρ и φ $(x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi)$, и расставить пределы интегрирования:

3527. D – область, являющаяся общей частью двух кругов $x^2+y^2\le ax$ и $x^2+y^2\le by$.

◀ Первая окружность в полярной системе координат имеет уравнение $\rho = a\cos\varphi$, вторая окружность – уравнение $\rho = b\sin\varphi$. Они пересекаются в начале координат и в точке для которой $a\cos\varphi = b\sin\varphi$. Отсюда имеем

$$a\cos\varphi - b\sin\varphi = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\operatorname{arctg}\frac{a}{b} - \varphi) = 0 \text{ или } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Теперь можем записать искомый интеграл:

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho + \int_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

▶

3531. D – область, определенная неравенствами $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (x^2+y^2)^3 \leq 4a^2x^2y^2$.

◀ Область представляет собой часть первого квадранта, отрезанную кривой, уравнение которой в полярных координатах будет следующим:

$$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^3 = 4a^2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi \text{ или } \rho = a\sin 2\varphi.$$

Теперь мы можем написать искомый интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

▶

Двойные интегралы преобразовать к полярным коордианатам:

3533. $\displaystyle\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\, dx.$

◀ Выведем уравнение кривой $x = \sqrt{2Ry - y^2}$ в полярной системе координат: $\rho\cos\varphi = \sqrt{2R\rho\sin\varphi - \rho^2\sin^2\varphi^2}$; $\quad \rho^2\cos^2\varphi = 2R\rho\sin\varphi - \rho^2\sin^2\varphi^2$; $\rho^2 = 2R\rho\sin\varphi$; $\quad \rho = 2R\sin\varphi$. Прямая $y = R/2$ имеет уравнение $\rho\sin\varphi = R/2$ или $\rho = \dfrac{R}{2\sin\varphi}$, Аналогично получаем уравнение прямой $y = 2R$, которое имеет вид $\rho = \dfrac{2R}{\sin\varphi}$. Найдем полярные углы φ_A, φ_B точек A, B, в которых кривая пересекает эти прямые, для этого решим следующие уравнения:

$2R\sin\varphi_A = \dfrac{R}{2\sin\varphi_A}$; $\quad \sin^2\varphi_A = \dfrac{1}{4}$; $\quad \sin\varphi_A = \dfrac{1}{2}$; $\quad \varphi_A = \dfrac{\pi}{6}$;

$2R\sin\varphi_B = \dfrac{2R}{\sin\varphi_B}$; $\quad \sin^2\varphi_B = 1$; $\quad \sin\varphi_B = 1$; $\quad \varphi_B = \dfrac{\pi}{2}$;

Теперь мы можем написать искомый интеграл.

$$\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{R/(2\sin\varphi)}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \text{ ▶}$$

3534. $\displaystyle\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy.$

◀ Выведем уравнение кривой $x = \sqrt{R^2-x^2}$ в полярной системе координат: $\rho\cos\varphi = \sqrt{R^2-\rho^2\sin^2\varphi}$; $\quad \rho^2\cos^2\varphi = R^2-\rho^2\sin^2\varphi$; $\quad \rho^2 = R^2$; $\quad \rho = R$. Эта кривая пересекает прямую $y = R$ при значении полярного угла $\pi/2$. Теперь можно написать искомый интеграл:

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} f(\rho^2)\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^R f(\rho^2)\rho\,d\rho. \ ▶$$

С помощью перехода к полярным координатам вычислить двойные интегралы:

3536. $\displaystyle\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy.$

◀ Воспользовавшись результатом задачи 3534, мы можем написать:

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^R \ln(1+\rho^2)\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^R \ln(1+\rho^2)\,d(1+\rho^2) = \frac{\pi}{4}\int_1^{1+R^2} \ln t\,dt = \frac{\pi}{4}t\ln t\Big|_1^{1+R^2} - \frac{\pi}{4}\int_1^{1+R^2}\frac{t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2) - \ln 1 - 1 - R^2 + 1] = \frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2]. \ ▶$$

3539. $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, где D – круг $x^2+y^2 \le Rx$.

◀ В полярной системе круг имеет уравнение $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \le R\rho\cos\varphi$ или $\rho \le R\cos\varphi$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Записываем интеграл

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\,d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,d(R^2-\rho^2) = -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\cdot(R^2-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{R\cos\varphi} =$$

$$= -\frac{R^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|\sin\varphi|^3 - 1)\,d\varphi = -\frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}(\sin^3\varphi - 1)\,d\varphi =$$

$$= \frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi) + \frac{\pi R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi R^3}{3} =$$

$$= \frac{2R^3}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi R^3}{3} = \frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right). \ ▶$$

Перейти в тройном интеграле $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ к цилиндрическим координатам ρ, φ, z ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$) или сферическим координатам ρ, θ, φ ($x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$) и расставить пределы интегрирования:

3547. Ω – область, находящаяся в первом октанте и ограниченная цилиндром $x^2+y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = 1$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$.

◀ Перейдем к цилиндрической системе координат. Для плоскости $y = x$ имеем $\rho \sin\varphi = \rho\cos\varphi$; $\operatorname{tg}\varphi = 1$ или $\varphi = \pi/4$. Для плоскости $y = x\sqrt{3}$ так же точно получаем $\varphi = \pi/3$. Теперь можно написать интеграл:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dz \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho.$$ ▶

3551. Ω – общая часть двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ и $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \le R^2$.

