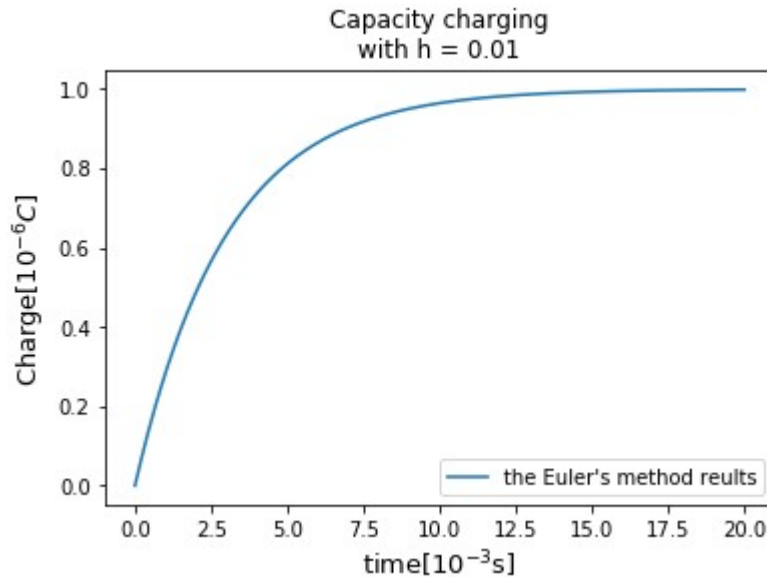


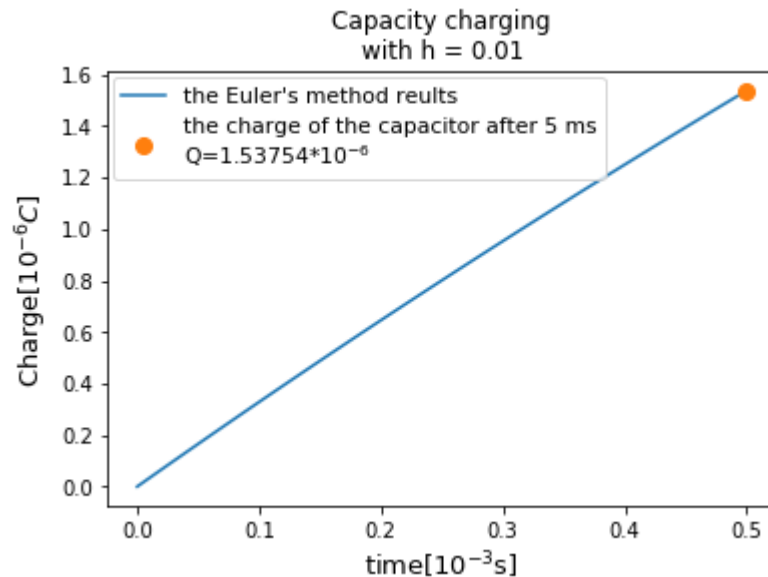
$$dQ/dt = (V - Q/C)/R$$

$$dQ/dt = (10 - Q/1)/3$$

حال با روش اویلر این معادله دیفرانسیل را حل میکنیم:



در شکل بالا میبینید که شارژ شدن خازن را تا ۲۰ میلی ثانیه حل کردیم. اگر بخواهیم فقط جواب تا نیم میلی ثانیه را نشان دهیم خواهیم داشت:

