Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2

По предмету: «Математическая статистика»

Тема: Интервальные оценки

Вариант 25

Студент: Юмаев Артур Русланович
Группа: ИУ7-65Б

Москва, 2020 г.

Оглавление

Цель и содержание работы 3

1. Определение γ – доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины 4

2. Формулы для вычисления γ – доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайно величины 4

2.1 Доверительная оценка для математического ожидания при неизвестной дисперсии 5

2.2 Доверительная оценка для дисперсии при неизвестном математическом ожидании 5

3. Текст программы 6

4. Результат работы программы и графики 8

Цель и содержание работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
    a. вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\overrightarrow{X_n})$ и $S^2(\overrightarrow{X_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
    b. вычисление нижней и верхней границ $\bar{\mu}(\overrightarrow{X_n})$, $\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n})$ для γ – доверительного интервала для математического ожидания MX;
    c. вычисление нижней и верхней границ $\bar{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n})$, $\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n})$ для γ – доверительного интервала для математического ожидания DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
    a. на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, $y = \bar{\mu}(\overrightarrow{x_N})$ и $y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x_N})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.
    b. на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\overrightarrow{x_n})$, $z = \bar{\sigma}^2(\overrightarrow{x_N})$ и $z = \underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_N})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1. Определение γ – доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть $\overrightarrow{X_n}$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(x;\,\theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, что для параметра θ построен интервал границ $\left(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \bar{\theta}(\overrightarrow{X_n})\right)$, где $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\bar{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ являются функциями случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, такими, что выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) < \theta < \bar{\theta}(\overrightarrow{X_n})\} = \gamma.$$

В этом случае интервал $\left(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \bar{\theta}(\overrightarrow{X_n})\right)$ называют ***интервальной оценкой*** для параметра θ с коэффициентом доверия γ. А $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\bar{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ соответственно ***нижней*** и ***верхней границами*** интервальной оценки.

Вероятностной характеристикой точности оценивания параметра θ является случайная величина

$$l(\overrightarrow{X_n}) = \underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) - \bar{\theta}(\overrightarrow{X_n}),$$

которая для любой реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ есть длина интервала $\left(\underline{\theta}(\overrightarrow{x_n}), \bar{\theta}(\overrightarrow{x_n})\right)$. Интервал $\left(\underline{\theta}(\overrightarrow{x_n}), \bar{\theta}(\overrightarrow{x_n})\right)$ называют ***доверительным интервалом*** для параметра θ с коэффициентом доверия γ или γ − ***доверительным интервалом***.

2. Формулы для вычисления γ – доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайно величины

Оценка математического ожидания:

$$\hat{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Несмещенная оценка дисперсии:

$$S^2(\overrightarrow{X_n}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Пусть $\overrightarrow{X_n}$ – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

2.1 Доверительная оценка для математического ожидания при неизвестной дисперсии

При неизвестной дисперсии σ^2 статистика

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n}$$

имеет *распределение Стьюдента* с $n-1$ степенями свободы, поэтому

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \bar{X} - \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-a}(n-1)$$

$$\bar{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \bar{X} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-a}(n-1)$$

где n – объем выборки, $t_q(n-1)$ – квантиль уровня q *распределения Стьюдента* с $n-1$ степенями свободы, $1-a=\frac{1}{2}(1+\gamma)$.

2.2 Доверительная оценка для дисперсии при неизвестном математическом ожидании

Статистика

$$\frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X_n})}{\sigma^2}$$

имеет χ^2 – распределение с $n-1$ степенями свободы. Поэтому

$$\underline{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X_n})}{\chi^2_{1-a}(n-1)}$$

$$\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X_n})}{\chi^2_a(n-1)}$$

где $\chi^2_q(n-1)$ – квантиль уровня q χ^2 – распределения с $n-1$ степенями свободы, $1-a=\frac{1}{2}(1+\gamma)$, $a=\frac{1}{2}(1-\gamma)$.

