DIREKTORAT STANDAR NASIONAL SATUAN UKURAN
MEKANIKA, RADIASI, DAN BIOLOGI

BADAN STANDARDISASI NASIONAL

SNSU PK.P-04:2020

Model Matematis dalam Pengukuran Dimensi

SNSU PK.P-04:2020

MODEL MATEMATIS DALAM PENGUKURAN DIMENSI

Penyusun: 1. Nurul Alfiyati

2. A. Praba Drijarkara

Desain sampul: Bagus Muhammad Irvan - BSN

Direktorat Standar Nasional Satuan Ukuran Mekanika, Radiasi, dan Biologi

Badan Standardisasi Nasional

Lembar Pengesahan

Model Matematis dalam Pengukuran Dimensi (SNSU PK.P-04:2020) diterbitkan oleh Badan Standardisasi Nasional sebagai upaya untuk mengharmoniskan pelaksanaan evaluasi ketidakpastian pengukuran khususnya model matematis dasar untuk pengukuran dimensional dengan pengaruh suhu di laboratorium kalibrasi maupun institusi lain yang berkepentingan. Panduan ini mencakup definisi umum, model dasar pengukuran dimensional, serta penurunan rumus pengaruh suhu. Panduan ini disusun berdasarkan acuan metode internasional, nasional, maupun sumber ilmiah lainnya melalui proses pembahasan internal di Direktorat Standar Nasional Satuan Ukuran Mekanika, Radiasi, dan Biologi serta dengan mempertimbangkan masukan dari para ahli di bidang metrologi dimensi.

Disahkan tanggal 14 Desember 2020

Hastori

Deputi Bidang Standar Nasional Satuan Ukuran

Badan Standardisasi Nasional

Daftar isi

Model Matematis dalam Pengukuran Dimensi

1 Pendahuluan

1.1. Pengukuran adalah proses komparasi atau perbandingan antara benda uji dan alat ukur (pengukuran biasa); atau alat ukur dan standar ukur (kalibrasi). Pada pengukuran atau kalibrasi dimensi, baik benda uji, alat ukur, dan standar ukur merupakan objek material yang sama-sama dipengaruhi pemuaian termal.

1.2. Tujuan dibuatnya petunjuk teknis kalibrasi ini adalah untuk dapat menentukan model matematis yang sesuai untuk jenis pengukuran/kalibrasi tertentu, memahami asal usul model matematis yang digunakan, dan dapat mengevaluasi pengaruh suhu terhadap ketidakpastian pengukuran.

1.3. Petunjuk teknis dalam memahami ketidakpastian pengukuran ini mengacu kepada *Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (JCGM 100:2008) yang diuraikan dalam dokumen EA-4/02.

2 Ruang lingkup

2.1. Petunjuk teknis ini menguraikan model matematis dasar untuk kasus dimensi yang paling umum dengan mempertimbangkan pengaruh suhu dan penjelasan penurunan rumusnya.

2.2. Model matematis pada petunjuk teknis ini tidak berlaku untuk pengukuran atau kalibrasi yang acuannya adalah standar panjang gelombang. Dalam penerapan untuk kasus pengukuran tertentu, beberapa sumber ketidakpastian dapat dihilangkan dari model jika terbukti bahwa kontribusinya tidak signifikan.

2.3. Benda uji dan alat ukur atau standar ukur dalam petunjuk teknis ini adalah benda padat dengan nilai koefisien muai termal yang tidak berbeda jauh dan kedua benda sudah dikondisikan dalam ruangan yang sama dan bersuhu homogen. Koefisien muai termal bersifat linier pada suhu aktual kedua benda.

2.4. Kondisi suhu acuan yang digunakan dalam kasus dimensi adalah suhu 20 ºC (ISO 1). Dalam pengukuran yang dilakukan pada suhu selain suhu acuan, pengaruh pemuaian termal harus diperhitungkan, baik sebagai koreksi maupun sebagai sumber ketidakpastian pengukuran.

3 Definisi

3.1. Model matematis: hubungan matematis antara semua besaran *input* dan *output* yang diketahui terlibat dalam pengukuran. Model matematis merupakan cara menghitung nilai *measurand* berdasarkan nilai besaran *input* yang ada, dan menggambarkan metode pengukuran yang digunakan.

3.2. Besaran *input*: merupakan besaran yang berpengaruh (*influence quantities*).

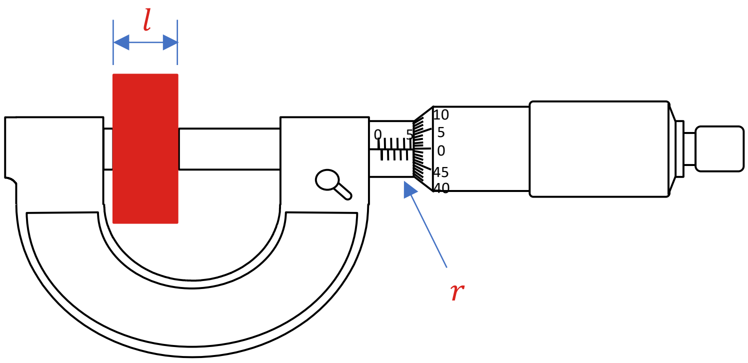
3.3. Besaran *output*: merupakan *measurand* (besaran yang kita ingin ketahui).

