*Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание двадцатое. М., 1985.*

# Глава VIII. Применения интеграла

**2459.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 + 8x = 16$ и $y^2 - 24x = 48$.

◀ Запишем уравнение парабол в каноническом виде: $y^2 = -8(x-2)$ и $y^2 = 24(x+2)$ из уравнений видно, что первая парабола имеет вершину в точке (2,0) и ее ветви направлены влево, вторая парабола имеет вершину в точке (-2,0) и ее ветви направлены вправо. Абциссу точек пересечения парабол находим из уравнения $-8(x-2) = 24(x+2)$; $\quad -x+2 = 3x+6)$; $\quad x = -1$. Теперь можем записать площадь:

$$S = 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{48+24x}\,dx + 2\int_{-1}^{2} \sqrt{16-8x}\,dx =$$
$$= 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{48+24x}\,dx + 2\int_{-1}^{2} \sqrt{16-8x}\,dx =$$
$$= \frac{2}{24}\int_{-2}^{-1} \sqrt{48+24x}\,d(48+24x) - \frac{2}{8}\int_{-1}^{2} \sqrt{16-8x}\,d(16-8x) =$$
$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(48+24x)\sqrt{48+24x}\Big|_{-2}^{-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(16-8x)\sqrt{16-8x}\Big|_{-1}^{2} =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot 24\sqrt{24} + \frac{1}{6}\cdot 24\sqrt{24} = \frac{2}{9}\cdot 48\sqrt{6} = \frac{32}{3}\sqrt{6}. \blacktriangleright$$

**2464.** Найти площадь фигуры, ограниченной дугой гиперболы и ее хордой, проведенной из фокуса перпендикулярно к действительной оси.

◀ Вычислим интеграл, который нам понадобится в дальнейшем. Имеем:

$$I = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} =$$
$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} =$$
$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$ Отсюда находим:
$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|.$$

Теперь находим площадь фигуры.

$$S = \frac{2b}{a}\int_{a}^{\sqrt{a^2+b^2}} \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|\right)\Big|_{a}^{\sqrt{a^2+b^2}} =$$
$$= \frac{b}{a}\cdot(\sqrt{a^2+b^2}\cdot b - a^2\ln(\sqrt{a^2+b^2}+b) + a^2\ln a) = \frac{b^2c}{a} - ab\ln\frac{c+b}{a}. \blacktriangleright$$

**2465.** Окружность $x^2+y^2 = a^2$ разбивается гиперболой $x^2 - 2y^2 = a^2/4$ на три части. Определить площади этих частей.

◀ От окружности радиусом $a$ и площадью $\pi a^2$ гипербола отрезает две симметричные дольки. Сначала вычислим площадь одной такой дольки. Координаты точек пересечения окружности и гиперболы находим из системы:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2-2y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ -3y^2=-\frac{3a^2}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ y=\pm\frac{a}{2} \end{cases}.$$

Гипербола пересекает ось $Ox$ в точках $x=\pm a/2$, а окружность пересекает эту ось в точках $x=\pm a$. Теперь мы можем написать площадь правой дольки:

$$S_1=\sqrt{2}\int_{a/2}^{a\sqrt{3}/2}\sqrt{x^2-a^2/4}\,dx+2\int_{a\sqrt{3}/2}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Теперь нам понадобится два неопределенных интеграла:

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|,$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},$$

вычисление которых можно посмотреть в задачах **2464** и **1984** соответственно. Пользуясь ими, получаем площадь дольки:

$$S_1=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2/4}-\frac{a^2}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2/4}|\right)\Bigg|_{a/2}^{a\sqrt{3}/2}+$$

$$+\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{a\sqrt{3}/2}^{a}=\sqrt{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a^2}{8}\ln\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)-$$

$$-\sqrt{2}\left(-\frac{a^2}{8}\ln\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a^2\pi}{2}\right)-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}+\frac{a^2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{a^2\sqrt{2}}{8}\ln\frac{a(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}+\frac{a^2\sqrt{2}}{8}\ln\frac{a}{2}+\frac{a^2\pi}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$=a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right].$$