◀ Перейдем к сферической системе координат. Уравнение второго шара в этой системе будет таким: $(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta - R)^2 \le R^2$;
$\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta - 2R\rho\cos\theta + R^2 \le R^2$; $\quad \rho \le 2R\cos\theta$.
Сферы пересекаются по окружности, для которой $2R\cos\theta = R$ или $\theta = \pi/3$.
Теперь можем записать искомый интеграл:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta\, d\theta \int_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho +$$
$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho.$$ ▶

Вычислить интегралы с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам:

3553. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz.$

◀ Переходим к цилиндрической системе координат. Проекция области интегрирования на плоскость Oxy представляет собой полукруг радиуса 1 с центром в точке $(1, 0, 0)$, расположенный в верхней полуплоскости. Уравнение ограничивающей его окружности будет иметь вид
$y = \sqrt{2x - x^2}$ или $\rho\sin\varphi = \sqrt{2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi}$; $\quad \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi$;
$\rho = 2\cos\varphi$. Теперь можем написать интеграл в цилиндрической системе координат:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} d\rho \int_0^a z\rho^2 dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{a^2\rho^2}{2} d\rho = \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi/2} (2\cos\varphi)^3 d\varphi =$$
$$\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) = \frac{4a^2}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{9}a^2.$$ ▶

3557. $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, где Ω – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

◀ Переходим к сферической системе координат. Преобразуем интеграл в повторный.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^\pi \frac{\rho^2\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + (\rho\cos\theta - 2)^2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^\pi \frac{d(\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4)}{\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \cdot \sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [(2+\rho)-(2-\rho)]\cdot\rho\, d\rho =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi. \blacktriangleright$$

Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными):

3562. Плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ и $x + y + z = 6$.

◀ Объем равен двойному интегралу по треугольнику D, расположенному в плоскости Oxy и имеющему вершины $(2, 0)$, $(4, 0)$ и $(0, 6)$.

$$V = \iint_D (6 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^6 dy \int_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2}{3}y} (6 - x - y)\, dx =$$
$$\int_0^6 dy \cdot \left[(6-y)x - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2}{3}y} = \int_0^6 dy \cdot \left[(6-y)\left(2 - \frac{1}{3}y\right) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{3}y\right)(6-y)\right] =$$
$$\int_0^6 \left(6 - 2y + \frac{y^2}{6}\right) dy = \left(6y - y^2 + \frac{y^3}{6\cdot 3}\right)\Big|_0^6 = 12. \blacktriangleright$$

3568. Цилиндром $z = 4 - x^2$, координатными плоскостями и плоскостью $2x + y = 4$ $(x \geq 0)$.

◀ Объем равен двойному интегралу по треугольнику D, расположенному в плоскости Oxy и имеющему вершины $(0, 0)$, $(2, 0)$ и $(0, 4)$.

$$V = \iint_D (4 - x^2)\, dx\, dy = \int_0^2 (4 - x^2)\, dx \int_0^{4-2x} dy = \int_0^2 (4 - x^2)(4 - 2x)\, dx =$$
$$= \int_0^2 (16 - 8x - 4x^2 + 2x^3)\, dx = \left(16x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2 = 32 - 16 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{40}{3}.$$
▶

3571. Эллиптическим цилиндром $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, плоскостями $z = 12 - 3x - 4y$ и $z = 1$.

◀ Объем равен двойному интегралу по эллипсу D, расположенному в плоскости Oxy и имеющему полуоси 2 и 1.

$$V = \iint_D (11 - 3x - 4y)\, dx\, dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} (11 - 3x - 4y)\, dx =$$
$$= \int_{-1}^1 dy \cdot \left[(11 - 4y)x - \frac{3}{2}x^2\right]\Big|_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1}^1 4(11 - 4y)\sqrt{1 - y^2}\, dy =$$
$$= 44\int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2}\, dy - 16\int_{-1}^1 y\sqrt{1 - y^2}\, dy) = 22\pi.$$

Здесь первый интеграл равен $\pi/2$ – площади единичной полуокружности, а второй интеграл равен нулю как интеграл по симметричному промежутку от нечетной функции. ▶

3577. Параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$ и $z = 0$.

◀ Объем равен двойному интегралу по области D, расположенной в плоскости Oxy и представляющей собой сегмент параболы $y = x^2$, отсеченный прямой $y = 1$.

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy = \int_{-1}^{1} dx \cdot \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{1} =$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{88}{105}. \ ▶$$

3588. Цилиндром $x^2+y^2=2x$, плоскостями $2x-z=0$ и $4x-z=0$.

◀ Объем равен двойному интегралу по области D, расположенной в плоскости Oxy и представляющей собой круг $(x-1)^2+y^2=1$.

$$V = \iint_D (4x-2x)\,dx\,dy = \int_0^2 2x\,dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy = 4\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$
$$= -2\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,d(1-(x-1)^2) + 4\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx =$$

Последний интеграл здесь равен $\pi/2$ как половина площади единичного круга.

$$= -2 \cdot \frac{2}{3}(1-(x-1)^2)^{3/2}\Big|_0^2 + 2\pi = 0 + 2\pi = 2\pi. \ ▶$$

3592. Гиперболическим параболоидом $z = \dfrac{xy}{a}$, цилиндром $x^2+y^2=ax$ и плоскостью $z=0$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$.

◀ Объем равен двойному интегралу по области D, расположенной в плоскости Oxy и представляющей собой полукруг $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}, \quad x \geq 0$.

$$V = \iint_D \frac{xy}{a}\,dx\,dy = \text{переходим к полярной системе координат:}$$
$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r^3 \sin\varphi\cos\varphi}{a}\,dr = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^3 dr =$$
$$= \frac{a^4}{4a}\int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi \sin\varphi\,d\varphi = -\frac{a^4}{4a}\int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi\,d(\cos\varphi) = -\frac{a^3}{24}\cos^6\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{24}. \ ▶$$

Найти двойным интегрированием площади указанных областей:

3598. Области, ограниченной прямыми $y=x$, $y=5x$, $x=1$.

$$◀ \int_0^1 dx \int_x^{5x} dy = \int_0^1 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^1 = 2. \ ▶$$

3602*. Области, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$.

