**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»**

**Физтех-школа аэрокосмических технологий**

# ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ – 2

## Численное решение задачи Коши

**Выполнил:**
**Алиев Артем Эльдарович**

**Группа Б03-907**

**Долгопрудный**

**2021 г.**

# Содержание

## 1 Условие

Найти значение задачи Коши: $(xy - x^2)y' + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$, $y(0) = 0$ на отрезке (a, b), где

**a = 0, b = 1** с заданной точностью **E = $10^{-4}$**, используя метод Эйлера с пересчетом:

## 2 Теория

## Метод Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{4.2}$$

Выбрав достаточно малый шаг $h$, построим систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2\ldots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$; каждое звено $M_iM_{i+1}$ этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (4.1), которая проходит через точку $M_i$.

Если правая часть уравнения (4.1) в некотором прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}), \tag{4.4}$$

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M \quad (M = \text{const}), \tag{4.5}$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM}{2N}\left[(1 + hN)^n - 1\right], \tag{4.6}$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения при $x = x_n$, а $y_n$ — приближенное значение, полученное на $n$-м шаге.

## Метод Эйлера с пересчетом

Метод Эйлера — Коши решения задачи (4.1), (4.2) можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку (см. [45]) каждого значения $y_i$. А именно, исходя из грубого приближения

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{6.1}$$

построим итерационный процесс

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})\right]. \tag{6.2}$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока в двух последовательных приближениях $y_{i+1}^{(k)}$, $y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут соответствующие десятичные знаки. После этого полагаем

$$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}.$$

Как правило, при достаточно малом $h$ итерации быстро сходятся. Если после трех-четырех итераций не произошло совпадения нужного числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг расчета $h$.

## 3 Решение

### 3.1 Поиск шага h

```
while True:
    N += 1  # число разбиений
    h = (b - a) / N  # шаг
    res_1 = euler_recalculation(h / 2)
    res_2 = euler_recalculation(h)
    #print(res_1, res_2)
    delta = abs((res_1 - res_2))
    if delta < e:
        print(h)
        break
```

**h = 0.0016835016835016834**

## 3.2 Поиск решения ЗК на отрезке методом Эйлера с пересчетом

```
while x < xn:
  # Считаем значение функции методом Эйлера
  Y = y + h * func(x, y)
  euler.append(Y)
  # Пересчитываем полученное значение
  y += 0.5 * h * (func(x, y) + func(x + h, Y))
  euler_recal.append(y)
  x += h
  x_value.append(x)
```

**Выбрал 20 значений с шагом кратному h**

| Euler recalculation h: | |
|---|---|
| x = | y = |
| 0,0016835016835 | -0,0016835016755 |
| 0,0521885521886 | -0,0521848397363 |
| 0,1026936026936 | -0,1026380391235 |
| 0,1531986531987 | -0,1529241896561 |
| 0,2037037037037 | -0,2028499214278 |
| 0,2542087542088 | -0,2521542708614 |
| 0,3047138047138 | -0,3005208832302 |
| 0,3552188552189 | -0,3475959406451 |
| 0,4057239057239 | -0,3930109139349 |
| 0,4562289562290 | -0,4364079050319 |
| 0,5067340067340 | -0,4774644089865 |
| 0,5572390572391 | -0,5159141584501 |
| 0,6077441077441 | -0,5515614269170 |
| 0,6582491582492 | -0,5842875200181 |
| 0,7087542087542 | -0,6140497035409 |
| 0,7592592592593 | -0,6408740315988 |
| 0,8097643097643 | -0,6648441783647 |
| 0,8602693602694 | -0,6860884296580 |
| 0,9107744107744 | -0,7047666263047 |
| 0,9612794612795 | -0,7210582968784 |

**И то же самое для 2h**

| Euler recalculation 2h: | |
|---|---|
| x = | y = |
| 0,0033670033670 | -0,0033670032385 |
| 0,0538720538721 | -0,0538678267081 |
| 0,1043771043771 | -0,1043177642322 |
| 0,1548821548822 | -0,1545953604696 |
| 0,2053872053872 | -0,2045048562556 |
| 0,2558922558923 | -0,2537832153348 |
| 0,3063973063973 | -0,3021125180490 |
| 0,3569023569024 | -0,3491380723015 |
| 0,4074074074074 | -0,3944912942594 |
| 0,4579124579125 | -0,4378150853257 |
| 0,5084175084175 | -0,4787885151100 |
| 0,5589225589226 | -0,5171474833771 |
| 0,6094276094276 | -0,5526987744018 |
| 0,6599326599327 | -0,5853262839534 |
| 0,7104377104377 | -0,6149897151851 |
| 0,7609427609428 | -0,6417172381358 |
| 0,8114478114478 | -0,6655942268226 |
| 0,8619528619529 | -0,6867502234742 |
| 0,9124579124579 | -0,7053459051286 |
| 0,9629629629630 | -0,7215612708339 |

