Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание двадцатое. М., 1985.

Глава XII. Многомерные интегралы и кратное интегрирование

Вычислить двойные интегралы, взятые по прямоугольным областям интегрирования D, заданным условиями в скобках.

3479. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy \qquad (0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1).$

◀ $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 x^2 dx \cdot \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$ ▶

Вычислить интегралы.

3508. $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy,$ $\quad D$ – область, ограниченная параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$.

◀ $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$

$= \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$
▶

3519. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\,dz = \int_0^a dx \int_0^x dy \cdot xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^y = \frac{1}{2}\int_0^a dx \int_0^x xy^3 dy =$

$= \frac{1}{2}\int_0^a dx \cdot x\frac{y^4}{4}\Big|_0^x = \frac{1}{8}\int_0^a x^5 dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^a = \frac{a^6}{48}.$

3523. $\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz,$ $\quad \Omega$ – область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z = xy$ и плоскостями $x + y = 1$ и $z = 0$ $(z \ge 0)$.

◀ $\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} y\,dy \int_0^{xy} dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} y\,dy \cdot xy =$

$= \int_0^1 x^2\,dx \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)\,dx =$

$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{60} = \frac{1}{180}.$ ▶

Перейти в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ к полярным координатам ρ и φ $(x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi)$, и расставить пределы интегрирования:

3527. D – область, являющаяся общей частью двух кругов $x^2+y^2 \le ax$ и $x^2+y^2 \le by$.

◀ Первая окружность в полярной системе координат имеет уравнение $\rho = a\cos\varphi$, вторая окружность – уравнение $\rho = b\sin\varphi$. Они пересекаются в начале координат и в точке для которой $a\cos\varphi = b\sin\varphi$. Отсюда имеем

$$a\cos\varphi - b\sin\varphi = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\operatorname{arctg}\frac{a}{b} - \varphi) = 0 \text{ или } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Теперь можем записать искомый интеграл:

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho + \int_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

▶

3531. D – область, определенная неравенствами $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (x^2+y^2)^3 \leq 4a^2x^2y^2$.

◀ Область представляет собой часть первого квадранта, отрезанную кривой, уравнение которой в полярных координатах будет следующим:

$$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^3 = 4a^2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi \text{ или } \rho = a\sin 2\varphi.$$

Теперь мы можем написать искомый интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

▶

Двойные интегралы преобразовать к полярным координатам:

3533. $\displaystyle\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\, dx.$

◀ Выведем уравнение кривой $x = \sqrt{2Ry - y^2}$ в полярной системе координат:
$\rho\cos\varphi = \sqrt{2R\rho\sin\varphi - \rho^2\sin^2\varphi^2}; \quad \rho^2\cos^2\varphi = 2R\rho\sin\varphi - \rho^2\sin^2\varphi^2;$
$\rho^2 = 2R\rho\sin\varphi; \quad \rho = 2R\sin\varphi$. Прямая $y = R/2$ имеет уравнение $\rho\sin\varphi = R/2$ или $\rho = \dfrac{R}{2\sin\varphi}$, Аналогично получаем уравнение прямой $y = 2R$, которое имеет вид $\rho = \dfrac{2R}{\sin\varphi}$. Найдем полярные углы φ_A, φ_B точек A, B, в которых кривая пересекает эти прямые, для этого решим следующие уравнения:
$2R\sin\varphi_A = \dfrac{R}{2\sin\varphi_A}; \quad \sin^2\varphi_A = \dfrac{1}{4}; \quad \sin\varphi_A = \dfrac{1}{2}; \quad \varphi_A = \dfrac{\pi}{6};$
$2R\sin\varphi_B = \dfrac{2R}{\sin\varphi_B}; \quad \sin^2\varphi_B = 1; \quad \sin\varphi_B = 1; \quad \varphi_B = \dfrac{\pi}{2};$
Теперь мы можем написать искомый интеграл.
$\displaystyle\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{R/(2\sin\varphi)}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$ ▶

3534. $\displaystyle\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy.$

◄ Выведем уравнение кривой $x = \sqrt{R^2-x^2}$ в полярной системе координат:
$\rho\cos\varphi = \sqrt{R^2-\rho^2\sin^2\varphi}; \quad \rho^2\cos^2\varphi = R^2-\rho^2\sin^2\varphi; \quad \rho^2 = R^2; \quad \rho = R.$
Эта кривая пересекает прямую $y = R$ при значении полярного угла $\pi/2$. Теперь можно написать искомый интеграл:

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} f(\rho^2)\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^R f(\rho^2)\rho\,d\rho. \text{ ►}$$

С помощью перехода к полярным координатам вычислить двойные интегралы:

3536. $\displaystyle\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy.$

◄ Воспользовавшись результатом задачи 3534, мы можем написать:

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^R \ln(1+\rho^2)\rho\,d\rho =$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^R \ln(1+\rho^2)\,d(1+\rho^2) = \frac{\pi}{4}\int_1^{1+R^2} \ln t\,dt = \frac{\pi}{4}t\ln t\Big|_1^{1+R^2} - \frac{\pi}{4}\int_1^{1+R^2}\frac{t}{t}\,dt =$$
$$= \frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2) - \ln 1 - 1 - R^2 + 1] = \frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2]. \text{ ►}$$

3539. $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, где D – круг $x^2+y^2 \le Rx$.

