Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание двадцатое. М., 1985.

1563. Найти наибольшее значение радиуса кривизны линии $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

◀ ▶

Найти координаты центра кривизны и уравнение эволюты для данных линий.

1568. Парабола n-го порядка $y = x^n$.

◀ ▶

1574. Линия $x = a(1+\cos^2 t)\sin t, \quad y = a\sin^2 t\cos t$.

◀ ▶

1581. Показать, что эволютой астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ является астроида вдвое бОльших линейных размеров, повернутая на $45°$. Воспользовавшись этим, вычислить длину дуги данной астроиды.

◀ ▶

1582*. Показать, что эволюта кардиоиды

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t$$

есть также кардиоида, подобная данной. Воспользовавшись этим, найти длину дуги всей кардиоиды.

◀ ▶

3695. Дан однородный шар радиуса R с плотностью γ. Вычислить силу, с которой он притягивает материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a $(a > R)$ от его центра. Убедиться, что сила взаимодействия такова, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре.

◀ Разместим начало координат в центре шара D, а ось Oz направим в точку M массы m, которая будет иметь координаты $(0, 0, a)$. Рассмотрим точку шара P с координатами (x, y, z). Ее расстояние до точки M равно $\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}$. Угол $\alpha = \angle PMO$ имеет косинус $\cos\alpha = \dfrac{a-z}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}$. Из соображений симметрии сила тяготения будет направлена вдоль оси Oz (в отрицательном направлении). Чтобы получить компоненту силы тяготения, направленную вдоль Ox надо умножить величину этой силы на $\cos\alpha$, где α угол между направлением силы $\overrightarrow{MP}$ и направлением $\overrightarrow{MO}$. Теперь мы можем записать силу в виде тройного интеграла, который будем преобразовывать для сферической системы координат

$$F = \iiint_D \frac{\gamma m k(a-z)}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \gamma mk \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\theta(a - r\cos\theta)}{[r^2\sin^2\theta + (a - r\cos\theta)^2]^{3/2}}\, d\varphi =$$

$$= -2\pi\gamma mk \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \frac{a - r\cos\theta}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\, d(\cos\theta) = \blacktriangleright$$

3698. Дано однородное тело, ограниченное двумя концентрическими сферами (шаровой слой). Доказать, что сила притяжения этим слоем точки, находящейся во внутренней полости тела, равна нулю.

◀ ▶

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

3707. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (x+y)e^{x+y}dx\,dy.$

3711. $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} xe^{-y}\frac{\sin y}{y^2}\, dy.$

Выяснить, какие из несобственных интегралов, взятых по кругу радиуса R с центром в начале координат, являются сходящимися:

3712. $\displaystyle\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy.$

3714. $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\, dx\,dy.$

Вычислить несобственные интегралы:

3717. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}.$

3719*. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}dx\,dy\,dz.$

3726. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z = 0$ и частью поверхности $z = xe^{-(x^2+y^2)}$, лежащей над этой плоскостью.

3731. Найти кривизну линии $y = \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\, d\alpha$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Вычислить интегралы с помощью дифференцирования по параметру:

3740. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx \ (a^2 < 1).$

3744. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} \ (a^2 < 1).$

3747*. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}\, dx \ (a > 0).$

3750. Вычислив интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$, найти $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg}x}\,dx$.

3754. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq 0$ и при $x \to +\infty$ $f(x)$ стремится к конечному пределу $f(+\infty)$. Доказать при этих условиях, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = [f(+\infty)-f(0)]\ln\frac{a}{b}$.

Вычислить интегралы, пользуясь результатом задачи 3754:

3755. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}ax - \operatorname{arctg}bx}{x}\,dx$.

3757*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq 0$ и $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ сходится при любом $A > 0$. Доказать при этих условиях, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$. (Ср. с задачей 3754.)

Вычислить интегралы, пользуясь результатом задачи 3757 ($a > 0,\ b > 0$):

3760. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}\,dx$.

