Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание двадцатое. М., 1985.

Глава VII. Способы вычисления определенных интегралов. Несобственные интегралы

2237. $\displaystyle\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx = \qquad |e^x = t| \qquad = \int_1^e (t-1)^4 dt = \left.\frac{(t-1)^5}{5}\right|_1^e = \frac{(e-1)^5}{5}.$

2245. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3 dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)}} = -\frac{1}{4}\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{d\left(\frac{5}{8}-x^4\right)}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)^{3/2}} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-x^4\right)^{-1/2}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-\frac{9}{16}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{16}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}(4-4/3) = 4/3.$$

2252. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\, dx = -2\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\, d(\cos x) = -\,2\cdot\left.\frac{\cos^7 x}{7}\right|_0^{\pi/2} = \frac{2}{7}.$

2260. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx = \left. x\sin x\right|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\, dx = \frac{\pi}{2} + \left.\cos x\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$

2267. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx.$

◀ $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx = \left. e^{2x}\sin x\right|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\, dx =$

$$= e^{\pi} + 2\int_0^{\pi/2} e^{2x} d(\cos x) = e^{\pi} + \left. 2e^{2x}\cos x\right|_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx =$$

$$= e^{\pi} - 2 - 4I; \quad I = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$$ ▶

2271. Составить рекуррентную формулу и вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^0 x^n e^x\, dx$ (n – целое положительное число).

◀ $\displaystyle\int_{-1}^0 x^n e^x\, dx$

$$I_n = \int_{-1}^0 x^n e^x\, dx = x^n e^x\Big|_{-1}^0 - n\int_{-1}^0 x^{n-1}e^x\, dx = -\frac{(-1)^n}{e} - nI_{n-1}.$$

$$I_0 = 1 - \frac{1}{e}, \quad I_1 = -1 + \frac{2}{e}, \quad I_2 = 2 - \frac{5}{e}, \quad I_3 = -2\cdot 3 + \frac{16}{e}, \dots$$

$$I_n = (-1)^n n!\left[1 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{1!} + \frac{1}{0!}\right)\right].$$ ▶

2281*. $\int_0^\pi \sin^6 \frac{x}{2}\, dx = \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^3 dx =$

$= \frac{1}{8}\int_0^\pi (1 - 3\cos x + 3\cos^2 x - \cos^3 x)\, dx =$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\sin x\Big|_0^\pi + \frac{3}{8}\int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx - \frac{1}{8}\int_0^\pi (1-\sin^2 x) d\sin x =$

$= \frac{\pi}{8} - 0 + \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{16}\sin 2x\Big|_0^\pi - \left(\frac{\sin x}{8} - \frac{\sin^3 x}{24}\right)\Big|_0^\pi = \frac{5\pi}{16}.$

2288. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\, dx = \qquad |x = \sin u, \quad dx = \cos x\, dx|$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^4 u\, du = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos 2u)^2}{4}\, du =$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{4} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2u}{2}\, du + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 2u}{4}\, du =$

$= \frac{\pi}{8} + \frac{\sin 2u}{4}\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 4u}{8}\, du = \frac{\pi}{8} + 0 + \frac{\pi}{16} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 4u}{8}\, du =$

$= \frac{3\pi}{16} + \frac{\sin 4u}{32}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16} + 0 = \frac{3\pi}{16}.$

2295. $\int_{\sqrt{8/3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}} = \qquad |x = \sqrt{2}\sec u, \quad dx = \sqrt{2}\sec u \operatorname{tg} u\, du|$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{2}\sec u \operatorname{tg} u\, du}{\sqrt{2}\sec u \cdot 2^{5/2} \cdot \operatorname{tg}^5 u} = \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{du}{\operatorname{tg}^4 u} =$

Отдельно вычислим неопределенный интеграл.

$\int \frac{du}{\operatorname{tg}^4 u} = -\int \operatorname{ctg}^2 u \cos^2 u\, d\operatorname{ctg} u = -\int \operatorname{ctg}^2 u \cos^2 u\, d\operatorname{ctg} u =$

$= -\int \operatorname{ctg}^2 u \left(1 - \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 u}\right) d\operatorname{ctg} u = -\int \left(\operatorname{ctg}^2 u - 1 + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 u}\right) d\operatorname{ctg} u =$

$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 u}{3} + \operatorname{ctg} u + u.$

Теперь продолжаем вычисление определенного интеграла.

