Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание двадцатое. М., 1985.

Глава IX. Ряды

Доказать сходимость следующих рядов с помощью признака Даламбера.

2755. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$. Сходится. ▶

2756. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{\pi}=$
$=1/2<1$. Сходится. ▶

2759. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)}=$
$=2/3<1$. Сходится. ▶

2762. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{4\cdot 2}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\cdot$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot 2^n\cdot n!}{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}<1$. Сходится. ▶

Доказать сходимость следующих рядов с помощью радикального признака Коши.

2764. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$. Сходится. ▶

2765. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n}=0<1$. Сходится. ▶

Вопрос о сходимости следующих рядов решить с помощью интегрального признака Коши.

2768. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

◀ $\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^\infty\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln\ln x\big|_2^\infty$. Интеграл и ряд расходятся. ▶

2769. $\left(\dfrac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\dfrac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

◄ $\displaystyle\int_1^\infty\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2dx=\int_1^\infty\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,dx+\int_1^\infty\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}=$
$\displaystyle=\int_1^\infty\frac{dx}{1+x^2}+\int_1^\infty\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_1^\infty-\frac{1}{1+x^2}\Big|_1^\infty$. Интеграл и ряд сходятся. ►

Выяснить, какие из следующих рядов сходятся, какие расходятся.

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+\ldots$

◄ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq0$. Общий член ряда не стремится к нулю. Ряд расходится. ►

2777. $\dfrac{1}{1+1^2}+\dfrac{2}{1+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{1+n^2}+\ldots$

◄ Сравниваем данный ряд с расходящимся рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Вычисляем предел отношения общих членов: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=1$. Предел конечный и не равен нулю, поэтому исходный ряд также расходится. ►

2778. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{3^n}+\ldots$

◄ Применяем интегральный признак. Для этого сначала вычислим неопределенный интеграл:
$\displaystyle\int\frac{2x-1}{3^x}\,dx=-\frac{1}{\ln3}\int(2x-1)\,d(3^{-x})=-\frac{2x-1}{\ln3\cdot3^x}+\frac{2}{\ln3}\int3^{-x}dx=$
$\displaystyle=-\frac{2x-1}{\ln3\cdot3^x}-\frac{2}{(\ln3)^2\cdot3^x}.$
Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty\frac{2x-1}{3^x}\,dx$ сходится, поэтому данный ряд также сходится. ►

Доказать каждое из следующих соотношений с помощью ряда, общим членом которого является данная функция.

2785. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$. ◄ Доказываем сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ методом Даламбера:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0.$
Теперь можно применить необходимый признак сходимости ряда. ►

2788. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$. ◄ Доказываем сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ методом Даламбера:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=0.$
Теперь можно применить необходимый признак сходимости ряда. ►