4 Model dasar pengukuran dimensional

Model dasar pengukuran dimensional pada umumnya diwakili oleh tiga jenis pengukuran atau kalibrasi berikut:

4. 1 Kalibrasi alat ukur

Suatu alat ukur (misalnya mikrometer) dikalibrasi terhadap suatu acuan berupa standar material (misalnya balok ukur atau gauge block) seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Kalibrasi alat ukur mikrometer

Measurand pada jenis kalibrasi ini adalah kesalahan penunjukan alat e

Input pada pengukuran ini adalah :

r = penunjukan alat

l = panjang acuan

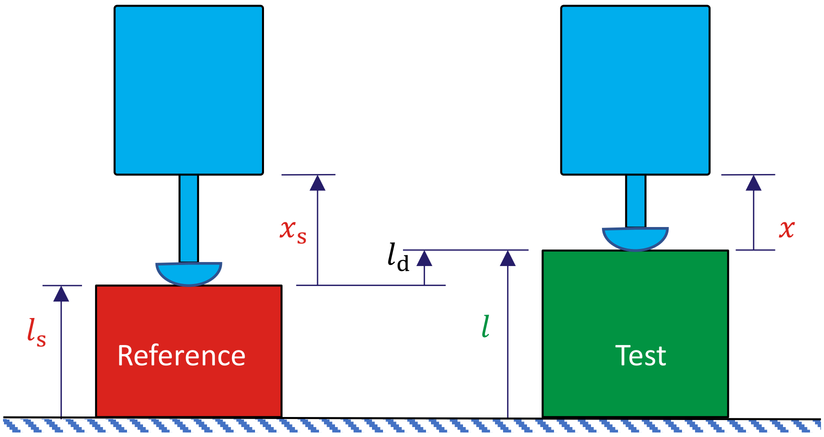
Dari gambar 1 di atas, model dasar pengukuran adalah

$$e = r - l \tag{1}$$

4. 2 Pengukuran atau kalibrasi komparatif

4.2.1. Pengukuran atau kalibrasi komparatif kasus 1.

Pada kasus ini baik standar acuan (*reference*) dan benda uji (*test*) diukur dengan menggunakan sebuah instrumen ukur panjang, di mana *probe* pada instrumen ukur tersebut disentuhkan pada standar acuan dan benda uji tersebut untuk mengetahui panjang artefak tes l . Pengukuran atau kalibrasinya diilustrasikan pada Gambar 2.



Syarat : $l_d \ll l$

Gambar 2. Pengukuran atau kalibrasi komparatif (kasus 1)

Measurand pada kasus komparatif 1 ini adalah panjang artefak tes l

Input:

x_s, x = penunjukan *probe*

l_s = panjang artefak acuan

Besaran antara:

l_d = selisih panjang artefak = selisih pembacaan probe

Model dasar kasus komparatif ini adalah :

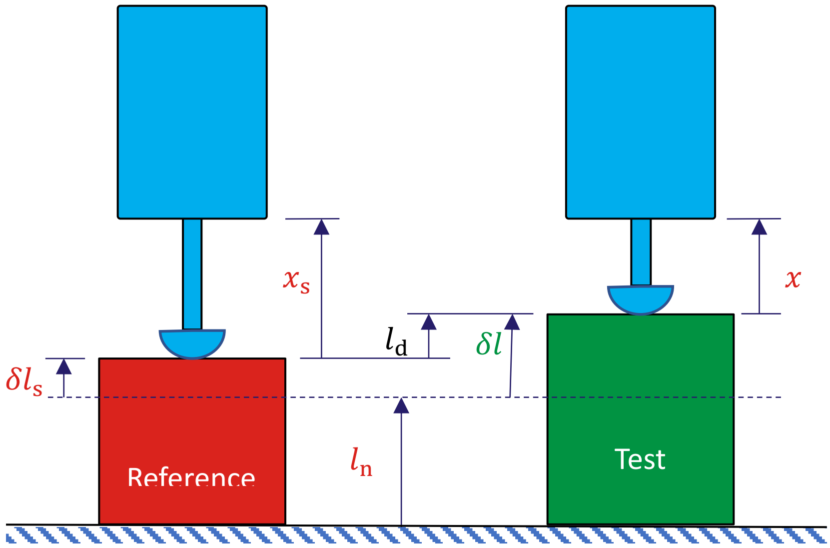
$$l = l_s + l_d$$

$$l_d = x - x_s$$

$$\therefore l = l_s + (x - x_s) \quad (2)$$

4.2.2. Pengukuran atau kalibrasi komparatif kasus 2.

Pada kasus komparatif berikut tujuan pengukuran atau kalibrasi adalah mengetahui penyimpangan artefak tes dari panjang nominal.



Gambar 3. Pengukuran atau kalibrasi komparatif 2

Measurand: deviasi artefak tes dari nominal (δl)

Input:

x_s, x = penunjukan *probe*

l_n = panjang nominal

δl_s = deviasi artefak acuan (dari sertifikat kalibrasi)

Model dasar kasus komparatif 2:

$$l = l_s + (x - x_s)$$

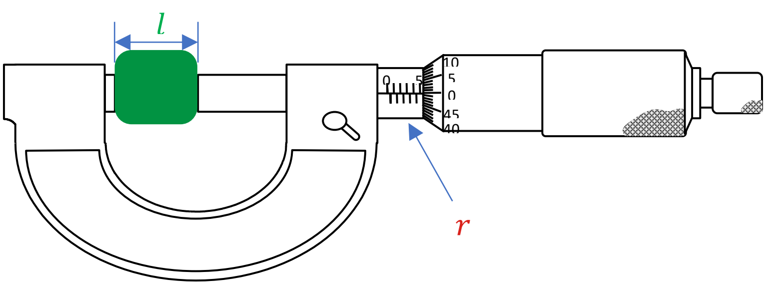
$$l = l_n + \delta l$$

$$l_s = l_n + \delta l_s$$

$$\therefore \delta l = \delta l_s + (x - x_s) \qquad (3)$$

4. 3 Pengukuran langsung

Pada kasus ini, suatu benda diukur dengan sebuah alat ukur untuk mengetahui panjang benda tersebut. Ilustrasi pengukurannya ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Pengukuran langsung

Measurand pada kasus ini adalah panjang objek l

Input:

r = penunjukan alat

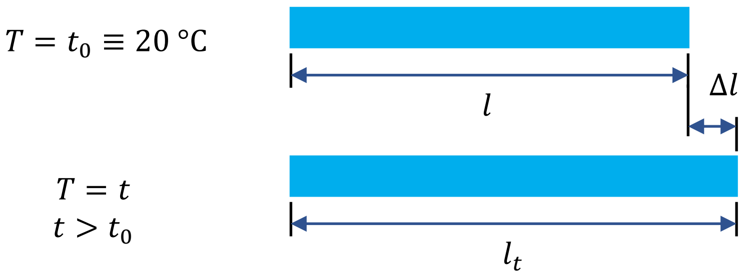
e = kesalahan penunjukan alat (dari sertifikat kalibrasi)

Model dasar pengukuran langsung ini adalah

$$l = r - e \tag{4}$$

5 Penurunan rumus pengaruh suhu

Dimisalkan suatu benda pada suhu acuan $t_0 = 20\ °\mathrm{C}$ memiliki panjang l. Jika benda tersebut berada pada suhu t yang lebih besar dari t_0, maka benda tersebut mengalami perubahan panjang sebesar Δl. Perubahan panjang Δl ini dipengaruhi oleh koefisien muai termal (KMT) α yang nilainya sesuai jenis material penyusunnya. Pada suhu t ini panjang benda tersebut menjadi l_t. Kondisi benda pada saat suhu acuan 20 °C dan pada saat suhu t ditunjukkan pada Gambar 5.