◄ В полярной системе круг имеет уравнение $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \le R\rho\cos\varphi$ или $\rho \le R\cos\varphi,\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Записываем интеграл

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\,d\rho =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,d(R^2-\rho^2) = -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\cdot(R^2-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{R\cos\varphi} =$$
$$= -\frac{R^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(|\sin\varphi|^3-1)\,d\varphi = -\frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}(\sin^3\varphi - 1)\,d\varphi =$$
$$= \frac{2R^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi) + \frac{\pi R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi R^3}{3} =$$
$$= \frac{2R^3}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi R^3}{3} = \frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right). \text{ ►}$$

Перейти в тройном интеграле $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ к цилиндрическим координатам ρ, φ, z ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$) или сферическим координатам ρ, θ, φ ($x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta$) и расставить пределы интегрирования:

3547. Ω – область, находящаяся в первом октанте и ограниченная цилиндром $x^2+y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = 1$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$.

◀ Перейдем к цилиндрической системе координат. Для плоскости $y = x$ имеем $\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi$; $\operatorname{tg}\varphi = 1$ или $\varphi = \pi/4$. Для плоскости $y = x\sqrt{3}$ так же точно получаем $\varphi = \pi/3$. Теперь можно написать интеграл:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,d\rho.$$ ▶

3551. Ω – общая часть двух шаров $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ и $x^2+y^2+(z-R)^2 \le R^2$.

◀ Перейдем к сферической системе координат. Уравнение второго шара в этой системе будет таким: $(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta - R)^2 \le R^2$;
$\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta - 2R\rho\cos\theta + R^2 \le R^2$; $\quad \rho \le 2R\cos\theta$.
Сферы пересекаются по окружности, для которой $2R\cos\theta = R$ или $\theta = \pi/3$.
Теперь можем записать искомый интеграл:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3}\sin\theta\,d\theta\int_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho +$$
$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho.$$ ▶

Вычислить интегралы с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам:

3553. $\displaystyle\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

◀ Переходим к цилиндрической системе координат. Проекция области интегрирования на плоскость Oxy представляет собой полукруг радиуса 1 с центром в точке $(1,0,0)$, расположенный в верхней полуплоскости. Уравнение ограничивающей его окружности будет иметь вид
$y = \sqrt{2x-x^2}$ или $\rho\sin\varphi = \sqrt{2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi}$; $\quad \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi$;
$\rho = 2\cos\varphi$. Теперь можем написать интеграл в цилиндрической системе координат:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} d\rho\int_0^a z\rho^2 dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\frac{a^2\rho^2}{2}d\rho = \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi/2}(2\cos\varphi)^3 d\varphi =$$
$$\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) = \frac{4a^2}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{9}a^2.$$ ▶

3557. $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, где Ω – шар $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

◀ Переходим к сферической системе координат. Преобразуем интеграл в повторный.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 d\rho\int_0^\pi \frac{\rho^2\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + (\rho\cos\theta - 2)^2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho\,d\rho\int_0^\pi \frac{d(\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4)}{\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho\,d\rho\cdot\sqrt{\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4}\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1[(2+\rho)-(2-\rho)]\cdot\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi. \blacktriangleright$$

Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными):

3562. Плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ и $x + y + z = 6$.

◀ Объем равен двойному интегралу по треугольнику D, расположенному в плоскости Oxy и имеющему вершины $(2, 0)$, $(4, 0)$ и $(0, 6)$.

$$V = \iint_D (6 - x - y)\,dx\,dy = \int_0^6 dy \int_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2}{3}y} (6 - x - y)\,dx =$$

$$\int_0^6 dy\cdot\left[(6-y)x - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2}{3}y} = \int_0^6 dy\cdot\left[(6-y)\left(2 - \frac{1}{3}y\right) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{3}y\right)(6-y)\right] =$$

$$\int_0^6 \left(6 - 2y + \frac{y^2}{6}\right) dy = \left(6y - y^2 + \frac{y^3}{6\cdot 3}\right)\Big|_0^6 = 12. \blacktriangleright$$

3568. Цилиндром $z = 4 - x^2$, координатными плоскостями и плоскостью $2x + y = 4$ $(x \geq 0)$.

◀ Объем равен двойному интегралу по треугольнику D, расположенному в плоскости Oxy и имеющему вершины $(0, 0)$, $(2, 0)$ и $(0, 4)$.

$$V = \iint_D (4 - x^2)\,dx\,dy = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx \int_0^{4-2x} dy = \int_0^2 (4 - x^2)(4 - 2x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 (16 - 8x - 4x^2 + 2x^3)\,dx = \left(16x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2 = 32 - 16 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{40}{3}.$$

▶

3571. Эллиптическим цилиндром $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, плоскостями $z = 12 - 3x - 4y$ и $z = 1$.

◀ Объем равен двойному интегралу по эллипсу D, расположенному в плоскости Oxy и имеющему полуоси 2 и 1.

$$V = \iint_D (11 - 3x - 4y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} (11 - 3x - 4y)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^1 dy\cdot\left[(11 - 4y)x - \frac{3}{2}x^2\right]\Big|_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1}^1 4(11 - 4y)\sqrt{1 - y^2}\,dy =$$

$$= 44\int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2}\,dy - 16\int_{-1}^1 y\sqrt{1 - y^2}\,dy) = 22\pi.$$

Здесь первый интеграл равен $\pi/2$ – площади единичной полуокружности, а второй интеграл равен нулю как интеграл по симметричному промежутку от нечетной функции.

▶

3577. Параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$ и $z = 0$.

◀ Объем равен двойному интегралу по области D, расположенной в плоскости Oxy и представляющей собой сегмент параболы $y = x^2$, отсеченный прямой $y = 1$.

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy = \int_{-1}^{1} dx \cdot \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{1} =$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{88}{105}. ▶$$

3588. Цилиндром $x^2+y^2=2x$, плоскостями $2x-z=0$ и $4x-z=0$.

