Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатика и системы управления

КАФЕДРА Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

О т ч е т

по лабораторной работе № 2

По курсу «Математическая статистика»

Тема: «Интервальные оценки»

Выполнила: Овчинникова А.П.

Группа: ИУ7-65Б

Вариант: 15

Преподаватель: Власов П. А.

Москва, 2020

Оглавление

1. Постановка задачи

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:
   a. вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   b. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   c. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
   a. на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от1 до N;
   b. на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2. Теоретическая часть

2. 1. Определения

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma.$$

Другими словами, γ-доверительная интервальная оценка для параметра θ — такой интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}),\ \overline{\theta}(\vec{X}))$ со случайными границами, который накрывает теоретическое (то есть” истинное”) значение этого параметра с вероятностью γ. Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}),\ \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $(\underline{\theta}(\vec{X}),\ \overline{\theta}(\vec{X}))$.

2. 2. Формулы

Общий вид закона распр. ген. сов. X	Параметры	Центральная статистика и ее закон распределения	Границы
$N(\mu, \sigma^2)$	μ – неизв., σ – изв. Оценить μ.	$\frac{\mu - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$	$\underline{\mu} = \overline{X} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu} = \overline{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}$
	μ – неизв., σ – неизв. Оценить μ.	$\frac{\mu - \overline{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1)$	$\underline{\mu} = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu} = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}$

	μ – неизв., σ – неизв. Оценить σ.	$\frac{S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}(n-1)\sim\chi^2(n-1)$	$\underline{\sigma} = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{1-\alpha_2}}$ $\overline{\sigma} = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\alpha_2}}$
	μ – изв., σ – неизв. Оценить σ.		

где $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$;

u_α — квантиль уровня α нормального распределения;

t_α — квантиль уровня α распределения Стьюдента с n-1 степенью свободы;

h_α — квантиль уровня α распределения χ^2 с n-1 степенью свободы.

3. Текст программы

```
function lab2()
    X = [-2.79,-3.01,-4.07,-2.85,-2.43, -3.20,-3.72,-4.27,-5.48,-2.38, -4.69, ...
        -4.34,-5.08,-5.01,-4.08, -4.20,-4.74,-1.88,-3.25,-2.78, -3.56,-3.54, ...
        -3.79,-3.18,-5.08,-4.30,-2.86,-2.45,-3.08,-3.22,-2.76,-3.20,-3.33, ...
        -4.91,-4.06,-3.81,-3.96,-3.65,-3.77,-4.60,-5.21,-2.67,-1.95,-2.43, ...
        -1.73,-2.50,-3.96,-3.75,-2.70,-4.26,-3.42,-4.07,-4.74,-3.00,-4.37, ...
        -5.42,-5.00,-4.08,-2.46,-4.33,-4.08,-3.72,-4.09,-2.96,-3.71,-1.51, ...
        -3.70,-6.48,-4.26,-4.39,-3.16,-4.63,-2.66,-2.22,-4.79,-2.46,-3.69, ...
        -3.35,-2.32,-4.17,-3.85,-4.93,-2.05,-3.15,-3.49,-5.70,-2.53,-3.85, ...
         -4.32,-3.37,-3.98,-3.74,-5.28,-2.56,-3.21,-3.10,-3.78,-3.36,-3.32, ...
         -2.59,-2.45,-3.34,-3.20,-4.14,-4.00,-4.79,-4.02,-4.58,-4.45,-3.69, ...
         -4.53,-3.98,-4.51,-4.44,-3.78,-4.24,-4.00,-2.46,-2.58,-4.04];

    N = length(X);

    mu = sExpectation(X);
    fprintf('mu = %.6f\n', mu);

