Evaluasi Ketidakpastian Pengukuran Dengan Komponen Berkorelasi

A. Praba Drijarkara 2021-07-31

Jika sebuah pengukuran mempunyai model matematis sebagai berikut:

$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

Maka ketidakpastian pengukuran untuk measurand y dapat dituliskan:

$$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3) + 2c_1c_2u(x_1)u(x_2)r_{12} + 2c_1c_3u(x_1)u(x_3)r_{13} + 2c_2c_3u(x_2)u(x_3)r_{23}$$

Koefisien korelasi r_{ij} menunjukkan apakah besaran x_i dan x_j saling berkorelasi; $r_{ij} = 0$ artinya saling tidak berkorelasi (atau dapat disebut independen satu sama lain); $r_{ij} = 1$ artinya berkorelasi penuh; $r_{ij} = -1$ artinya berkorelasi penuh secara berlawanan. Sering kali korelasi antarbesaran dianggap tidak ada, sehingga persamaan ketidakpastian biasanya hanya ditulis tanpa suku korelasi:

$$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3)$$

Namun, ada kondisi tertentu ketika korelasi perlu diperhitungkan, khususnya jika ada komponen ketidakpastian yang bersumber dari efek sistematis.

> Ada dua jenis galat (error): galat acak (random error) dan galat sistematik. Galat acak adalah hasil dari pengaruh yang bersifat acak dan tidak dapat dikoreksi, dan otomatis menimbulkan ketidakpastian. Sedangkan galat sistematik adalah bias yang secara teoretis dapat dikoreksi, namun dalam kenyataannya koreksi tersebut tidak dapat ditentukan dengan sempurna, sehingga tetap harus diperhitungkan sebagai sumber ketidakpastian. Dalam tulisan ini, kita akan membedakan komponen ketidakpastian menjadi dua jenis berdasarkan sumbernya: yang berasal dari pengaruh acak, dan yang berasal dari pengaruh sistematik.

Ketidakpastian yang berasal dari pengaruh acak umumnya bersifat independen: besarnya galat acak pada satu kejadian sama sekali tidak mempengaruhi besarnya galat pada kejadian berikutnya. Artinya, tidak ada korelasi (atau koefisien korelasinya nol). Sedangkan ketidakpastian dari pengaruh sistematik yang sama akan bersifat dependen satu sama lain, sehingga berkorelasi penuh.

Contoh kasus pengukuran yang dipengaruhi oleh korelasi adalah pengukuran yang bersifat komparatif atau aditif/kumulatif.

Contoh 1: dua buah balok ukur, sebut saja balok A dan balok B, akan dijadikan standar acuan untuk kalibrasi komparator, sehingga measurand yang perlu diketahui nilainya adalah *selisih panjang balok A dan balok B*, atau

$$\Delta l_{\mathrm{AB}} = l_{\mathrm{A}} - l_{\mathrm{B}}$$

Koefisien sensitivitas pada persamaan di atas mempunyai nilai $c_{\mathrm{A}} = 1$ dan $c_{\mathrm{B}} = -1$.

Panjang balok A dan balok B sendiri diketahui dengan melakukan pengukuran terhadap setiap balok satu per satu. Misalkan persamaan ketidakpastian pengukuran panjang balok l mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$u^2(l) = u^2(x_{\mathrm{s1}}) + u^2(x_{\mathrm{s2}}) + u^2(x_{\mathrm{r1}}) + u^2(x_{\mathrm{r2}})$$

dengan $u\left(x_{\mathrm{s}j}\right)$ = ketidakpastian dari efek sistematik dan $u(x_{\mathrm{r}j})$ = ketidakpastian dari efek acak; serta tidak ada korelasi sama sekali antara keempat sumber ketidakpastian tersebut.