◀ Объем равен двойному интегралу по области D, расположенной в плоскости Oxy и представляющей собой круг $(x-1)^2+y^2=1$.

$$V = \iint_D (4x-2x)\,dx\,dy = \int_0^2 2x\,dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy = 4\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$
$$= -2\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,d(1-(x-1)^2) + 4\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx =$$

Последний интеграл здесь равен $\pi/2$ как половина площади единичного круга.

$$= -2\cdot\frac{2}{3}(1-(x-1)^2)^{3/2}\Big|_0^2 + 2\pi = 0 + 2\pi = 2\pi. ▶$$

3592. Гиперболическим параболоидом $z = \dfrac{xy}{a}$, цилиндром $x^2+y^2=ax$ и плоскостью $z=0$ $(x\ge 0,\ y\ge 0)$.

◀ Объем равен двойному интегралу по области D, расположенной в плоскости Oxy и представляющей собой полукруг $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}, \quad x\ge 0$.

$V = \iint_D \dfrac{xy}{a}\,dx\,dy =$ переходим к полярной системе координат:

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r^3\sin\varphi\cos\varphi}{a}\,dr = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^3 dr =$$
$$= \frac{a^4}{4a}\int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{a^4}{4a}\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,d(\cos\varphi) = -\frac{a^3}{24}\cos^6\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{24}. ▶$$

Найти двойным интегрированием площади указанных областей:

3598. Области, ограниченной прямыми $y=x$, $y=5x$, $x=1$.

$$◀ \int_0^1 dx \int_x^{5x} dy = \int_0^1 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^1 = 2. ▶$$

3602*. Области, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$.

◀ Перейдем к полярной системе координат $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Получаем следующее уравнение кривой: $r = 2a\cos^3\varphi$. Площадь области с учетом якобиана можно записать в виде интеграла

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos^3\varphi} r\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\cdot 2a^2\cos^6\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)^3 d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi\,d\varphi + 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 2\varphi\,d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi\, d(2\varphi) + \frac{3}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 4\varphi)\, d\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 2\varphi)\, d(\sin 2\varphi)\right) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\pi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{2}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 4\varphi\, d(4\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{6}\sin^3 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\pi + 0 + \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{8}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 0 - 0\right) = \frac{a^2}{4}\left(\pi + \frac{3}{2}\pi + 0\right) = \frac{5}{8}\pi a^2. \blacktriangleright$$

Вычислить тройным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в уловия задач параметры считаются положительными):

3612. Цилиндрами $z = \ln(x+2)$ и $z = \ln(6-x)$ и плоскостями $x = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 2$.

◀ Проекция тела на плоскость Oxy представляет собой треугольник с вершинами $(0,2,0)$, $(0,-2,0)$ и $(2,0,0)$, а само тело расположено между двумя логарифмическими цилиндрами. Объем выражается интегралом

$$V = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{2-x} dy \int_{\ln(x+2)}^{\ln(6-x)} dz = \int_0^2 [\ln(6-x) - \ln(x+2)]\, dx \int_{x-2}^{2-x} dy =$$
$$= \int_0^2 (4-2x)[\ln(6-x) - \ln(x+2)]\, dx =$$
$$= \int_0^2 [(4-2x)\ln(6-x)\, dx + (2x-4)\ln(x+2)]\, dx =$$
$$= -2\int_0^2 (6-x)\ln(6-x)\, d(6-x) + 8\int_0^2 \ln(6-x)\, d(6-x) +$$
$$+2\int_0^2 (x+2)\ln(x+2)\, d(x+2) - 8\int_0^2 \ln(x+2)\, d(x+2) =$$

Далее нам нужно вывести (или взять из справочника) следующие формулы:

1. $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln x - \int \frac{x}{x}\, dx = x(\ln x - 1)$.

2. $\displaystyle\int x\ln x\, dx = \frac{1}{2}\int \ln x\, d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)$.

Используя эти формулы вычисляем интегралы

$$= -\frac{1}{2}(6-x)^2[2\ln(6-x) - 1]\Big|_0^2 + 8(6-x)[\ln(6-x) - 1]\Big|_0^2 +$$
$$+\frac{1}{2}(x+2)^2(2\ln(x+2) - 1)\Big|_0^2 - 8(x+2)[\ln(x+2) - 1]\Big|_0^2 =$$
$$-\frac{1}{2}[4^2(2\ln 4 - 1) - 6^2(2\ln 6 - 1)] + 8[4(\ln 4 - 1) - 6(\ln 6 - 1)] +$$
$$+\frac{1}{2}[4^2(2\ln 4 - 1) - 2^2(2\ln 2 - 1)] - 8[4(\ln 4 - 1) - 2(\ln 2 - 1)] =$$

Первые слагаемые каждой квадратной скобки сокращаются

$18(2\ln 6-1)-48(\ln 6-1)-2(2\ln 2-1)+16(\ln 2-1)=$
$(36-48)(\ln 2+\ln 3)-18+48+(-4+16)\ln 2+2-16=16-12\ln 3=$
$=4(4-3\ln 3)$. ►

3621. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$.

◄ Переходим к сферической системе координат. Получаем
$(r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta)^3=a^2r^4\cos^4\theta; \quad r^6=a^2r^4\cos^4\theta;$
$r^2=a^2\cos^4\theta; \quad r=a\cos^2\theta$. Теперь можем написать интеграл.