Площадь второй дольки $S_2$ такая же, а площадь средней части получаем вычитанием площадей долек из площади круга:

$$S_3=\pi a^2-S_1-S_2=\pi a^2-2a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]=$$

$$=a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right].$$ ▶

**2469.** Найти площадь фигуры, ограниченной осью ординат и линией $x=y^2(y-1)$.

◀ График функции $x=y^2(y-1)$ пересекает ось ординат в точках $x=0$ и $x=1$ и уходит между этими точками в отрицательную область. Площадь этой области равна

$$S=-\int_0^1 y^2(y-1)\,dy=-\left(\frac{y^4}{4}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$ ▶

**2475.** Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2=x^2-x^4$.

◀ Кривая представляет собой восьмерку, симметричную относительно осей $Ox$ и $Oy$ и пересекающую ось $Ox$ в точках $-1, 0$ и $1$. Площадь четверти этой восьмерки расположенной в первой четверти равна интегралу

$$S/4 = \int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad S = \frac{4}{3}. \text{ ▶}$$

**2480.** Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, осью $Ox$ и двумя прямыми, параллельным оси $Oy$, проведенными через точки экстремума функции $y$.

◀ Найдем точки экстремума. Берем производную функции $y$:

$$y' = (e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2)' = -e^{-x}(x^2+3x+1)+e^{-x}(2x+3) =$$
$$= e^{-x}(-x^2-x+2).$$

Производная обращается в нуль, когда квадратный трехчлен равен нулю:

$$-x^2 - x + 2 = 0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \mp 3}{2}; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$$

В полученных точках проверяем знак второй производной:

$$y'' = (e^{-x}(-x^2-x+2))' = -e^{-x}(-x^2-x+2)+e^{-x}(-2x-1) = e^{-x}(x^2-x-3).$$

$y''(-2) > 0, \quad y''(1) < 0$. То есть, в точке $x = -2$ мы имеем минимум, а в точке $x = 1$ – максимум. Учитывая, что $y(-2) = e^2((-2)^2 - 3\cdot 2 + 1) - e^2 = 0$, делаем вывод, что функция $y$ больше нуля на интересующем нас интервале $(-2, 1)$, а искомая площадь выражается интегралом

$$S = \int_{-2}^1 (e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2)\,dx = -\int_{-2}^1 (x^2+3x+1)\,de^{-x} + 3e^2 =$$

$$= -\left(e^{-x}(x^2+3x+1)\right)\Big|_{-2}^1 + \int_{-2}^1 e^{-x}(2x+3)\,dx + 3e^2 =$$

$$= -(e^{-1}\cdot 5 - e^2\cdot(-1)) + 3e^2 - \int_{-2}^1 (2x+3)\,de^{-x} =$$

$$= 2e^2 - \frac{5}{e} - \left(e^{-x}(2x+3)\right)\Big|_{-2}^1 + 2\int_{-2}^1 e^{-x}\,dx = 2e^2 - \frac{5}{e} - \frac{5}{e} - e^2 - 2\,e^{-x}\Big|_{-2}^1 =$$

$$e^2 - \frac{10}{e} - \frac{2}{e} + 2e^2 = 3e^2 - \frac{12}{e}. \text{ ▶}$$

**2527.** Найти периметр одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \ln\cos x$ и $y = \ln\sin x$.

◀ Периметр складывается из отрезка $[0, \pi/2]$, расположенного на оси $Ox$ и двух симметричных кривых, одна из которых вычисляется интегралом

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+(\ln\cos x)'^2}\,dx = \int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\frac{d(\sin x)}{\cos^2 x} = -\int_0^{\pi/4}\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1).$$

Сложив длины отрезка и двух кривых, получаем ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\ln(\sqrt{2}+1)$. ►

**2530.** Найти длину линии $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

◄ $(y-\arcsin x)^2 = 1 - x^2; \quad y = \arcsin x \pm \sqrt{1-x^2}. x = \sin t, \quad y = t \pm \cos t.$

$$L = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t + 1 - 2\sin t + \sin^2 t}\, dt = 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin t}\, dt =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}}\, d\frac{t}{2} =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) d\frac{t}{2} = 4\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 8.$$ ►