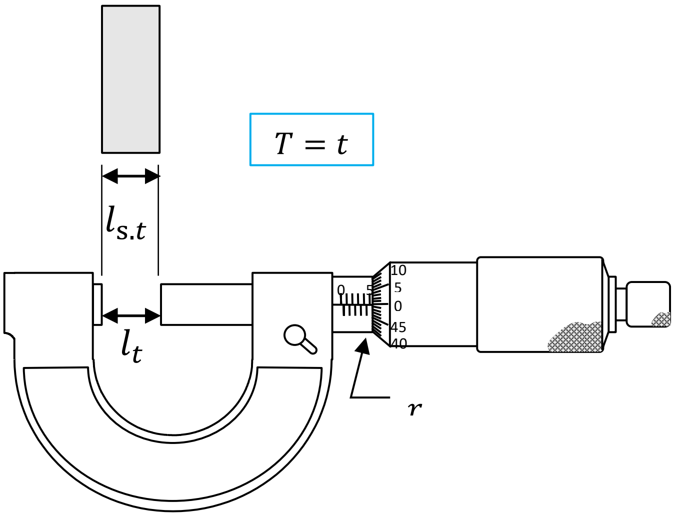
Gambar 5. Kondisi benda uji akibat perubahan suhu

$$\Delta l = l \cdot \alpha(t - t_0) = l \cdot \alpha\theta$$

$$l_t = l + \Delta l = l + l \cdot \alpha\theta = l(1 + \alpha\theta)$$

$$l = l_t(1 - \alpha\theta) \tag{5}$$

Pada Gambar 6 diperlihatkan kalibrasi mikrometer menggunakan balok ukur atau *gauge block* sebagai standar dengan koefisien muai termal α_s. Kalibrasi dilakukan pada suhu t. Pada kondisi ini, panjang antara muka ukur anvil dan spindel pada mikrometer adalah l_t dan panjang balok ukur adalah $l_{s.t}$.



Gambar 6. Kalibrasi mikrometer menggunakan balok ukur pada suhu t

Pada saat muka ukur mikrometer berhimpit dengan standar, panjang l_t akan sama dengan panjang $= l_{s.t}$. Pada kondisi ini, alat ukur menunjukkan r.

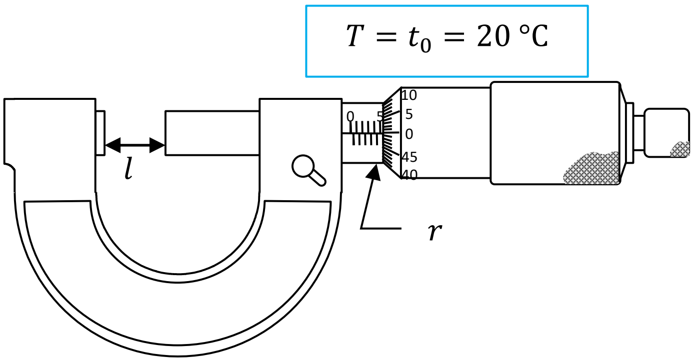
$$l_{s.t} = l_s(1 + \alpha_s\theta_s) \quad (6)$$

Karena $l_t = l_{s.t}$, maka

$$l_t = l_s(1 + \alpha_s\theta_s) \quad (7)$$

Di sini, l_t adalah panjang alat pada suhu t, $l_{s.t}$ adalah panjang standar pada suhu t, sedangkan θ_s adalah selisih antara suhu balok ukur t_s dan suhu standar t_0 yaitu 20 °C.

Kemudian balok ukur dilepas dan alat ukur dibiarkan tetap pada posisi penunjukan nilai r dan suhu kembali pada t_0 seperti ditunjukkan pada Gambar 7.



Gambar 7. Kondisi mikrometer saat balok ukur dilepas kembali pada suhu t_o.

Dengan memasukkan Persamaan (7) dan Persamaan (5), didapatkan:

$$\begin{aligned} l &= l_s(1 + \alpha_s\theta_s)(1 - \alpha\theta) \\ &= l_s(1 + \alpha_s\theta_s - \alpha\theta - \alpha_s\theta_s\alpha\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

Karena $\alpha_s\theta_s \ll 1$ dan $\alpha_t\theta_t \ll 1$, maka suku keempat dalam kurung pada Persamaan (8) dapat diabaikan ($\alpha_s\theta_s\alpha\theta \approx 0$), sehingga Persamaan (8) dapat ditulis sebagai:

$$l = l_s(1 + \alpha_s\theta_s - \alpha\theta)$$

$$l = l_s + l_s\,(\alpha_s\theta_s) - l_s(\alpha\theta)$$

$$l = l_s - l_s(\alpha\theta - \alpha_s\theta_s) \tag{9}$$

Persamaan ini dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} l_t &= l_s - l_s\left[\frac{2\alpha\theta - 2\alpha_s\theta_s}{2} + \frac{\alpha\theta_s - \alpha\theta_s + \alpha_s\theta - \alpha_s\theta}{2}\right] \\ &= l_s - l_s\left[\frac{\alpha\theta - \alpha\theta_s + \alpha_s\theta - \alpha_s\theta_s}{2} + \frac{\alpha\theta + \alpha\theta_s - \alpha_s\theta - \alpha_s\theta_s}{2}\right] \\ &= l_s - l_s\left[\frac{(\alpha + \alpha_s)(\theta - \theta_s)}{2} + \frac{(\alpha - \alpha_s)(\theta + \theta_s)}{2}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