3. Текст программы

Листинг 1. Программа на Matlab к лабораторной работе №2

```
function lab2
    clear
    X = [-17.04,-18.29,-17.38,-18.11,-18.96,-17.65,-17.02,-17.22,-16.25,-17.44,-17.69,-
17.61,-17.09,-17.19,-16.02,-17.56,-16.94,-17.29,-16.93,-16.61,-19.38,-17.53,-16.39,-
17.89,-17.98,-17.04,-16.22,-19.09,-18.91,-17.77,-18.30,-17.44,-18.84,-16.39,-16.13,-
18.37,-16.37,-16.70,-17.78,-17.03,-17.76,-17.87,-17.20,-18.44,-17.19,-17.75,-16.81,-
17.97,-18.03,-16.87,-16.10,-19.16,-16.51,-18.39,-16.48,-18.08,-17.49,-18.89,-19.09,-
17.96,-18.40,-16.96,-18.15,-18.71,-17.81,-17.86,-19.47,-17.86,-17.60,-17.30,-17.60,-
17.71,-18.42,-16.88,-16.76,-18.00,-17.97,-16.83,-18.00,-18.08,-17.61,-17.02,-16.73,-
17.64,-18.76,-17.68,-18.04,-16.45,-18.79,-18.03,-17.38,-15.27,-15.97,-17.41,-18.61,-
18.00,-17.42,-17.77,-19.05,-16.16,-16.27,-18.00,-18.90,-17.05,-17.46,-17.49,-18.20,-
17.59,-15.78,-18.88,-18.53,-17.39,-17.83,-18.17,-16.15,-17.66,-17.76,-18.32,-17.70,-
17.56];
    N = length(X);
    gamma = 0.9;
    alpha = (1 - gamma)/2;
    mu = findMu(X);
    S2 = findS2(X);
    muArray = getMuArray(X, N);
    varArray = getVarArray(X, N);

    muHigh = findMuHigh(muArray, varArray, alpha, N);
    muLow = findMuLow(muArray, varArray, alpha, N);

    sigma2High = getsigma2High(varArray, alpha, N);
    sigma2Low = getsigma2Low(varArray, alpha, N);

    figure
    hold on;
    plot([1,N], [mu, mu], 'g');
    plot((1:N), muArray, 'r');
    plot((1:N), muLow, 'b');
    plot((1:N), muHigh, 'm');
    legend('mu(x_N)','mu(x_n)','muLow(x_n)','muHigh(x_n)');
    grid on;
    hold off;

    figure
    hold on;
    plot([1,N], [S2, S2], 'g');
    plot((1:N), varArray, 'r');
    plot((1:N), sigma2Low, 'b');
    plot((4:N), sigma2High(4:length(sigma2High)), 'm');
    legend('S^2(x_N)','S^2(x_n)','(sigma^2)Low(x_n)','(sigma^2)High(x_n)');
    grid on;
    hold off;

    N = size(X,2);
    muArray = getMuArray(X, N);
    varArray = getVarArray(X, N);
    muHigh = findMuHigh(muArray, varArray, alpha, N);
    muLow = findMuLow(muArray, varArray, alpha, N);
    sigma2High = getsigma2High(varArray, alpha, N);
    sigma2Low = getsigma2Low(varArray, alpha, N);

    fprintf('mu = %.2f\n', mu);
    fprintf('S^2 = %.2f\n', S2);
```

```
    fprintf('mu_low = %.2f\n', muLow(end));
    fprintf('mu_high = %.2f\n', muHigh(end));
    fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', sigma2Low(end));
    fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', sigma2High(end));

    function mu = findMu(X)
        mu = sum(X)/size(X,2);
    end

    function sigma = getSigmaSqr(X)
        tempMu = findMu(X);
        sigma = sum((X - tempMu) .* (X - tempMu))/size(X,2);
    end

    function S2 = findS2(X)
        n = size(X,2);
        S2 = n/ (n - 1) * getSigmaSqr(X);
    end

    function muArray = getMuArray(X, N)
        muArray = zeros(1,N);
        for i = 1:N
            muArray(i) = findMu(X(1:i));
        end
    end

    function varArray = getVarArray(X, N)
        varArray = zeros(1,N);
        for i = 1:N
            varArray(i) = findS2(X(1:i));
        end
    end

    function muHigh = findMuHigh(muArray, varArray, alpha, N)
        muHigh = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            muHigh(i) = muArray(i) + sqrt(varArray(i)./ i) .* tinv(1 - alpha, i - 1);
        end
    end

    function muLow = findMuLow(muArray, varArray, alpha, N)
        muLow = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            muLow(i) = muArray(i) + sqrt(varArray(i)./ i) .* tinv(alpha, i - 1);
        end
    end

    function sigma2High = getsigma2High(varArray, alpha, N)
        sigma2High = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            sigma2High(i) = varArray(i) .* (i - 1) ./ chi2inv(alpha, i - 1);
        end
    end

    function sigma2Low = getsigma2Low(varArray, alpha, N)
        sigma2Low = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            sigma2Low(i) = varArray(i) .* (i - 1) ./ chi2inv(1 - alpha, i - 1);
        end
    end
end
```

4. Результат работы программы и графики

$\hat{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = -17.59$

$\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = -17.72$

$\overline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = -17.46$

$S^2(\overrightarrow{X_n}) = 0.73$

$\underline{\sigma^2}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = 0.60$