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a\cos^2\theta}r^2\sin\theta\,dr=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot r^3\Big|_0^{a\cos^2\theta}=$$
$$=-\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos^6\theta\,d(\cos\theta)=-\frac{a^3}{21}\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\cos^7\theta\Big|_0^{\pi}=\frac{2a^3}{21}\int_0^{2\pi}d\varphi=$$
$$=\frac{4\pi}{21}a^3.$$ ►

3625. $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=16, z^2=x^2+y^2, x=0, y=0, z=0$ $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$.

◄ Часть шарового слоя, расположенного в первом октанте разрезается конусом на две области. Мы будем вычислять объем области, которая примыкает к оси Oz, поскольку ответ задачника предполагает именно эту область. Переходим к сферической системе координат:

$$V=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_1^4 r^2\sin\theta\,dr=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\cdot r^3\Big|_1^4=$$
$$=\frac{63}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta=-21\int_0^{\pi/2}d\varphi\cdot\cos\theta\Big|_0^{\pi/4}=21\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{\pi/2}d\varphi=$$
$$=\frac{21}{4}(2-\sqrt{2})\pi.$$ ►

3627. Вычислить площадь той части поверхности $z^2=2xy$, которая находится над прямоугольником, лежащим в плоскости $z=0$ и ограниченным прямыми $x=0,\ y=0,\ x=3,\ y=6$.

◄ $z=\sqrt{xy};\ z'_x=\dfrac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}};\ z'^2_x=\dfrac{y}{2x}.\ z'_y=\dfrac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{y}};\ z'^2_y=\dfrac{x}{2y}.$

$$S=\int_0^3dx\int_0^6\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}\,dy=\int_0^3dx\int_0^6\sqrt{\frac{2xy+y^2+x^2}{2xy}}\,dy=$$
$$=\int_0^3dx\int_0^6\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy=\int_0^3dx\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{2y^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^6=$$
$$=\int_0^3\left(2\sqrt{3}\sqrt{x}+\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right)dx=\left(\frac{4\sqrt{3}x^{3/2}}{3}+8\sqrt{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^3=12+24=36.$$

Ответ: 36. ►

В задачах 3632, 3633, 3638 найти площади указанных частей данных поверхностей:

3632. Части $z^2 = 4x$, вырезанной цилиндром $y^2 = 4x$ и плоскостью $x = 1$.

◀ Вырезанная из параболического цилиндра часть состоит из двух симметричных относительно плоскости Oxy лепестков, имеющих общую точку в начале координат. Проекцией вырезанной части на плоскость Oxy служит сегмент параболы $y^2 = 4x$. Верхний лепесток поверхности описывается функцией $z = 2\sqrt{x}$.

$$S = 2\int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dy = 2\int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dy =$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{16}{3} \cdot (x+1)\sqrt{x+1}\Big|_0^1 = \frac{16}{3} \cdot (2\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: $\dfrac{16}{3} \cdot (2\sqrt{2} - 1)$. ▶

3633. Части $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

◀ $z = xy$; $z_x' = y$; $z_x'^2 = y^2$; $z_y' = x$; $z_y'^2 = x^2$. C – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$ в плоскости Oxy.

$$S = \iint_C \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + r^2} \cdot r\, dr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, d(1 + r^2) = \pi \cdot \frac{2}{3}(1 + r^2)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{2\pi}{3}\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1\right].$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1\right]$. ▶

3638. Части $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ и лежащей в первом октанте.

◀ $z_x = \dfrac{(x^2+y^2) - 2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$, $z_y = \dfrac{(x^2+y^2) - 2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$.

Вырезанная часть проецируется на четверть кольца, лежащую в плоскости Oxy, которую обозначим через D. Тогда площадь равна интегралу

$$S = \int_D \sqrt{1 + \frac{[(x^2+y^2) - 2x(x+y)]^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{[(x^2+y^2) - 2y(x+y)]^2}{(x^2+y^2)^4}}\, dx\, dy =$$

Переходим к полярной системе координат. Преобразуем отдельно подынтегральное выражение

$$\sqrt{1 + \frac{[\rho^2 - 2\rho^2\cos\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)]^2}{\rho^8} + \frac{[\rho^2 - 2\sin\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)]^2}{\rho^8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho^4 + 2 - 4(\sin\varphi + \cos\varphi)^2 + 4(\sin\varphi + \cos\varphi)^2}{\rho^4}} = \sqrt{\frac{\rho^4 + 2}{\rho^4}}.$$

Продолжим вычисление площади

$$S = \int_1^4 \rho\, d\rho \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\rho^4 + 2}{\rho^4}}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_1^4 \frac{\sqrt{\rho^4 + 2}}{\rho}\, d\rho =$$

$$\left|\rho^4 + 2 = t^2; \quad \rho = (t^2 - 2)^{1/4}; \quad d\rho = \frac{1}{4}(t^2 - 2)^{-3/4} \cdot 2t.\right|$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2-2}\,dt = \frac{\pi}{4}\cdot\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(3\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right| - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left[3\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left[3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 - \sqrt{3} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]. \blacktriangleright$$

3641. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=3a^2$ и параболоидом $x^2+y^2=2az$ $(z \geq 0)$.

◀ Найдем пересечение поверхностей. Сначала вычитаем первое уравнение из второго.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ -z^2=2az-3a^2 \end{cases}.$$

Ищем неотрицательное значение z из квадратного уравнения $z^2+2az-3a^2=0$. $z=-a\pm\sqrt{a^2+3a^2}=-a\pm 2a$; $z=a$. Подставляем это значение во второе уравнение. $x^2+y^2=2a^2$. Поверхность состоит из двух частей, расположенных над кругом C в плоскости Oxy с уравнением $x^2+y^2\leq 2a^2$.

Часть 1. $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$; $z'_x=\dfrac{-2x}{2\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$; $z'^2_x=\dfrac{x^2}{3a^2-x^2-y^2}$.