```

```
    s_2 = correctedSampleVariance(X);
    fprintf('s_2 = %.6f\n', s_2);

    gamma = 0.9;
    alpha = (1.0 - gamma) / 2.0;
    fprintf('gamma = %.2f, apha = %.6f, N = %d\n', gamma, alpha, N);

    [lmu, umu] = getMXBorders(gamma, s_2, mu, N);
    fprintf('Нижняя гамма-доверительная граница для мат. ож.(x_N) = %.6f\n', lmu);
    fprintf('Верхняя гамма-доверительная граница для мат. ож.(x_N) = %.6f\n', umu);

    [ls, hs] = getDXBorders(gamma, s_2, N);
    fprintf('Нижняя гамма-доверительная граница для дисперсии (x_N) = %.6f\n', ls);
    fprintf('Верхняя гамма-доверительная граница для дисперсии (x_N) = %.6f\n', hs);

    figure(1);
    grid on;
    hold on;
    xlabel('n');
    ylabel('\mu');
    graphMX(X, N, gamma);

    figure(2);
    grid on;
    hold on;
    xlabel('n');
    ylabel('\sigma');
    graphDX(X, N, gamma);
end

function graphDX(X, n, gamma)
    s2s = zeros(n, 1);
    lowerSigma = zeros(n, 1);
    upperSigma = zeros(n, 1);

    for i = 1:n
        currentSample = X(1:i);
        [s2s(i)] = correctedSampleVariance(currentSample);
        [lowerSigma(i), upperSigma(i)] = getDXBorders(gamma, s2s(i), i);
    end

    plot([1, n], [s2s(n), s2s(n)], 'g');
```

```
    plot(lowerSigma, 'b');
    plot(upperSigma, 'r');
    plot(s2s, 'k');
    legend('S^2(x_N)', '_{--}\sigma^2(x_n)', '^{--}\sigma^2(x_n)', 'S^2(x_n)');
end

function [ls, hs] = getDXBorders(gamma, s_2, n)
    % неизвестны матожидание и дисперсия, оцениваем дисперсию;
    % статистика ~chi2(n-1)

    alpha1 = (1 + gamma) / 2;
    alpha2 = (1 - gamma) / 2;

    quantile1 = chi2inv(alpha1, n - 1);
    quantile2 = chi2inv(alpha2, n - 1);

    ls = ((n - 1) * s_2) / quantile1;
    hs = ((n - 1) * s_2) / quantile2;
end

function graphMX(X, n, gamma)
    mus = zeros(n, 1);
    s2s = zeros(n, 1);
    lowerMus = zeros(n, 1);
    upperMus = zeros(n, 1);

    for i = 1:n
        currentSample = X(1:i);
        [mus(i)] = sExpectation(currentSample);
        [s2s(i)] = correctedSampleVariance(currentSample);
        [lowerMus(i), upperMus(i)] = getMXBorders(gamma, s2s(i), mus(i), i);
    end
    plot([1, n], [mus(n), mus(n)], 'g');
    plot(lowerMus, 'b');
    plot(upperMus, 'r');
    plot(mus, 'k');
    legend('\mu\^(x_N)', '_{--}\mu^(x_n)', '^{--}\mu^(x_n)', '\mu\^(x_n)');
end

function [lm, hm] = getMXBorders(gamma, s_2, mu, n)
    % неизвестны мат. ожидание и дисперсия, оцениваем матожидание;
    % статистика ~St(n-1)
    alpha = (1.0 + gamma) / 2.0; % alpha1 = alpha2
```

```

    quantile = tinv(alpha, n - 1); % расчет значений квантили распр-я Стьюдента
                                   % для значений вероятности alpha и степени свободы n - 1.
    border = (sqrt(s_2) * quantile) / sqrt(n);

    lm = mu - border;
    hm = mu + border;
end

function s_2 = correctedSampleVariance(X)
    s_2 = var(X); % исправленная выборочная дисперсия
end

function mu = sExpectation(X)
    mu = mean(X); % mean возвращает арифметическое среднее значение элементов массива
                  % выборочное мат. ожидание
end
```

4. Полученные результаты

$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -3.676167$

$S^2(\vec{x}_n) = 0.866410$

$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -3.817028$

$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = -3.535305$

$\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n) = 0.708802$

$\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n) = 1.087454$

На координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от1 до N (рисунок 1).

На другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (рисунок 2).