KMT dan selisih suhu tiap-tiap benda dapat dinyatakan sebagai selisih dan rerata masing-masing, sebagai berikut:

$$\delta\alpha = \alpha - \alpha_s, \qquad \bar{\alpha} = \frac{\alpha + \alpha_s}{2} \tag{11}$$

$$\delta\theta = \theta - \theta_s, \qquad \bar{\theta} = \frac{\theta + \theta_s}{2} \tag{12}$$

Dengan substitusi tadi, Persamaan (10) dapat ditulis sebagai fungsi dari selisih dan rerata tadi:

$$l_t = l_s - l_s(\bar{\alpha} \cdot \delta\theta + \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) \tag{13}$$

Keuntungan menyatakan l_t sebagai fungsi dari $\delta\theta$ dan $\delta\alpha$ adalah: kedua besaran ini mempunyai nilai harapan 0 (berdasarkan asumsi yang dinyatakan di awal bahwa $\alpha \approx \alpha_s$ dan $\theta \approx \theta_s$). Artinya, suku di dalam kurung mempunyai nilai harapan 0 sehingga koefisien sensitivitas untuk l_s bernilai 1. Namun demikian, tidak ada asumsi yang 100% pasti, sehingga ketidakpastian $u(\delta\theta)$ dan $u(\delta\alpha)$ harus diperhitungkan.

$$l = l_s - l_s.\bar{\alpha}.\delta\theta - l_s.\bar{\theta}.\delta\alpha \tag{14}$$

$$u^2(l) = u^2(l_s) + u^2(l_s \cdot \bar{\alpha} \cdot \delta\theta) + u^2(l_s \cdot \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) \tag{15}$$

Catatan: pada suku terakhir dalam Persamaan (15) yaitu $l_s \cdot \bar{\theta} \cdot \delta\alpha$ terdapat perkalian antara satu besaran yang bernilai nol yaitu $\delta\alpha$, dan besaran lain yang juga mempunyai kemungkinan bernilai nol yaitu $\bar{\theta}$. Karena itu, evaluasi ketidakpastian harus diperhitungkan untuk orde yang lebih tinggi (lihat Lampiran A).

Oleh karena itu suku terakhir dalam Persamaan (15) yaitu $u(l_s \cdot \bar{\theta} \cdot \delta\alpha)$ diturunkan sebagai :

$$\begin{aligned} u^2(l_s \cdot \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) = {} & (\bar{\theta} \cdot \delta\alpha)^2 u^2(l_s) + (l_s \cdot \delta\alpha)^2 u^2(\bar{\theta}) + (l_s \cdot \bar{\theta})^2 u^2(\delta\alpha) \\ & + (\delta\alpha)^2 u^2(l_s) u^2(\bar{\theta}) + \bar{\theta}^2 u^2(l_s) u^2(\delta\alpha) + l_s^2 u^2(\bar{\theta}) u^2(\delta\alpha) \\ & + u^2(l_s) u^2(\bar{\theta}) u^2(\delta\alpha) \end{aligned} \tag{16}$$

Suku $u^2(l_s)u^2(\bar{\theta})u^2(\delta\alpha)$ dapat diabaikan karena merupakan orde ketiga, sedangkan suku yang mengandung faktor $\delta\alpha$ dapat dihilangkan karena $\delta\alpha = 0$, sehingga Persamaan (16) dapat disederhanakan:

$$u^2(l_s \cdot \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) = (l_s \cdot \bar{\theta})^2 u^2(\delta\alpha) + \bar{\theta}^2 u^2(l_s) u^2(\delta\alpha) + l_s^2 u^2(\bar{\theta}) u^2(\delta\alpha) \quad (17)$$

Lalu jika $\bar{\theta} = 0$ (artinya kedua benda bersuhu 20 °C), semua suku yang mengandung faktor $\bar{\theta}$ dapat dihilangkan, karena suku orde pertama semua bernilai nol; maka order kedua harus dimasukkan, sehingga menjadi:

$$u^2(l_s \cdot \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) = l_s^2 u^2(\bar{\theta}) u^2(\delta\alpha) \quad (18)$$

Sedangkan jika $\bar{\theta} \neq 0$ (artinya terdapat penyimpangan suhu dari 20 °C), semua suku orde kedua dapat diabaikan karena jauh lebih kecil daripada suku dengan orde pertama, sehingga persamaannya menjadi:

$$u^2(l_s \cdot \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) = (l_s \cdot \bar{\theta})^2 u^2(\delta\alpha) \quad (19)$$

Sehingga persamaan (15) menjadi :

$$u^2(l) = u^2(l_s) + (l_s \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + l_s^2 \cdot u^2(\bar{\theta}) \cdot u^2(\delta\alpha) \text{ , jika } \bar{\theta} = 0 \quad (20)$$

$$u^2(l) = u^2(l_s) + (l_s \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + l_s^2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot u^2(\delta\alpha) \text{ , jika } \bar{\theta} \neq 0 \quad (21)$$

6 Model matematis ketidakpastian pengukuran dimensional dengan faktor suhu dan koefisien muai termal

6. 1 Kasus kalibrasi alat ukur

Dalam kasus kalibrasi, measurand atau besaran yang diukur ditetapkan sebagai kesalahan penunjukan e pada suhu acuan t_0, yaitu selisih antara nilai penunjukan r dan panjang sebenarnya:

$$e = r - l \quad (22)$$

Substitusikan Persamaan (13) ke dalam (22), sehingga didapatkan model matematis dasar untuk kalibrasi dimensional dengan metode komparasi:

$$e = r - l_s + l_s(\bar{\alpha} \cdot \delta\theta + \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) \quad (23)$$

Dengan mempertimbangkan Persamaan (23), persamaan ketidakpastian pengukuran untuk model tadi dapat dituliskan sebagai:

$$u^2(e) = u^2(r) + u^2(l_s) + l_s^2 . \bar{\alpha}^2 . u^2(\delta\theta) + l_s^2 . u^2(\bar{\theta}) u^2(\delta\alpha) \quad (24)$$

Perhatikan: jika suhu rata-rata kedua objek mempunyai selisih signifikan terhadap 20 °C (artinya, nilai harapan $\bar{\theta} \neq 0$), maka persamaan ketidakpastian yang digunakan adalah:

$$u^2(e) = u^2(r) + u^2(l_s) + l_s^2 . \bar{\alpha}^2 . u^2(\delta\theta) + l_s^2 . \bar{\theta}^2 . u^2(\delta\alpha) \quad (25)$$