$z'_y=\dfrac{-2y}{2\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$; $z'^2_y=\dfrac{y^2}{3a^2-x^2-y^2}$.

Часть 2. $z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}$; $z'_x=\dfrac{2x}{2a}$; $z'^2_x=\dfrac{x^2}{a^2}$. $z'_y=\dfrac{2y}{2a}$; $z'^2_y=\dfrac{y^2}{a^2}$.

$$S=\iint_C \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{3a^2-x^2-y^2}}\,dxdy + \iint_C \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{r^2}{3a^2-r^2}}\,r\,dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}\,r\,dr =$$

$$= -2\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\int_0^{a\sqrt{2}} \frac{d(3a^2-r^2)}{\sqrt{3a^2-r^2}} + 2\pi\cdot\frac{1}{2a}\int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2+r^2}\,d(a^2+r^2) =$$

$$= -\pi a\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3a^2-r^2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} + \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2}{3}(a^2+r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi a\sqrt{3}(a\sqrt{3}-a) + \frac{2\pi}{3a}(3\sqrt{3}a^3-a^3) = 6\pi a^2 - 2\sqrt{3}\pi a^2 + 2\sqrt{3}\pi a^2 - \frac{2\pi a^2}{3} = \frac{16\pi a^2}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{16\pi a^2}{3}$. ▶

3642. Оси двух однаковых цилиндров радиуса R пересекаются под прямым углом.

Найти площадь части поверхности одного из цилиндров, лежащей в другом.

◀ Выберем такую систему координат, чтобы оси Ox и Oy располагались по осям цилиндров. Тогда цилиндры будут иметь уравнения $y^2+z^2 = R^2$ и $x^2+z^2 = R^2$. Первая поверхность располагается вдоль оси Ox, вторая – вдоль оси Oy. Вторая находится внутри первой, когда $-x < y < x$. Для того, чтобы получить эту площадь, можно вычислить одну восьмую этой площади, находящуюся в первом октанте, и умножить ее на 8.

$$S = 8\int_0^R dx \int_0^x \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dy = 8\int_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx =$$
$$= 8R\int_0^R \frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = -4R\int_0^R \frac{d(R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}} = -4R\int_0^R \frac{d(R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$
$$= -8R\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R = 8R^2. \blacktriangleright$$

Найти двойным интегрированием статические моменты однородных плоских фигур (плотность $\gamma = 1$:

3644. Полукруга радиуса R относительно диаметра.

◀ Расположим систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром полукруга D, диаметр лежал на оси Ox, а сам полукруг находился в верхней полуплоскости. Тогда

$$M_x = \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \int_{-R}^R dx\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^R (R^2-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^R = \frac{1}{2}\left(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right) = \frac{3}{2}R^3. \blacktriangleright$$

3646. Правильного шестиугольника со стороной a относительно стороны.

◀ Расположим систему координат так, чтобы ее начало совпало с серединой строны шестиугольника D, эта сторона лежала на оси Oy, а сам шестиугольник находился в правой полуплоскости. Тогда

$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{a\sqrt{3}/2} x\,dx \int_{-\sqrt{3}x/3-a/2}^{\sqrt{3}x/3+a/2} dy + \int_{a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} x\,dx \int_{\sqrt{3}x/3-3a/2}^{-\sqrt{3}x/3+3a/2} dy =$$
$$= \int_0^{a\sqrt{3}/2} x(2\sqrt{3}x/3+a)\,dx + \int_{a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} x(-2\sqrt{3}x/3+3a)\,dx =$$
$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}x^3+\frac{a}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{3}/2} + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}x^3+\frac{3a}{2}x^2\right)\Bigg|_{a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}} =$$
$$\frac{2}{8}a^3+\frac{3}{8}a^3-2a^3+\frac{9}{2}a^3+\frac{2}{8}a^3-\frac{9}{8}a^3 = \frac{2+3-16+36+2-9}{8} = \frac{9}{4}a^3.$$

Задачу можно решить другим способом, если знать, что статический момент фигуры связан с ее центром ее тяжести. Мы знаем, что x-координаты центра тяжести выражается формулой $x_c = M_y/M$, где M масса фигуры. Отсюда получаем $M_y = x_c\cdot M$. Из соображений симметрии мы знаем, что центр тяжести шестиугольника находится в его геометрическом центре, то есть $x_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Масса шестиугольника при единичной плотности равна его площади. Мы знаем, что равностронний треугольник со стороной a имеет площадь $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. А у шестиугольника площадь в 6 раз больше, т. е. $M = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Теперь можно вычислить статический момент. $M_y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \dfrac{9}{4}a^3$. ►

3647. Доказать, что статический момент треугольника с основанием a относительно этого основания зависит только от высоты треугольника.

◄ Расположим систему координат так, чтобы точки треугольника ABC с основанием $AB = a$ и высотой h, опущенной на это основание, имели следующие координаты $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(t,h)$. Здесь t – произвольное число. Нам надо доказать, что статический момент треугольника от t не зависит. Боковые стороны треугольника имеют уравнения $x = \dfrac{t}{h}y$ и $x = \dfrac{t-a}{h}y + a$. Поэтому статический момент относительно основания равен

$$M_x = \int_0^h y\,dy \int_{ty/h}^{(t-a)y/h+a} dx = \int_0^h y\left(\frac{h-y}{h}a\right) dy.$$

Мы видим, что интеграл от t не зависит. ►

Найти двойным интегрированием центры масс однородных плоских фигур:

3649. Фигуры ограниченной синусоидой $y = \sin x$, осью Ox и прямой $x = \pi/4$.

