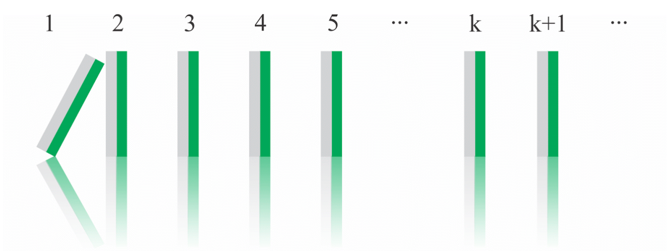
SMATIKA MATERI UJIAN NASIONAL BLOGGER

Home › Induksi Matematika › Induksi Matematika

Induksi Matematika

By Zero Maker - Saturday, July 15, 2017



Induksi matematika adalah suatu metode pembuktian deduktif yang digunakan untuk membuktikan pernyataan matematika yang bergantung pada himpunan bilangan yang terurut rapi (well ordered set), seperti bilangan asli ataupun himpunan bagian tak kosong dari bilangan asli.

Perlu ditekankan bahwa induksi matematika hanya digunakan untuk membuktikan kebenaran dari suatu pernyataan atau rumus, bukan untuk menurunkan rumus. Atau lebih tegasnya induksi matematika tidak dapat digunakan untuk menurunkan atau menemukan rumus.

Berikut beberapa contoh pernyataan matematika yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika :
P(n) : $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$, n bilangan asli
P(n) : $6^n + 4$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.
P(n) : $4n < 2^n$, untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$

Cara yang paling mudah untuk memahami prinsip kerja induksi matematika adalah dengan mengamati efek domino. Kita dapat mulai dengan mengajukan pertanyaan "kapan semua domino akan jatuh".

POPULAR POSTS


Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linier Satu Variabel

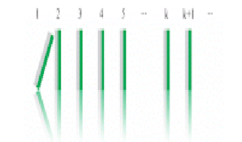

Pembahasan Soal UN Dimensi Tiga


Menentukan Interval Fungsi Naik dan Fungsi Turun


Turunan Fungsi Trigonometri

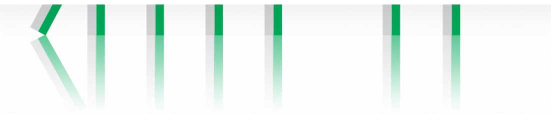

Pertidaksamaan Rasional atau Pecahan


Persamaan Garis Singgung Kurva


Induksi Matematika


Pembahasan Soal UN Aplikasi Turunan

LABELS



Ada dua kondisi yang harus dipenuhi agar semua domino tersebut jatuh.
Pertama : **domino 1 harus jatuh**.
Kedua : benar bahwa setiap domino yang jatuh akan menjatuhkan tepat satu domino berikutnya. Artinya jika domino 1 jatuh maka domino 2 pasti jatuh, jika domino 2 jatuh maka domino 3 pasti jatuh dan seterusnya. Secara umum dapat kita katakan **jika domino k jatuh maka domino (k + 1) juga jatuh** dan implikasi ini berlaku untuk semua domino.

Jika kedua kondisi diatas telah terpenuhi, sudah dipastikan semua domino akan jatuh.

Prinsip Induksi Matematika

Misalkan P(n) adalah suatu pernyataan yang bergantung pada n. P(n) benar untuk setiap n bilangan asli jika memenuhi 2 kondisi berikut :

1. P(1) benar, artinya untuk n = 1 maka P(n) bernilai benar.
2. Untuk setiap bilangan asli k, jika P(k) benar maka P(k + 1) juga benar.

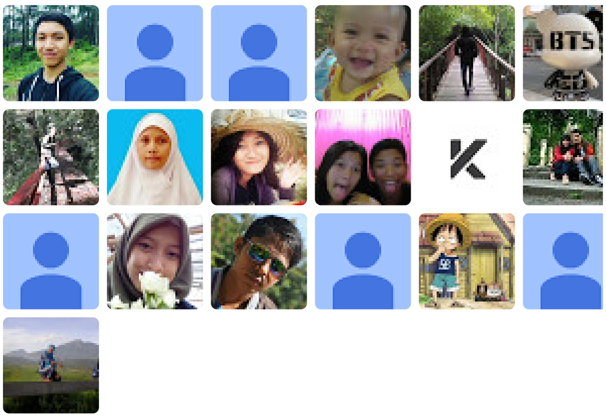
Prinsip diatas dapat diperluas untuk pernyataan yang bergantung pada himpunan bagian tak kosong dari bilangan asli.