**2534.** Найти длину линии $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

◄ $$L = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{25a^2\cos^8 t\sin^2 t + 25a^2\sin^8 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 20a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}\, dt =$$

$$= 10a\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1-\sin^2 t)^3 + \sin^6 t}\, d(\sin^2 t) =$$

$$= 10a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t}\, d(\sin^2 t) =$$

$$= 10a\int_0^1\sqrt{1-3u+3u^2}\, du = 10\sqrt{3}a\int_0^1\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}\, d\left(u-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 5\sqrt{3}a\left(\left(u-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}} - \frac{1}{12}\ln\left(u-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 5\sqrt{3}a\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{12}\ln\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{12}\ln\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right) =$$

$$= 5a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\ln(2+\sqrt{3})^2\right) = 5a\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right).$$ ►

**2559.** Криволинейная трапеция, ограниченная линией $y = xe^x$ и прямыми $x = 1$ и $y = 0$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

◄ $$V = \pi\int_0^1 (xe^x)^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2\, d(e^{2x}) = \frac{\pi}{2}\left(x^2e^{2x}\big|_0^1 - \int_0^1 x\, d(e^{2x})\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^2 - xe^{2x}\big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, d(2x)\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - e^2 + \frac{1}{2}e^{2x}\big|_0^1\right) = \frac{\pi(e^2-1)}{4}.$$ ►

**2563.** Найти объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \arcsin x$, с основанием $[0,1]$ вокруг оси $Ox$.

$$◀ V = \pi \int_0^1 \arcsin^2 x\, dx = \qquad |x = \sin t.| \qquad = \pi \int_0^{\pi/2} t^2\, d\sin t =$$
$$= \pi \left( (t^2 \sin t)\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} t \sin t\, dt \right) = \pi \left( \frac{\pi^2}{4} + 2\int_0^{\pi/2} t\, d\cos t \right) =$$
$$= \pi \left( \frac{\pi^2}{4} + 2\,(t\cos t)\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt \right) = \pi \left( \frac{\pi^2}{4} + 0 - 2\,\sin t\Big|_0^{\pi/2} \right) =$$
$$= \pi \left( \frac{\pi^2}{4} - 2 \right). ▶$$

**2568.** Одна арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вращается вокруг своего основания. Вычислить объем тела, ограниченного полученной поверхностью.

$$◀ V = \pi \int_0^{2\pi} y^2\, dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2\, d[a(t - \sin t)] =$$
$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =.$$

По формуле $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ имеем: $-\cos^3 t = -\dfrac{1}{4}\cos 3t - \dfrac{3}{4}\cos t.$

По формуле $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ имеем: $3\cos^2 t = \dfrac{3}{2}\cos 2t + \dfrac{3}{2}.$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left( \frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 3t \right) dt =$$
$$= \pi a^3 \left( \frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. ▶$$

**2584.** Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $2z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ и конусом $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z^2$.

◀ Тело образует кольцеобразную область, расположенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$. Точки тела находятся вне конуса и внутри параболоида. Сечение тела плоскостью $z = z_0$ представляет собой эллипс с полуосями $2\sqrt{2z_0}$ и $3\sqrt{2z_0}$ из которого выброшена внутренность в виде эллипса с полуосями $2z_0$ и $3z_0$. $V = \displaystyle\int_0^2 (\pi \cdot 2\sqrt{2z} \cdot 3\sqrt{2z} - \pi \cdot 2z \cdot 3z)\, dz = 6\pi \int_0^2 (2z - z^2)\, dz = 6\pi \left( z^2 - \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 =$

$$= 6\pi \left( 4 - \frac{8}{3} \right) = 8\pi. ▶$$

**2591.** Круг переменного радиуса перемещается таким образом, что одна из точек его окружности остается на оси абсцисс, центр движется по окружности $x^2 + y^2 = r^2$, а плоскость этого круга перпендикулярна к оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

$$◀\ V = 2\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-r}^{r} = 2\pi \left( 2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{8}{3}\pi r^3.\ ▶$$

**2597.** При вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большой оси получается поверхность, называемая удлиненным эллиспоидом вращения, при вращении вокруг малой – поверхность, называемая укороченным эллипсоидом вращения. Найти площадь поверхности удлиненного и укороченного эллипсоидов вращения.