◄ $M = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$

$M_x = \displaystyle\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2x)\,dx =$

$= \dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right).$

$M_y = \displaystyle\int_0^{\pi/4} x\,dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\cos x\,dx =$

$= -\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sin x\Big|_0^{\pi/4} = -\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right).$

$x_c = M_y/M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = \left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1).$

$y_c = M_x/M = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cdot\dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2}).$ ►

3652. Фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \geq 0)$.

◄ Поскольку фигура симметрична относительно оси Ox, центр тяжести находится на оси Ox, т. е. $y_c = 0$.

$M = 2\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2-x^4}\,dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2)x =$

$$= -\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$M_y = \int_0^1 x\,dx \int_{-\sqrt{x^2-x^4}}^{\sqrt{x^2-x^4}} dy = 2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \qquad \Big|x = \sin t.\Big| \qquad =$$

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{16}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \quad x_c = M_y/M = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{16}\pi. \blacktriangleright$$

Найти моменты инерции однородных плоских фигур (плотность $\gamma = 1$):

3656. Прямоугольника со сторонами a и b относительно точки пересечения диагоналей.

◀ Расположим систему координат так, чтобы начало находилось в точке пересечения диагоналей, ось Ox была параллельна стороне a, а ось Oy была параллельна стороне b.

$$J = \int_0^a dx \int_0^b \left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2\right] dy =$$

$$= \int_0^a \left[b\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(b - \frac{b}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{b}{2}\right)^3\right] dx = \left[\frac{b}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3 + \frac{b^3 x}{12}\right]\Big|_0^a =$$

$$= \frac{a^3 b}{12} + \frac{ab^3}{12} = \frac{ab(a^2+b^2)}{12}. \blacktriangleright$$

3658. Круга радиуса R относительно точки, лежащей на окружности.

◀ Расположим систему координат так, чтобы круг D касался оси Oy в начале координат и находился в правой полуплоскости. В полярной системе координат окружность будет задаваться уравнением $\rho = 2R\cos\varphi$. Вычисляем момент:

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16R^4\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$4R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$R^4 \frac{3}{2}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + R^4 \sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{R^4}{8}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi R^4}{2}. \blacktriangleright$$

Найти статические моменты однородных тел (плотность $\gamma = 1$):

3663. Прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c относительно его граней.

◀ Можно воспользоваться известными формулами о центре масс тела. Выберем начало системы координат в одной из вершин параллелепипеда и пустим ее оси так, чтобы ось Ox шла по ребру параллелепипеда с длиной a, ось Oy по ребру с длиной b и ось Oz по ребру с длиной c. Из соображений симметрии мы заключаем, что центр тяжести параллелепипеда находится в геометрическом центре тела и имеет координаты $x_c = a/2, \quad y_c = b/2, \quad z_c = c/2$. Масса параллелепипеда $M = abc$. Отсюда, используя известные формулы для центра тяжести, можно сразу написать значения статических моментов тела относительно координатных плоскостей или, что то же самое, относительно граней. Имеем $x_c = M_{yz}/M$, отсюда

$$M_{yz} = x_c M = \frac{a^2bc}{2}.$$

Аналогично

$$M_{zx} = y_c M = \frac{ab^2c}{2},$$

$$M_{xy} = z_c M = \frac{abc^2}{2}.$$

►

3664. Прямого кругового конуса (радиус основания R, высота H) относительно плоскости, проходящей через вершину параллельно основанию.

◄ Расположим начало координат в вершине конуса, а ось Oz пустим по оси конуса. Тогда радиус кругового сечения конуса плоскостью, параллельной плоскости Oxy имеющей данную координату z $(0 \le z \le H)$, будет $\dfrac{R}{H}z$, а его площадь, а значит и масса будет равна $\pi\dfrac{R^2}{H^2}z^2dz$. Нам осталось написать интеграл для вычисления момента

$$M_{xy} = \int_0^H z\pi\frac{R^2}{H^2}z^2dz = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{z^4}{4}\Big|_0^H = \frac{\pi R^2H^2}{4}. \blacktriangleright$$

Найти центры масс однородных тел, ограниченных данными поверхностями:

3668. Цилиндром $z = \dfrac{y^2}{2}$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $2x + 3y - 12 = 0$.

$$◄\ M = \int_0^4 dy\int_0^{6-3y/2}\int_0^{y^2/2}dz = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2dy\int_0^{6-3y/2}dx = \frac{1}{4}\int_0^4 y^2(12-3y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{4}\left(4y^3 - \frac{3}{4}y^4\right)\Big|_0^4 = 64 - 48 = 16.$$

$$M_{yz} = \int_0^4 dy\int_0^{6-3y/2}x\,dx\int_0^{y^2/2}dz = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2dy\int_0^{6-3y/2}x\,dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^4 y^2(12-3y)^2dy = \frac{1}{16}\left(48y^3 - 18y^4 + \frac{9}{5}y^5\right)\Big|_0^4 =$$
$$48\cdot 4 - 18\cdot 16 + \frac{9\cdot 64}{5} = 12\cdot 16 - 18\cdot 16 + \frac{36\cdot 16}{5} = \frac{6\cdot 16}{5}.$$

$$M_{zx} = \int_0^4 y\,dy\int_0^{6-3y/2}dx\int_0^{y^2/2}dz = \frac{1}{2}\int_0^4 y^3dy\int_0^{6-3y/2}dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^4 y^3(12-3y)\,dy = \frac{1}{4}\left(3y^4 - \frac{3}{5}y^5\right)\Big|_0^4 = 3\cdot 64 - \frac{3\cdot 4\cdot 64}{5} = \frac{3\cdot 64}{5}.$$

$$M_{xy} = \int_0^4 dy\int_0^{6-3y/2}dx\int_0^{y^2/2}z\,dz = \frac{1}{8}\int_0^4 y^4dy\int_0^{6-3y/2}dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^4 y^4(12-3y)\,dy = \frac{1}{16}\left(\frac{12}{5}y^5 - \frac{1}{2}y^6\right)\Big|_0^4 = \frac{12\cdot 64}{5} - 2\cdot 64 = \frac{2\cdot 64}{5}.$$
$$c_x = \frac{6\cdot 64}{5} : 16 = \frac{6}{5}, \quad c_y = \frac{3\cdot 64}{5} : 16 = \frac{12}{5}, \quad c_z = \frac{2\cdot 64}{5} : 16 = \frac{8}{5}. ►$$