Maka persamaan ketidakpastian untuk measurand dapat dituliskan secara lengkap sebagai berikut:

$$u^2(\Delta l_{\mathrm{AB}}) = u^2(l_{\mathrm{A}}) + u^2(l_{\mathrm{B}})$$

sedangkan

$$u^2(l_{\mathrm{A}}) = u^2(x_{\mathrm{s1.A}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.A}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.A}}) + u^2(x_{\mathrm{r2.A}})$$

dan

$$u^2(l_{\mathrm{B}}) = u^2(x_{\mathrm{s1.B}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.B}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.B}}) + u^2(x_{\mathrm{r2.B}})$$

Perhatikan bahwa $u(x_{\mathrm{s1.A}})$ berkorelasi penuh dengan $u(x_{\mathrm{s1.B}})$, demikian pula $u(x_{\mathrm{s2.A}})$ berkorelasi penuh dengan $u(x_{\mathrm{s2.B}})$, sedangkan $u(x_{\mathrm{r1.A}})$, $u(x_{\mathrm{r2.A}})$, $u(x_{\mathrm{r1.B}})$, dan $u(x_{\mathrm{r2.B}})$ saling tidak berkorelasi. Maka persamaan ketidakpastian untuk Δl_{AB} dapat dituliskan

$$\begin{aligned} u^2(\Delta l_{\mathrm{AB}}) = {} & u^2(x_{\mathrm{s1.A}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.A}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.A}}) + u^2(x_{\mathrm{r2.A}}) + u^2(x_{\mathrm{s1.B}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.B}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.B}}) \\ & + u^2(x_{\mathrm{r2.B}}) + 2c_{\mathrm{A}}c_{\mathrm{B}}u(x_{\mathrm{s1.A}})u(x_{\mathrm{s1.B}}) + 2c_{\mathrm{A}}c_{\mathrm{B}}u(x_{\mathrm{s2.A}})u(x_{\mathrm{s2.B}}) \end{aligned}$$

Karena $c_{\mathrm{A}} = 1$ dan $c_{\mathrm{B}} = -1$,

$$\begin{aligned} u^2(\Delta l_{\mathrm{AB}}) = {} & u^2(x_{\mathrm{s1.A}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.A}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.A}}) + u^2(x_{\mathrm{r2.A}}) + u^2(x_{\mathrm{s1.B}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.B}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.B}}) \\ & + u^2(x_{\mathrm{r2.B}}) - u(x_{\mathrm{s1.A}})u(x_{\mathrm{s1.B}}) - u(x_{\mathrm{s2.A}})u(x_{\mathrm{s2.B}}) \end{aligned}$$

Untuk setiap kasus pengukuran panjang, dapat diasumsikan bahwa besarnya nilai ketidakpastian baku untuk setiap komponen ketidakpastian akan sama pada setiap kali pengukuran:

$$u(x_{\mathrm{s1.A}}) = u(x_{\mathrm{s1.B}}) = u(x_{\mathrm{s1}})$$

$$u(x_{\mathrm{s2.A}}) = u(x_{\mathrm{s2.B}}) = u(x_{\mathrm{s2}})$$

$$u(x_{\mathrm{r1.A}}) = u(x_{\mathrm{r1.B}}) = u(x_{\mathrm{r1}})$$

$$u(x_{\mathrm{r2.A}}) = u(x_{\mathrm{r2.B}}) = u(x_{\mathrm{r2}})$$

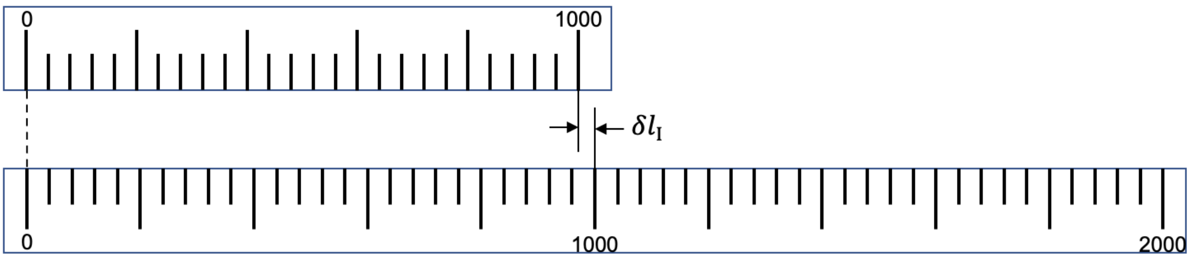
sehingga

$$u^2(\Delta l_{\mathrm{AB}}) = u^2(x_{\mathrm{s1}}) + u^2(x_{\mathrm{s2}}) + u^2(x_{\mathrm{r1}}) + u^2(x_{\mathrm{r2}}) + u^2(x_{\mathrm{s1}}) + u^2(x_{\mathrm{s2}}) + u^2(x_{\mathrm{r1}}) + u^2(x_{\mathrm{r2}}) - 2u(x_{\mathrm{s1}})u(x_{\mathrm{s1}}) - 2u(x_{\mathrm{s2}})u(x_{\mathrm{s2}})$$
$$= 2u^2(x_{\mathrm{s1}}) + 2u^2(x_{\mathrm{s2}}) + 2u^2(x_{\mathrm{r1}}) + 2u^2(x_{\mathrm{r2}}) - 2u^2(x_{\mathrm{s1}}) - 2u^2(x_{\mathrm{s2}})$$
$$\therefore u^2(\Delta l_{\mathrm{AB}}) = 2u^2(x_{\mathrm{r1}}) + 2u^2(x_{\mathrm{r2}})$$

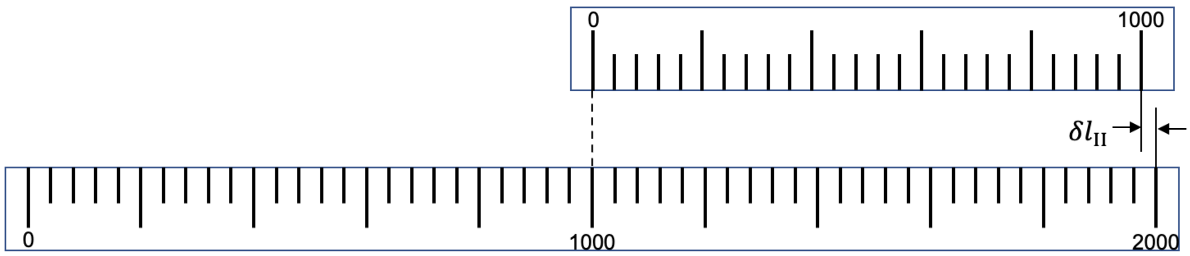
Dalam model matematis di atas, ketidakpastian dari efek sistematik menjadi hilang. Ini dapat dipahami dengan logika sederhana: jika suatu efek yang sama terjadi pada pengukuran balok A dan balok B, maka jika dihitung selisihnya, efek yang sama itu pada kedua pengukuran akan saling menghilangkan.

<u>Contoh 2</u>: sebuah mistar 2000 mm dikalibrasi terhadap mistar standar 1000 mm. Karena mistar acuan lebih pendek, maka kalibrasi mistar dilakukan dalam dua tahap. Pertama, koreksi δl_{I} di jarak 0–1000 mm ditentukan berdasarkan perbandingan terhadap mistar acuan dengan titik awal 0 mm. Kedua, koreksi δl_{II} di jarak 1000–2000 mm ditentukan dengan terhadap mistar acuan dengan titik awal 1000 mm. Maka koreksi pada nilai nominal 2000 mm dapat ditentukan dari jumlah koreksi di tiap tahap, atau:

$$\delta l_{2000} = \delta l_I + \delta l_{II}$$



Pengukuran pertama: penentuan koreksi δl_{I} untuk panjang nominal 0–1000 mm



Pengukuran kedua: penentuan koreksi δl_{II} untuk panjang nominal 1000–2000 mm

Seperti pada contoh sebelumnya, diandaikan bahwa ketidakpastian pengukuran pada rentang i mempunyai sumber ketidakpastian dari pengaruh acak dan sistematik sebagai berikut:

$$u^2(\delta l_i) = u^2(x_{\mathrm{s1}.i}) + u^2(x_{\mathrm{s2}.i}) + u^2(x_{\mathrm{r1}.i}) + u^2(x_{\mathrm{r2}.i})$$

Ketidakpastian gabungan untuk koreksi pada nilai nominal 2000 mm dapat dituliskan:

$$u^2(\delta l_{2000}) = u^2(x_{\mathrm{s1.I}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.I}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.I}}) + u^2(x_{\mathrm{r2.I}}) + u^2(x_{\mathrm{s1.II}}) + u^2(x_{\mathrm{s2.II}}) + u^2(x_{\mathrm{r1.II}}) + u^2(x_{\mathrm{r2.II}}) + 2c_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{II}}u(x_{\mathrm{s1.I}})u(x_{\mathrm{s1.II}}) + 2c_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{II}}u(x_{\mathrm{s2.I}})u(x_{\mathrm{s2.II}})$$