◀
1) Удлиненный эллипсоид вращения.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad y'^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}.$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 4\pi \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx =$$

$$= 4\pi \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\, dx = 4\pi \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left( x\sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} + \frac{a^4}{a^2 - b^2} \arcsin \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left( \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{a^4}{a^2 - b^2} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) =$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab \cdot a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon.$$

2) Укороченный эллипсоид вращения.

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad x' = -\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \quad x'^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2(b^2 - y^2)}.$$

$$S = 2\pi \int_{-b}^{b} x\sqrt{1 + x'^2}\, dy = 4\pi \frac{a}{b} \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2(b^2 - y^2)}}\, dy =$$

$$= 4\pi \frac{a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\, dy = 4\pi \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \int_0^b \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2}\, dy =$$

$$= 2\pi \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \left( y\sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2} - \frac{b^4}{a^2 - b^2} \ln\left| y + \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2} \right| \right)\Bigg|_0^b =$$

$$= 2\pi a^2 - \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left( \ln\left| b + \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right| - \ln\left| \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right| \right) =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2} + a} = 2\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{b^2}{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2} =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{b^2(a - \sqrt{a^2 - b^2})}{(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a^2 - a^2 + b^2)} =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \ln \frac{1-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{1+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

►

**2603.** Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ вокруг оси абсцисс.

◄ $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

$$S = 4\pi \int_0^{\pi/2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos t\,dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,d(\sin t) = \frac{12}{5}\pi a^2 \sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

►

**2610.** Вычислить статический момент прямоугольника с основанием $a$ и высотой $h$ относительно его основания.

◄ $M = \int_0^h ay\,dy = \frac{a}{2}y^2\Big|_0^h = \frac{ah^2}{2}.$ ►

**2618.** Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной осями координат и параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

◄ $P$ – масса фигуры, $M_y$ – статический момент фигуры относительно оси $Oy$, $C_x$ и $C_y$ – координаты центра тяжести.

$$y = x - 2\sqrt{ax} + a. \quad P = \int_0^a (x - 2\sqrt{ax} + a)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4\sqrt{a}}{3}x^{3/2} + ax\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{6}.$$

$$M_y = \int_0^a x(x - 2\sqrt{ax} + a)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4\sqrt{a}}{5}x^{5/2} + \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)a^3 = \frac{a^3}{30}. \quad C_x = \frac{M_y}{P} = \frac{a}{5}.$$ Симметричным образом $C_y = \frac{a}{5}$. ►

**2625.** Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = ax^3 - x^4$.

◄ $y = x\sqrt{ax-x^2}. \quad P = 2\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,dx =$

$$\left|\sqrt{ax-x^2} = xt, \quad ax - x^2 = x^2t^2, \quad x = \frac{a}{t^2+1}, \quad dx = -\frac{2at\,dt}{(t^2+1)^2}.\right|$$

$$= -2\int_{-\infty}^0 \frac{a}{t^2+1}\cdot\frac{at}{t^2+1}\cdot\frac{2at\,dt}{(t^2+1)^2} = 4a^3\left(\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^4} - \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^3}\right).$$

$$M_x = 2\int_0^a x^2\sqrt{ax-x^2}\,dx = -2\int_{-\infty}^0 \frac{a^2}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{at}{t^2+1}\cdot\frac{2at\,dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 4a^4\left(\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^5} - \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+1)^4}\right).$$

$$I_n = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n}\Big|_{-\infty}^0 + n\int_{-\infty}^0 \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+1)^{n+1}} =$$

$$= 0 + 2n\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = 2nI_n - 2nI_{n+1}.$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

$$I_4 = \frac{5}{6}I_3. \quad I_5 = \frac{7}{8}I_4 = \frac{35}{48}I_3. \quad C_x = \frac{4a^4(I_5 - I_4)}{4a^3(I_4 - I_3)} = a\frac{\frac{35}{48} - \frac{5}{6}}{\frac{5}{6} - 1} = \frac{5}{48}\cdot\frac{6}{1}a = \frac{5}{8}a.$$