6. 2 Kasus pengukuran komparatif

Untuk pengukuran dengan metode komparasi yang *measurand*-nya adalah panjang artefak tes l pada saat $T = t_0$:

$$l = l_\mathrm{s} + l_\mathrm{d}$$

$$l_\mathrm{d} = x - x_\mathrm{s}$$

$$\therefore l = l_\mathrm{s} + (x - x_\mathrm{s})$$

pada saat $T = t$

$$l(1 + \alpha\theta) = l_\mathrm{s}(1 + \alpha_\mathrm{s}\theta_\mathrm{s}) + l_\mathrm{d}(1 + \alpha_\mathrm{p}\theta_\mathrm{p}) \quad , l_\mathrm{d}\alpha_\mathrm{p}\theta_\mathrm{p} \approx 0 \tag{26}$$

$$l = l_\mathrm{s}(1 + \alpha_\mathrm{s}\theta_\mathrm{s})(1 - \alpha\theta) + l_\mathrm{d}$$

$$= l_\mathrm{s} - l_\mathrm{s}(\bar{\alpha} \cdot \delta\theta + \bar{\theta} \cdot \delta\alpha) + l_\mathrm{d} \tag{27}$$

Pada kasus komparatif, persamaan ketidakpastian pengukuran menjadi :

$$u^2(l) = u^2(l_\mathrm{s}) + (l_\mathrm{s} \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + l_s^2 \cdot u^2(\bar{\theta})u^2(\delta\alpha) + u^2(l_\mathrm{d}) \text{ , Jika } \bar{\theta} = 0 \tag{28}$$

$$u^2(l) = u^2(l_\mathrm{s}) + (l_\mathrm{s} \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + l_s^2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot u^2(\delta\alpha) + u^2(l_\mathrm{d}) \text{ , Jika } \bar{\theta} \neq 0 \tag{29}$$

6. 3 Kasus pengukuran langsung (4.3)

Untuk pengukuran sebuah objek ukur yang dilakukan menggunakan sebuah alat ukur terkalibrasi dengan kesalahan penunjukan e (sebagaimana tercantum dalam sertifikat kalibrasinya), panjang l_x objek tersebut dapat ditentukan sebagai fungsi dari penunjukan r dan kesalahan penunjukan e.

Pada saat $T = t_0$, model matematisnya adalah $l = r - e$

Pada saat $T = t$, model matematisnya menjadi :

$$e = r - [l_\mathrm{x} - l_\mathrm{x}(\bar{\alpha} \cdot \delta\theta + \bar{\theta} \cdot \delta\alpha)]$$

$$l_\mathrm{x}(1 - [\bar{\alpha} \cdot \delta\theta + \bar{\theta} \cdot \delta\alpha]) = r - e$$

$$l_\mathrm{x} = (r - e)(1 + [\bar{\alpha} \cdot \delta\theta + \bar{\theta} \cdot \delta\alpha]) \tag{30}$$

$$u^2(l_\mathrm{x}) = u^2(r - e) + ([r - e] \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + [r - e]^2 \cdot u^2(\bar{\theta}).u^2(\delta\alpha), \text{ Jika } \bar{\theta} = 0 \tag{31}$$

$$u^2(l_\mathrm{x}) = u^2(r - e) + ([r - e] \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + [r - e]^2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot u^2(\delta\alpha), \text{ Jika } \bar{\theta} \neq 0 \tag{32}$$

dengan

$$u^2(r - e) = u^2(r) + u^2(e) \tag{33}$$

7 Sumber-sumber ketidakpastian pengukuran dimensional

Sumber-sumber ketidakpastian yang umum pada pengukuran dimensional dapat diuraikan seperti di bawah ini.

7. 1 Ketidakpastian nilai penunjukan

Pada Persamaan (24), (32), dan (33), nilai penunjukan alat ukur yang diwakili oleh variabel r merupakan gabungan antara variasi nilai pengukuran berulang $\bar{r}$ dan koreksi akibat pembulatan nilai penunjukan δr_{rd}:

$$r = \bar{r} + \delta r_{\mathrm{rd}} \tag{34}$$

Maka ketidakpastian nilai penunjukan dapat dituliskan sebagai

$$u^2(r) = u^2(\bar{r}) + u^2(\delta r_{\mathrm{rd}}) \tag{35}$$

Kedua komponen ketidakpastian di atas diuraikan sebagai berikut.

7.1.1 Variasi penunjukan pada pengukuran berulang

Variasi penunjukan pada pengukuran berulang umumnya dievaluasi sebagai sumber ketidakpastian Tipe A. Nilai ketidakpastian baku $u(\bar{r})$ dihitung sebagai nilai simpangan baku dibagi akar banyaknya pengukuran:

$$\begin{aligned} u(\bar{r}) &= \frac{s}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(r_i - \bar{r})^2}}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum (r_i - \bar{r})^2} \end{aligned} \tag{36}$$

Di sini, r_i mewakili nilai penunjukan ke-i (sebelum dikoreksi), $\bar{r}$ adalah rata-rata nilai penunjukan, n adalah banyaknya data penunjukan.

7.1.2 Ketidakpastian akibat pembulatan nilai penunjukan

Setiap alat ukur dengan penunjukan, baik penunjukan analog maupun digital, mempunyai keterbatasan dalam menampilkan nilai pengukuran. Perubahan terkecil yang dapat ditunjukkan oleh alat ukur disebut resolusi. Akibat keterbatasan resolusi, nilai penunjukan adalah hasil pembulatan dan belum tentu sama dengan nilai yang sebenarnya terukur oleh alat, sehingga perlu ada koreksi akibat pembulatan nilai penunjukan ini. Nilai koreksi mempunyai nilai harapan 0, sedangkan nilai ketidakpastiannya proporsional dengan resolusi alat.

Pada alat ukur dengan penunjukan digital, resolusi ditentukan oleh interval nilai yang ditunjukkan oleh digit terakhir. Nilai ini tidak bergantung kepada kemampuan operator. Maka resolusi alat δr_{res} sama dengan interval nilai yang ditampilkan oleh digit terakhir atau *least significant digit* (LSD).