3671. Сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ и конусом $z\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$ (шаровой сектор).

◄ Задача такова, что имеется два тела, на которые конус разбивает шар. Ответ задачника показывает, что имеется в виду часть, лежащая в верхней полуплоскости. Из соображений симметрии мы можем заключить, что центр тяжести лежит на оси Oz. Сразу перейдем к сферической системе координат. $M = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$
$2\pi \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2\alpha} \sin\theta\, d\theta =$
$$= -2\pi \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \cos\theta\Big|_0^{\pi/2-\alpha} = 2\pi(1-\sin\alpha)\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{2\pi(1-\sin\alpha)R^3}{3}.$$
$$M_{xy} = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$
$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^R \rho^3 d\rho \cos 2\theta\Big|_0^{\pi/2-\alpha} = \frac{\pi(\cos 2\alpha+1)}{2}\int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi(\cos 2\alpha + 1)R^4}{8}.$$
$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{\pi(\cos 2\alpha+1)R^4}{8} : \frac{2\pi(1-\sin\alpha)R^3}{3} = \frac{3(\cos 2\alpha+1)R}{16(1-\sin\alpha)} =$$
$$= \frac{3(2-2\sin^2\alpha)R}{16(1-\sin\alpha)} = \frac{3R(1+\sin\alpha)}{8}. ►$$

Найти моменты инерции однородных тел с массой, равной M.

3676. Шара радиуса R относительно касательной прямой.

◄ Уравнение шара $x^2+y^2+z^2=R^2$. Сначала вычислим момент инерции шара относительно оси Oz, проходящей через центр тяжести. Квадрат расстояния точки (x,y,z) до этой оси равен x^2+y^2. В сферической системе координат эта величина равна $\rho^2\sin^2\theta$. Момент инерции однородного шара плостности $\gamma = \frac{3M}{4\pi R^3}$ представим интегралом в сферической системе координат
$$J_c = \gamma\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \gamma\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi}(\cos^2\theta - 1)\, d(\cos\theta) =$$
$$\gamma\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho^4 d\rho\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \gamma\cdot\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho^4 d\rho = \gamma\cdot\frac{4R^5}{15}\int_0^{2\pi} d\varphi =$$
$$= \gamma\cdot\frac{8\pi R^5}{15} = \frac{3M}{4\pi R^3}\cdot\frac{8\pi R^5}{15} = \frac{2MR^2}{5}.$$
Чтобы вычислить момент инерции шара относительно касательной, воспользуемся теоремой Гюйгенса–Штейнера
$$J = J_c + MR^2 = \frac{2MR^2}{5} + MR^2 = \frac{7MR^2}{5}. ►$$

3680. Параболоида вращения (радиус основания R, высота H относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к оси вращения (экваториальный момент).

◀ Расположим систему координат так, чтобы начало координат находилось в вершине параболоида, а ось Oz шла по оси параболоида от вершины в сторону его основания. Тогда параболоид будет иметь уравнение $z = k(x^2 + y^2)$. При $z = H$ мы оказываемся на основании параболоида, т. е. $(x^2 + y^2) = R^2$. Из этого условия можно вычислить $k = H/R^2$. Итак, уравнение параболоида имеет вид $z = \dfrac{H}{R^2}(x^2 + y^2),\ 0 \le z \le H$. Из него получается, что $x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H}z$, а это квадрат радиуса круга, который образуется при сечении параболоида плоскостью параллельной основанию на расстоянии z от вершины. Площадь этого круга равна $S_z = \dfrac{\pi R^2}{H}z$. Пользуясь этим вычисляем z-координату центра тяжести.

$$M = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H} z\,dz = \frac{\pi R^2 H^2}{2H} = \frac{\pi R^2 H}{2},$$

$$M_{xy} = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H} z^2 dz = \frac{\pi R^2 H^3}{3H} = \frac{\pi R^2 H^2}{3}.$$

$$z_c = \frac{\pi R^2 H^2}{3} : \frac{\pi R^2 H}{2} = \frac{2}{3}H.$$

Вычислим момент инерции параболоида относительно оси Oy. Интеграл запишем в цилиндрической системе координат

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{H\rho^2/R^2}^H (\rho^2\cos^2\varphi + z^2)\rho\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left(\rho^3\cos^2\varphi \cdot z + \frac{\rho z^3}{3}\right)\Big|_{H\rho^2/R^2}^H =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left[\rho^3\cos^2\varphi \cdot H\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) + \frac{\rho H^3}{3}\left(1 - \frac{\rho^6}{R^6}\right)\right] d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[H\cos^2\varphi\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^6}{6R^2}\right) + \frac{H^3}{3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^8}{8R^6}\right)\right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{HR^4}{12}\cos^2\varphi + \frac{H^3R^2}{8}\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{HR^4}{24} + \frac{HR^4}{24}\cos 2\varphi + \frac{H^3R^2}{8}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{HR^4\pi}{12} + \frac{HR^4}{48}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{H^3R^2\pi}{4} = \frac{HR^4\pi}{12} + \frac{H^3R^2\pi}{4}.$$

Пользуясь теоремой Гюйгенса–Штейнера вычисляем момент относительно оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести параболоида.

$$J_c = J - \frac{4H^2}{9} \cdot \frac{\pi R^2 H}{2} = \frac{HR^4\pi}{12} + \frac{H^3R^2\pi}{4} - \frac{2H^3R^2\pi}{9} = \frac{HR^2\pi}{36}(3R^2 + H^2).$$ ▶

3685. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны R и r $(R > r)$. Зная, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей, найти массу кольца. Плотность на окружности внутреннего круга равна единице.