◀ Перейдем к полярной системе координат $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Получаем следующее уравнение кривой: $r = 2a\cos^3\varphi$. Площадь области с учетом якобиана можно записать в виде интеграла

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos^3\varphi} r\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot 2a^2\cos^6\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\varphi\, d\varphi + 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 2\varphi\, d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 2\varphi\, d\varphi\right) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) + \frac{3}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 4\varphi)\, d\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 2\varphi)\, d(\sin 2\varphi)\right) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\pi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{2}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 4\varphi\, d(4\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{6}\sin^3 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\pi + 0 + \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{8}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 0 - 0\right) = \frac{a^2}{4}\left(\pi + \frac{3}{2}\pi + 0\right) = \frac{5}{8}\pi a^2. \blacktriangleright$$

Вычислить тройным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в уловия задач параметры считаются положительными):

3612. Цилиндрами $z = \ln(x+2)$ и $z = \ln(6-x)$ и плоскостями $x = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 2$.

◀ Проекция тела на плоскость Oxy представляет собой треугольник с вершинами $(0, 2, 0)$, $(0, -2, 0)$ и $(2, 0, 0)$, а само тело расположено между двумя логарифмическими цилиндрами. Объем выражается интегралом

$$V = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{2-x} dy \int_{\ln(x+2)}^{\ln(6-x)} dz = \int_0^2 [\ln(6-x) - \ln(x+2)]\, dx \int_{x-2}^{2-x} dy =$$
$$= \int_0^2 (4-2x)[\ln(6-x) - \ln(x+2)]\, dx =$$
$$= \int_0^2 [(4-2x)\ln(6-x)\, dx + (2x-4)\ln(x+2)]\, dx =$$
$$= -2\int_0^2 (6-x)\ln(6-x)\, d(6-x) + 8\int_0^2 \ln(6-x)\, d(6-x) +$$
$$+2\int_0^2 (x+2)\ln(x+2)\, d(x+2) - 8\int_0^2 \ln(x+2)\, d(x+2) =$$

Далее нам нужно вывести (или взять из справочника) следующие формулы:

1. $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln x - \int \frac{x}{x}\, dx = x(\ln x - 1).$

2. $\displaystyle\int x\ln x\, dx = \frac{1}{2}\int \ln x\, d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1).$

Используя эти формулы вычисляем интегралы

$$= -\frac{1}{2}(6-x)^2[2\ln(6-x) - 1]\Big|_0^2 + 8(6-x)[\ln(6-x) - 1]\Big|_0^2 +$$
$$+\frac{1}{2}(x+2)^2(2\ln(x+2) - 1)\Big|_0^2 - 8(x+2)[\ln(x+2) - 1]\Big|_0^2 =$$

$-\dfrac{1}{2}[4^2(2\ln 4-1)-6^2(2\ln 6-1)]+8[4(\ln 4-1)-6(\ln 6-1)]+$
$+\dfrac{1}{2}[4^2(2\ln 4-1)-2^2(2\ln 2-1)]-8[4(\ln 4-1)-2(\ln 2-1)]=$
Первые слагаемые каждой квадратной скобки сокращаются
$18(2\ln 6-1)-48(\ln 6-1)-2(2\ln 2-1)+16(\ln 2-1)=$
$(36-48)(\ln 2+\ln 3)-18+48+(-4+16)\ln 2+2-16=16-12\ln 3=$
$=4(4-3\ln 3)$. ▶

3621. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$.

◀ Переходим к сферической системе координат. Получаем
$(r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta)^3=a^2r^4\cos^4\theta;\quad r^6=a^2r^4\cos^4\theta;$
$r^2=a^2\cos^4\theta;\quad r=a\cos^2\theta$. Теперь можем написать интеграл.

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a\cos^2\theta}r^2\sin\theta\,dr=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot r^3\Big|_0^{a\cos^2\theta}=$$
$$=-\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos^6\theta\,d(\cos\theta)=-\frac{a^3}{21}\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\cos^7\theta\Big|_0^{\pi}=\frac{2a^3}{21}\int_0^{2\pi}d\varphi=$$
$$=\frac{4\pi}{21}a^3.$$ ▶

3625. $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2=16,\ z^2=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

◀ Часть шарового слоя, расположенного в первом октанте разрезается конусом на две области. Мы будем вычислять объем области, которая примыкает к оси Oz, поскольку ответ задачника предполагает именно эту область. Переходим к сферической системе координат:

$$V=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_1^4 r^2\sin\theta\,dr=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\cdot r^3\Big|_1^4=$$
$$=\frac{63}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta=-21\int_0^{\pi/2}d\varphi\cdot\cos\theta\Big|_0^{\pi/4}=21\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{\pi/2}d\varphi=$$
$$=\frac{21}{4}(2-\sqrt{2})\pi.$$ ▶

3627. Вычислить площадь той части поверхности $z^2=2xy$, которая находится над прямоугольником, лежащим в плоскости $z=0$ и ограниченным прямыми $x=0,\ y=0,\ x=3,\ y=6$.

◀ $z=\sqrt{xy};\ z'_x=\dfrac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}};\ z'^2_x=\dfrac{y}{2x}.\ z'_y=\dfrac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{y}};\ z'^2_y=\dfrac{x}{2y}.$

$$S=\int_0^3 dx\int_0^6\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}\,dy=\int_0^3 dx\int_0^6\sqrt{\frac{2xy+y^2+x^2}{2xy}}\,dy=$$
$$=\int_0^3 dx\int_0^6\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy=\int_0^3 dx\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{2y^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^6=$$

$$= \int_0^3 \left(2\sqrt{3}\sqrt{x} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(\frac{4\sqrt{3}x^{3/2}}{3} + 8\sqrt{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^3 = 12 + 24 = 36.$$

Ответ: 36. ►

В задачах 3632, 3633, 3638 найти площади указанных частей данных поверхностей:

3632. Части $z^2 = 4x$, вырезанной цилиндром $y^2 = 4x$ и плоскостью $x = 1$.

