Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Физтех-школа аэрокосмических технологий

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ – 2

Численное решение задачи Коши

Выполнил:
Алиев Артем Эльдарович

Группа Б03-907

Долгопрудный

2021 г.

Содержание

1 Условие

Найти значение задачи Коши: $(xy - x^2)y' + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$, $y(0) = 0$ на отрезке [a, b], где **a = -1, b = 0.5** с заданной точностью **E = 10^{-4}**, используя метод Эйлера с пересчетом:

2 Теория

Метод Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{4.2}$$

Выбрав достаточно малый шаг h, построим систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2\ldots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$; каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (4.1), которая проходит через точку M_i.

Если правая часть уравнения (4.1) в некотором прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}), \tag{4.4}$$

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M \quad (M = \text{const}), \tag{4.5}$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM}{2N}\left[(1 + hN)^n - 1\right], \tag{4.6}$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения при $x = x_n$, а y_n — приближенное значение, полученное на n-м шаге.

Метод Эйлера с пересчетом

Метод Эйлера — Коши решения задачи (4.1), (4.2) можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку (см. [45]) каждого значения y_i. А именно, исходя из грубого приближения

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad (6.1)$$

построим итерационный процесс

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})\right]. \qquad (6.2)$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока в двух последовательных приближениях $y_{i+1}^{(k)}$, $y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут соответствующие десятичные знаки. После этого полагаем

$$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}.$$

Как правило, при достаточно малом h итерации быстро сходятся. Если после трех-четырех итераций не произошло совпадения нужного числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг расчета h.

Пример 6.1. Применяя метод итерационной обработки, найти с точностью до 10^{-4} значение $y(0{,}1)$ решения уравнения

$$y' = x + y$$

с начальным условием $y(0) = 1$.

3 Решение

3.1 Поиск шага h

```
while True:
    N += 1  # число разбиений
    h = (b - a) / N  # шаг
    res_1 = euler_recalculation(h / 2)
    res_2 = euler_recalculation(h)
    #print(res_1, res_2)
    delta = abs((res_1 - res_2))
    if delta < e:
        print(h)
        break
```

h = 0.0016835016835016834

3.2 Поиск решения ЗК на отрезке метрдом Эйлера с пересчетом

```
while x < xn:
  # Считаем значение функции методом Эйлера
  Y = y + h * func(x, y)
  euler.append(Y)
  # Пересчитываем полученное значение
  y += 0.5 * h * (func(x, y) + func(x + h, Y))
  euler_recal.append(y)
  x += h
  x_value.append(x)
```

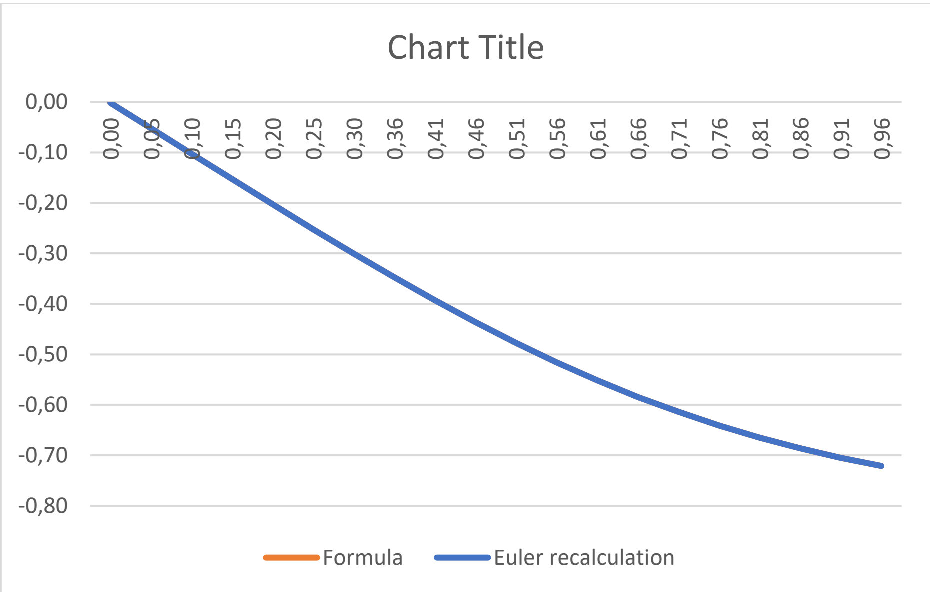
Выбрал 20 значений с шагом кратному h

Euler recalculation:	
x =	y =
0,00	0,00
0,05	-0,05
0,10	-0,10
0,15	-0,15
0,20	-0,20
0,25	-0,25
0,30	-0,30
0,36	-0,35
0,41	-0,39
0,46	-0,44
0,51	-0,48
0,56	-0,52
0,61	-0,55
0,66	-0,58
0,71	-0,61
0,76	-0,64
0,81	-0,66
0,86	-0,69
0,91	-0,70
0,96	-0,72

4 Результаты

Сравним метод Эйлера с пересчетом с точными значением решения, посчитанный мною с теми же x с помощью Excel

Formula:	
x =	y =
0,00	0,00
0,05	-0,05
0,10	-0,10
0,15	-0,15
0,20	-0,20
0,25	-0,25
0,30	-0,30
0,36	-0,35
0,41	-0,39
0,46	-0,44
0,51	-0,48
0,56	-0,52
0,61	-0,55
0,66	-0,58
0,71	-0,61
0,76	-0,64
0,81	-0,66
0,86	-0,69
0,91	-0,70
0,96	-0,72



5 Вывод

В данной задаче мы воспользовались методом Эйлера с пересчетом для нахождения решения задачи Коши с заданной точностью. У нас получилось не выйти за рамки заданной точности, что можно считать успешным выполнением данной работы.

Ссылка на GitHub кода