$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\frac{\operatorname{ctg}^3 u}{3} + \operatorname{ctg} u + u\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{8\sqrt{3}}{27} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{48}.$

2298. Вычислить среднее значение функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

◀ $\frac{\int_0^\pi \sin x\, dx}{\pi} = \frac{-\cos x\big|_0^\pi}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$

$\frac{\int_0^\pi \sin^2 x\, dx}{\pi} = \frac{\int_0^\pi (1-\cos 2x)\, dx}{2\pi} = \frac{\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x\, d(2x)}{2\pi} = \frac{\pi - 0}{2\pi} = \frac{1}{2}.$ ▶

2305. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} =$
$\left|t=\sqrt{x+1};\quad t^2=x+1;\quad x=t^2-1;\quad dx=2t\,dt.\right|$
$\displaystyle= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{t+t^3} = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$

2312. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3} = \qquad \left|t=\tan\frac{x}{2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\right|$
$\displaystyle= \int_0^1 \frac{2\,dt}{\left(2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)(1+t^2)} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{2(1-t^2)+3(1+t^2)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{5+t^2} =$
$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$

2319. Решить уравнение $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}.$

◀ Сначала вычислим интеграл: $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^x \frac{d(x^2)}{x^2\sqrt{x^2-1}} =$
$\left|\sqrt{x^2-1}=t;\quad x^2=t^2+1;\quad d(x^2)=2t\,dt.\right|$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{2t\,dt}{(t^2+1)\cdot t} = \operatorname{arctg} t\Big|_1^{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\pi}{4}.$

Теперь можем решить уравнение:
$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12};\quad \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}=\frac{\pi}{3};\quad \sqrt{x^2-1}=\sqrt{3};\quad x^2=4;$
$x=\pm 2.$
Подынтегральное выражение в уравнении не имеет смысла на интервале $(-1,1)$ поэтому при $x=-2$ интеграл также не имеет смысла. Ответ: 2. ▶

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2371. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \ln x\,d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_0^{+\infty}.$
Интеграл расходится.

2381. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx.$

◀ $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax}d(\sin bx) =$
$\displaystyle= \frac{1}{b}\cdot e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = 0-\frac{a}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}d(\cos bx) =$
$\displaystyle= -\frac{a}{b^2}\cdot e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}I.$
$\displaystyle I=\frac{a}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}I;\quad \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I=\frac{a}{b^2};\quad I=\frac{ab^2}{b^2(a^2+b^2)}=\frac{a}{a^2+b^2}.$ Ответ: $\displaystyle\frac{a}{a^2+b^2}.$ ▶

Исследовать сходимость интегралов

2388. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx.$

◀ Подынтегральная функция не превосходит функции, интеграл от которой сходится: $\dfrac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3} < \dfrac{x^{13}}{(x^5)^3} = \dfrac{1}{x^2}$. Ответ: Сходится. ▶

2393. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}.$

◀ $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{3/2}} = -2\cdot \frac{1}{(\ln x)^{1/2}}\Big|_e^{+\infty}$. Ответ: Сходится. ▶

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2395. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

◀ $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^{2} \frac{d(x-2)}{(x-2)^2-1} = \lim_{a\to 1-0} \frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_0^a + \lim_{a\to 1+0} \frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{1-x}\Big|_a^2.$
Оба интеграла расходятся. Ответ: Расходится. ▶

2403. $\displaystyle\int_3^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}} = \quad \Big|t=x-4;\quad x=t+4;\quad dx=dt.\Big|$

$\displaystyle= \int_{-1}^{1} \frac{t^2+8t+16}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\,dt = -\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + 4\int_{-1}^{1} \frac{2t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + 17\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$\displaystyle= -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt - 4\int_{-1}^{1} \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} + 17\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

Первый интеграл – полукруг – равен $\pi/2$.

$\displaystyle= -\frac{\pi}{2} - 8\sqrt{1-t^2}\Big|_{-1}^{1} + 17\arcsin x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2} - 8\cdot 0 + 17\pi = \frac{33}{2}\pi.$

2410. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \quad \Big|x=\frac{1}{t};\quad dx=-\frac{dt}{t^2};\quad t=\frac{1}{x}.\Big| \quad = \int_{-\infty}^{-1} te^t dt =$

$\displaystyle= te^t\Big|_{-\infty}^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} e^t dt = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}.$

Исследовать сходимость интегралов.

