56.1. Доказать, что во всякой группе:
а) пересечение любого набора подгрупп является подгруппой;
б) объединение двух подгрупп является подгруппой тогда и только тогда, когда одна из подгрупп содержится в другой;
в) если подгруппа C содержится в объединении подгрупп A и B, то либо $C \subset A$ либо $C \subset B$.

◄
а) Пусть $G_i,\ (i \in I)$ – подгруппы группы G. Элементы g_1, g_2 принадлежат их пересечению $g_1, g_2 \in \bigcap\limits_{i \in I} G_i$. Тогда для любых $i \in I$ $g_1, g_2 \in G_i$; $g_1 g_2 \in G_i$; $g_1^{-1} \in G_i$.
Отсюда следует $g_1 g_2 \in \bigcap\limits_{i \in I} G_i$; $g_1^{-1} \in \bigcap\limits_{i \in I} G_i$, т. е. $\bigcap\limits_{i \in I} G_i$ подгруппа группы G.
б) Предположим, что объединение двух подгрупп G_1 и G_2 является подгруппой группы G и в то же время эти подгруппы не входят одна в другую. То есть имеются два таких элемента $g_1,\ g_2$, что $g_1 \in G_1,\ g_1 \notin G_2,\ g_2 \notin G_1,\ g_2 \in G_2$. Пусть $g_1 g_2 \in G_1$ тогда $g_1^{-1} g_1 g_2 \in G_1$ и $g_2 \in G_1$. Но мы выбрали такой элемент g_2, который не входит в G_1. Противоречие доказывает, что $g_1 g_2$ не может принадлежать G_1. Симметричным образом, предполагая, что $g_1 g_2 \in G_2$, имеем $g_1 g_2 g_2^{-1} \in G_2$ и $g_1 \in G_2$, что опять таки противоречит выбору g_1. Все эти противоречия показывают, что если объединение двух подгрупп является подгруппой, то одна из этих подгрупп входит в другую. Обратное утверждение очевидно.
в) Имеем $C \subset A \cup B$, откуда $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$. C – подгруппа, поэтому по пункту а) множества $C \cap A$ и $C \cap B$ также подгруппы. По пункту б) одна из групп $C \cap A$ и $C \cap B$ входит в другую, поэтому подгруппа C совпадает либо с $C \cap A$ либо с $C \cap B$. Последнее означает, что C либо входит в A, либо входит в B. ►

56.2. Доказать, что конечная подполугруппа любой группы является подгруппой. Верно ли это утверждение, если подполугруппа бесконечна?

◄ Пусть S – подполугруппа группы G. Групповая операция, ограниченная на S, остается ассоциативной. Результат операции двух элементов S принадлежит S по определению подполугруппы. Возьмем произвольный элемент s подполугруппы. Все натуральные степени элемента s принадлежат подполугруппе. В силу конечности последней, этих степеней конечное число, поэтому порядок элемента s конечен. Таким образом все элементы циклической подгруппы, порожденной элментом s, могут быть представлены неотрицательными степенями s и, следовательно, принадлежат подполугруппе. Среди элементов этой циклической подгруппы присутствует единица группы, а также элемент s^{-1}. Таким образом, мы доказали, что, во-первых, единица группы принадлежит подполугруппе, во-вторых, для произвольного элемента s подполугруппы обратный ему элемент также принадлежит подполугруппе. Все аксиомы группы выполняются для подполугруппы S.

Утверждение для бесконечных подполугрупп неверно. Например, подполугруппа натуральных чисел по сложению не является подгруппой группы целых чисел. ►

63.10. Доказать, что все обратимые элементы кольца с единицей образуют группу относительно умножения.

◄ Пусть M – множество всех обратимых элементов кольца и $a, b \in M$. Тогда в силу $abb^{-1}a^{-1} = e = b^{-1}a^{-1}ab$ элемент $b^{-1}a^{-1}$ будет обратным для ab, т. е. элемент ab обратим. В силу $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ элемент a^{-1} также обратим. Единица кольца, очевидно, обратима. Мы видим, что множество M замкнуто относительн операции умножения, содержит единицу и вместе с каждым элементом содержит ему обратный. Следовательно, M – группа. ►

63.15. Пусть R – кольцо с единицей $x, y \in R$. Доказать, что:
а) если произведения xy и yx обратимы, то элементы x и y также обратимы;
б) если R без делителей нуля и произведение xy обратимо, то x и y и обратимы;
в) без дополнительных предположений о кольце R из обратимости произведения xy не следует обратимость элементов x и y;
г) если обратим элемент $1 + ab$ то обратим и элемент $1 + ba$.

◄ ►