Pada bil erencliability dan analitik dari ekstrim dari beberapa integral reguler

Memoria di Ennio De Giorgi

Ringkasan. Kami mempelajari ekstrim dari beberapa integral berulang reguler, dengan asumsi apriori keberadaan turunan parsial pertama dari bujur sangkar yang dapat dirangkum; karakter 'olderian turunan ini diperlihatkan, dari mana mereka mengikuti ketidakpastian bil erbilitabilitas dan analitik dari ekstrim.

Dalam karya ini saya berurusan dengan sifat-sifat diferensial yang bersifat khusus dan terutama sifat-sifat analitis ekstrem dari beberapa integral reguler; topik ini telah menjadi subjek banyak penelitian oleh matematikawan Italia dan asing, sehingga tampaknya sangat sulit untuk memberikan gambaran bibliografi yang lengkap; oleh karena itu kami akan membatasi diri untuk mengutip beberapa pekerjaan dari mana pembaca dapat dengan mudah memperoleh informasi yang lebih luas. Dengan demikian kita akan mengingat hasil Hopf [3][1], Stampacchia [9], Morrey [6], yang memberikan teorema perbedaan dan analitik untuk perbedaan yang kurang dan kurang teratur: tepatnya kita membutuhkan keberadaan turunan kedua h 'olderiane di [3], dari derivatif pertama h'lderiane di [9], dari derivatif pertama yang berkelanjutan di [6]. Hasil lain yang diperoleh oleh Stampacchia di [9] milik alamat yang berbeda: ia mulai dari teorema keberadaan yang diperoleh dengan metode langsung menghitung variasi, di mana solusi dicari dalam kelas fungsi yang sangat luas, dan ia mempelajari sifat-sifatnya. dari solusi ini (a priori tidak sangat teratur) menunjukkan, antara lain, keberadaan turunan parsial kedua dari bujur sangkar, memuaskan hampir di semua tempat persamaan Euler.

Namun, sejauh yang saya tahu, mereka hilang (jika kita mengecualikan integral ganda yang kita rujuk pembaca untuk [2], [5], [7], [8] dan beberapa kasus khusus dari beberapa integral, seperti yang dari 'kuadrat integral yang menimbulkan persamaan Euler linier) teorema yang melakukannya sebagai jembatan antara hasil yang diperoleh di alamat pertama dan yang diperoleh di alamat kedua, memastikan bahwa solusi ditemukan dengan metode langsung menghitung variasi yang dipertimbangkan dalam [9] memenuhi persyaratan yang dipersyaratkan dalam [6]; tujuan dari karya ini adalah tepatnya demonstrasi teorema pertama jenis ini (tepatnya teorinya. III^2). Demonstrasi ini didasarkan pada studi tentang beberapa fungsi (ditandai dengan ketidaksetaraan integral tertentu) yang dengan teorinya. Saya mencoba karakter h'olderian; di antara hasil antara kita akan mencatat teorinya. II untuk minat yang dapat juga ada dalam pertanyaan lain terkait dengan persamaan elips di enzim.

Topik penelitian ini disarankan kepada saya oleh beberapa percakapan dengan prof. G. Stampacchia, yang saya ucapkan terima kasih di sini atas informasi dan saran yang sangat berguna bagi saya dalam pekerjaan ini.

1. - Dalam ruang Euclidean $r-$dimensi S_r, kita mempertimbangkan bidang E dan dilambangkan dengan $U^(2)(E)$ kelas fungsi hampir kontinu $w(x)$ di E dan memenuhi kondisi berikut:

$1^(\alpha)$ $w(x)$ benar-benar kontinu pada hampir semua segmen sejajar dengan sumbu koordinat yang terkandung dalam E.

$2^(\alpha)$ $w(x)$ dan turunan parsial pertamanya adalah fungsi dari sumable square di setiap himpunan tertutup dan terikat yang terkandung dalam E.