Perluasan Prinsip Induksi Matematika
Misalkan P(n) adalah suatu pernyataan yang bergantung pada n. P(n) benar untuk setiap bilangan asli n ≥ m jika memenuhi 2 kondisi berikut :

1. P(m) benar, artinya untuk n = m, maka P(n) bernilai benar
2. Untuk setiap bilangan asli k ≥ m, jika P(k) benar maka P(k + 1) juga benar.

Untuk menunjukkan P(1) benar, kita cukup

Induksi Matematika | Integral | Limit | Lingkaran | Logaritma | Matriks | Nilai Mutlak | Peluang | Persamaan Kuadrat | Pertidaksamaan | SBMPTN | Sudut | Transformasi | Trigonometri | Turunan | Ujian Nasional | Vektor



simpulkan P(1) benar. Cara yang sama dapat kita terapkan untuk menunjukkan P(m) benar.

Kembali lagi pada kasus domino diatas, agar domino (k + 1) jatuh, terlebih dahulu domino k harus jatuh, barulah implikasi "jika domino k jatuh maka domino (k + 1) jatuh" dapat terjadi.

Jadi, untuk menunjukkan implikasi "jika P(k) benar maka P(k + 1) benar", terlebih dulu kita harus menganggap atau mengasumsikan bahwa P(k) benar. Kemudian berdasarkan asumsi tersebut kita tunjukkan P(k + 1) juga benar. Proses asumsi P(k) benar ini disebut dengan **hipotesis induksi**.

Untuk menunjukkan P(k + 1) benar, dapat kita mulai dari **hipotesis**, yaitu dari asumsi P(k) benar ataupun dari **kesimpulan**, yaitu dari P(k + 1) itu sendiri.

Langkah-Langkah Pembuktian Induksi Matematika

Dari uraian-uraian diatas, langkah-langkah pembuktian induksi matematika dapat kita urutkan sebagai berikut :

1. **Langkah dasar** : Tunjukkan P(1) benar.
2. **Langkah induksi** : Asumsikan P(k) benar untuk sebarang k bilangan asli, kemudian tunjukkan P(k+ 1) juga benar berdasarkan asumsi tersebut.
3. **Kesimpulan** : P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Pembuktian Deret

Sebelum masuk pada pembuktian deret, ada beberapa hal yang perlu dipahami dengan baik menyangkut deret.

Jika P(n) : $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = S_n$, maka

P(1) : $u_1 = S_1$

P(k) : $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k = S_k$

Contoh 1

Buktikan $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$, untuk setiap n bilangan asli.

Jawab :

P(n) : $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$
Akan dibuktikan P(n) benar untuk setiap $n \in N$

Langkah Dasar :
Akan ditunjukkan P(1) benar
$2 = 1(1 + 1)$
Jadi, P(1) benar

Langkah Induksi :
Asumsikan P(k) benar yaitu
$2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k + 1), \quad k \in N$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu
$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)$

Dari asumsi :
$2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k + 1)$
Tambahkan kedua ruas dengan u_{k+1} :
$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2(k + 1)$
$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$
$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)$
Jadi, P(k + 1) benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa P(n) benar untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 2

Buktikan $\mathbf{1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2}$ benar, untuk setiap n bilangan asli

Jawab :

P(n) : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
Akan ditunjukkan P(n) benar untuk setiap $n \in N$

Langkah Dasar :
Akan ditunjukkan P(1) benar
$1 = 1^2$
Jadi, P(1) benar

Asumsikan P(k) benar, yaitu

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2, \quad k \in N$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$

Dari asumsi :

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$

Tambahkan kedua ruas dengan u_{k+1} :

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1)$

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1$

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$

Jadi, P(k + 1) juga benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa P(n) benar untuk setiap n bilangan asli.

Pembuktian Keterbagian

Pernyataan "a habis dibagi b" bersinonim dengan :

- a kelipatan b
- b faktor dari a
- b membagi a

Jika p habis dibagi a dan q habis dibagi a, maka (p + q) juga habis dibagi a.

Sebagai contoh, 4 habis dibagi 2 dan 6 habis dibagi 2, maka (4 + 6) juga habis dibagi 2

Contoh 3

Buktikan $6^n + 4$ habis dibagi 5, untuk setiap n bilangan asli.

Jawab :

P(n) : $6^n + 4$ habis dibagi 5

Akan dibuktikan P(n) benar untuk setiap $n \in N$.

