**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана**
**(национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Информатика и системы управления

КАФЕДРА Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

# *Лабораторная работа №2*

## *По предмету: «Математическая статистика»*

# **Тема: Интервальные оценки**

Студент:
Коротков Андрей Владимирович
Группа: ИУ7-65Б
Вариант: 8

Преподаватели:
Власов Павел Александрович
Волков Игорь Куприянович

Москва, 2020 г.

**Введение** **3**

**1. Теоретическая часть** **4**

1.1 Определение -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины ....................................................4

1.2 Формулы для вычисления величин ..................................................4

1.3 Формулы для вычисления границ -доверительного интервала ......5

**2. Практическая часть** **7**

2.1 Листинг программы .........................................................................7

2.2 Результат работы программы ...........................................................9

2.3 Графики ............................................................................................10

# Введение

**Цель работы:** построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

**Содержание работы:**

1. Для выборки объема $n$ из нормальной генеральной совокупности $X$ реализовать в виде программы на ЭВМ
   a. вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\overrightarrow{X_n})$ и $S^2(\overrightarrow{X_n})$ математического ожидания $MX$ и дисперсии $DX$ соответственно;
   b. вычисление нижней и верхней границ $\overline{\mu}(\overrightarrow{X_n})$, $\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n})$ для $\gamma$-доверительного интервала для математического ожидания $MX$;
   c. вычисление нижней и верхней границ $\overline{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n})$, $\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n})$ для $\gamma$-доверительного интервала для математического ожидания $DX$;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и $S^2$ для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия $\gamma$ и $N$ – объема выборки из индивидуального варианта:
   a. на координатной плоскости $Oyn$ построить прямую $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, $y = \overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ и $y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема $n$ выборки, где $n$ изменяется от 1 до $N$;
   b. на другой координатной плоскости $Ozn$ построить прямую $z = S^2(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\overrightarrow{x_n})$, $z = \overline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ и $z = \underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема $n$ выборки, где $n$ изменяется от 1 до $N$.

# 1. Теоретическая часть

В данной части рассмотрены формулы для вычисления величин, границ $\gamma$-доверительного интервала, а так же определение $\gamma$-доверительного интервала.

## 1.1 Определение $\gamma$-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

**Интервальной оценкой с коэффициентом доверия** $\gamma$ ($\gamma$-доверительной интервальной оценкой) параметра $\theta$ называют пару статистик $\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)\} = \gamma. \tag{1}$$

Другими словами, $\gamma$-доверительная интервальная оценка для параметра $\theta$ — такой интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n))$ со случайными границами, который накрывает теоретическое (то есть «истинное») значение этого параметра с вероятностью $\gamma$. Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\overrightarrow{X}_n$ статистики $\underline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{X}_n)$ могут принимать различные значения.

## 1.2 Формулы для вычисления величин

**Оценка математического ожидания**

$$\hat{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,. \tag{2}$$

**Несмещённая оценка дисперсии**

$$S^2(\overrightarrow{X}_n) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\,. \tag{3}$$

**Выборочная дисперсия**

$$\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \tag{4}$$

## 1.3 Формулы для вычисления границ $\gamma$-доверительного интервала

Пусть $\overrightarrow{X}_n$ — случайная выборка объема $n$ из генеральной совокупности $X$, распределенной по нормальному закону с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$.

**Оценка для математического ожидания при известной дисперсии**

$$\begin{aligned} \underline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) &= \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X}_n)}{\sqrt{n}} h^t_{\alpha}(n-1), \\ \overline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) &= \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X}_n)}{\sqrt{n}} h^t_{1-\alpha}(n-1), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\overline{X}_n$ — оценка математического ожидания,

n — объем выборки,

$S(\overrightarrow{X}_n)$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки $\overrightarrow{X}_n$,

$h^t_{\alpha}(n-1)$ — квантиль уровня $\alpha$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

**Оценка для дисперсии**

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n) &= \frac{(n-1)\cdot S^2(\overrightarrow{X}_n)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \\ \overline{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n) &= \frac{(n-1)\cdot S^2(\overrightarrow{X}_n)}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \end{aligned} \tag{6}$$

где n — объем выборки,

$S(\overrightarrow{X}_n)$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки $\overrightarrow{X}_n$,

$\chi^2_\alpha(n-1)$ — квантиль уровня $\alpha$ для распределения $\chi^2$ с $n-1$ степенями свободы.