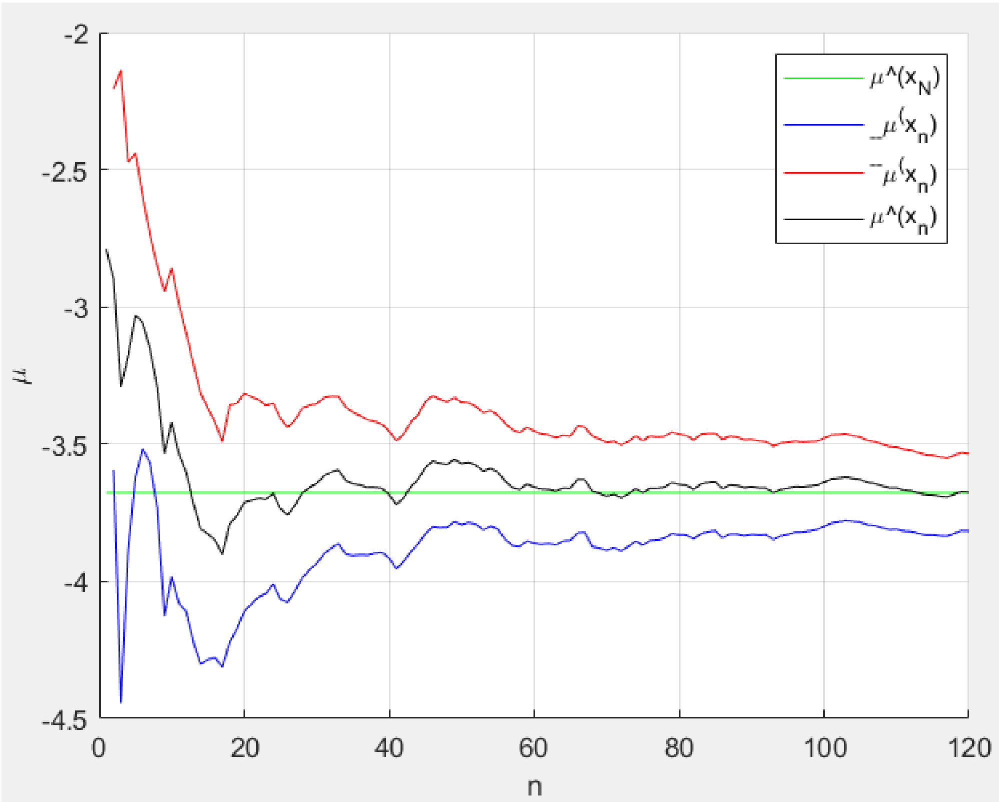

Рисунок 1. $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ (зеленый), $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$ (черный), $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ (синий) и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ (красный).

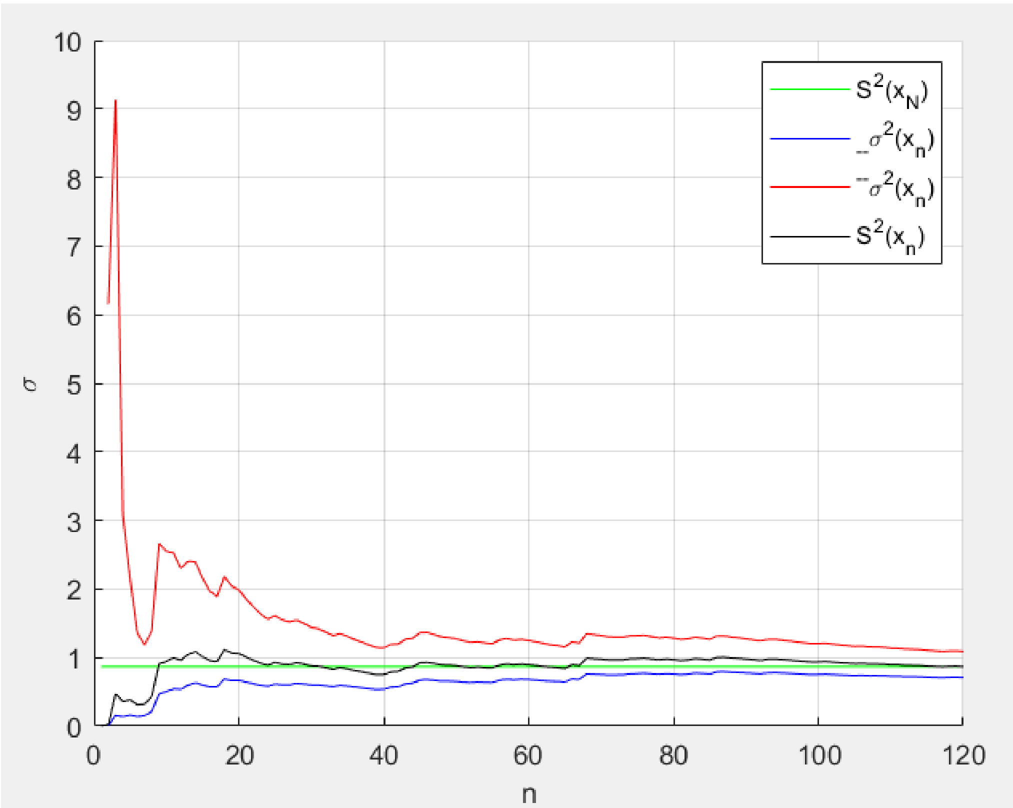

Рисунок 2. $z = S^2(\vec{x}_N)$ (зеленый), функций $z = S^2(\vec{x}_n)$ (черный), $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ (синий) и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ (красный).