§28. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Представить в виде произведения:

28.1. б) $\sin 20^\circ - \sin 40^\circ = 2\sin(-10^\circ)\cos 30^\circ = -\sqrt{3}\sin 10^\circ$.

28.2. г) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2\sin 45^\circ \sin 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

28.3. в) $\sin\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{7} = 2\sin\dfrac{13\pi}{84}\cos\dfrac{\pi}{84}$.

28.4. б) $\cos\dfrac{11\pi}{12} + \cos\dfrac{3\pi}{4} = 2\cos\dfrac{5\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{12}$.

28.5. г) $\sin(\alpha - 2\beta) - \sin(\alpha + 2\beta) = 2\sin(-2\beta)\cos\alpha = -2\sin 2\beta\cos\alpha$.

28.6. б) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5} - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{10})}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{10}} = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{20}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{10}}$.

28.7. а) $\dfrac{1}{2} - \cos t = \cos\dfrac{\pi}{3} - \cos t = -2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{t}{2}\right) =$
$2\sin\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

г) $\cos t + \sin t = \sin\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin t = 2\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

28.8. а) $\sin 5x + 2\sin 6x + \sin 7x = 2\sin 6x + \sin 6x\cos(-x) = 2\sin 6x\cdot(1 + \cos x) =$
$= 4\sin 6x\cos^2\dfrac{x}{2}$.

28.9. б) $\cos 2t - \cos 4t - \cos 6t + \cos 8t = -2\sin 3t\sin(-t) + 2\sin 7t\sin(-t) =$
$2\sin t(\sin 3t - \sin 7t) = 2\sin t\cdot 2\sin(-2t)\cos 5t = -4\sin t\sin 2t\cos 5t$.

Докажите тождество:

28.10. а) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \frac{2\sin 4\alpha\cos(-2\alpha)}{2\cos 4\alpha\cos(-2\alpha)} = \operatorname{tg} 4\alpha.$$

28.12 а) $\sin x + \sin y + \sin(x - y) = 4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$.

Левая часть тождества равна $2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} + 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} =$

$$= 2\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{x-y}{2}\right) = 2\cos\frac{x-y}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} =$$
$$= 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

28.13 б) $\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha\sin 2\beta$.
Левая часть тождества равна $(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) =$
$= -2\sin\alpha\sin(-\beta)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta = \sin 2\alpha\sin 2\beta$.

Вычислите:

28.14. а) $\dfrac{\cos 68^\circ-\cos 22^\circ}{\sin 68^\circ-\sin 22^\circ} = \dfrac{-2\sin 45^\circ\sin 23^\circ}{2\sin 23^\circ\cos 45^\circ} = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$.

в) $\dfrac{\sin 130^\circ+\sin 110^\circ}{\cos 130^\circ+\cos 110^\circ} = \dfrac{2\sin 120^\circ\cos 10^\circ}{2\cos 120^\circ\cos 10^\circ} = \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ-60^\circ) =$
$= -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$.

28.15 а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}$, если $\operatorname{ctg} 4\alpha = 0{,}2$.
$$= \frac{(\sin\alpha+\sin 7\alpha)+(\sin 3\alpha+\sin 5\alpha)}{(\cos\alpha+\cos 7\alpha)+(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha)} = \frac{2\sin 4\alpha\cos(-3\alpha)+2\sin 4\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos 4\alpha\cos(-3\alpha)+2\cos 4\alpha\cos(-\alpha)} =$$
$$= \frac{2\sin 4\alpha\cdot 2(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}{2\cos 4\alpha\cdot 2(\cos 3\alpha+\cos\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} 4\alpha} = \frac{1}{0{,}2} = 5.$$

28.16 а) $\sin^2 10^\circ+\sin^2 130^\circ+\sin^2 110^\circ =$
$$\frac{1-\cos 20^\circ}{2}+\frac{1-\cos 260^\circ}{2}+\frac{1-\cos 220^\circ}{2} = \frac{1}{2}(3-\cos 20^\circ+\sin 10^\circ+\cos 40^\circ) =$$
$$\frac{1}{2}(3-2\sin 30^\circ\sin 10^\circ+\sin 10^\circ) = \frac{1}{2}(3-\sin 10^\circ+\sin 10^\circ) = \frac{3}{2}.$$

Проверьте равенство:

28.18. в) $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.
$\cos 12^\circ-\cos 48^\circ = -2\sin 30^\circ\sin(-18^\circ) = -2\cdot(1/2)(-\sin 18^\circ) = \sin 18^\circ$.
Ответ: верно.