◄ Вырезанная из параболического цилиндра часть состоит из двух симметричных относительно плоскости Oxy лепестков, имеющих общую точку в начале координат. Проекцией вырезанной части на плоскость Oxy служит сегмент параболы $y^2 = 4x$. Верхний лепесток поверхности описывается функцией $z = 2\sqrt{x}$.

$$S = 2\int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dy = 2\int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dy =$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{16}{3} \cdot (x+1)\sqrt{x+1}\Big|_0^1 = \frac{16}{3} \cdot (2\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: $\frac{16}{3} \cdot (2\sqrt{2} - 1)$. ►

3633. Части $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

◄ $z = xy$; $z_x' = y$; $z_x'^2 = y^2$; $z_y' = x$; $z_y'^2 = x^2$. C – круг $x^2 + y^2 \le R^2$ в плоскости Oxy.

$$S = \iint_C \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + r^2} \cdot r\, dr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, d(1 + r^2) = \pi \cdot \frac{2}{3}(1 + r^2)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{2\pi}{3}\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1\right].$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1\right]$. ►

3638. Части $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$, вырезанной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ и лежащей в первом октанте.

◄ $z_x = \dfrac{(x^2 + y^2) - 2x(x + y)}{(x^2 + y^2)^2}$, $z_y = \dfrac{(x^2 + y^2) - 2y(x + y)}{(x^2 + y^2)^2}$.

Вырезанная часть проецируется на четверть кольца, лежащую в плоскости Oxy, которую обозначим через D. Тогда площадь равна интегралу

$$S = \int_D \sqrt{1 + \frac{[(x^2 + y^2) - 2x(x + y)]^2}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{[(x^2 + y^2) - 2y(x + y)]^2}{(x^2 + y^2)^4}}\, dx\, dy =$$

Переходим к полярной системе координат. Преобразуем отдельно подынтегральное выражение

$$\sqrt{1 + \frac{[\rho^2 - 2\rho^2 \cos\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)]^2}{\rho^8} + \frac{[\rho^2 - 2\sin\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)]^2}{\rho^8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho^4 + 2 - 4(\sin\varphi + \cos\varphi)^2 + 4(\sin\varphi + \cos\varphi)^2}{\rho^4}} = \sqrt{\frac{\rho^4 + 2}{\rho^4}}.$$

Продолжим вычисление площади

$$S = \int_1^4 \rho\, d\rho \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\rho^4+2}{\rho^4}}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_1^4 \frac{\sqrt{\rho^4+2}}{\rho}\, d\rho =$$

$$\left|\rho^4 + 2 = t^2; \quad \rho = (t^2-2)^{1/4}; \quad d\rho = \frac{1}{4}(t^2-2)^{-3/4}\cdot 2t.\right|$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2-2}\, dt = \frac{\pi}{4}\cdot\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(3\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right| - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left[3\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left[3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 - \sqrt{3} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]. ▶$$

3641. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \geq 0)$.

◀ Найдем пересечение поверхностей. Сначала вычитаем первое уравнение из второго.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases}; \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ -z^2 = 2az - 3a^2 \end{cases}.$$

Ищем неотрицательное значение z из квадратного уравнения $z^2 + 2az - 3a^2 = 0$. $z = -a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = -a \pm 2a$; $z = a$. Подставляем это значение во второе уравнение. $x^2 + y^2 = 2a^2$. Поверхность состоит из двух частей, расположенных над кругом C в плоскости Oxy с уравнением $x^2 + y^2 \leq 2a^2$.

Часть 1. $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$; $z'_x = \dfrac{-2x}{2\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}$; $z'^2_x = \dfrac{x^2}{3a^2 - x^2 - y^2}$.

$z'_y = \dfrac{-2y}{2\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}$; $z'^2_y = \dfrac{y^2}{3a^2 - x^2 - y^2}$.

Часть 2. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$; $z'_x = \dfrac{2x}{2a}$; $z'^2_x = \dfrac{x^2}{a^2}$. $z'_y = \dfrac{2y}{2a}$; $z'^2_y = \dfrac{y^2}{a^2}$.

$$S = \iint_C \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{3a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy + \iint_C \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{r^2}{3a^2 - r^2}}\, r\, dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}\, r\, dr =$$

$$= -2\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\int_0^{a\sqrt{2}}\frac{d(3a^2-r^2)}{\sqrt{3a^2-r^2}} + 2\pi\cdot\frac{1}{2a}\int_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+r^2}\,d(a^2+r^2) =$$

$$= -\pi a\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3a^2-r^2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} + \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2}{3}(a^2+r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi a\sqrt{3}(a\sqrt{3}-a) + \frac{2\pi}{3a}(3\sqrt{3}a^3-a^3) = 6\pi a^2 - 2\sqrt{3}\pi a^2 + 2\sqrt{3}\pi a^2 - \frac{2\pi a^2}{3} = \frac{16\pi a^2}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{16\pi a^2}{3}$. ►

3642. Оси двух однаковых цилиндров радиуса R пересекаются под прямым углом. Найти площадь части поверхности одного из цилиндров, лежащей в другом.

◄ Выберем такую систему координат, чтобы оси Ox и Oy располагались по осям цилиндров. Тогда цилиндры будут иметь уравнения $y^2+z^2=R^2$ и $x^2+z^2=R^2$. Первая поверхность располагается вдоль оси Ox, вторая – вдоль оси Oy. Вторая находится внутри первой, когда $-x<y<x$. Для того, чтобы получить эту площадь, можно вычислить одну восьмую этой площади, находящуюся в первом октанте, и умножить ее на 8.

$$S = 8\int_0^R dx\int_0^x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dy = 8\int_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 8R\int_0^R\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = -4R\int_0^R\frac{d(R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}} = -4R\int_0^R\frac{d(R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= -8R\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R = 8R^2.$$ ►

Найти двойным интегрированием статические моменты однородных плоских фигур (плотность $\gamma=1$:

3644. Полукруга радиуса R относительно диаметра.

◄ Расположим систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром полукруга D, диаметр лежал на оси Ox, а сам полукруг находился в верхней полуплоскости. Тогда

$$M_x = \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-R}^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \int_{-R}^R dx\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^R(R^2-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^R = \frac{1}{2}\left(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right) = \frac{3}{2}R^3.$$ ►

3646. Правильного шестиугольника со стороной a относительно стороны.