$C_y = 0.$ ►

**2634.** Найти центр масс сектора круга радиуса $R$ с центральным углом, равным $2\alpha$.

◄ Центр тяжести лежит на биссектрисе угла сектора. Расположим начало координат в центре круга, а ось $Ox$ направим по биссектрисе. Масса сектора равна $\alpha R^2$. Статический момент сектора относительно оси $Oy$ равен

$$M_y = 2\int_0^{R\cos\alpha} \tan\alpha x^2 dx + 2\int_{R\cos\alpha}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2\frac{R^3\tan\alpha\cos^3\alpha}{3} - \int_{R\cos\alpha}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,d(R^2 - x^2) =$$

$$= \frac{2R^3\tan\alpha\cos^3\alpha}{3} - \frac{2}{3}\,(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}\Big|_{R\cos\alpha}^{R} =$$

$$= \frac{2R^3\tan\alpha\cos^3\alpha}{3} + \frac{2R^3\sin^3\alpha}{3} = \frac{2R^3\sin\alpha}{3}. \quad C_x = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}, \quad C_y = 0.$$ ►

**2640.** На каком расстоянии от геометрического центра лежит центр масс полушара радиуса $R$?

◄ Масса полушара равна $\frac{2\pi R^3}{3}$. Расположим начало координат в центре шара и направим ось $Ox$ по оси симметрии. Тогда статический момент полушара относительно плоскости $Oyz$ будет равен

$$M_{yz} = \pi\int_0^R x(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \pi\frac{R^4}{4}. \quad C_x = \frac{3}{8}R.$$ ►

**2650.** Найти момент инерции полукруга радиуса $R$ относителльно его диаметра.

◄ $I = 2\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \qquad |x = R\sin t, \quad dx = R\cos t\,dt|$

$$= 2\int_0^{\pi/2} R^2\sin^2 x\cdot R\cos t\cdot R\cos t\,dt = \frac{R^4}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{R^4}{4}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 4t)\,dt = \frac{\pi R^4}{8}.$$ ►

**2656.** Эллипс с полуосями $a$ и $b$ вращается вокруг одной из своих осей. Найти момент инерции получающегося тела (эллипсоид вращения) относительно оси вращения.

◄ Бесконечно тонкий слой на расстоянии $x$ от оси вращения $Oy$ и с толщиной $dx$ имеет форму цилиндра с радиусом $|x|$ и высотой $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ имеет момент инерции $x^2\cdot 2\pi|x|\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. Поэтому момент инерции тела вращения относительно оси

$Oy$ выражается интегралом

$$I_y = \frac{4\pi b}{a}\int_0^a x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2\pi b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,d(x^2) = \ldots$$

$$t^2 = a^2 - x^2, \quad x^2 = a^2 - t^2, \quad d(x^2) = -2t\,dt.$$

$$\ldots - = \frac{2\pi b}{a}\int_a^0 (a^2-t^2)t\cdot 2t\,dt = \frac{4\pi b}{a}\int_0^a (a^2t^2-t^4)\,dt = \frac{4\pi b}{a}\left(\frac{a^2a^3}{3} - \frac{a^5}{5}\right) = \frac{8\pi a^4 b}{15}.$$

Симметричным образом, если мы будем вращать эллипс вокруг другой оси, то получим тело с моментом инерции $\dfrac{8\pi ab^4}{15}$. ►

**2657.** Найти момент инерции параболоида вращения, радиус основания которого $R$, высота $H$, относительно оси вращения.

◄ Рассмотрим часть параболы $y = H\left(1 - \dfrac{x^2}{R^2}\right)$, расположенную в первом октанте. При ее вращении вокруг оси $Oy$ получается параболоид с параметрами, описанными в условии задачи. Цилиндр толщины $dx$ радиуса $x$ и высоты $y$ имеет момент инерции $x^2 \cdot 2\pi x H\left(1 - \dfrac{x^2}{R^2}\right)\,dx$. Интегрируя этот момент от нуля до $R$ мы получим момент параболоида.

$$I_y = 2\pi H\int_0^R x^3\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)\,dx = 2\pi H\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6R^2}\right)\Bigg|_0^R = \pi H R^4/6.$$ ►

**2659.** Криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0$ и $x = 1$, вращается: 1) вокруг оси $Ox$, 2) вокруг оси $Oy$. Вычислить момент инерции получающегося тела относительно оси вращения.