2417. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$

◀ Подынтегральная функция стремится к $-\infty$ при $x\to 0+0$. При этом в некоторой окрестности нуля $\sin x > x/2$ и $\ln x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Поэтому отрицательную подынтегральную функцию можно оценить снизу следующим образом:

$$\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} > \frac{\ln(x/2)}{\sqrt{x}} > -\frac{1}{\sqrt[3]{x/2}\cdot\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{x^{5/6}}.$$

Интеграл от последней функции сходится. Поэтому исходный интеграл от функции, которая больше (меньше по абсолютной величине), также сходится. ►

2422. Можно ли найти такое k, чтобы интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k dx$ сходился?

◄ При $k \le -1$ данный интеграл расходится в нуле, при $k \ge -1$ интеграл расходится в $+\infty$. Таким образом, параметра k, при котором интеграл сходился бы, не существует. ►

Вычислить несобственные интегралы.

2429. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ $\quad$ (n – целое положительное число).

◄ Обозначим $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}.$$

Для $n > 1$ имеем

$$I_{n-1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\Big|_0^{+\infty} + 2(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n} =$$

$$= 0 + 2(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - 2a^2(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} =$$

$2(n-1)I_{n-1} - 2a^2(n-1)I_n$. Откуда $I_n = \dfrac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}$.

Ответ: $I_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\cdot\dfrac{\pi}{2a^{2n-1}}$. ►

2432. $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n dx$ $\quad$ (n – целое положительное число).

◄ Обозначим $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n dx$. $\quad I_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - 1 = -1.$

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx = x(\ln x)\Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}dx = -nI_{n-1}.$$

$I_2 = 1\cdot 2, \quad I_3 = -1\cdot 2\cdot 3, \quad I_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, \quad \ldots, \quad I_n = (-1)^n n!$. ►

2434*. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad$ (n – целое положительное число).

◄ $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx = \quad \left|x = \sin^2 t, \quad dx = 2\sin t\cos t\,dt.\right|$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2 t)^n\cdot 2\sin t\cos t\,dt}{\sin t} = 2\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n+1}dt = 2I_{2n+1}.$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n+1} dt = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n} d\sin t =$$
$$= (\cos t)^{2n} \sin t \Big|_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-1} \sin^2 t\, dt =$$
$$= 0 + 2n \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-1} (1 - \cos^2 t)\, dt = 2n(I_{2n-1} - I_{2n+1}).$$
$$(2n+1)I_{2n+1} = 2nI_{2n-1}; \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}.$$
$$I_{2n+1} = \frac{2n\cdot(2n-2)\dots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\dots 3} I_1 = \frac{2n\cdot(2n-2)\dots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\dots 3} \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt =$$
$= \dfrac{2n\cdot(2n-2)\dots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\dots 3}.$ Ответ: $2\dfrac{2n\cdot(2n-2)\dots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\dots 3}$. ►

2437*. Доказать, что $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = 0.$

◄ Сначала выведем следующее равенство:
$$\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = \left| x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = \int_1^0 \frac{-\ln t}{t} \cdot \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{-1}{t^2}\, dt =$$
$= \displaystyle\int_1^0 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\, dt = -\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx.$ Теперь можно написать:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = 0.$$ ►

Вычислить интегралы, пользуясь формулами

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (интеграл Пуассона)},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \text{ (интеграл Дирихле)}.$$

2441*. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\, d(e^{-x^2}) dx =$
$$= -\frac{1}{2} x\, e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2443. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x}\, d(2x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$

2447. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\, dx.$

◄ Имеем формулу: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Откуда $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{\sin 3x}{4}$. Теперь можно написать
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x}\, dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$ ►

Вычислить интегралы

2450. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx.$

◀ $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\, dx =$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} \ln 2\, dx + \int_0^{\pi/2} \ln\sin\frac{x}{2}\, dx + \int_0^{\pi/2} \ln\cos\frac{x}{2}\, dx =$

Первый интеграл вычисляем, во втором интеграле делаем замену $\dfrac{x}{2} = t$, в третьем – замену $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} = t$.

$\displaystyle I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\, dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin t\, dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\, dt =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.$ Отсюда $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2.$ Ответ: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$ ▶

2452*. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cot x\, dx = \int_0^{\pi/2} x\cdot\frac{d(\sin x)}{\sin x} = \int_0^{\pi/2} x\, d(\ln\sin x) =$

$\displaystyle = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx$ (Интеграл из задачи **2450.**) $= \dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

2454. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \qquad \left| x = \sin t, \quad dx = \cos t\, dt. \right|$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin t\cdot\cos t\, dt}{\cos t} = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t\, dt$ (Интеграл из задачи **2450.**) $= -\dfrac{\pi}{2}\ln 2.$