Langkah Dasar :

Akan ditunjukkan P(1) benar

$6^1 + 4 = 10$ habis dibagi 5

Jadi, P(1) benar

Asumsikan P(k) benar, yaitu
$6^k + 4$ habis dibagi 5, $k \in N$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu
$6^{k+1} + 4$ habis dibagi 5.

$6^{k+1} + 4 = 6(6^k) + 4$
$6^{k+1} + 4 = 5(6^k) + 6^k + 4$

Karena $5(6^k)$ habis dibagi 5 dan $6^k + 4$ habis dibagi 5,
akibatnya $5(6^k) + 6^k + 4$ juga habis dibagi 5.
Jadi, P(k + 1) benar.

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa $6^n + 4$ habis dibagi 5, untuk setiap n bilangan asli.

Bilangan bulat a habis dibagi bilangan bulat b jika terdapat bilangan bulat m sehingga berlaku $a = bm$.
Sebagai contoh, "10 habis dibagi 5" benar karena terdapat bilangan bulat m = 2 sehingga 10 = 5.2. Jadi, pernyataan "10 habis dibagi 5" dapat kita tulis menjadi "10 = 5m, untuk m bilangan bulat"
Berdasarkan konsep diatas, pembuktian keterbagian dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut.

Contoh 4
Buktikan $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk setiap n bilangan asli

Jawab :
P(n) : $n^3 + 2n = 3m$, dengan $m \in \mathbb{Z}$
Akan dibuktikan P(n) benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Langkah Dasar :
Akan ditunjukkan P(1) benar
$1^3 + 2.1 = 3 = 3.1$
Jadi, P(1) benar

Langkah Induksi :
Asumsikan P(k) benar, yaitu
$k^3 + 2k = 3m$, $k \in \mathbb{N}$

$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3p, \quad p \in \mathbb{Z}$

$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3m + 3(k^2 + k + 1)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3(m + k^2 + k + 1)$

Karena m bilangan bulat dan k bilangan asli, maka $(m + k^2 + k + 1)$ adalah bilangan bulat.
Misalkan $p = (m + k^2 + k + 1)$, maka
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3p$, dengan $p \in \mathbb{Z}$
Jadi, P(k + 1) benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk setiap n bilangan asli.

Pembuktian Pertidaksamaan

Berikut sifat-sifat pertidaksamaan yang sering digunakan
1. Sifat transitif
   $a > b > c \Rightarrow a > c$ atau
   $a < b < c \Rightarrow a < c$

2. $a < b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ atau
   $a > b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ atau
   $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Sebelum masuk pada contoh soal, ada baiknya kita latihan menggunakan sifat-sifat diatas untuk menunjukkan implikasi "jika P(k) benar maka P(k + 1) juga benar".

Misalkan
P(k) : $4k < 2^k$
P(k + 1) : $4(k + 1) < 2^{k+1}$
Jika diasumsikan P(k) benar untuk $k \geq 5$, tunjukkan P(k + 1) juga benar !

Kita dapat mulai dari ruas kiri pertaksamaan diatas
$4(k + 1) = 4k + 4$
$4(k + 1) < 2^k + 4$ (karena $4k < 2^k$)
$4(k + 1) < 2^k + 2^k$ (karena $4 < 4k < 2^k$)
$4(k + 1) = 2(2^k)$
$4(k + 1) = 2^{k+1}$

Berdasarkan sifat transitif kita simpulkan
$4(k + 1) < 2^{k+1}$

Mengapa 4k dapat berubah menjadi 2^k ?
Berdasarkan sifat 3, kita diperbolehkan menambahkan kedua ruas suatu pertaksamaan dengan bilangan yang sama, karena tidak akan merubah nilai kebenaran pertaksamaan tersebut. Karena $4k < 2^k$ benar, akibatnya $4k + 4 < 2^k + 4$ juga benar.

Darimana kita tahu, 4 harus diubah menjadi 2^k ?
Perhatikan target. Hasil sementara kita adalah $2^k + 4$ sedangkan target kita adalah $2^k + 2^k$.
Untuk $k \geq 5$, maka $4 < 4k$ dan $4k < 2^k$ adalah benar, sehingga $4 < 2^k$ juga benar (sifat transitif). Akibatnya $2^k + 4 < 2^k + 2^k$ benar (sifat 3).