Sebaliknya pada alat dengan penunjukan analog, resolusi ditentukan tidak saja oleh interval skala terkecil, namun juga kemampuan operator menafsirkan penunjukan tersebut. Maka pada alat dengan penunjukan analog, resolusi bisa sama dengan, atau lebih kecil daripada, interval skala terkecil δr_{int}:

$$\delta_{\text{res}} = k\delta_{\text{int}}, \qquad k \leq 1 \tag{37}$$

Koefisien k dapat bernilai 1, 0,5, 0,25, atau 0,2. Dalam beberapa kasus, bahkan dapat bernilai 0,1 , misalnya jika pembacaan skala dibantu dengan kaca pembesar.

Distribusi nilai ketidakpastian koreksi $u(\delta r_{\text{rd}})$ mempunyai rentang ± setengah dari resolusi alat. Untuk penunjukan digital, distribusi dari ketidakpastian ini dianggap persegi, sedangkan untuk penunjukan analog, distribusi ini bisa persegi atau segitiga. Maka ketidakpastian baku akibat pembulatan nilai penunjukan dapat dihitung dengan salah satu persamaan berikut:

$$u(\delta r_{\text{rd.digital}}) = \frac{\delta r_{\text{res}}}{2\sqrt{3}} \tag{38}$$

$$u(\delta r_{\text{rd.analog}}) = \frac{\delta r_{\text{res}}}{2\sqrt{3}} \quad \text{(distribusi persegi)} \tag{39}$$

$$u(\delta r_{\text{rd.analog}}) = \frac{\delta r_{\text{res}}}{2\sqrt{6}} \quad \text{(distribusi segitiga)} \tag{40}$$

7. 2 Ketidakpastian dalam nilai kalibrasi benda acuan

Benda acuan (alat ukur maupun standar kalibrasi) mempunyai nilai koreksi yang mengandung ketidakpastian pengukuran; nilai ini tertera pada sertifikat kalibrasinya. Ketidakpastian baku nilai koreksi ini adalah nilai ketidakpastian terentang U_{95} dibagi faktor cakupan (*coverage factor*) k:

$$u(l_{\text{s}}) = \frac{U_{95}}{k} \tag{41}$$

Jika tidak ada informasi tentang nilai faktor cakupan, dapat diasumsikan bahwa $k = 2$.

7.3 Ketidakpastian terkait koreksi pemuaian termal

Nilai koreksi pemuaian termal dipengaruhi oleh nilai selisih suhu dan selisih KMT, antara benda uji dan benda acuan, seperti diuraikan dalam Bagian 4.

7.3.1 Ketidakpastian selisih suhu antara benda uji dan benda acuan

Bilamana metode kalibrasi atau pengukuran mencakup langkah pengondisian kedua benda dalam suhu yang mendekati suhu standar, dapat diasumsikan bahwa selisih suhu $\delta\theta$ antara kedua benda itu mendekati nol. Maka besaran $\delta\theta$ mempunyai ketidakpastian dengan nilai harapan nol dengan rentang sebaran Δt dan jenis distribusi persegi.

$$u(\delta\theta) = \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} \tag{42}$$

Nilai Δt idealnya diestimasi dari selisih suhu aktual antara kedua benda, misalnya dengan cara mengukur suhu benda uji dan benda acuan menggunakan termometer kontak yang ditempelkan pada tiap-tiap benda.

7.3.2 Ketidakpastian nilai suhu rata-rata benda uji dan benda acuan

Jika suhu ruangan dikondisikan dengan baik, maka suhu rata-rata kedua benda dapat diasumsikan mendekati 20 °C. Maka besaran $\bar{\theta}$ mempunyai ketidakpastian dengan nilai harapan nol dengan rentang sebaran $\Delta\theta$ dan jenis distribusi persegi.

$$u(\bar{\theta}) = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{3}} \quad (43)$$

Nilai $\Delta\bar{\theta}$ idealnya diestimasi penyimpangan terbesar terhadap 20 °C yang diamati di lokasi pengukuran.

7.3.3 Ketidakpastian selisih koefisien muai termal antara benda uji dan benda acuan

Jika kedua benda dibuat dari material yang mirip, maka nilai KMT keduanya akan sama. Jika masing-masing mempunyai ketidakpastian sebesar $\Delta\alpha$ dengan sebaran persegi, maka selisih nilai KMT akan mempunyai nilai harapan nol dengan rentang sebaran $2\Delta\alpha$ dan jenis distribusi segitiga.

$$u(\delta\alpha) = \frac{2\Delta\alpha}{\sqrt{6}} \quad (44)$$

8 *Budget* ketidakpastian

Model matematis, persamaan ketidakpastian, dan bujet harus menggunakan simbol dan uraian yang sama untuk setiap besaran/sumber ketidakpastian.

Model Matematis :

$$u^2(e) = u^2(r) + u^2(l_s) + (l_s \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + l_s^2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot u^2(\delta\alpha) \quad (45)$$

Dari persamaan (45) model matematis ketidakpastian pengukuran, dapat disusun bujet ketidakpastian seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Contoh *budget* ketidakpastian

Besaran X_i	Simbol	x_i	$u(x_i)$	satuan	c_i	satuan	$u_i = c_i \cdot u(x_i)$	ν_i	$\frac{u_i^4}{\nu_i}$
Variasi penunjukan	u (r_{rp})	25.001	0.00027	mm	1	1	0.000269	9	5.786E-16
Pembulatan penunjukan	u (r_{rd})		0.00029	mm	1	1	0.000289	1.E+999	6.94E-114
Koreksi panjang standar	u (l_s)		0.00750	µm	0.001	mm/ µm	0.000008	60	5.27E-23
Beda suhu kedua objek	u ($\delta\theta$)		0.11547	°C	0.0002875	mm/°C	3.3198E-05	100	1.215E-20
Penyimpangan suhu dari 20 °C	u (θ)	0.5		°C					
Beda koefisien kedua objek	u ($\delta\alpha$)		0.0000	/°C	12.5003	mm. °C	1.021E-05	100	1.085E-22
Koefisien muai rata-rata	u (α)	1.15 E-05		/°C					
						u_c	0.000396	v_{eff}	40,243
						k	2.018		
						U	0.00080	mm	