Diberikan angka positif γ, kita akan memanggil $B(E;\gamma)$ kelas fungsi $w(x)$ yang selain kondisi $1^(\alpha)$) dan (2^α) memenuhi

3^α Namun, jika suatu titik γ terdapat $y \in E^3$ (di mana $\delta(y)$ adalah jarak dari S_r/E) dan tiga numerik K, ϱ_1, ϱ_2dengan $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \delta(y)$) ditetapkan, satu telah

Dari (5), perl'arbitrariet'adi y, ϱ_1, ϱ_2, si deduce che, bagaimanapun juga himpunan tertutup dan terikat $C \subset E$, integral yang diperluas ke C dari norma-norma gradien fungsi (2) menggambarkan urutan terbatas; maka, untuk sifat diketahui dari urutan fungsi memiliki turunan pertama dari bujur sangkar, yang $w(x) \in U^(2)(E)$.

Untuk membuktikan bahwa $w(x)$ memenuhi (1), cukup untuk mengamati bahwa, ditempatkan untuk setiap bilangan real k dan untuk setiap bilangan bulat positif n.

suksesi

konvergen rata-rata ke E menuju fungsi $w(x; k)$ yang diberikan oleh

Karena itu, untuk $y \in E, 0 < \varrho < \delta(y)$,

dari $(9), (10)$, karena dengan fungsi-fungsi $w_n(x)$ milik $B(E; \gamma)$, karena itu $w(x)$ memenuhi (1); sama kita dapat alasan untuk $(1')$ dan oleh karena itu ditunjukkan bahwa $w(x) \in B(E; \gamma)$

2. - Kami pikir kami telah menetapkan bidang $E \subset S_r$, konstanta positif γ, fungsi $w(x) \in B(E; \gamma)$ dan punto $y \in E$; mengambil notasi $n.1$, mengatakan

Setelah menetapkan hipotesis ini, yang akan dilestarikan sepanjang bab ini, kami meneruskan ke demonstras

Bukti Untuk setiap set $L \in S_r$, yang terkandung dalam jumlah terbatas dari hyperplanes bola dan permukaan hipersurfaces, kita akan dilambangkan dengan simbol $\mu_{r-1}L$ ukuran $(r-1)$ -dimensi L (didefinisikan secara elementer).

Untuk setiap domain D dari S_r, kita akan memanggil semilinear dalam D fungsi kontinu $g(x) \equiv g(x1, ..., xr)$ dalam D yang memiliki properti berikut: adalah mungkin untuk mendekomposisi D menjadi jumlah-jumlah terbatas dari domain, di mana masing-masing $g(x)$ adalah linier (yaitu, konstan atau sama dengan polinomial tingkat pertama dalam variabel $x1, ..., xr$); Secara geometris, properti yang sekarang dinyatakan dapat diekspresikan dengan mengatakan bahwa hypersurface of space $(r+1)$-dimensional S_{r+1} dari persamaan.

dan terkandung dalam jumlah tak terbatas pesawat terbang $S_r + 1$.

Setelah konvensi ini ditetapkan, kami memberikan bukti lemma kami dalam hipotesis bahwa $w(x)$ adalah setengah bilangan bulat dalam domain $[I(\varrho) \cup FI(\varrho)]$ dalam hal ini, batas $FA(t;\varrho), FB(t;\varrho)$ dari bidang $A(t;\varrho), B(t;\varrho)$ akan selalu terkandung dalam jumlah tak terbatas dari hiperplanes dan bola hipersurface $FI.(\varrho)$. Selain itu, untuk hampir semua nilai t, itu akan menjadi.

Untuk semilinearitas dari di$w(x)$ kita kemudian akan, tetapi memilih nomor ξ,

Di sisi lain, untuk sifat isoperimetri hypersphere, terdapat konstanta $\alpha(r)$ yang menghasilkan

dan oleh karena itu, dengan mengingat $(4), (4'), (5), (6), (7), (9)$, kami menemukan hampir semua nilai dari i ke t

kata $\tau(t;\varrho)$ yang terkecil dari angka mis $A(t;\varrho)$ dan mis $[I(\varrho)/A(t;\varrho)]$ tentu saja akan mis $I(\varrho) \geq 2\tau(t;\varrho)$ dan (10) menjadi

Jika sekarang kita bertanya

dan perlu diingat bahwa, untuk $\lambda \geq t \geq k$, dan $\tau(t;\varrho) \geq \tau(k,\lambda)$ dari $(8), (11), (12)$ berasal dari (2).

