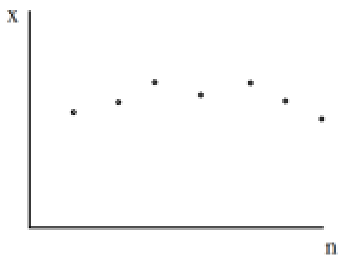
Задача №1

ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Точечные одномерные отображения

$x_{n+1} = f(x_n)$ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$

Задание: создать компьютерный код, с помощью которого можно строить рисунки типа

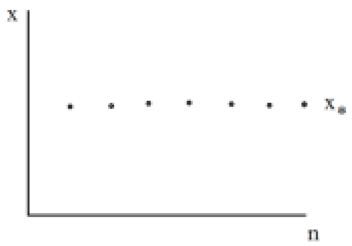


Сделать это сначала для $f(x) = 4rx(1-x)$, r – параметр. x и r меняются от 0 до 1. Входные параметры – r и x_0.

Аналитические исследования

Простейшие случаи

1. $x_{n+1} = f(x_n)$ Все члены последовательности одинаковые. Стационарная точка.



Уравнение для x* $x^* = f(x^*)$

Понятие устойчивости стационарной точки

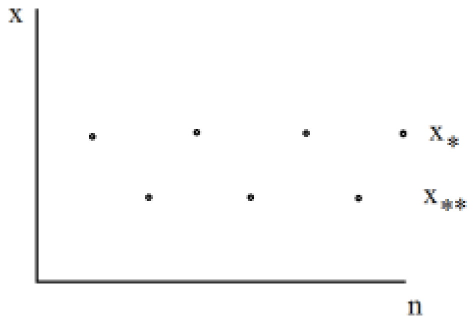
$x_{n+1} = x^* + \delta_{n+1}$ $x_n = x^* + \delta_n$ Устойчивость при $\left|\frac{x_{n+1} - x_*}{x_n - x_*}\right| < 1.$ $\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| < 1$

$x_{n+1} = f(x_n)$ $x^* + \delta_{n+1} = f(x^* + \delta_n) \approx f(x^*) + f'(x^*)\delta_n + \ldots$

Условие устойчивости $|f'(x^*)| < 1$.

Задание: для вышеприведенной функции аналитически (имея только бумагу и ручку!) найти стационарные точки x* и определить, для каких параметров r они устойчивы в случае $f(x) = 4rx(1-x)$.

2. $x_{n+2} = f(x_n)$ Члены последовательности повторяются при изменении n на 2 («колебания» с периодом 2).



Уравнения для определения x* и x**:

$x^* = f(f(x^*))$ $x^{**} = f(f(x^{**}))$ Здесь $x^* = f(x^{**})$ и $x^{**} = f(x^*)$

Понятие устойчивости в этом случае

$x_{n+2} = x^* + \delta_{n+2}$ $x_n = x^* + \delta_n$ Устойчивость при $\left|\frac{x_{n+2} - x_*}{x_n - x_*}\right| < 1.$ $\left|\frac{\delta_{n+2}}{\delta_n}\right| < 1$

$x_{n+2} = f(f(x_n))$ $x_{n+2} = x^* + \delta_{n+2} = f(f(x^* + \delta_n)) \approx f(f(x^*) + f'(x^*)\delta_n + \ldots) \approx$ $f(f(x^*)) + f'(f(x^*))f'(x^*)\delta_n$

Условие устойчивости $|f'(x^*) f'(x^{**})| < 1$.

Задание: для функции $f(x) = 4rx(1-x)$ объяснить, как аналитически найти x* и x** и определить, для каких параметров r этот режим устойчив. Для продвинутых студентов это сделать либо аналитически, либо с помощью символьных вычислений в Python или с помощью пакетов типа Mathematica, Mathcard, Mathlab….

1. ***Исследование удвоения периода***

а) Изучите динамическое поведение стандартного отображения (2)

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (1)$$

$$f(x) = 4rx(1-x) \qquad (2)$$

для значений параметра r = 0.2 и r = 0.24 и для различных значений x_0. Покажите, что x = 0 является устойчивой неподвижной точкой. Иначе говоря, для достаточно малого значения параметра r итерации x_n сходятся к x = 0 независимо от начального условия x_0.

б) Исследуйте динамическое поведение стандартного отображения (2) для значений параметра $r = 0.26$, 0.5, 0.7, 0.72, 0.74 и 0.748. (В случае $r = 0.748$ для сходимости итерационного процесса необходимо приблизительно 1000 итераций.) Сходится ли процесс к значению $x = 0$?

в) Исследуйте динамическое поведение отображения (2) для значений параметра $r = 0.752$, 0.76, 0.8 и 0.862. (В случае $r = 0.752$ для сходимости итерационного процесса необходимо приблизительно 1000 итераций.) Меняется ли период цикла и чему он равен? Как меняется поведение системы при увеличении r до 0.8922?

2. ***Хаотический режим***

а) При $r > 0.8924864179\ldots$ реализуется хаотический режим, в котором две близлежащие начальные точки разбегаются по различным траекториям после небольшого числа итераций. В качестве примера выберите $x_0 = 0.50$ и 0.51. Наложите друг на друга результаты расчетов для этих вариантов, построенные разными цветами. Это сделать как в хаотическом режиме, так и при $r < 0.8924864179..$

б) Точность представления чисел с плавающей запятой в компьютере конечна. Для проверки влияния конечной точности вашего компьютера выберите сначала значения $r = 0.91$ и $x_0 = 0.5$ и получите значения x_n. Затем модифицируйте свою программу так, чтобы последовательно выполнялись операции $x = x/10$ и $x = x\times10$. Эта комбинация действий обрезает последнюю десятичную цифру, которую хранит компьютер. Получите значения x_n при тех же условиях и сравните результаты, наложив их друг на друга, когда они приведены разными цветами. Что будет при малых r, когда режим еще не хаотический? (Вместо деления и умножения на 10 сделайте то же самое и с делением и умножением на 16 и на 20. Объясните результат.)

в) Каковы динамические свойства системы при $r = 0.958$? Есть ли другие «окна» в хаотическом режиме?

3. ***Качественные особенности отображения***

а) Постройте график, где по оси абсцисс откладываются r, а по оси ординат - $x_{n,}$ получаемые в пределе больших n. Сколько удвоений периода вы можете различить?

4. О*ценка универсальной постоянной* δ

Процесс удвоения периода с последующим переходом к хаосу может быть описан количественно. Пусть r_n является значением r, при котором впервые появляется 2^n циклов. По мере роста n значение r_n приближается к предельному значению r_∞ по закону

$$r_n - r_\infty = A\delta^{-n}. \qquad (3)$$

Величина δ, называемая постоянной Фейгенбаума, не зависит от детальных свойств отображения, а зависит только от его порядка. Напротив, постоянная A зависит от детальной структуры отображения. Из (3) следует, что δ можно определить следующим образом

$$\delta = \lim \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} \qquad (4)$$

а) Для отображения (2) найдите r_n (при n = 1 - 4) и оцените δ.

5. ***Другие одномерные отображения***

Выполните перечисленные выше эксперименты для определения качественных свойств отображений

$$f(x) = xe^{r(1-x)} \qquad (5)$$

$$f(x) = r[1-(2x-1)^4]. \qquad (6)$$

Для отображения (5) значения x и r – любые неотрицательные, в то время как для (6) эти значения должны лежать на отрезке [0,1].