◄

1) $$I_x = \int_0^1 x^2\cdot 2\pi x\,dx + \int_1^e x^2\cdot 2\pi x(1-\ln x)\,dx = 2\pi\int_0^e x^3dx - 2\pi\int_1^e x^3\ln x\,dx =$$

$$= \frac{\pi e^4}{2} - \frac{\pi}{2}\int_1^e \ln x\,d(x^4) = \frac{\pi e^4}{2} - \frac{\pi}{2}x^4\ln x\Big|_1^e + \frac{\pi}{2}\int_1^e x^3\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^e x^3\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}x^4\Big|_1^e = \frac{\pi}{8}(e^4-1).$$

2) $$I_y = \int_0^1 x^2\cdot 2\pi x\cdot e^x dx = 2\pi\int_0^1 x^3e^xdx = 2\pi\ x^3e^x\big|_0^1 - 6\pi\int_0^1 x^2e^xdx =$$

$$= 2\pi e - 6\pi\ x^2e^x\big|_0^1 + 12\pi\int_0^1 xe^xdx = -4\pi e + 12\pi\ xe^x\big|_0^1 - 12\pi\int_0^1 e^xdx =$$

$$= 8\pi e - 12\pi\ e^x\big|_0^1 = -4\pi e + 12\pi = 4\pi(3-e).$$

►

**2664.** Эллипс с осями $AA_1 = 2a$ и $BB_1 = 2b$ вращается вокруг прямой, параллельной оси $AA_1$ и отстоящей от нее на расстояние $3b$. Найти объем тела, которое при этом получается.

◄ Площадь эллипса равна $\pi ab$. Центр тяжести эллипса находится в точке пересечения осей и отстоит от оси вращения на расстояние $3b$. Длина окружности, которую описывает центр тяжести при вращении равна $6\pi b$. Применяя вторую теорему Гульдина получаем объем тела вращения $6\pi^2 ab^2$. ►

**2666.** Фигура, образованная первыми арками циклоид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

и

$$x = a(t - \sin t), \quad y = -a(1 - \cos t),$$

вращается вокруг оси ординат. Найти объем и поверхность тела, которое при этом получается.

◄ Точка описывает первую арку циклоиды, когда параметр $t$ изменяется от 0 до $2\pi$. Основание арки имеет длину $2\pi a$. Из соображений симметрии центр тяжести фигуры образованной арками отстоит от оси ординат на расстояние $\pi a$, а длина окружности, которую описывает центр при вращении равна $2\pi^2 a$. Теперь нам надо вычислить площадь фигуры. Она равна интегралу

$$S = 2\int_0^{2\pi} y\,dx = 2a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,d(t-\sin t) = 2a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$
$$= 2a^2\cdot 2\pi - 4a^2\cdot 0 + 2a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = 4\pi a^2 + a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt =$$
$$= 4\pi a^2 + 2\pi a^2 + a^2\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt = 6\pi a^2.$$

Используя вторую теорему Гульдина мы можем написать объем:
$V = 6\pi a^2 \cdot 2\pi^2 a = 12\pi^3 a^3$.

Вычислим площадь поверхности. Центр тяжести контура фигуры тот же, что и сама фигура, поэтому и длина окружности, которую он описывает при вращении будет той же – $2\pi^2 a$. Теперь вычислим длину контура фигуры. Она равна интегралу

$$L = 4\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 4a\int_0^{\pi}\sqrt{(t-\sin t)'^2 + (1-\cos t)'^2}\,dt =$$
$$= 4a\int_0^{\pi}\sqrt{1 - 2\cos t + \cos t^2 + \sin^2 t}\,dt = 8a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt =$$
$$= 16a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2} = -\,16a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{\pi} = 16a.$$

Теперь по первой теореме Гульдина получаем площадь поверхности
$S_{\text{пов.}} = 16a \cdot 2\pi^2 a = 32\pi^2 a^2$. ►

**2676.** С какой силой материальная ломаная $y = |x| + 1$ притягивает материальную точку массы $m$, находящуюся в начале координат? (Линейная плотность равна $\gamma$.)