# 2. Практическая часть

В данной части представлен листинг и результат работы программы.

## 2.1 Листинг программы

```
function lab2
    clear
    X =
[7.76,6.34,5.11,7.62,8.84,4.68,8.65,6.90,8.79,6.61,6.62,7.13,6.75,7.
28,7.74,7.08,5.57,8.20,7.78,7.92,6.00,4.88,6.75,6.56,7.48,8.51,9.06,
6.94,6.93,7.79,5.71,5.93,6.81,5.76,5.88,7.05,7.22,6.67,5.59,6.57,7.2
8,6.22,6.31,5.51,6.69,7.12,7.40,6.86,7.28,6.82,7.08,7.52,6.81,7.55,4
.
89,5.48,7.74,5.10,8.17,7.67,7.07,5.80,6.10,7.15,7.88,9.06,6.85,4.88,
6.74,8.76,8.53,6.72,7.21,7.42,8.29,8.56,9.25,6.63,7.49,6.67,6.79,5.1
9,8.20,7.97,8.64,7.36,6.72,5.90,5.53,6.44,7.35,5.18,8.25,5.68,6.29,6
.
69,6.08,7.42,7.10,7.14,7.10,6.60,6.35,5.99,6.17,9.05,6.01,7.77,6.27,
5.81,7.80,9.89,4.39,6.83,6.53,8.15,6.68,6.87,6.31,6.83];
    N = 60;
    gamma = 0.9;

    alpha = (1 - gamma)/2;
    mu = getmu(X);
    Ssqr = getS(X);
    muArray = getMuArray(X, N);
    varArray = getVarArray(X, N);

    muHigh = getMuHigh(muArray, varArray, alpha, N);
    muLow = getMuLow(muArray, varArray, alpha, N);

    sigmaHigh = getSigmaHigh(varArray, alpha, N);
    sigmaLow = getSigmaLow(varArray, alpha, N);

    figure
    hold on;
    plot([1,N], [mu, mu], 'g');
    plot((1:N), muArray, 'r');
    plot((1:N), muLow, 'b');
    plot((1:N), muHigh, 'm');
    legend('mu(x_N)','mu(x_n)','muLow(x_n)','muHigh(x_n)');
    grid on;
    hold off;

    figure
    hold on;
    plot([1,N], [Ssqr, Ssqr], 'g');
    plot((1:N), varArray, 'r');
    plot((1:N), sigmaLow, 'b');
    plot((4:N), sigmaHigh(4:length(sigmaHigh)), 'm');
```

```
legend('sigma(x_N)','sigma(x_n)','sigmaLow(x_n)','sigma-High(x_n)');
grid on;
hold off;

N = size(X,2);
muArray = getMuArray(X, N);
varArray = getVarArray(X, N);
muHigh = getMuHigh(muArray, varArray, alpha, N);
muLow = getMuLow(muArray, varArray, alpha, N);
sigmaHigh = getSigmaHigh(varArray, alpha, N);
sigmaLow = getSigmaLow(varArray, alpha, N);

fprintf('mu = %.2f\n', mu);
fprintf('S^2 = %.2f\n', Ssqr);
fprintf('mu_low = %.2f\n', muLow(end));
fprintf('mu_high = %.2f\n', muHigh(end));
fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', sigmaLow(end));
fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', sigmaHigh(end));

function mu = getmu(X)
    mu = sum(X)/size(X,2);
end

function sigma = getSigmaSqr(X)
    tempMu = getmu(X);
    sigma = sum((X - tempMu) .* (X - tempMu))/size(X,2);
end

function Ssqr = getS(X)
    n = size(X,2);
    Ssqr = n/ (n - 1) * getSigmaSqr(X);
end

function muArray = getMuArray(X, N)
    muArray = zeros(1,N);
    for i = 1:N
        muArray(i) = getmu(X(1:i));
    end
end

function varArray = getVarArray(X, N)
    varArray = zeros(1,N);
    for i = 1:N
        varArray(i) = getS(X(1:i));
    end
end

function muHigh = getMuHigh(muArray, varArray, alpha, N)
    muHigh = zeros(1, N);
    for i = 1:N
        muHigh(i)  = muArray(i) + sqrt(varArray(i)./ i) .* tinv(1 - alpha, i - 1);
    end
end
```

```

    function muLow = getMuLow(muArray, varArray, alpha, N)
        muLow = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            muLow(i) = muArray(i) + sqrt(varArray(i)./ i) .* tinv(alpha, i - 1);
        end
    end

    function sigmaHigh = getSigmaHigh(varArray, alpha, N)
        sigmaHigh = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            sigmaHigh(i) = varArray(i) .* (i - 1) ./ chi2inv(alpha, i - 1);
        end
    end

    function sigmaLow = getSigmaLow(varArray, alpha, N)
        sigmaLow = zeros(1, N);
        for i = 1:N
            sigmaLow(i) = varArray(i) .* (i - 1) ./ chi2inv(1 - alpha, i - 1);
        end
    end
end
```

