

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа аэрокосмических технологий**

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ – 1  
Численное вычисление интегралов**

**Выполнил:  
Алиев Артем Эльдарович  
Группа Б03-907**

**Долгопрудный  
2021 г.**

## Содержание

<b>1 Условие.....</b>	<b>3</b>
<b>2 Теория.....</b>	<b>3</b>
<b>3 Решение.....</b>	<b>4</b>
3.1 Проверка интеграла.....	4
3.2 Метод средних прямоугольников.....	4
3.3 Метод правых прямоугольников.....	5
3.4 Метод трапеций.....	5
3.5 Метод Симпсона.....	6
<b>4 Результаты.....</b>	<b>6</b>
<b>5 Итог.....</b>	<b>6</b>

## 1 Условие

Найти значение интеграла вида:  $x^5 / (1 - \operatorname{tg}(x^7))$ , на отрезке  $[a, b]$ , где  $a = -1$ ,  $b = 0.5$  с заданной точностью  $E = 10^{-4}$ , используя 4 метода:

1 Средних прямоугольников

2 Правых прямоугольников

3 Трапеций

4 Симпсона

## 2 Теория

Самые широко используемые в практических вычислениях - методы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Способ их получения состоит в следующем. Разобьем отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $N$  элементарных шагов. Точки разбиения  $x_n (n = 0, 1, \dots, N)$ ;  $h_n = x_{n+1} - x_n$  так что  $\sum_{n=0}^{N-1} h_n = b - a$ .

(В частном случае шаг интегрирования может быть постоянным  $h = (b - a)/N$ .)

Искомое значение интеграла представим в виде

$$J = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \sum_{n=0}^{N-1} J_n, \quad (1)$$

### Метод трапеций

На элементарном отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом первой степени:

$$f(x) \approx f_n + \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n)$$

Выполняя интегрирование по отрезку, приходим к локальной формуле трапеций:

$$\tilde{J}_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)(f_{n+1} + f_n) = \frac{1}{2}h_n(f_{n+1} + f_n) \quad (2)$$

Суммируя (2) по всем отрезкам, получаем формулу трапеций для вычисления приближения:

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h_n (f_n + f_{n+1})$$

### Погрешность для метода трапеций

Формула трапеций является формулой второго порядка, поэтому формула оценки погрешности имеет вид:

$$|\tilde{J} - J| \leq \frac{1}{12} (b - a) M_2 \bar{h}^2$$

### Правило Рунге

Для контроля точности используется правило Рунге, для которого не надо вычислять даже производные.

$$J - \tilde{J}^p(h) \approx (\tilde{J}^p(h) - \tilde{J}^p(2h)) / (2^p - 1)$$

## 3 Решение

### 3.1 Проверка интеграла

Подставив обе точки  $a$  и  $b$  в нашу функцию мы обнаружили, что в нашем случае *отсутствуют особые точки* и “неприятности”, поэтому смело приступаем к программному вычислению интеграла разными методами.

### 3.2 Метод средних прямоугольников

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} h_n f_{n+\frac{1}{2}}$$

Ответ: -0.111595650530556

```
def aver_rectangle(f, h, a):
```

```
    n = int((b - a) / h)
```

```
    res = 0
```

```
    for i in range(n):
```

```
        res += (h * f.subs(x, (a + h/2) + i*h))
```

```
    return res
```

### 3.3 Метод правых прямоугольников

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} h_n f_{n+1}$$

Ответ: -0.111597763090279

*def right\_rectangle(f, h, a):*

*n = int((b - a) / h)*

*res = 0*

*for i in range(n):*

*res += (h \* f.subs(x, a + i \* h))*

*return res*

### 3.4 Метод трапеций

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h_n}{2} (f_{n+1} + f_n)$$

Ответ: -0.111597605609942

*def trapezoidal(f, a, b, h):*

*n = int((b - a) / h)*

*result = 0.5\*f.subs(x, a) + 0.5\*f.subs(x, b)*

*for i in range(n):*

*result += f.subs(x, a + i\*h)*

*result \*= h*

*return result*

### 3.5 Метод Симпсона

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h_n}{6} (f_{n+1} + 4f_{n+\frac{1}{2}} + f_n)$$

Ответ: -0.11159825732843703

*def simpsons(f, a, b, h):*

```
tmp_sum = float(f.subs({x: a})) + \  
float(f.subs({x: b}))
```

```
n = int((b - a) / h)
```

```
for step in range(n):
```

```
if step % 2 != 0:
```

```
tmp_sum += 4 * float(f.subs({x: a + step * h}))
```

```
else:
```

```
tmp_sum += 2 * float(f.subs({x: a + step * h}))
```

```
return tmp_sum * h / 3
```

### 4 Результаты

Наиболее точным методом является метод средних квадратов: -0.111595650530556 (точное значение равно -0.1115956505221).

### 5 Вывод

В данной задаче мы воспользовались формулой Маклорена для нахождения одной из частей интеграла и 4-мя численными методами интегрирования для нахождения второго. В каждом из методов получилось не выйти за рамки заданной точности, что можно считать успешным выполнением данной работы.

[Ссылка](#) **GitHub** кода