Моделирование распространения эпидемии

Смоделировать методом Монте-Карло следующий процесс распространения эпидемии. Предположим, что в регионе распространения эпидемии проживает N = 1000 человек. Пусть вероятность для здорового человека заразиться в течение суток от каждого из больных равна p, причем заражение от разных больных происходит независимо. В случае заражения человек заболевает на следующий день и болеет ровно 1 сутки, после чего выздоравливает. В течение болезни человек сидит дома и не заражается и, следовательно, не может болеть 2 суток подряд. Эпидемия начинается с того, что в первый день один человек заболевает, заразившись от внешнего источника (он приехал из заграницы).

При моделировании следует пользоваться следующим методом. Пусть в определенный день есть n больных и N-n здоровых людей. Сколько заболеет и выздоровеет в следующий день, можно рассчитать методом Монте-Карло. Но время счета уменьшится, если этот вопрос решить аналитически на основе основ теории вероятности для независимых процессов. Рассуждаем следующим образом. Все n больных с предыдущего дня станут здоровыми на следующий день. Но заболеть на следующий день может каждый из N-n людей, которые здоровы в предыдущий день. Для любого из этих людей вероятность заразиться в предыдущий день от одного из больных равна p, а вероятность не заразиться от него равна (1-p). Вероятность не заразиться ни от кого из n больных равна $(1\text{-}p)^n$, а суммарная вероятность заболеть на следующий день, заразившись от кого-то из них, будет равна $[1 - (1\text{-}p)^n]$. (Если $pn \ll 1$, то из разложения в ряд Тейлора получаем, что эта величина равна $\approx pn$, что вполне разумно.) На основе этого можно определить, кто из N-n людей, здоровых в предыдущий день, заболеет в следующий. Для каждого из этих людей выкидываем случайное число на отрезке [0, 1]. Если это число оказывается меньше $[1 - (1\text{-}p)^n]$, то он заболеет, если больше, то останется здоровым. Таким методом определяем результаты для следующего дня. Потом это все повторяем для еще одного дня и так далее.

Задания

1. Сначала надо ответить устно на следующие вопросы: а) Как будет развиваться эпидемия в предельных случаях p = 0 и p = 1? б) Что было бы дальше с эпидемией, если в какой-то день заразились бы все? Возможно ли такое?

2. Численно продемонстрировать динамику развития эпидемии с помощью зависимости числа больных по дням эпидемии для разных значений p в случае одного ее

розыгрыша. Повторить это много раз и представить кривую, усредненную по многим розыгрышам.

3. Построить зависимость усредненного предельного (по прошествии многих дней) числа больных от вероятности p. Показать, что существует критическая вероятность p_c такая, что при $p < p_c$ среднее число больных через много дней равно нулю, а при $p > p_c$ не равно нулю и резко возрастает с ростом p. Найти величину p_c.

4. Посмотреть, насколько усредненная предельная доля больных (число больных, деленное на N) в зависимости от p (это предыдущая кривая, нормированная на N), меняется при изменении N.