## 2.2 Результат работы программы

$\hat{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = 6.94;$

$S^2(\overrightarrow{X}_n) = 1.17;$

$\underline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = 6.78;$

$\overline{\mu}(\overrightarrow{X}_n) = 7.11;$

$\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n) = 0.96;$

$\overline{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n) = 1.47.$

## 2.3 Графики

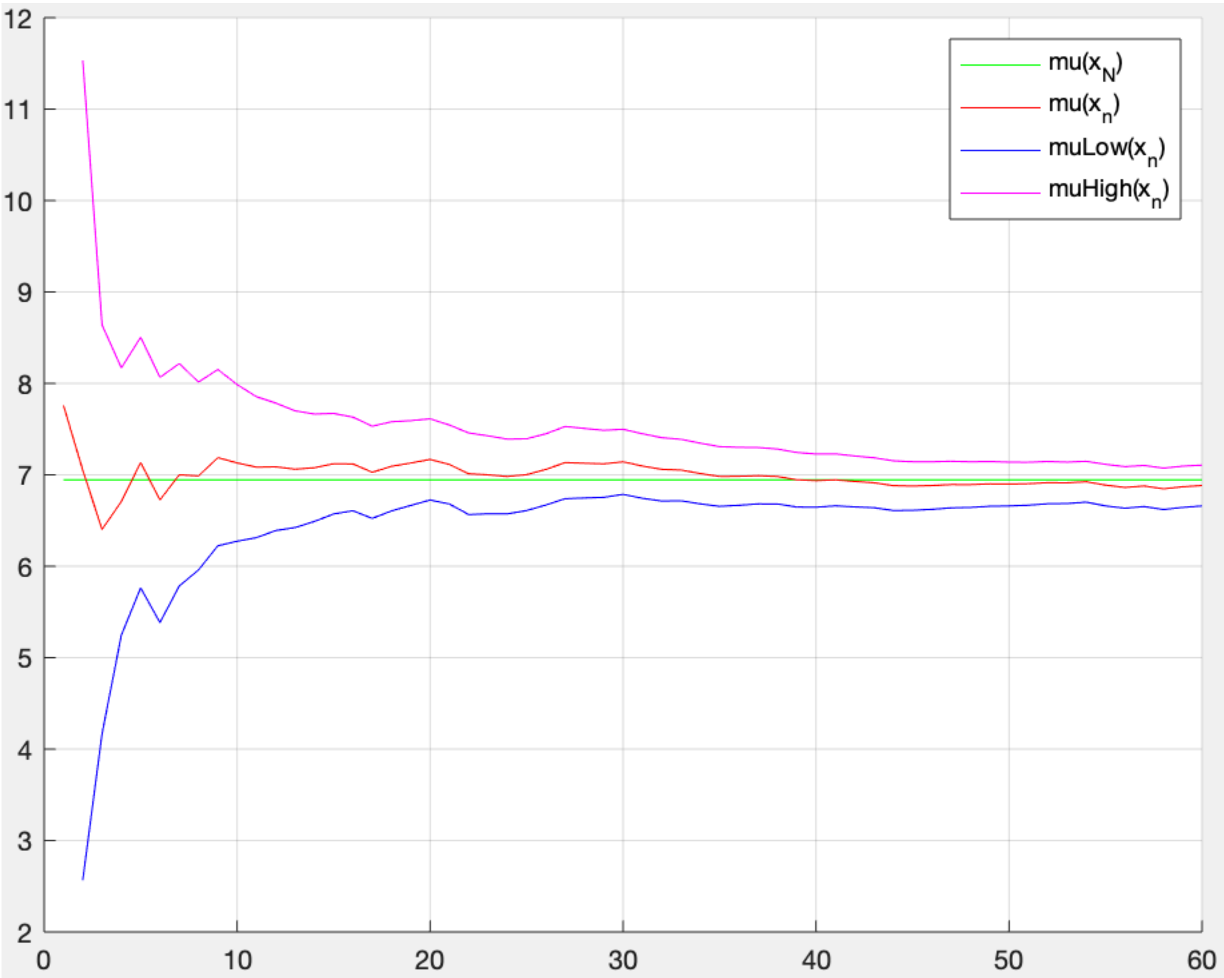


Рисунок 1. Оценка для математического ожидания.