◀ Сначала определим поверхностную плотность. Если точка кольца находится на расстоянии ρ от центра кольца, тогда плотность в этой точке должна быть равна $\frac{r}{\rho}$. Теперь массу кольца можно записать интегралом в полярной системе координат.

$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R r\, d\rho = 2\pi r(R - r)$. ►

3689*. Вычислить массу тела, ограниченного круглым конусом, высота которого равна h, а угол между осью и образующей равен α, если плотность пропорциональна n-й степени расстояния от плоскости, проведенной через вершину конуса параллельно основанию, причем на единице расстояния она равна γ $(n > 0)$.

◄ Расположим начало системы координат в вершине конуса, а координатную ось Oz направим по оси конуса в сторону основания. Тогда уравнение конуса будет $z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sqrt{x^2 - y^2}$ или $z = \operatorname{ctg}\alpha\sqrt{x^2 - y^2}$. Радиус основания при $z = h$ будет равен $h \operatorname{tg}\alpha$. Объемная плотность конуса будет равна γz^n. Теперь мы можем записать массу конуса интегралом в цилиндрической системе координат.

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h\operatorname{tg}\alpha} d\rho \int_{\rho\operatorname{ctg}\alpha}^{h} \gamma z^n \rho\, dz = \frac{\gamma}{n+1}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h\operatorname{tg}\alpha} \rho\, d\rho \cdot z^{n+1}\Big|_{\rho\operatorname{ctg}\alpha}^{h} =$$
$$= \frac{\gamma}{n+1}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h\operatorname{tg}\alpha} \rho(h^{n+1} - \rho^{n+1}\operatorname{ctg}^{n+1}\alpha)\, d\rho =$$
$$= \frac{\gamma}{n+1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{h^2\operatorname{tg}^2\alpha}{2}h^{n+1} - \frac{h^{n+3}\operatorname{tg}^{n+3}\alpha}{n+3}\operatorname{ctg}^{n+1}\alpha\right) d\varphi =$$
$$= \frac{2\pi\gamma h^{n+3}}{n+1}\left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}\right) = \frac{2\pi\gamma h^{n+3}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2(n+3)}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}. ►$$

3691. Вычислить массу тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z > 0)$, если плотность в каждой точке равна сумме квадратов координат.

◄ Найдем уравнения поверхностей в сферической системе координат.

Параболоид

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = 2ar\cos\theta; \quad r^2\sin^2\theta = 2ar\cos\theta; \quad r = \frac{2a\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Сфера

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta = 3a^2; \quad r^2 = 3a^2; \quad r = \sqrt{3}a.$$

Эти поверхности пересекаются по окружности, точки которой имеют одну и ту же координату θ. Для нахождения этого θ решаем уравнение

$$\frac{2a\cos\theta}{\sin^2\theta} = \sqrt{3}a; \quad \frac{2a\cos\theta}{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{3}a; \quad \sqrt{3}\cos^2\theta + 2\cos\theta - \sqrt{3} = 0;$$

При решении квадратного уравнения оставляем корень, попадающий в диапазон $[-1, 1]$ (выбираем знак плюс перед радикалом)

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \theta = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Теперь можно записать массу в виде суммы двух интегралов

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} d\theta \int_0^{\sqrt{3}a} r^4\sin\theta\, dr +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta/\sin^2\theta} r^4 \sin\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} \sin\theta\, d\theta \cdot \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{\sqrt{3}a} +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \cdot \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{2a\cos\theta/\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} \frac{32a^5\cos^5\theta\sin\theta}{\sin^{10}\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\arcsin(\sqrt{6}/3)} +$$

$$+\frac{1}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} \frac{32a^5(1-\sin^2\theta)^2}{\sin^9\theta}\, d(\sin\theta) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\arccos(\sqrt{3}/3)} +$$

$$+\frac{32a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} (\sin^{-9}\theta - 2\sin^{-7}\theta + \sin^{-5}\theta)\, d(\sin\theta) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}a^5}{5}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi +$$

$$+\frac{32a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\frac{\sin^{-8}\theta}{8} + \frac{\sin^{-6}\theta}{3} - \frac{\sin^{-4}\theta}{4}\right)\Bigg|_{\arcsin(\sqrt{6}/3)}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{18\pi a^5(\sqrt{3}-1)}{5} + \frac{64\pi a^5}{5} \cdot \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{81}{8\cdot 16} - \frac{27}{3\cdot 8} + \frac{9}{4\cdot 4}\right) =$$

$$= \frac{18\pi a^5(\sqrt{3}-1)}{5} + \frac{64\pi a^5}{5} \cdot \frac{-48+128-96+243-432-216}{8\cdot 16\cdot 3} =$$

$$= \frac{18\pi a^5(\sqrt{3}-1)}{5} + \frac{\pi a^5}{5} \cdot \frac{11}{6} = \frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right). \blacktriangleright$$