Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание двадцатое. М., 1985.

Глава II. Понятие о пределе

Вычислить пределы:

286. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{4}.$

288. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}+\ldots+\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10}}{1+\frac{10^{10}}{x^{10}}}=100.$

290. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right)}=1.$

292. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{7/3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^7}}-\sqrt[5]{x^{3-35/3}+4x^{-35/3}}\right)}{x^{7/3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}}=\dfrac{0}{1}=0.$

294. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}=\quad|t=\sqrt{1+x};\quad x=t^2-1;\quad t\to1.|\quad=$
$=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-1}{(t^2-1)^2}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{1}{(t-1)(t+1)^2}=\infty.$

299. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\quad|t=\sqrt[3]{1+x^2};\quad x^2=t^3-1;\quad t\to1.|\quad=$
$=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-1}{t^3-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{1}{t^2+t+1}=\dfrac{1}{3}.$

303. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1-2x}-1}{x+x^2}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2-1}{x(x+1)[\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1]}-$
$-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-2x-1}{x(x+1)[\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1]}=0+\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}.$

304. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{x-1}=$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7+x^3-8}{(x-1)[\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{7+x^3}\cdot 2+4]}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3+x^2-4}{(x-1)(\sqrt{3+x^2}+2)}=$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{7+x^3}\cdot 2+4}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3+x^2}+2}=\dfrac{3}{4+4+4}-\dfrac{2}{2+2}=-\dfrac{1}{4}.$

Используем первый замечательный предел и его следствия:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Вычислить пределы:

320. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(2-\frac{\arcsin x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}.$

337. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4})}=\quad |t=\pi-x;\quad x=\pi-t;\quad t\to0.|\quad=$
$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)\right]}=$
$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{t}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{t}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{t}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{t}{4}\right)}=$
$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{t}{4}}{\sin\frac{t}{2}\left(\sqrt{2}\sin\frac{t}{4}\right)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2t^2\cdot2\cdot4}{4^2\cdot t\cdot\sqrt{2}\cdot t}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

345. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-1-\cos x}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot x^2}{2^2\cdot x^2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}.$

349. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}3x}-\sqrt[3]{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg}2x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\operatorname{arctg}3x-1+\arcsin 3x}{1-\arcsin 2x-1-\operatorname{arctg}2x}\times$
$\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\arcsin 2x}+\sqrt{1+\operatorname{arctg}3x}}{\sqrt[3]{(1+\operatorname{arctg}3x)^2}+\sqrt[3]{(1+\operatorname{arctg}3x)(1-\arcsin 3x)}+\sqrt[3]{(1-\arcsin 3x)^2}}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\cdot(\frac{\operatorname{arctg}3x}{3x}+\frac{\arcsin 3x}{3x})}{-2x\cdot(\frac{\arcsin 2x}{2x}+\frac{\operatorname{arctg}2x}{2x})}\cdot\dfrac{2}{3}=-1.$

350. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\pi-\arccos x}{\sqrt{x+1}\cdot(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}.$
По смыслу задачи $\pi-\arccos x$ принадлежит первой четверти. Таким образом, выбирая знак плюс для синуса этой величины, имеем для нашего случая $\sin(\pi-\arccos x)=\sin\arccos x=+\sqrt{1-x^2}$. Поэтому $\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Преобразуя числитель в соответствии с этим равенством, вычисляем предел:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\arcsin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}\cdot(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}\cdot(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}=$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Используем второй замечательный предел и его следствия:

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \text{ при } a>0 \text{ и } a\neq1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1 \text{ при } \alpha\neq0.$$

Вычислить пределы:

362. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right]^{\frac{(2x-1)x}{x^2-4x+2}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}}=e^2.$

364. $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}]^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}}=\sqrt{e}.$

373. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=1\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{e^x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2.$

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x(x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)}\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1-x^4}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\infty}=0.$

385. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\cos x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x-\cos x}{x+\cos x}=1-0=1.$

391. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot2\sin^2\frac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{2}{4x^2}=1/2.$

395. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}.$

По смыслу задачи $\arcsin x$, $\operatorname{arctg}x$ и $\arcsin x-\operatorname{arctg}x$ близки к нулю и находятся в правой полуплоскости. Поэтому:

$\sin(\arcsin x-\operatorname{arctg}x)=x\cdot\cos\operatorname{arctg}x-\cos\arcsin x\cdot\sin\operatorname{arctg}x=$

$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}.$

В соответствии с этим равенством преобразуем числитель и вычисляем предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}\cdot x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\cdot x^3(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}=1/2.$$

399. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x-\sin x}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x-x)}{x(x-\sin x)}}=1/e.$$