

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа аэрокосмических технологий**

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ – 2
Численное решение задачи Коши**

**Выполнил:
Алиев Артем Эльдарович
Группа Б03-907**

**Долгопрудный
2021 г.**

Содержание

1 Условие.....	3
2 Теория.....	3
3 Решение.....	4
3.1 Поиск шага h	4
3.2 Поиск решения ЗК на отрезке методом Эйлера с пересчетом.....	5
4 Результаты.....	6
5 Итог.....	7

1 Условие

Найти значение задачи Коши: $(xy - x^2)y' + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$, $y(0) = 0$ на отрезке (a, b) , где $a = -1$, $b = 0.5$ с заданной точностью $E = 10^{-4}$, используя метод Эйлера с пересчетом:

2 Теория

Метод Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (4.1)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \quad (4.2)$$

Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.3)$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2\dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$); каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (4.1), которая проходит через точку M_i .

Если правая часть уравнения (4.1) в некотором прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}), \quad (4.4)$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M \quad (M = \text{const}), \quad (4.5)$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} [(1 + hN)^n - 1], \quad (4.6)$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения при $x = x_n$, а y_n — приближенное значение, полученное на n -м шаге.

Метод Эйлера с пересчетом

Метод Эйлера—Коши решения задачи (4.1), (4.2) можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку (см. [45]) каждого значения y_i . А именно, исходя из грубого приближения

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (6.1)$$

построим итерационный процесс

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})]. \quad (6.2)$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока в двух последовательных приближениях $y_{i+1}^{(k)}$, $y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут соответствующие десятичные знаки. После этого полагаем

$$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}.$$

Как правило, при достаточно малом h итерации быстро сходятся. Если после трех-четырех итераций не произошло совпадения нужного числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг расчета h .

Пример 6.1. Применяя метод итерационной обработки, найти с точностью до 10^{-4} значение $y(0,1)$ решения уравнения

$$y' = x + y$$

с начальным условием $y(0) = 1$.

3 Решение

3.1 Поиск шага h

```
while True:
    N += 1 # число разбиений
    h = (b - a) / N # шаг
    res_1 = euler_recalculation(h / 2)
    res_2 = euler_recalculation(h)
    #print(res_1, res_2)
    delta = abs((res_1 - res_2))
    if delta < e:
        print(h)
        break
```

h = 0.0016835016835016834

3.2 Поиск решения ЗК на отрезке методом Эйлера с пересчетом

```
while x < xn:  
    # Считаем значение функции методом Эйлера  
    Y = y + h * func(x, y)  
    euler.append(Y)  
    # Пересчитываем полученное значение  
    y += 0.5 * h * (func(x, y) + func(x + h, Y))  
    euler_recal.append(y)  
    x += h  
    x_value.append(x)
```

Выбрал 20 значений с шагом кратному h

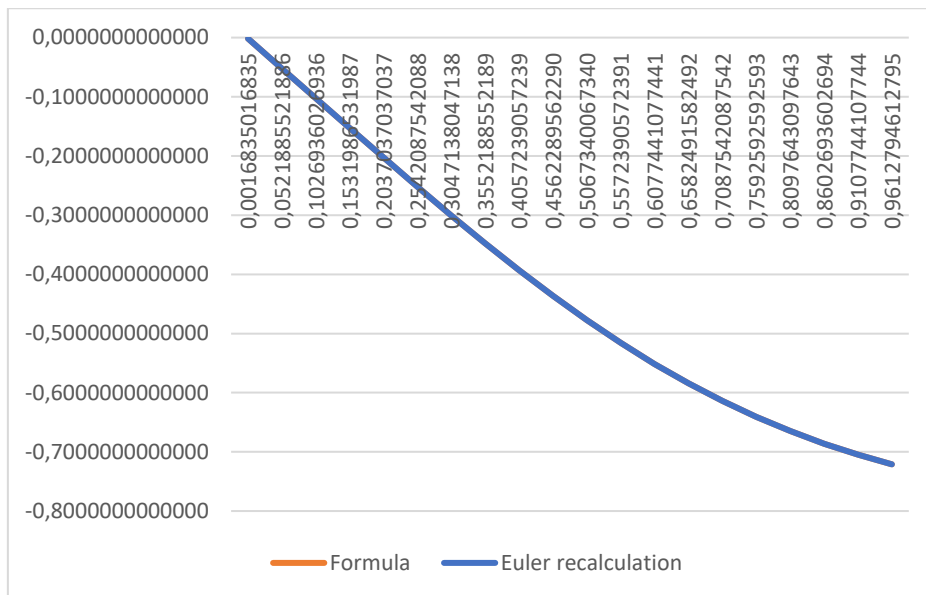
Euler recalculation:	
x =	y =
0,0016835016835	-0,0016835016755
0,0521885521886	-0,0521848397363
0,1026936026936	-0,1026380391235
0,1531986531987	-0,1529241896561
0,2037037037037	-0,2028499214278
0,2542087542088	-0,2521542708614
0,3047138047138	-0,3005208832302
0,3552188552189	-0,3475959406451
0,4057239057239	-0,3930109139349
0,4562289562290	-0,4364079050319
0,5067340067340	-0,4774644089865
0,5572390572391	-0,5159141584501
0,6077441077441	-0,5515614269170
0,6582491582492	-0,5842875200181
0,7087542087542	-0,6140497035409
0,7592592592593	-0,6408740315988
0,8097643097643	-0,6648441783647
0,8602693602694	-0,6860884296580
0,9107744107744	-0,7047666263047
0,9612794612795	-0,7210582968784

4 Результаты

Сравним метод Эйлера с пересчетом с точными значением решения, посчитанный мною с теми же x с помощью Excel

Formula:	
x =	y =
0,0016835016835	-0,0016835016918
0,0521885521886	-0,0521848435947
0,1026936026936	-0,1026380540315
0,1531986531987	-0,1529242226448
0,2037037037037	-0,2028499791157
0,2542087542088	-0,2521543591123
0,3047138047138	-0,3005210067645
0,3552188552189	-0,3475961026717
0,4057239057239	-0,3930111158801
0,4562289562290	-0,4364081464296
0,5067340067340	-0,4774646875637
0,5572390572391	-0,5159144703971
0,6077441077441	-0,5515617672927
0,6582491582492	-0,5842878832162
0,7087542087542	-0,6140500837431
0,7592592592593	-0,6408744231583
0,8097643097643	-0,6648445760891
0,8602693602694	-0,6860888289855
0,9107744107744	-0,7047670233860
0,9612794612795	-0,7210586885857

$$y(x) = \frac{1 - \sqrt{2x^3 + 1}}{x^2}$$



5 Вывод

В данной задаче мы воспользовались методом Эйлера с пересчетом для нахождения решения задачи Коши с заданной точностью. У нас получилось не выйти за рамки заданной точности, что можно считать успешным выполнением данной работы.

[Ссылка](#) на GitHub кода