Kita sekarang beralih ke bukti lemma kita dalam hipotesis bahwa $w(x)$ tidak semilinear; kemudian, untuk teorema yang diketahui tentang aproksimasi linear, kita dapat menemukan urutan fungsi semilinear dalam domain $[I(\varrho) \cup FI(\varrho)]$

Dikatakan $A_n(t;\varrho)$ himpunan titik $x \in I(\varrho)$ di mana $e^{\text{`}}$ dan $w_n(x) > t$, untuk setiap pasangan angka k, λ (dengan$k < \lambda$), kita akan dilambangkan dengan $\tau_n(k, \lambda; \varrho)$ yang terkecil dari dua angka mis $A_n(\lambda; \varrho)$, mis $[I(\varrho)/A_n(k;\varrho)]$.

Dengan alasan analog dengan yang diikuti untuk menguji (2) dalam kasus $w(x)$ semilinear, kami membuktikan

untuk setiap bilangan bulat positif untuk setiap pasangan bilangan real k, λ (dengan $k < \lambda$). Di sisi lain, dia meninggalkan (13) jika dia menyimpulkan, untuk hampir semua nilai t,

dan karena itu dari $(13), (14), (15)$ kami menyimpulkan bahwa (2) berlaku untuk hampir semua pasangan k, λ (dengan $k < \lambda$). Tetapi mudah untuk melihat bahwa jika (2) berlaku untuk hampir semua pasangan k, λ (dengan $k < \lambda$) selalu berlaku; hanya mengamati itu

Bukti Untuk setiap bilangan bulat positif n, kami menyatakan dengan λ_n bilangan terkecil dari λ yang memverifikasi

dan kami menetapkan $\lambda_0 = k$; jelas akan

dan, untuk definisi himpunan $A(\lambda;\varrho), B(\lambda;\varrho)$,

Dari (22) kami menyimpulkan adanya suksesi himpunan

sedemikian rupa sehingga untuk setiap nilai n adalah

Dari lemma II dan dari $(18), (22), (24')$ berikut

dan karena itu untuk ketimpangan Schwarz dan le $(24), (25)$, ditemukan

Dari $(23), (26)$ berikut

sedangkan untuk le $(21), (23), (24), (24')$ kami miliki

Jika sekarang kita menyatakan dengan θ semakin besar angkanya kita akan memiliki, untuk setiap bilangan bulat positif m,

sedangkan untuk persamaan (27) kita miliki

Dari $(28), (30)$ berikut

dan karena itu, jika diminta

dari $(31), (32), (33)$ berikut (19). mengikuti

Bukti Membiarkan $\theta(\varrho)$ menjadi yang terbesar dari angka θ yang secara bersamaan memenuhi

di mana γ dan β_2 adalah konstanta yang campur tangan dalam (1) dari n . 1 dan (19); seandainya untuk memverifikasi $(34), (36)$ kita harus membuktikan bahwa (35) berlaku dan untuk tujuan ini kita akan menempatkan

Untuk properti ke-$3^(\alpha)$ dari fungsi-fungsi kelas $B(E; \gamma)$ (lihat nomor 1), kita akan memiliki

sedangkan untuk le $(34), (37), (39)$ dan untuk lemma III kami memiliki

Dari $(40), (41)$ berikut

di sisi lain, menjadi untuk (39)

dari $(42), (43)$ mengikuti dimana itu ditempatkan

Mari kita coba dengan induksi bahwa, untuk setiap bilangan bulat nonnegatif, valid

the $(45), (46)$ per $l = 0$ adalah konsekuensi langsung dari $(34), (36), (39)$; di sisi lain jika $(45), (46)$ diverifikasi untuk $l = h$, begitu juga per $l = h + 1$ berdasarkan dari $(38), (42), (44)$. Dari (45) melewati batas dengan $l \to \infty$ mengingatkan (39) yang kita peroleh (35) dan lemma terbukti.

Pengamatan I. - Sejak ketika $w(x)$ milik kelas $B(E;\gamma)$ juga ada fungsi - $w(x)$, di sebelah lemmas II, III, IV lemma analog ada di mana himpunan $B(k;\varrho)$ sebagai ganti himpunan $A(k;\varrho)$.

untuk hasil Stampacchia dan Hopf (lihat [9] secara teoritis VII).