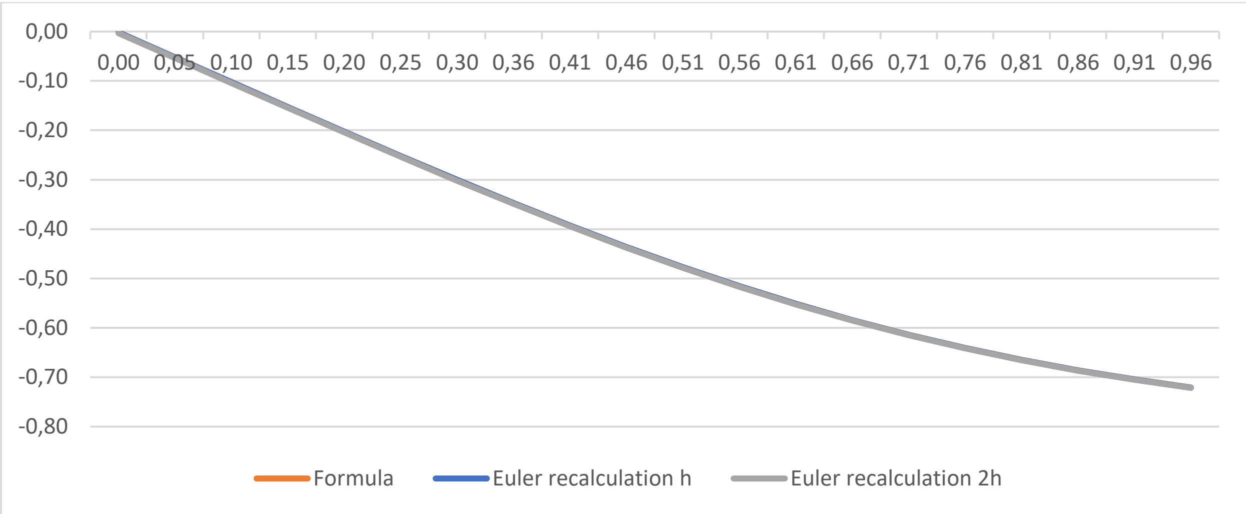
# 4 Результаты

Сравним метод Эйлера с пересчетом с точными значением решения, посчитанный мною с теми же x с помощью Excel

| | Formula: | Euler recalculation h: |
|---|---|---|
| x = | y = | y = |
| 0,0016835016835 | -0,0016835016918 | -0,0016835016755 |
| 0,0521885521886 | -0,0521848435947 | -0,0521848397363 |
| 0,1026936026936 | -0,1026380540315 | -0,1026380391235 |
| 0,1531986531987 | -0,1529242226448 | -0,1529241896561 |
| 0,2037037037037 | -0,2028499791157 | -0,2028499214278 |
| 0,2542087542088 | -0,2521543591123 | -0,2521542708614 |
| 0,3047138047138 | -0,3005210067645 | -0,3005208832302 |
| 0,3552188552189 | -0,3475961026717 | -0,3475959406451 |
| 0,4057239057239 | -0,3930111158801 | -0,3930109139349 |
| 0,4562289562290 | -0,4364081464296 | -0,4364079050319 |
| 0,5067340067340 | -0,4774646875637 | -0,4774644089865 |
| 0,5572390572391 | -0,5159144703971 | -0,5159141584501 |
| 0,6077441077441 | -0,5515617672927 | -0,5515614269170 |
| 0,6582491582492 | -0,5842878832162 | -0,5842875200181 |
| 0,7087542087542 | -0,6140500837431 | -0,6140497035409 |
| 0,7592592592593 | -0,6408744231583 | -0,6408740315988 |
| 0,8097643097643 | -0,6648445760891 | -0,6648441783647 |
| 0,8602693602694 | -0,6860888289855 | -0,6860884296580 |
| 0,9107744107744 | -0,7047670233860 | -0,7047666263047 |
| 0,9612794612795 | -0,7210586885857 | -0,7210582968784 |

Точное решение:

$$y(x) = \frac{1 - \sqrt{2x^3 + 1}}{x^2}$$




## 5 Вывод

В данной задаче мы воспользовались методом Эйлера с пересчетом для нахождения решения задачи Коши с заданной точностью. У нас получилось не выйти за рамки заданной точности, что можно считать успешным выполнением данной работы.

**Ссылка на GitHub кода**