Satuan sebaiknya dituliskan untuk $u(x_i)$ dan c_i

9 Evaluasi sumber ketidakpastian pengukuran

Dari persamaan model matematis pengukuran (45), sumber-sumber ketidakpastian pengukuran untuk masing-masing besaran pada Tabel 1 dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$u^2(e) = u^2(r) + u^2(l_s) + (l_s \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + l_s^2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot u^2(\delta\alpha)$$

Tabel 2. Evaluasi sumber ketidakpastian pengukuran

Besaran	Evaluasi ketidakpastian	Keterangan
$u^2(r)$	Sumber ketidakpastian pengukuran yang berasal dari pembacaan penunjukan alat ukur. Sumber ketidakpastian ini berasal dari: $u^2(r) = u^2(r_{rd}) + u^2(r_{rp})$ $u(r_{rd}) =$ ketidakpastian pembulatan akibat resolusi $u(r_{rp}) =$ ketidakpastian sebaran nilai pengukuran berulang	$u\,(r_{rd}) = \frac{\Delta l_{rd}}{2\sqrt{3}}$ Δl_{rd} = resolusi alat $u\,(r_{rp})$ berasal dari: $u\,(r_{rp}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$ atau $u\,(r_{rp}) = \frac{s_n}{\sqrt{n}}$ $s =$ simpangan baku pengukuran berulang s_p = pooled standards deviation $n =$ jumlah pengulangan pengukuran yang diobservasi pada satu kondisi yang sama
$u^2(l_s)$	Ketidakpastian dari standar kalibrasi. $u(l_s) = \frac{U}{k}$	$U =$ ketidakpastian terentang dari sertifikat kalibrasi $k =$ faktor cakupan dari sertifikat kalibrasi

Besaran	Evaluasi ketidakpastian	Keterangan
$u^2(\theta)$	Sumber ketidakpastian suhu ini berasal dari: $u^2(\theta) = u^2(\delta T_{\text{rd}}) + u^2(\delta T_{\text{fl}}) + u^2(\delta T_{\text{cal}})$ $u(\delta T_{\text{rd}})$ = ketidakpastian dari thermometer u(δT_{fl}) = ketidakpastian dari fluktuasi suhu $u(\delta T_{\text{cal}})$ = Ketidakpastian dari kalibrasi termometer	$(\delta T_{\text{rd}}) = \dfrac{\Delta T_{\text{rd}}}{2\sqrt{3}}$ $(\delta T_{\text{fl}}) = \dfrac{\Delta T_{\text{fl}}}{2\sqrt{3}}$ $(\delta T_{\text{cal}}) = \dfrac{U_{\text{cal}}}{k}$ $\Delta T_{\text{rd}} =$ resolusi termometer $\Delta T_{\text{fl}} =$ rentang fluktuasi suhu selama pengukuran berlangsung $U_{\text{cal}} =$ ketidakpastian terentang termometer dari sertifikat kalibrasi thermometer $k =$ faktor cakupan dari sertifikat kalibrasi termometer
$u^2(\delta\theta)$	Ketidakpastian dari perbedaan suhu antara benda uji (UUT) dan benda acuan (standar). Dikondisikan cukup lama sehingga mempunyai suhu yang sama, sehingga perbedaan suhunya mendekat nol. $(\delta\theta) = 0\,^oC$ $u(\delta\theta) = \dfrac{\Delta\theta}{\sqrt{3}}$	$\Delta\theta =$ selisih suhu maksimum antara benda uji dan benda acuan
$u^2(\delta\alpha)$	Ketidakpastian pengukuran karena perbedaan koefisien muai termal. $u(\delta\alpha) = \dfrac{\Delta\alpha}{\sqrt{6}}$	$\Delta\alpha$ = selisih koefisien muai termal antara benda uji dan benda acuan

Persamaan (45) dapat dikembangkan sesuai dengan model pengukuran yang dilakukan, jika masih terdapat sumber ketidakpastian lainnya.

Misalnya, dalam hal kalibrasi menggunakan komparator, bersamaan (29) dapat dikembangkan menjadi :

$$u^2(e) = u^2(l) + u^2(l_s \cdot \bar{\alpha})^2 \cdot u^2(\delta\theta) + l_s^2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot u^2(\delta\alpha) + u^2(l_d) \qquad (46)$$

Dengan demikian, pada tabel 1 dan tabel 2 perlu ditambahkan satu sumber ketidakpastian lagi yaitu $u^2(l_d)$.

Tabel 3. Evaluasi sumber ketidakpastian pengukuran (l_d)

Besaran	Evaluasi ketidakpastian	Keterangan
$u^2(l_\mathrm{d})$	Ketidakpastian pengukuran dari komparator : $$u^2(l_\mathrm{d}) = u^2(l_\mathrm{d.rd}) + u^2\left(l_\mathrm{d.rp}\right) + u^2(l_\mathrm{d.ln})$$ dengan : $u(l_\mathrm{d.rd})$ =ketidakpastian pengukuran dari resolusi komparator, menggunakan distribusi segitiga karena (l_d) adalah selisih dari dua kali pembacaan. $u(l_\mathrm{d.rd}) =$ ketidakpastian sebaran nilai pengukuran berulang. $u(l_\mathrm{d.ln}) =$ Ketidakpastian pengukuran dari linearitas komparator, dari sertifikat kalibrasi komparator.	$u(l_\mathrm{d.rd}) = \frac{\Delta l_\mathrm{d.rd}}{2\sqrt{6}}$ $u\left(l_\mathrm{d.rp}\right) = \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$ $u(l_\mathrm{d.ln}) = \frac{\Delta l_\mathrm{d.ln}}{\sqrt{3}}$

Lampiran A

(informatif)

Sumber-sumber ketidakpastian

A. Ketidakpastian dari sumber-sumber lain pada pengukuran atau kalibrasi dimensi

Di luar dari besaran-besaran berpengaruh yang telah dicantumkan dalam Persamaan (24), (32), dan (33), untuk suatu jenis pengukuran atau kalibrasi tertentu mungkin masih ada besaran berpengaruh lainnya yang perlu ditambahkan ke dalam model matematis dan dievaluasi ketidakpastiannya. Sumber-sumber ketidakpastian tersebut bisa terkait dengan sifat benda yang diukur, atau cara kerja alatnya. Sebaliknya, beberapa sumber ketidakpastian yang tercakup dalam model matematis yang diuraikan di sini bisa saja diabaikan jika terbukti tidak berkontribusi signifikan terhadap ketidakpastian total.