Докажите, что верно равенство:

28.19. а) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\cos 10^\circ = 0$.

$\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\cos 10^\circ = 2\sin 30^\circ\cos(-10^\circ)-\cos 10^\circ = \cos 10^\circ-\cos 10^\circ = 0$.

28.20. б) $\cos 115^\circ-\cos 35^\circ+\cos 65^\circ+\cos 25^\circ = \sin 5^\circ$.
Левая часть равенства равна $(\cos 115^\circ+\cos 65^\circ)-(\cos 35^\circ-\cos 25^\circ) =$
$= 2\cos 90^\circ\cos 25^\circ+2\sin 30^\circ\sin 5^\circ = 0+2\cdot(1/2)+\sin 5^\circ = \sin 5^\circ$.

28.21. а) $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ = \cos 7^\circ$.

$\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ = 2\sin 54^\circ\cos(-7^\circ)-2\sin 18^\circ\cos(-7^\circ) =$

$= \cos 7^\circ\cdot 2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ) = \cos 7^\circ\cdot 2\cdot 2\sin 18^\circ\cos 36^\circ =$

$$= \cos 7^\circ\cdot\frac{2\cdot 2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ\cdot\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{\sin 72^\circ} =$$

$= \cos 7^\circ \cdot \dfrac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \cos 7^\circ.$

б) $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2\operatorname{tg} 20^\circ.$

Имеем $\operatorname{tg} 20^\circ = \dfrac{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ}{1+\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 35^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ}{1+\operatorname{ctg} 35^\circ \operatorname{tg} 35^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ}{1+1}.$

Отсюда $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2\operatorname{tg} 20^\circ.$

28.22. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то выполняется равенство:
а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$

Имеем $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}(\pi-(\alpha+\beta)) = -\operatorname{tg}\gamma$. Отсюда
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = -\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Теперь получаем
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$

б) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}.$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} =$$
$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$
$$2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

28.23. а) Зная, что $\sin 2x+\sin 2y = a,\ \cos 2x+\cos 2y = b$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$, вычислите $\operatorname{tg}(x+y)$.

Имеем $a = 2\sin(x+y)\cos(x-y),\ \ b = 2\cos(x+y)\cos(x-y).$

Теперь $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \operatorname{tg}(a+b).$

28.24. Докажите:
б) Если $2\cos x = \cos(x+2y)$, то $\operatorname{ctg}(x+y) - 2\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y.$
Опечатка в задачнике. Доказываем соотношение $\operatorname{ctg}(x+y)-2\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y$ или $\operatorname{ctg}(x+y)-\operatorname{ctg} y = 2\operatorname{tg} x$. Для этого вычисляем:

$$\operatorname{ctg}(x+y)-\operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} - \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin y\cos(x+y)-\cos y\sin(x+y)}{\sin(x+y)\sin y} =$$
$$= \frac{\sin(-x)\cdot 2}{\cos x-\cos(x+2y)} = \frac{-2\sin x}{\cos x - 2\cos x} = 2\frac{\sin x}{\cos x} = 2\operatorname{tg} x.$$

28.25. Докажите:
а) Если $\cos^2 x+\cos^2 y = m$, то $\cos(x+y)\cos(x-y) = m-1.$

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{\cos 2y+\cos 2x}{2} = \frac{2\cos^2 y - 1 + 2\cos^2 x - 1}{2} =$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 1 = m-1.$$

Решите уравнение:

28.26. в) $\cos x = \cos 5x$.
$\cos x - \cos 5x = 0$; $-2\sin 3x \sin(-2x) = 0$.
$\sin 3x = 0$; $3x = k\pi$; $x = \dfrac{k\pi}{3}$. $\sin 2x = 0$; $2x = k\pi$; $x = \dfrac{k\pi}{2}$.
Ответ: $\dfrac{k\pi}{3}$, $\dfrac{k\pi}{2}$.