3763*. Функция Лапласа $\Phi(x)$ определяется так: $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ (эта функция играет больую роль в теории вероятностей). Доказать соотношения:

1) $\displaystyle\int_0^x \Phi(az)\,dz = \frac{e^{-a^2x^2}-1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax)$; 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} [1-\Phi(x)]\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3765*. Функция $J_0(x)$, определяемая равенством

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

называется функцией Бесселя нулевого порядка. Доказать, что:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}J_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\quad (a > 0)$;

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}J_0(x)\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } a \geq 1; \\ \arcsin a, & \text{если } |a| \leq 1; \\ -\pi/2, & \text{если } a \leq -1. \end{cases}$

3767*. Доказать, что функция $y = \displaystyle\int_{-1}^{1} (z^2-1)e^{xz}dz$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy'' + 2ny' - xy = 0$.

3769*. Доказать, что функция Бесселя нулевого порядка $J_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $J_0'' + \frac{J_0'(x)}{x} + J_0(x) = 0$.

Вычислить криволинейные интегралы:

3773. $\int_L (x^2+y^2)^n ds$, где L – окружность $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$.

◀ $\int_L (x^2+y^2)^n ds = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt =$
$= \int_0^{2\pi} (a^2)^n \cdot a\, dt = a^{2n+1} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^{2n+1}$. ▶

3774. $\int_L xy\, ds$, где L – четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

◀ Введем параметризацию кривой L: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \quad 0 \le t \le \pi/2$.

$$\int_L xy\, ds = \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\cos t \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{\pi/2} ab\sin t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}\, d(\sin t) =$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\, d(\sin^2 t) =$$
$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\, d\left((a^2-b^2)\sin^2 t + b^2\right) =$$
$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left((a^2-b^2)\sin^2 t + b^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}. \text{ ▶}$$

3775. $\int_L \sqrt{2y}\, ds$, где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t)$.

◀ $\int_L \sqrt{2y}\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt =$
$= a^{3/2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)(2-2\cos t)}\, dt = 2a^{3/2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\, dt =$
$= 2a^{3/2}(t-\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi a^{3/2}$. ▶

3777*. Вычислить $\int_L (x-y)\, ds$, где L – окружность $x^2+y^2 = ax$.

◀ Уравнение окружности можно представить как $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$.

Параметризация L: $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t, \quad y = \dfrac{a}{2}\sin t. \quad 0 \le t \le 2\pi$.

$$\int_L (x-y)\, ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t - \frac{a}{2}\sin t\right) \cdot \frac{a}{2}\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt =$$
$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos t - \sin t)\, dt = \frac{a^2}{4}(t + \sin t + \cos t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}. \text{ ▶}$$

Найти функции по данным полным дифференциалам.

3848. $du = \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \left(\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\,dy.$

3851. $du = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)\,dy.$

3854. Подобрать постоянные a и b так. чтобы выражение $\dfrac{y^2+2xy+ax^2)\,dx-(x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ было полным дифференциалом; найти соответствующую функцию.

Найти функции по данным полным дифференциалам.

3856. $du = \dfrac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

3859. $du = \dfrac{dx-3\,dy}{z}+\dfrac{3y-x+z^3}{z^2}.$

Найти общие решения данных дифференциальных уравнений

3903. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$; $\quad y^2dy=(1-2x)\,dx$; $\dfrac{y^3}{3}=x-x^2+C$; $y=\sqrt[3]{3x-3x^2+C}.$

3913. $y'\sin x = y\ln y$; $\quad y|_{x=\pi/2}=e.$

3919.

3923.

3928.

3933.

3939.

3944.

3948.

3952.

3957.

3963.

3972.

3977.

3984.

3990.

3997.

◀ ▶

Улучшить сходимость тригонометрических рядов, доведя коэффициенты до указанного в скобках порядка k:

4396*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \sin nx \quad (k=4).$

◀ ▶

4399*. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2-1} \cos nx \quad (k=5).$

◀ ▶

4414. Вычислить $\operatorname{div}(a\boldsymbol{r})$, где a – постоянный скаляр.

◀ $\operatorname{div}(ar) = \frac{\partial}{\partial x} ax + \frac{\partial}{\partial y} ay + \frac{\partial}{\partial z} az = 3a$. ▶

4460. Вычислить поток радиус-вектора через боковую поверхность круглого конуса, основание которого находится на плоскости xOy, а ось совпадает с осью Oz. (Высота конуса 1, радиус основания 2.)

◀ ▶