◄ Поскольку лучи ломаной симметричны относительно оси $Oy$, составляющие сил тяготения от этих лучей, направленные вдоль оси $Ox$ уравновешивают друг друга и дают нулевую сумму, а составляющие, направленные вдоль оси $Oy$ равны и одинаково направлены. Таким образом, искомая сила тяготения в два раза больше чем составляющая силы тяготения от одного луча, направленная вдоль оси $Oy$. Возьмем луч, расположенный в правой полуплоскости. Рассмотрим бесконечно малый участок луча с координатой $x$ и соответствующий длине $dx$ оси $Ox$. Его масса равна $\gamma\sqrt{2}\,dx$, расстояние участка от начала координат равно $\sqrt{x^2+(x+1)^2}=\sqrt{2x^2+2x+1}$, а косинус угла между направлением силы тяготения и осью $Oy$ равен $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$. Теперь мы можем записать искомую силу интегралом:

$$F=2\int_0^{\infty}\frac{km\sqrt{2}\gamma}{2x^2+2x+1}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\,dx=2\sqrt{2}km\gamma\int_0^{\infty}\frac{(x+1)\,dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}=$$

$$=2\sqrt{2}km\gamma\int_0^{\infty}\frac{(x+1/2)\,dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}+\sqrt{2}km\gamma\int_0^{\infty}\frac{dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}.$$

Первый интеграл приводится к интегралу степенной функции:

$$\frac{\sqrt{2}km\gamma}{2}\int_0^{\infty}\frac{d(2x^2+2x+1)}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}=-\left.\frac{\sqrt{2}km\gamma}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\right|_0^{\infty}=\sqrt{2}km\gamma.$$

Ко второму интегралу применяем подстановку Абеля:

$$t=\frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}},\quad 2x+1=t\sqrt{2x^2+2x+1},\quad 4x^2+4x+1=t^2(2x^2+2x+1),$$

$$2(2x^2+2x+1)-1=t^2(2x^2+2x+1),\quad 2x^2+2x+1=\frac{1}{2-t^2},$$

$$2\,dx=dt\sqrt{2x^2+2x+1}+t^2dx,\quad (2-t^2)\,dx=\sqrt{2x^2+2x+1}\,dt,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}=\frac{dt}{2-t^2}.$$

$$\sqrt{2}km\gamma\int_0^{\infty}\frac{dx}{(2x^2+2x+1)^{3/2}}=\sqrt{2}km\gamma\int_1^{\sqrt{2}}dt=\sqrt{2}km\gamma(\sqrt{2}-1).$$

Окончательный ответ: $\sqrt{2}km\gamma+\sqrt{2}km\gamma(\sqrt{2}-1)=2km\gamma$. ►

**2682.** Вычислить работу, которую необходимо затратить, для того чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой $H=5$ м, имеющий в основании круг радиуса $R=3$ м.

◄ Бесконечно тонкий горизонтальный слой воды толщины $dx$ имеет объем $\pi R^2\,dx$ Его вес в ньютонах $\pi R^2 1000g\,dx$. Если слой расположен на глубине $x$, то работа в джоулях, требующаяся для подъема воды этого слоя до уровня верхней кромки резервуара, равна $\pi R^2 1000gx\,dx$. Работа по выкачиванию всей воды равна интегралу

$$\int_0^H \pi R^2 1000gx\,dx=\pi R^2 500gH^2=3{,}14\cdot 3^2\cdot 500\cdot 10\cdot 5^2=3{,}5325\cdot 10^6 \text{ Дж.}$$ ►

**2691.** Круглый цилиндр, радиус основания которого равен $R$, а высота $H$, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\omega$. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна $\gamma$. Найти кинетическую энергию цилиндра.

◄ Кинетическая энергия равна $I\omega^2/2$, а момент инерции равен интегралу

$$I=\int_0^R x^2\cdot 2\pi xH\gamma\,dx=2\pi H\gamma\int_0^R x^3dx=2\pi H\gamma\cdot\frac{R^4}{4}.$$

Теперь мы можем вычислить энергию, которая равна $\pi R^4H\omega^2\gamma/4$. ►