$\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = 0.91$

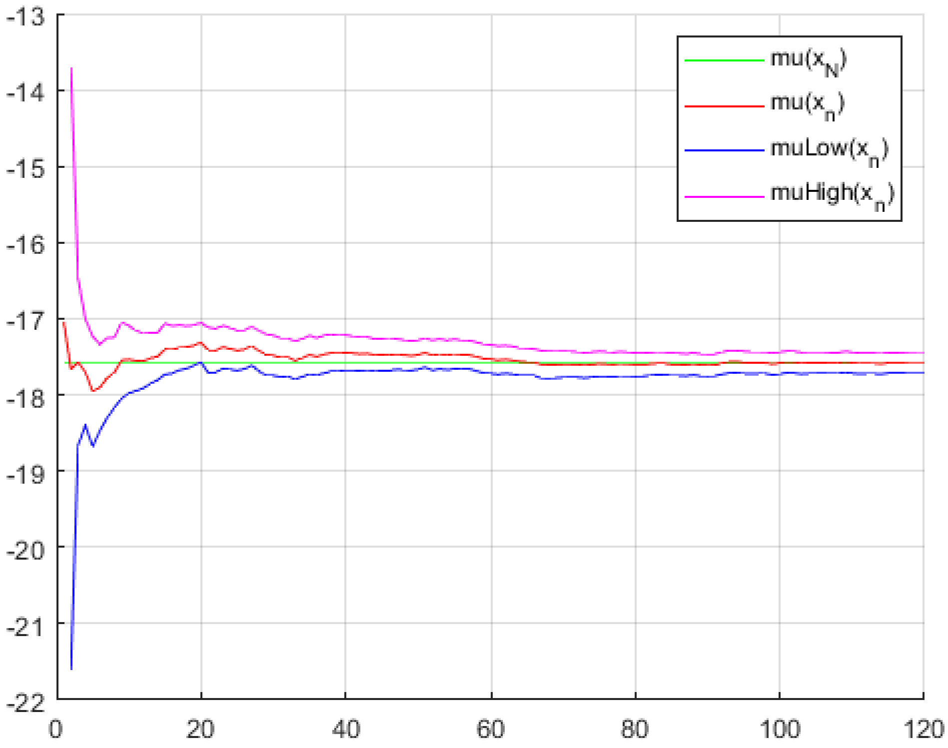

Рисунок 1. Оценка для математического ожидания

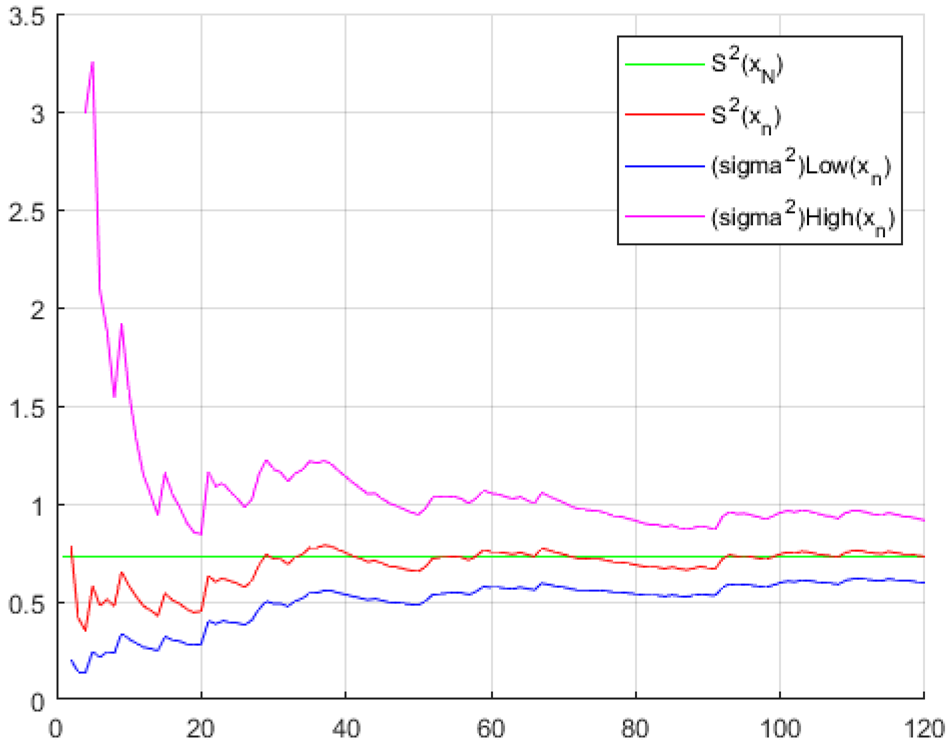

Рисунок 2. Оценка для дисперсии