Contoh 5
Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ berlaku
$3n < 2^n$

Jawab :
P(n) : $3n < 2^n$
Akan dibuktikan P(n) berlaku untuk $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$

Langkah Dasar :
Akan ditunjukkan P(4) benar
$3.4 = 12 < 2^4 = 16$
Jadi, P(4) benar

Langkah Induksi :
Asumsikan P(k) benar, yaitu
$3k < 2^k, \quad k \geq 4$

$3(k + 1) < 2$

$3(k + 1) = 3k + 3$
$3(k + 1) < 2^k + 3$ (karena $3k < 2^k$)
$3(k + 1) < 2^k + 2^k$ (karena $3 < 3k < 2^k$)
$3(k + 1) = 2(2^k)$
$3(k + 1) = 2^{k+1}$

Jadi, P(k + 1) juga benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa P(n) berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

Contoh 6
Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$ berlaku
$3^n > 1 + 2n$

Jawab :
P(n) : $3^n > 1 + 2n$
Akan dibuktikan P(n) berlaku untuk $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

Langkah Dasar :
Akan ditunjukkan P(2) benar
$3^2 = 9 > 1 + 2.2 = 5$
Jadi, P(1) benar

Langkah Induksi :
Asumsikan P(k) benar, yaitu
$3^k > 1 + 2k, \quad k \geq 2$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu
$3^{k+1} > 1 + 2(k + 1)$

$3^{k+1} = 3(3^k)$
$3^{k+1} > 3(1 + 2k)$ (karena $3^k > 1 + 2k$)
$3^{k+1} = 3 + 6k$
$3^{k+1} > 3 + 2k$ (karena $6k > 2k$)
$3^{k+1} = 1 + 2k + 2$
$3^{k+1} = 1 + 2(k + 1)$

Jadi, P(k + 1) juga benar

bahwa P(n) berlaku untuk setiap bilangan asli n ≥ 2.

Contoh 7

Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 5$ berlaku

$2n - 3 < 2^{n-2}$

Jawab :

P(n) : $2n - 3 < 2^{n-2}$

Akan dibuktikan P(n) berlaku untuk $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$

Langkah Dasar :

Akan ditunjukkan P(5) benar

$2.5 - 3 = 7 < 2^{5-2} = 8$

Jadi, P(1) benar

Langkah Induksi :

Asumsikan P(k) benar, yaitu

$2k - 3 < 2^{k-2}$, $k \geq 5$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu

$2(k + 1) - 3 < 2^{k+1-2}$

$2(k + 1) - 3 = 2k + 2 - 3$

$2(k + 1) - 3 = 2k - 3 + 2$

$2(k + 1) - 3 < 2^{k-2} + 2$ (karena $2k - 3 < 2^{k-2}$)

$2(k + 1) - 3 < 2^{k-2} + 2^{k-2}$ (karena $2 < 2k - 3 < 2^{k-2}$)

$2(k + 1) - 3 = 2(2^{k-2})$

$2(k + 1) - 3 = 2^{k+1-2}$

Jadi, P(k + 1) juga benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa P(n) berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq 5$.

Contoh 8

Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ berlaku

$(n + 1)! > 3^n$

Jawab :

P(n) : $(n + 1)! > 3^n$

Akan dibuktikan P(n) berlaku untuk $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$

Akan ditunjukkan P(4) benar

$(4 + 1)! > 3^4$

ruas kiri : $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

ruas kanan : $3^4 = 81$

Jadi, P(1) benar

Langkah Induksi :

Asumsikan P(k) benar, yaitu

$(k + 1)! > 3^k$, $k \geq 4$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu

$(k + 1 + 1)! > 3^{k+1}$

$(k + 1 + 1)! = (k + 2)!$

$(k + 1 + 1)! = (k + 2)(k + 1)!$

$(k + 1 + 1)! > (k + 2)(3^k)$ (karena $(k + 1)! > 3^k$)

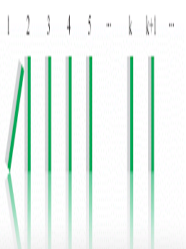
$(k + 1 + 1)! > 3(3^k)$ (karena $k + 2 > 3$)

$(k + 1 + 1)! = 3^{k+1}$

Jadi, P(k + 1) juga benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa P(n) berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

RELATED POSTS



Induksi Matematika

MATERI UJIAN NASIONAL BLOGGER

Recommend Share Sort by Newest

Start the discussion…

LOG IN WITH

OR SIGN UP WITH DISQUS ?

Name

Be the first to comment.

NEXT POST PREV POST

ABOUT CONTACT DISCLAIMER PRIVACY