◄ Расположим систему координат так, чтобы ее начало совпало с серединой строны шестиугольника D, эта сторона лежала на оси Oy, а сам шестиугольник находился в правой полуплоскости. Тогда

$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{a\sqrt{3}/2} x\,dx\int_{-\sqrt{3}x/3-a/2}^{\sqrt{3}x/3+a/2} dy + \int_{a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} x\,dx\int_{\sqrt{3}x/3-3a/2}^{-\sqrt{3}x/3+3a/2} dy =$$

$$= \int_0^{a\sqrt{3}/2} x(2\sqrt{3}x/3 + a)\,dx + \int_{a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} x(-2\sqrt{3}x/3 + 3a)\,dx =$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{3}/2} + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}x^3 + \frac{3a}{2}x^2\right)\Bigg|_{a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} =$$

$$\frac{2}{8}a^3 + \frac{3}{8}a^3 - 2a^3 + \frac{9}{2}a^3 + \frac{2}{8}a^3 - \frac{9}{8}a^3 = \frac{2+3-16+36+2-9}{8} = \frac{9}{4}a^3.$$

Задачу можно решить другим способом, если знать, что статический момент фигуры связан с ее центром ее тяжести. Мы знаем, что x-координаты центра тяжести выражается формулой $x_c = M_y/M$, где M масса фигуры. Отсюда получаем $M_y = x_c \cdot M$. Из соображений симметрии мы знаем, что центр тяжести шестиугольника находится в его геометрическом центре, то есть $x_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Масса шестиугольника при единичной плотности равна его площади. Мы знаем, что равностронний треугольник со стороной a имеет площадь $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. А у шестиугольника площадь в 6 раз больше, т. е. $M = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Теперь можно вычислить статический момент. $M_y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \dfrac{9}{4}a^3$. ►

3647. Доказать, что статический момент треугольника с основанием a относительно этого основания зависит только от высоты треугольника.

◄ Расположим систему координат так, чтобы точки треугольника ABC с основанием $AB = a$ и высотой h, опущенной на это основание, имели следующие координаты $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(t,h)$. Здесь t – произвольное число. Нам надо доказать, что статический момент треугольника от t не зависит. Боковые стороны треугольника имеют уравнения $x = \dfrac{t}{h}y$ и $x = \dfrac{t-a}{h}y + a$. Поэтому статический момент относительно основания равен

$$M_x = \int_0^h y\,dy \int_{ty/h}^{(t-a)y/h+a} dx = \int_0^h y\left(\frac{h-y}{h}a\right)\,dy.$$

Мы видим, что интеграл от t не зависит. ►

Найти двойным интегрированием центры масс однородных плоских фигур:

3649. Фигуры ограниченной синусоидой $y = \sin x$, осью Ox и прямой $x = \pi/4$.

◄ $M = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$

$$M_x = \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

$$M_y = \int_0^{\pi/4} x\,dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx =$$
$$= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$
$$x_c = M_y/M = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1).$$
$$y_c = M_x/M = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

3652. Фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \geq 0)$.

◀ Поскольку фигура симметрична относительно оси Ox, центр тяжести находится на оси Ox, т. е. $y_c = 0$.
$$M = 2\int_0^1 \sqrt{x^2-x^4}\,dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2)x =$$
$$= -\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$
$$M_y = \int_0^1 x\,dx \int_{-\sqrt{x^2-x^4}}^{\sqrt{x^2-x^4}} dy = 2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \left|x = \sin t.\right| \quad =$$
$$2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt =$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{16}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \quad x_c = M_y/M = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{16}\pi. \blacktriangleright$$

Найти моменты инерции однородных плоских фигур (плотность $\gamma = 1$):

3656. Прямоугольника со сторонами a и b относительно точки пересечения диагоналей.

◀ Расположим систему координат так, чтобы начало находилось в точке пересечения диагоналей, ось Ox была параллельна стороне a, а ось Oy была параллельна стороне b.
$$J = \int_0^a dx \int_0^b \left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2\right] dy =$$
$$= \int_0^a \left[b\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(b-\frac{b}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{b}{2}\right)^3\right] dx = \left[\frac{b}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{b^3x}{12}\right]\Big|_0^a =$$
$$= \frac{a^3b}{12} + \frac{ab^3}{12} = \frac{ab(a^2+b^2)}{12}. \blacktriangleright$$

3658. Круга радиуса R относительно точки, лежащей на окружности.

◀ Расположим систему координат так, чтобы круг D касался оси Oy в начале координат и находился в правой полуплоскости. В полярной системе координат окружность будет задаваться уравнением $\rho = 2R\cos\varphi$. Вычисляем момент:
$$J = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16R^4\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$4R^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = R^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$
$$R^4\frac{3}{2}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + R^4\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{R^4}{8}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi R^4}{2}. \blacktriangleright$$

Найти статические моменты однородных тел (плотность $\gamma = 1$):

3663. Прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c относительно его граней.

◀ Можно воспользоваться известными формулами о центре масс тела. Выберем начало системы координат в одной из вершин параллелепипеда и пустим ее оси так, чтобы ось Ox шла по ребру параллелепипеда с длиной a, ось Oy по ребру с длиной b и ось Oz по ребру с длиной c. Из соображений симметрии мы заключаем, что центр тяжести параллелепипеда находится в геометрическом центре тела и имеет координаты $x_c = a/2$, $y_c = b/2$, $z_c = c/2$. Масса параллелепипеда $M = abc$. Отсюда, используя известные формулы для центра тяжести, можно сразу написать значения статических моментов тела относительно координатных плоскостей или, что то же самое, относительно граней. Имеем $x_c = M_{yz}/M$, отсюда

$$M_{yz} = x_c M = \frac{a^2bc}{2}.$$

Аналогично

$$M_{zx} = y_c M = \frac{ab^2c}{2},$$

$$M_{xy} = z_c M = \frac{abc^2}{2}.$$

▶

3664. Прямого кругового конуса (радиус основания R, высота H) относительно плоскости, проходящей через вершину параллельно основанию.