Beberapa sumber ketidakpastian dimensi lain yang khas, di antaranya:

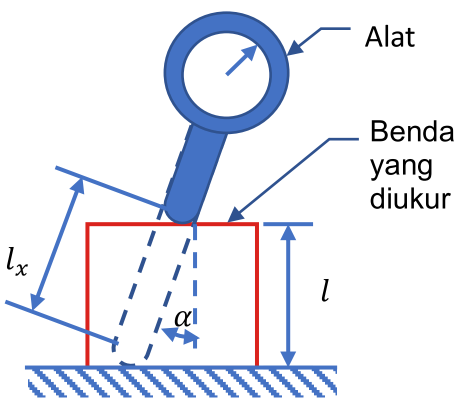
- Koreksi geometris (akibat ketidaksempurnaan bentuk objek)
- Kesalahan cosinus (contoh: kalibrasi *dial gauge*)
- Koreksi deformasi oleh ujung *probe* (contoh: kalibrasi *gauge block*)
- *Drift* alat ukur/standar ukur (baik jangka pendek, menengah, panjang)

Sumber ketidakpastian lain-lain bisa ditambahkan ke dalam model matematis sebagai suku tambahan.

Di bawah ini diuraikan dua contoh penurunan model matematis untuk sistem pengukuran atau sumber ketidakpastian tertentu.

A.1 Sumber kesalahan cosinus

Kesalahan cosinus $e_{\cos}$: kesalahan pengukuran karena sumbu ukur membentuk sudut α terhadap sumbu acuan



Gambar A.1. Kesalahan cosinus

$$l = l_x \cos\alpha$$

l = panjang sesungguhnya

l_x = panjang yang terukur

$$e_{\cos} = l_x - l$$
$$= l_x(1 - \cos\alpha)$$

Jika penyimpangan sudut diestimasi sebesar $0 \pm \alpha$, maka ketidakpastian akibat kesalahan cosinus dapat disederhanakan:

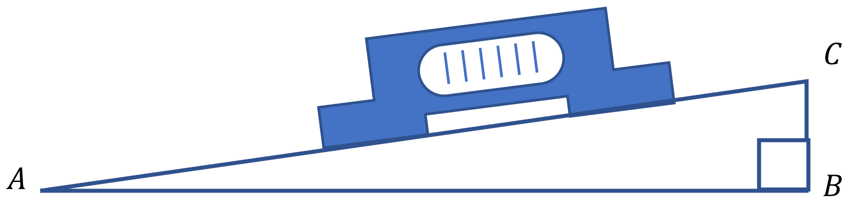
$$u(\delta l_{\cos}) = \frac{e_{\cos}}{\sqrt{3}} = \frac{l_x(1 - \cos\alpha)}{\sqrt{3}}$$

A.2. Sumber kesalahan gradien dan sudut

Alat ukur kemiringan (*level*) dikalibrasi dengan membandingkan penunjukan g terhadap sudut segitiga ABC yang terbentuk oleh meja ungkit (*tilting table*) dan dial gauge.

Panjang l_{AC} = panjang meja ungkit dan panjang l_{BC} diukur dengan dial gauge.

Measurand: kesalahan penunjukan alat e



Gambar A.2. Kesalahan gradien dan sudut

Jika penunjukan g dalam satuan mm/m atau μm/m:

$$e = g - \frac{l_{\mathrm{BC}}}{l_{\mathrm{AB}}}$$

Jika penunjukan g dalam satuan derajat:

$$e = g - \tan^{-1}\frac{l_{\mathrm{BC}}}{l_{\mathrm{AB}}}$$

Jika $l_{\mathrm{BC}} \ll l_{\mathrm{AC}}$, maka $l_{\mathrm{AB}} \approx l_{\mathrm{AC}}$

B. Orde tinggi

Jika pada model matematis ketidakpastian pengukuran terdapat perkalian antara dua variabel yang masing-masing mempunyai nilai harapan nol, maka ketidakpastian harus diperhitungkan untuk orde yang lebih tinggi.

Persamaan ketidakpastian dengan orde kedua diperlihatkan sebagai berikut:

$u^2(a \cdot b) = b^2 \cdot u^2(a) + a^2 \cdot u^2(b) + u^2(a)u^2(b)$

Jika $a \neq 0$ dan/atau $b \neq 0$, maka $u^2(a)u^2(b)$ menjadi tidak signifikan.

Namun jika $a = 0$ **dan** $b = 0$, maka $u^2(a)u^2(b)$ menjadi signifikan.

Persamaan ketidakpastian dengan orde ketiga:

$$u^2(a \cdot b \cdot c) = b^2c^2 \cdot u^2(a) + a^2c^2 \cdot u^2(b) + a^2b^2 \cdot u^2(c) + c^2 \cdot u^2(a)u^2(b) + b^2 \cdot u^2(a)u^2(c) + a^2 \cdot u^2(b)u^2(c) + u^2(a)u^2(b)u^2(c)$$

Jika orde yang lebih rendah semuanya bernilai nol, maka orde yang setingkat lebih tinggi harus diperhitungkan.

Bibliografi

ISO 1:2016, *Geometrical Product Specifications (GPS) – Standard Reference Temperature for The Specification of Geometrical and Dimensional Properties*.

JCGM 100:2008, *Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement*.

EA-4/02 M:2013, *Evaluation of the Uncertainty of Measurement in Calibration*.

BADAN STANDARDISASI NASIONAL

Diterbitkan oleh :
LABORATORIUM STANDAR NASIONAL SATUAN UKURAN BSN
Kompleks Puspiptek, Gedung 420, Setu,
Tangerang Selatan 15314 - Banten Indonesia
Telp. 021- 7560533, 7560534, 7560571
Fax. 021-7560568, 7560064
www.bsn.go.id