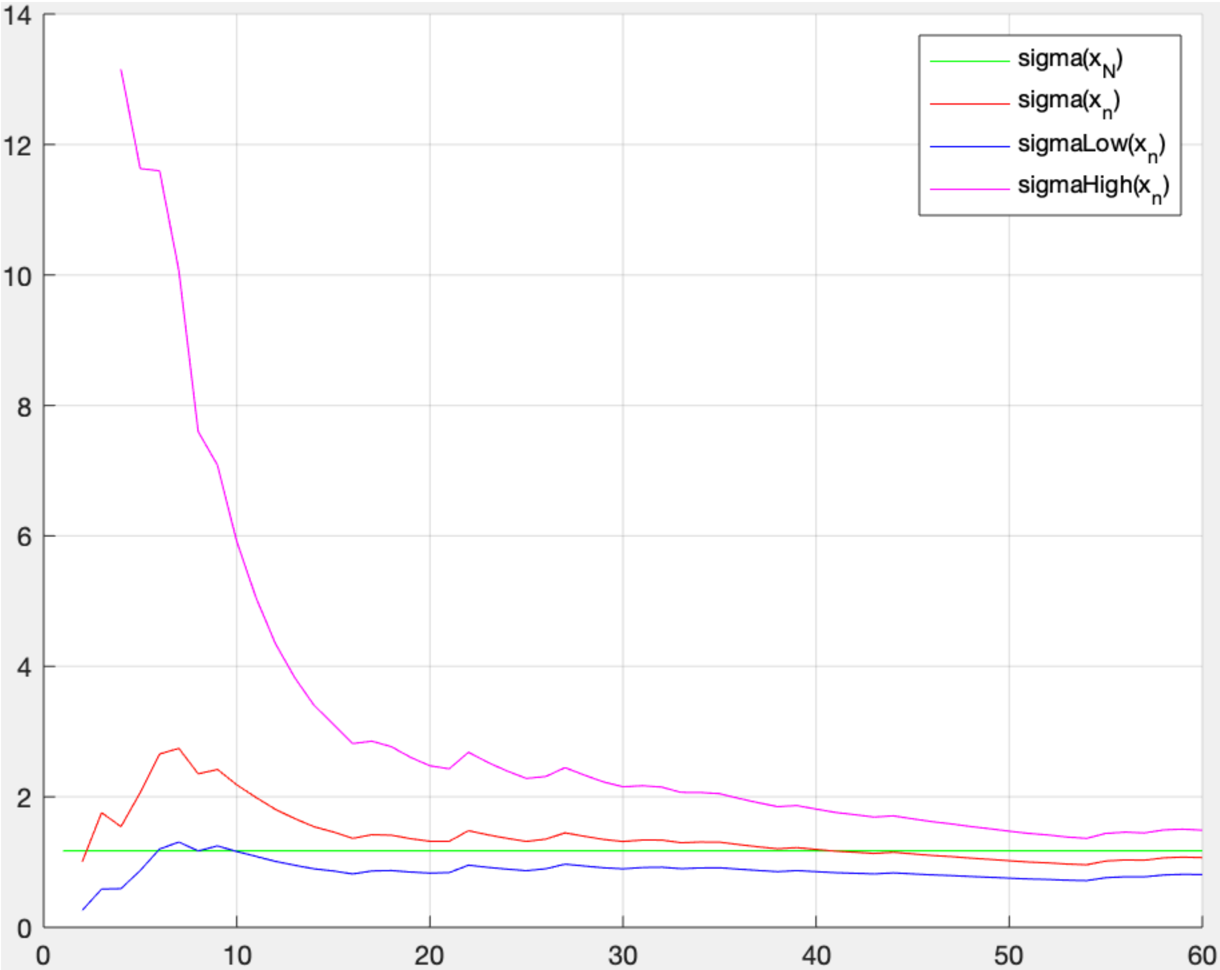


Рисунок 2. Оценка для дисперсии.