◀ Расположим начало координат в вершине конуса, а ось Oz пустим по оси конуса. Тогда радиус кругового сечения конуса плоскостью, параллельной плоскости Oxy имеющей данную координату z $(0 \le z \le H)$, будет $\dfrac{R}{H}z$, а его площадь, а значит и масса будет равна $\pi\dfrac{R^2}{H^2}z^2dz$. Нам осталось написать интеграл для вычисления момента

$$M_{xy} = \int_0^H z\pi\frac{R^2}{H^2}z^2dz = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{z^4}{4}\Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2}{4}. \blacktriangleright$$

Найти центры масс однородных тел, ограниченных данными поверхностями:

3668. Цилиндром $z = \dfrac{y^2}{2}$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $2x + 3y - 12 = 0$.

$$◀\ M = \int_0^4 dy \int_0^{6-3y/2} \int_0^{y^2/2} dz = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2 dy \int_0^{6-3y/2} dx = \frac{1}{4}\int_0^4 y^2(12-3y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{4}\left(4y^3 - \frac{3}{4}y^4\right)\Big|_0^4 = 64 - 48 = 16.$$
$$M_{yz} = \int_0^4 dy \int_0^{6-3y/2} x\,dx \int_0^{y^2/2} dz = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2 dy \int_0^{6-3y/2} x\,dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^4 y^2(12-3y)^2 dy = \frac{1}{16}\left(48y^3 - 18y^4 + \frac{9}{5}y^5\right)\Big|_0^4 =$$
$$48\cdot 4 - 18\cdot 16 + \frac{9\cdot 64}{5} = 12\cdot 16 - 18\cdot 16 + \frac{36\cdot 16}{5} = \frac{6\cdot 16}{5}.$$
$$M_{zx} = \int_0^4 y\,dy \int_0^{6-3y/2} dx \int_0^{y^2/2} dz = \frac{1}{2}\int_0^4 y^3 dy \int_0^{6-3y/2} dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^4 y^3(12-3y)\,dy = \frac{1}{4}\left(3y^4 - \frac{3}{5}y^5\right)\Big|_0^4 = 3\cdot 64 - \frac{3\cdot 4\cdot 64}{5} = \frac{3\cdot 64}{5}.$$
$$M_{xy} = \int_0^4 dy \int_0^{6-3y/2} dx \int_0^{y^2/2} z\,dz = \frac{1}{8}\int_0^4 y^4 dy \int_0^{6-3y/2} dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^4 y^4(12-3y)\,dy = \frac{1}{16}\left(\frac{12}{5}y^5 - \frac{1}{2}y^6\right)\Big|_0^4 = \frac{12\cdot 64}{5} - 2\cdot 64 = \frac{2\cdot 64}{5}.$$
$$c_x = \frac{6\cdot 64}{5} : 16 = \frac{6}{5},\quad c_y = \frac{3\cdot 64}{5} : 16 = \frac{12}{5},\quad c_z = \frac{2\cdot 64}{5} : 16 = \frac{8}{5}.\ ▶$$

3671. Сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и конусом $z \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$ (шаровой сектор).

◀ Задача такова, что имеется два тела, на которые конус разбивает шар. Ответ задачника показывает, что имеется в виду часть, лежащая в верхней полуплоскости. Из соображений симметрии мы можем заключить, что центр тяжести лежит на оси Oz. Сразу перейдем к сферической системе координат.
$$M = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2\alpha} \sin\theta\,d\theta =$$
$$= -2\pi \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \cos\theta\Big|_0^{\pi/2-\alpha} = 2\pi(1-\sin\alpha)\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{2\pi(1-\sin\alpha)R^3}{3}.$$
$$M_{xy} = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin\theta\cos\theta\,d\theta =$$
$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^R \rho^3 d\rho \cos 2\theta\Big|_0^{\pi/2-\alpha} = \frac{\pi(\cos 2\alpha + 1)}{2}\int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi(\cos 2\alpha+1)R^4}{8}.$$
$$x_c = 0,\quad y_c = 0,\quad z_c = \frac{\pi(\cos 2\alpha+1)R^4}{8} : \frac{2\pi(1-\sin\alpha)R^3}{3} = \frac{3(\cos 2\alpha+1)R}{16(1-\sin\alpha)} =$$
$$= \frac{3(2-2\sin^2\alpha)R}{16(1-\sin\alpha)} = \frac{3R(1+\sin\alpha)}{8}.\ ▶$$

Найти моменты инерции однородных тел с массой, равной M.

3676. Шара радиуса R относительно касательной прямой.

◀ Уравнение шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Сначала вычислим момент инерции шара относительно оси Oz, проходящей через центр тяжести. Квадрат расстояния точки (x, y, z) до этой оси равен x^2+y^2. В сферической системе координат эта величина равна $\rho^2 \sin^2 \theta$. Момент инерции однородного шара плотности $\gamma = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$ представим интегралом в сферической системе координат

$$J_c = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) \, d(\cos \theta) =$$

$$\gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi = \gamma \cdot \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho = \gamma \cdot \frac{4R^5}{15} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \gamma \cdot \frac{8\pi R^5}{15} = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{8\pi R^5}{15} = \frac{2MR^2}{5}.$$

Чтобы вычислить момент инерции шара относительно касательной, воспользуемся теоремой Гюйгенса–Штейнера

$$J = J_c + MR^2 = \frac{2MR^2}{5} + MR^2 = \frac{7MR^2}{5}. \text{ ▶}$$

3680. Параболоида вращения (радиус основания R, высота H относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к оси вращения (экваториальный момент).

