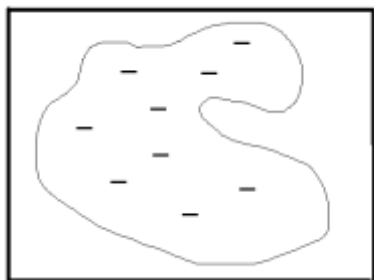


Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло

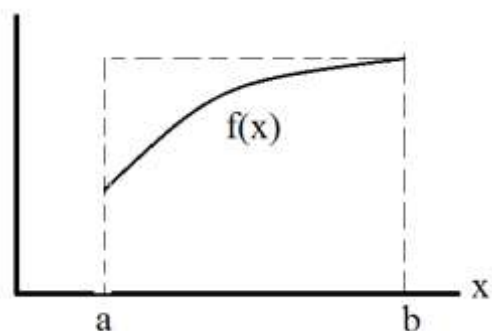
В любом языке достаточно высокого уровня есть генератор случайных чисел, который «выкидывает» случайное число на отрезке $[0, 1]$ или $[0, a]$. С его помощью можно численно находить определенные интегралы на основе следующего принципа.

Предположим, мы хотим найти площадь пруда с границами сложной формы:



Для этого мы огораживаем его (по возможности, ближе к границам пруда) прямоугольным забором. Далее, кидаем случайным образом камни в эту прямоугольную область и считаем количество всплесков, когда камень попадает в воду. Площадь пруда равна площади огороженной прямоугольной области, умноженной на отношение числа всплесков (числа случаев попадания камней в воду) к числу выброшенных камней.

То же самое делается для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$.



Здесь «выкидываете» случайные точки в построенном прямоугольнике, генерируя случайные числа на отрезках $[a, b]$ и $[0, \max f(x)]$, и считаете число точек, оказавшихся под кривой.

Задание 1

Вычислить предложенный преподавателем интеграл.

Также можно определить, как средняя ошибка вычисления интеграла зависит от числа выкидываний случайных точек N . Пусть относительная ошибка при определении интеграла в случае выкидывания N случайных точек равна

$$\delta_N = \frac{|J_N - J|}{J},$$

где J_N – полученное при этом значение интеграла, а J – точное значение интеграла, которое можно найти аналитически, если подынтегральная функция достаточно простая. Если выкидывается один раз N точек и считается интеграл, а потом процедура повторяется, то эти ошибки будут отличаться друг от друга. Надо сделать серию, скажем, из 100 определений интеграла при выкидывании N точек, а потом взять среднее арифметическое от полученных значений ошибок:

$$\langle \delta_N \rangle = \frac{(\delta_N)_1 + (\delta_N)_2 + \dots + (\delta_N)_{100}}{100}.$$

Величина $\langle \delta_N \rangle$ при достаточно больших N зависит от N степенным образом:

$$\langle \delta_N \rangle \sim (N)^\alpha.$$

Задание 2

Продемонстрировать эту зависимость и найти показатель степени α . Это можно сделать наглядно, построив зависимость $\langle \delta_N \rangle$ от N в двойном логарифмическом масштабе, в котором степенная функция дает прямую линию, по наклону которой можно определить α . Для этого надо нанести в указанном масштабе полученные в вычислениях точки и провести по ним прямую линию.