28.27. а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
$\sin 2x + 2\sin 2x \cos(-x) = 0$; $\sin 2x(1 + 2\cos x) = 0$.
$\sin 2x = 0$; $2x = k\pi$; $x = \dfrac{k\pi}{2}$. $1 + 2\cos x = 0$; $\cos x = -\dfrac{1}{2}$; $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
Ответ: $\dfrac{k\pi}{2}$, $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

28.28. г) $\sin(7\pi + x) = \cos(9\pi + 2x)$.
$-\sin x = -\cos 2x$; $-\sin x = -1 + 2\sin^2 x$. Обозначим $y = \sin x$.
$2y^2 + y - 1 = 0$. $y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$; $y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = -1$.
$\sin x = \dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$. $\sin x = -1$; $\dfrac{9\pi}{6} + 2k\pi$.
Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2n\pi}{3}$.

28.29. а) $1 + \cos 6x = 2\sin^2 5x$.
$1 - 2\sin^2 5x + \cos 6x = 0$; $\cos 10x + \cos 6x = 0$. $2\cos 8x \cos 2x = 0$.
$\cos 8x = 0$; $8x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}$; $\cos 2x = 0$; $2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.
Ответ: $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}$, $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

28.30. б) $2\sin^2 3x - 1 = \cos^2 4x - \sin^2 4x$.
$-\cos 6x = \cos 8x$; $\cos 8x + \cos 6x = 0$; $2\cos 7x \cos x = 0$.
$\cos 7x = 0; 7x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2k\pi}{7}$; $\cos x = 0; x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Ответ: $\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2k\pi}{7}$, $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ответ задачника неполный.

28.31. г) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{3x}{2} = 0$.
$$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}} = 0; \quad \frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}} = 0; \quad \frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}} = 0.$$
Числитель должен равняться нулю, $\sin 2x = 0$; $2x = k\pi$; $x = \dfrac{k\pi}{2}$, при этом знаменатель не должен равняться нулю, т. е. $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$; $\dfrac{x}{2} \neq k\pi$; $x \neq 2k\pi$, а также $\sin\dfrac{3x}{2} \neq 0$; $\dfrac{3x}{2} \neq k\pi$; $x \neq \dfrac{2k\pi}{3}$. Таким образом, ответ можно записать в

виде двух групп решений.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \pi + 2k\pi$.

28.32. б) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.
$2\sin 3x \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x; \ 2\sin 3x \cos 2x = \cos 2x; \ \cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0$.
$\cos 2x = 0; \ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.
$2\sin 3x = 1; \ \sin 3x = \frac{1}{2}; \ 3x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi; \ x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$.
Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$.

28.35. б) При каких значениях x числа $a, \ b, \ c$ образуют арифметическую прогрессию, если
а) $a = \cos 7x, \ b = \cos 2x, \ c = \cos 11x$.
Составляем уравнение: $b - a = c - b; \ \cos 2x - \cos 7x = \cos 11x - \cos 2x$;
$-2\sin \frac{9}{2}x \sin\left(-\frac{5}{2}x\right) = -2\sin \frac{13}{2}x \sin \frac{9}{2}x; \ \sin \frac{9}{2}x \left(\sin \frac{5}{2} + \sin \frac{13}{2}x\right) = 0$;
$\sin \frac{9}{2}x \cdot 2\sin \frac{9}{2}x \cos(-2x) = 0$.
$\sin \frac{9}{2}x = 0; \ \frac{9}{2}x = k\pi; \ x = \frac{2k\pi}{9}$.
$\cos 2x = 0; \ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.
Ответ: $\frac{2k\pi}{9}, \ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

28.36. Решите неравенство:
б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$.
$2\cos 2x \cos \frac{\pi}{3} > -\frac{1}{2}; \ \cos 2x > -\frac{1}{2}; \ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$;
$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$.

28.38. Постройте график уравнения:
а) $\sin 2x = \sin 2y$.
$\sin 2x - \sin 2y = 0; \ 2\sin(x - y)\cos(x + y) = 0$.
$\sin(x-y) = 0; \ x-y = k\pi; \ y = x-k\pi$. Это соотношение задает семейство прямых с угловым коэффициентом 1 и пересекающих ось Oy в точках $0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \pm 3\pi$ и т. д.
$\cos(x+y) = 0; \ x+y = \frac{\pi}{2}+k\pi; \ y = -x+\frac{\pi}{2}+k\pi$. Это соотношение задает семейство прямых с угловым коэффициентом -1 и пересекающих ось Oy в точках $\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} \pm \pi, \ \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \ \frac{\pi}{2} \pm 3\pi$ и т. д.
Эти два семейства прямых образуют равномерную прямоугольную сетку на плоскости.