◀ Расположим систему координат так, чтобы начало координат находилось в вершине параболоида, а ось Oz шла по оси параболоида от вершины в сторону его основания. Тогда параболоид будет иметь уравнение $z = k(x^2 + y^2)$. При $z = H$ мы оказываемся на основании параболоида, т. е. $(x^2 + y^2) = R^2$. Из этого условия можно вычислить $k = H/R^2$. Итак, уравнение параболоида имеет вид $z = \dfrac{H}{R^2}(x^2 + y^2),\ 0 \le z \le H$. Из него получается, что $x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H} z$, а это квадрат радиуса круга, который образуется при сечении параболоида плоскостью параллельной основанию на расстоянии z от вершины. Площадь этого круга равна $S_z = \dfrac{\pi R^2}{H} z$. Пользуясь этим вычисляем z-координату центра тяжести.

$$M = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H} z \, dz = \frac{\pi R^2 H^2}{2H} = \frac{\pi R^2 H}{2},$$

$$M_{xy} = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H} z^2 dz = \frac{\pi R^2 H^3}{3H} = \frac{\pi R^2 H^2}{3}.$$

$$z_c = \frac{\pi R^2 H^2}{3} : \frac{\pi R^2 H}{2} = \frac{2}{3} H.$$

Вычислим момент инерции параболоида относительно оси Oy. Интеграл запишем в цилиндрической системе координат

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{H\rho^2/R^2}^H (\rho^2 \cos^2 \varphi + z^2) \rho \, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left(\rho^3 \cos^2 \varphi \cdot z + \frac{\rho z^3}{3} \right) \Big|_{H\rho^2/R^2}^H =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left[\rho^3 \cos^2 \varphi \cdot H \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) + \frac{\rho H^3}{3} \left(1 - \frac{\rho^6}{R^6} \right) \right] d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[H\cos^2\varphi \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^6}{6R^2} \right) + \frac{H^3}{3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^8}{8R^6} \right) \right] d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{HR^4}{12}\cos^2\varphi + \frac{H^3R^2}{8} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{HR^4}{24} + \frac{HR^4}{24}\cos 2\varphi + \frac{H^3R^2}{8} \right) d\varphi =$$
$$= \frac{HR^4\pi}{12} + \frac{HR^4}{48}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{H^3R^2\pi}{4} = \frac{HR^4\pi}{12} + \frac{H^3R^2\pi}{4}.$$
Пользуясь теоремой Гюйгенса–Штейнера вычисляем момент относительно оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести параболоида.
$$J_c = J - \frac{4H^2}{9} \cdot \frac{\pi R^2 H}{2} = \frac{HR^4\pi}{12} + \frac{H^3R^2\pi}{4} - \frac{2H^3R^2\pi}{9} = \frac{HR^2\pi}{36}(3R^2 + H^2). \blacktriangleright$$

3685. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны R и r $(R > r)$. Зная, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей, найти массу кольца. Плотность на окружности внутреннего круга равна единице.

◀ Сначала определим поверхностную плотность. Если точка кольца находится на расстоянии ρ от центра кольца, тогда плотность в этой точке должна быть равна $\dfrac{r}{\rho}$. Теперь массу кольца можно записать интегралом в полярной системе координат.
$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R r\,d\rho = 2\pi r(R - r). \blacktriangleright$$

3689*. Вычислить массу тела, ограниченного круглым конусом, высота которого равна h, а угол между осью и образующей равен α, если плотность пропорциональна n-й степени расстояния от плоскости, проведенной через вершину конуса параллельно основанию, причем на единице расстояния она равна γ $(n > 0)$.

◀ Расположим начало системы координат в вершине конуса, а координатную ось Oz направим по оси конуса в сторону основания. Тогда уравнение конуса будет $z = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\sqrt{x^2 - y^2}$ или $z = \operatorname{ctg}\alpha\sqrt{x^2 - y^2}$. Радиус основания при $z = h$ будет равен $h\operatorname{tg}\alpha$. Объемная плотность конуса будет равна γz^n. Теперь мы можем записать массу конуса интегралом в цилиндрической системе координат.
$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h\operatorname{tg}\alpha} d\rho \int_{\rho\operatorname{ctg}\alpha}^{h} \gamma z^n \rho\,dz = \frac{\gamma}{n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h\operatorname{tg}\alpha} \rho\,d\rho \cdot z^{n+1}\Big|_{\rho\operatorname{ctg}\alpha}^{h} =$$
$$= \frac{\gamma}{n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h\operatorname{tg}\alpha} \rho(h^{n+1} - \rho^{n+1}\operatorname{ctg}^{n+1}\alpha)\,d\rho =$$
$$= \frac{\gamma}{n+1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{h^2\operatorname{tg}^2\alpha}{2} h^{n+1} - \frac{h^{n+3}\operatorname{tg}^{n+3}\alpha}{n+3}\operatorname{ctg}^{n+1}\alpha \right) d\varphi =$$
$$= \frac{2\pi\gamma h^{n+3}}{n+1} \left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3} \right) = \frac{2\pi\gamma h^{n+3}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{2(n+3)}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}. \blacktriangleright$$

3691. Вычислить массу тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z > 0)$, если плотность в каждой точке равна сумме квадратов координат.

◀ Найдем уравнения поверхностей в сферической системе координат.
Параболоид

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = 2ar\cos\theta; \quad r^2\sin^2\theta = 2ar\cos\theta; \quad r = \frac{2a\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Сфера

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta = 3a^2; \quad r^2 = 3a^2; \quad r = \sqrt{3}a.$$

Эти поверхности пересекаются по окружности, точки которой имеют одну и ту же координату θ. Для нахождения этого θ решаем уравнение

$$\frac{2a\cos\theta}{\sin^2\theta} = \sqrt{3}a; \quad \frac{2a\cos\theta}{1-\cos^2\theta} = \sqrt{3}a; \quad \sqrt{3}\cos^2\theta + 2\cos\theta - \sqrt{3} = 0;$$

При решении квадратного уравнения оставляем корень, попадающий в диапазон $[-1,1]$ (выбираем знак плюс перед радикалом)

$$\cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \theta = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Теперь можно записать массу в виде суммы двух интегралов