Dengan asumsi yang sama seperti contoh sebelumnya, namun dengan mengingat bahwa kali ini $c_{\mathrm{I}} = 1$ dan $c_{\mathrm{II}} = 1$:

$$\begin{aligned} u^2(\delta l_{2000}) &= u^2(x_{\mathrm{s1}}) + u^2(x_{\mathrm{s2}}) + u^2(x_{\mathrm{r1}}) + u^2(x_{\mathrm{r2}}) + u^2(x_{\mathrm{s1}}) + u^2(x_{\mathrm{s2}}) + u^2(x_{\mathrm{r1}}) + u^2(x_{\mathrm{r2}}) \\ &\quad + 2u(x_{\mathrm{s1}})u(x_{\mathrm{s1}}) + 2u(x_{\mathrm{s2}})u(x_{\mathrm{s2}}) \\ &= 2u^2(x_{\mathrm{s1}}) + 2u^2(x_{\mathrm{s2}}) + u^2(x_{\mathrm{r1}}) + u^2(x_{\mathrm{r2}}) + u^2(x_{\mathrm{r1}}) + u^2(x_{\mathrm{r2}}) + 2u^2(x_{\mathrm{s1}}) \\ &\quad + 2u^2(x_{\mathrm{s2}}) \\ &= 4u^2(x_{\mathrm{s1}}) + 4u^2(x_{\mathrm{s2}}) + 2u^2(x_{\mathrm{r1}}) + 2u^2(x_{\mathrm{r2}}) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk komponen ketidakpastian yang tidak berkorelasi seperti $u(x_{\mathrm{r1.I}})$ dan $u(x_{\mathrm{r1.II}})$, maka nilai resultan dari komponen $u(x_{\mathrm{r1}.i})$ adalah $\sqrt{2}u(x_{\mathrm{r1}})$, yaitu hasil dari penjumlahan kuadrat. Sedangkan komponen yang berkorelasi penuh seperti $u(x_{\mathrm{s1.I}})$ dan $u(x_{\mathrm{s1.II}})$,, maka nilai resultannya adalah $\sqrt{4u^2(x_{\mathrm{s1}})} = 2u(x_{\mathrm{s1}})$, yaitu hasil penjumlahan biasa.

Konsep di atas dapat diperluas untuk pengukuran yang sifatnya kumulatif sebanyak N pengulangan (misalnya kalibrasi pita ukur 10 m dengan perbandingan 10 kali terhadap mistar acuan 1 m):

$$u^2(\delta l_N) = N^2u^2(x_{\mathrm{s1}}) + N^2u^2(x_{\mathrm{s2}}) + Nu^2(x_{\mathrm{r1}}) + Nu^2(x_{\mathrm{r2}})$$

Jika persamaan di atas dituangkan dalam bentuk tabel bujet ketidakpastian, maka faktor N dapat diperhitungkan sebagai *faktor pengali koefisien sensitivitas* dengan ketentuan:

- untuk komponen dari efek sistematik, koefisien sensitivitas dikalikan N;
- untuk komponen dari efek acak, koefisien sensitivitas dikalikan $\sqrt{N}$.

Kesimpulan

Korelasi antarkomponen ketidakpastian perlu diperhitungkan, khususnya pada kasus pengukuran yang bersifat pengurangan atau penjumlahan dari beberapa pengukuran atas besaran yang sama atau mirip. Perhitungan korelasi dapat disederhanakan dengan memisahkan komponen ketidakpastian berdasarkan efek yang menimbulkannya: efek acak atau efek sistematik. Resultante komponen ketidakpastian dari efek acak dihitung sebagai penjumlahan kuadrat biasa.

Untuk pengukuran selisih, resultante ketidakpastian dari efek sistematik adalah nol, karena komponen tersebut saling menghilangkan dari kedua tahapan pengukuran. Sedangkan untuk pengukuran yang bersifat kumulatif, perlu ditambahkan faktor pengali koefisien sensitivitas untuk setiap komponen ketidakpastian: N untuk komponen dari efek sistematik, dan $\sqrt{N}$ untuk untuk komponen dari efek acak.

[APD] [Korelasi dalam ketidakpastian 2021-07-31.docx] [28/12/2022 23:06]