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} d\theta \int_0^{\sqrt{3}a} r^4\sin\theta\,dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta/\sin^2\theta} r^4\sin\theta\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} \sin\theta\,d\theta\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{3}a} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^{2a\cos\theta/\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} \sin\theta\,d\theta + \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} \frac{32a^5\cos^5\theta\sin\theta}{\sin^{10}\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} +$$

$$+ \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} \frac{32a^5(1-\sin^2\theta)^2}{\sin^9\theta}\,d(\sin\theta) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\arccos(\sqrt{3}/3)} +$$

$$+ \frac{32a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} (\sin^{-9}\theta - 2\sin^{-7}\theta + \sin^{-5}\theta)\,d(\sin\theta) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi +$$

$$+ \frac{32a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(-\frac{\sin^{-8}\theta}{8} + \frac{\sin^{-6}\theta}{3} - \frac{\sin^{-4}\theta}{4}\right)\Big|_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{18\pi a^5(\sqrt{3}-1)}{5} + \frac{64\pi a^5}{5}\cdot\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{81}{8\cdot 16}-\frac{27}{3\cdot 8}+\frac{9}{4\cdot 4}\right) =$$

$$= \frac{18\pi a^5(\sqrt{3}-1)}{5} + \frac{64\pi a^5}{5}\cdot\frac{-48+128-96+243-432-216}{8\cdot 16\cdot 3} =$$

$$= \frac{18\pi a^5(\sqrt{3}-1)}{5} + \frac{\pi a^5}{5}\cdot\frac{11}{6} = \frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right). \blacktriangleright$$

Вычислить криволинейные интегралы:

3773. $\int_L (x^2+y^2)^n ds$, где L – окружность $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$.

$$\blacktriangleleft \int_L (x^2+y^2)^n ds = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2)^n \cdot a\, dt = a^{2n+1}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^{2n+1}. \blacktriangleright$$

3774. $\int_L xy\, ds$, где L – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

◀ Введем параметризацию кривой L: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \quad 0 \le t \le \pi/2$.

$$\int_L xy\, ds = \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\cos t \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} ab\sin t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}\, d(\sin t) =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\, d(\sin^2 t) =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\, d\left((a^2-b^2)\sin^2 t + b^2\right) =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left((a^2-b^2)\sin^2 t + b^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}. \blacktriangleright$$

3775. $\int_L \sqrt{2y}\, ds$, где L – первая арка циклоиды $x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t)$.

$$\blacktriangleleft \int_L \sqrt{2y}\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= a^{3/2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)(2-2\cos t)}\, dt = 2a^{3/2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\, dt =$$

$$= 2a^{3/2}(t-\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi a^{3/2}. \blacktriangleright$$

3777*. Вычислить $\int_L (x-y)\, ds$, где L – окружность $x^2+y^2 = ax$.

◀ Уравнение окружности можно представить как $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Параметризация L: $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \quad y = \frac{a}{2}\sin t. \quad 0 \le t \le 2\pi$.

$$\int_L (x-y)\, ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t - \frac{a}{2}\sin t\right)\cdot\frac{a}{2}\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos t - \sin t)\, dt = \frac{a^2}{4}(t+\sin t+\cos t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}. \blacktriangleright$$

Разложить в ряд Фурье данные функции в указанных интервалах.

4385. Функцию $y=\cos ax$ в интервале $(-\pi,\pi)$ (a – не целое число).

◀ $a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\,dx=\dfrac{1}{2\pi a}\sin ax\Big|_{-\pi}^{\pi}=\dfrac{\sin\pi a}{\pi a}.$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(a-n)x+\cos(a+n)x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2(a-n)\pi}\sin(a-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2(a+n)\pi}\sin(a+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=\frac{\sin(a-n)\pi}{(a-n)\pi}+\frac{\sin(a+n)\pi}{(a+n)\pi}=$$
$$=\frac{\sin a\pi\cos n\pi-\cos a\pi\sin n\pi}{(a-n)\pi}+\frac{\sin a\pi\cos n\pi+\cos a\pi\sin n\pi}{(a+n)\pi}=$$
$$=\frac{(-1)^n\sin a\pi}{(a-n)\pi}+\frac{(-1)^n\sin a\pi}{(a+n)\pi}=\frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{(a^2-n^2)\pi}.$$

$b_n=0$, поскольку $y=\cos ax$ функция четная.

Ответ: $\cos ax\sim\dfrac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n a}{a^2-n^2}\cos nx\right).$ ▶

4387. Функцию $y=\sin ax$ (a – целое число) в интервале $(0,\pi)$ в ряд косинусов.

◀ $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin ax\,dx=-\dfrac{1}{\pi a}\cos ax\Big|_{0}^{\pi}=\dfrac{1-\cos\pi a}{\pi a}.$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin ax\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\sin(a+n)x+\sin(a-n)x)\,dx=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(a+n)x}{a+n}\Big|_0^{\pi}+\frac{\cos(a-n)x}{a-n}\Big|_0^{\pi}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos[\pi(a+n)]}{a+n}+\frac{1-\cos[\pi(a-n)]}{a-n}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(a-n)(1-\cos[\pi(a+n)]+(a+n)(1-\cos[\pi(a-n)])}{a^2-n^2}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2a-a(\cos[\pi(a+n)]+\cos[\pi(a-n)])+n(\cos[\pi(a+n)]-\cos[\pi(a-n)])}{a^2-n^2}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2a-2a\cos\pi a\cos\pi n-2n\sin\pi a\sin\pi n}{a^2-n^2}=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n\cos\pi a}{a^2-n^2}.$$

$$\sin ax\sim\frac{2a}{\pi}\left(\frac{1-\cos\pi a}{2a^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1+\cos\pi a}{a^2-1^2}\cos x+\frac{1-\cos\pi a}{a^2-2^2}\cos 2x+\frac{1+\cos\pi a}{a^2-3^2}\cos 3x+\ldots\right).$$

Для четного a $\sin ax\sim\dfrac{4a}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{a^2-1^2}+\dfrac{\cos 3x}{a^2-3^2}+\dfrac{\cos 5x}{a^2-5^2}+\ldots\right).$

Для нечетного a $\sin ax\sim\dfrac{4a}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{\cos 2x}{a^2-2^2}+\dfrac{\cos 4x}{a^2-4^2}+\ldots\right).$ ▶

©Alidoro, 2016. palva@mail.ru