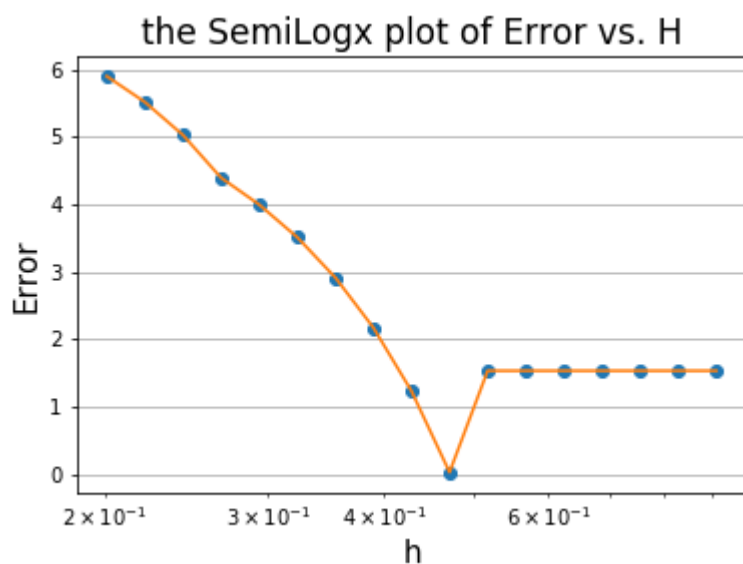


مقایسه با جواب واقعی:

میدانیم که جواب واقعی معادله دیفرانسیل مربوط به شارژ شدن خازن عبارت است از:

$$Q = CV(1 - e^{-t/RC})$$

حال اگر اختلاف با جواب واقعی را برای  $h$  های مختلف رسم کنیم انتظار داریم که خطا به صورت خطی با  $h$  کم شود. اما درحقیقت آنچه مشاهده میکنیم این است که برای  $h$  های بسیار کوچک خطا به صورت نمایی زیاد می شود. این اتفاق بخاطر خطای گرد کردن کامپیوتر است. در شکل زیر نمودار نیمه لگاریتمی را میتوانید مشاهده کنید:



## حل معادله دیفرانسیل مربوط به نوسانگر هماهنگ ساده:

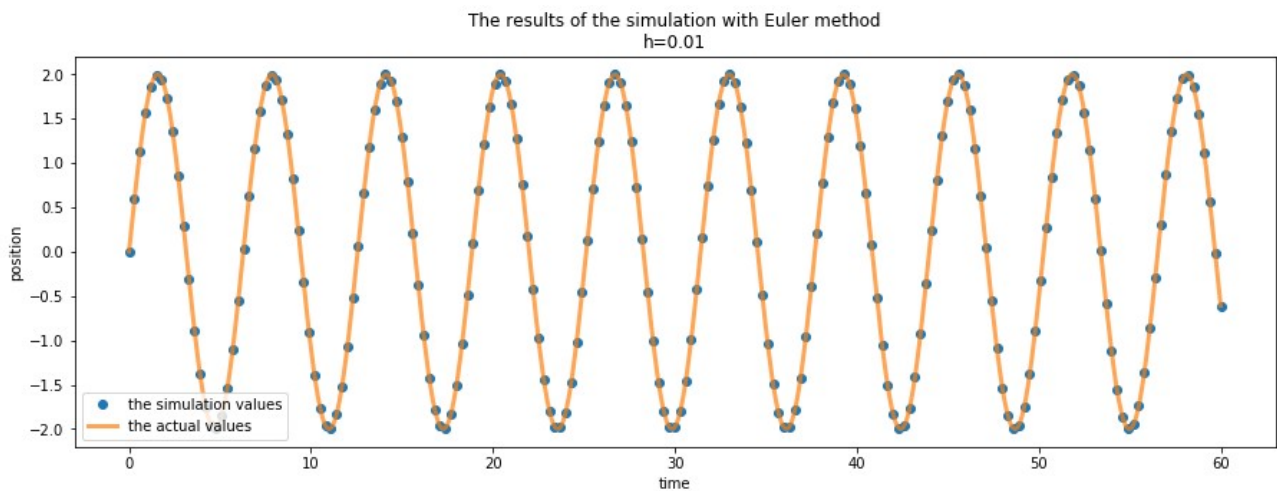
اگر واحد های کاهیده خوب و مناسبی انتخاب کنیم، معادله دیفرانسیل مربوط به نوسانگر ساده به شکل زیر درمیآید:

$$X'' = -X$$

حال در این بخش از تمرین این معادله دیفرانسیل را با روش های مختلف حل کرده و جواب هارا با هم مقایسه میکنیم:

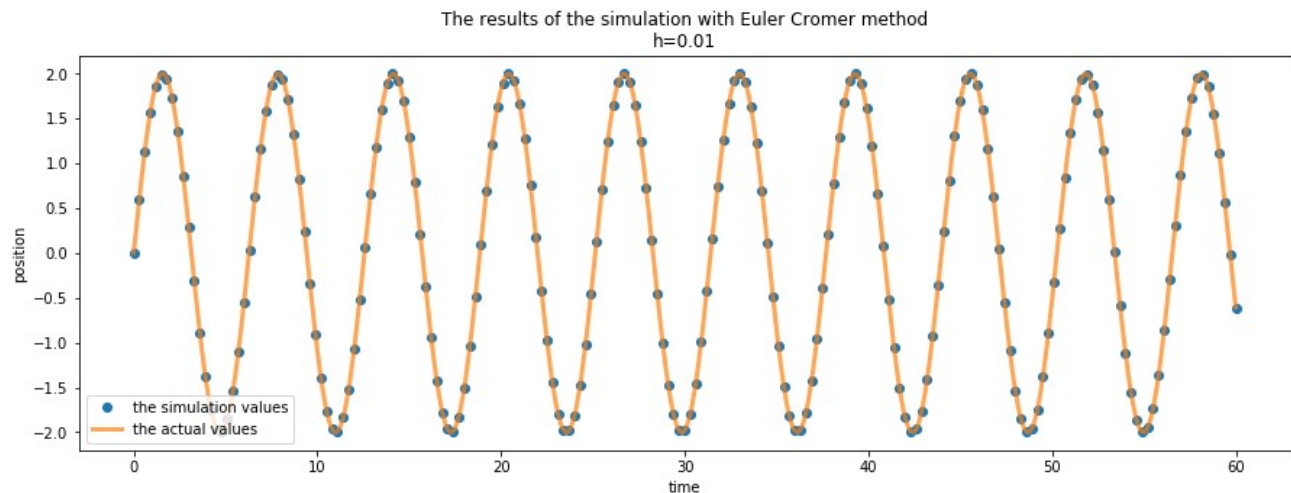
### ۱. روش اویلر:

در شکل زیر میتواند جواب معادله دیفرانسیل را که با این روش حل شده است را ببینید:



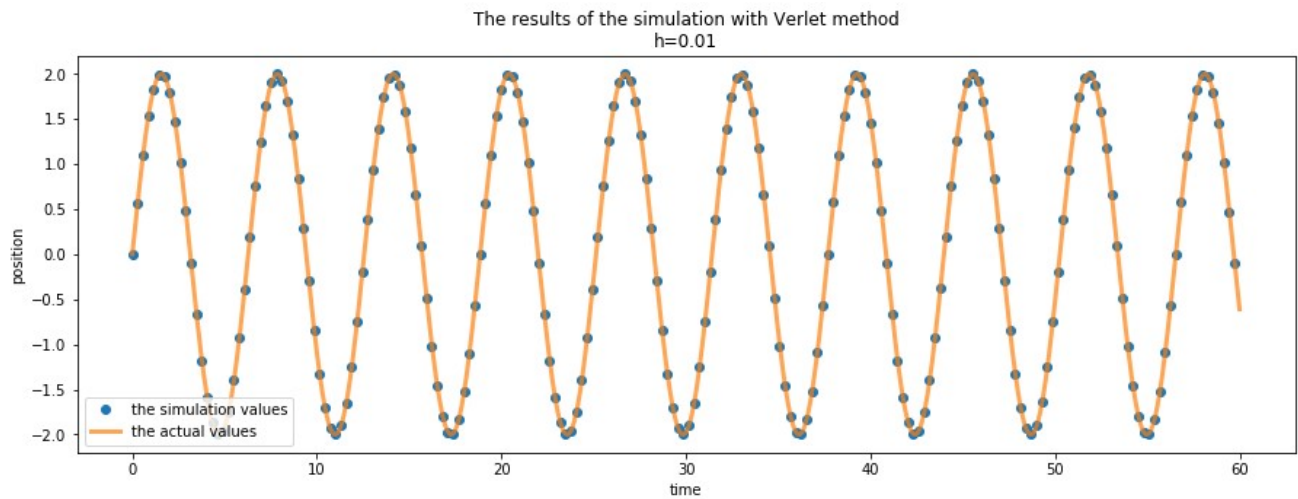
### ۲. روش اویلر کرامر:

برای استفاده از روش اویلر کرامر مطابق دستورالعمل نوشته شده در کد عمل میکنیم:

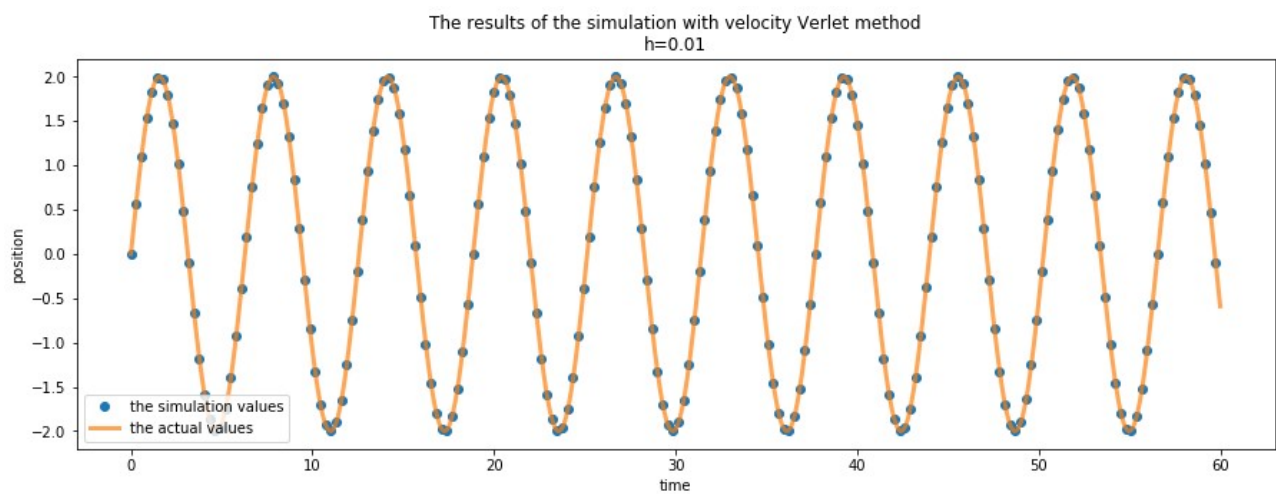


### ۳. الگوریتم ورله:

با این شبیه سازی میتوان به نتایج زیر رسید:



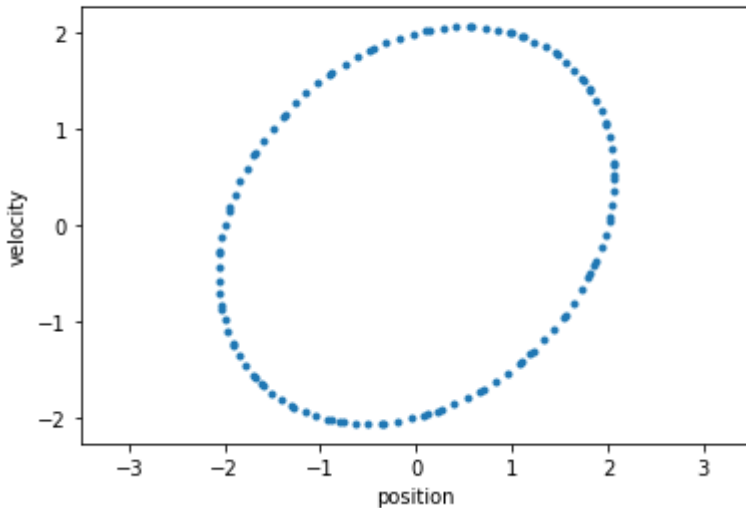
### ۴. الگوریتم ورله سرعتی:



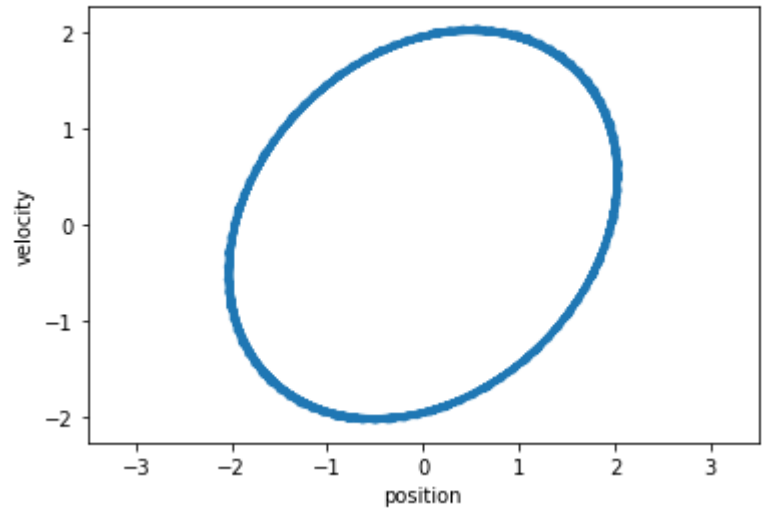
### نمودار های سرعت بر حسب مکان:

در این بخش می‌خواهیم نمودار های سرعت بر حسب مکان را برای این نویسانگر ها رسم کنیم. برای اینکه اثرات ناپایداری انرژی ملموس‌تر دیده شود  $h$  را بزرگ‌تر می‌گیریم تا به سادگی بتوانیم الگوریتم‌ها را باهم مقایسه کنیم.

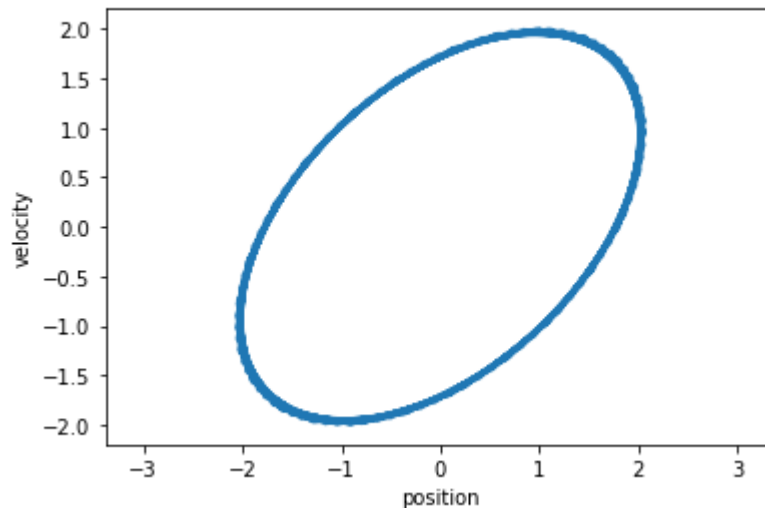
the v-x plot of the results of the Eurler method with the  $h=0.5$



the v-x plot of the results of the Eurler Cromer method with the  $h=0.5$



the v-x plot of the results of the Velocity Verlet method with the  $h=0.5$

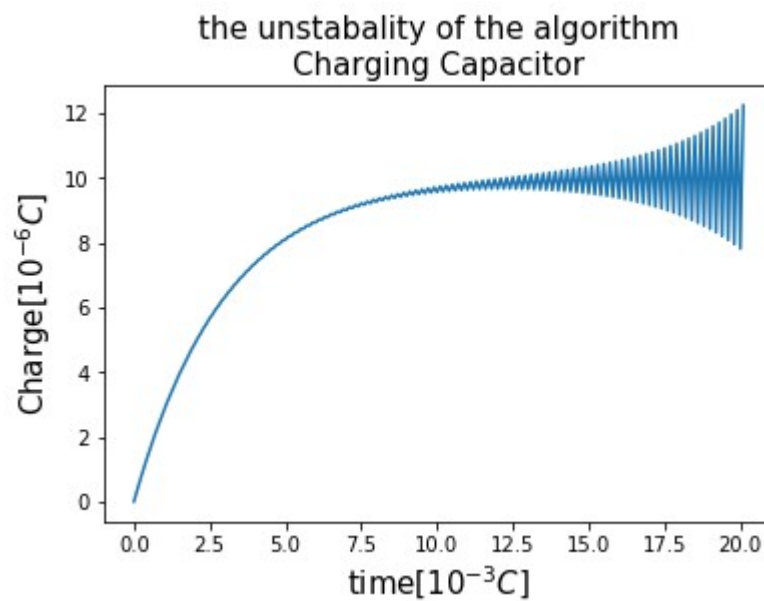


### ناپایداری الگوریتم:

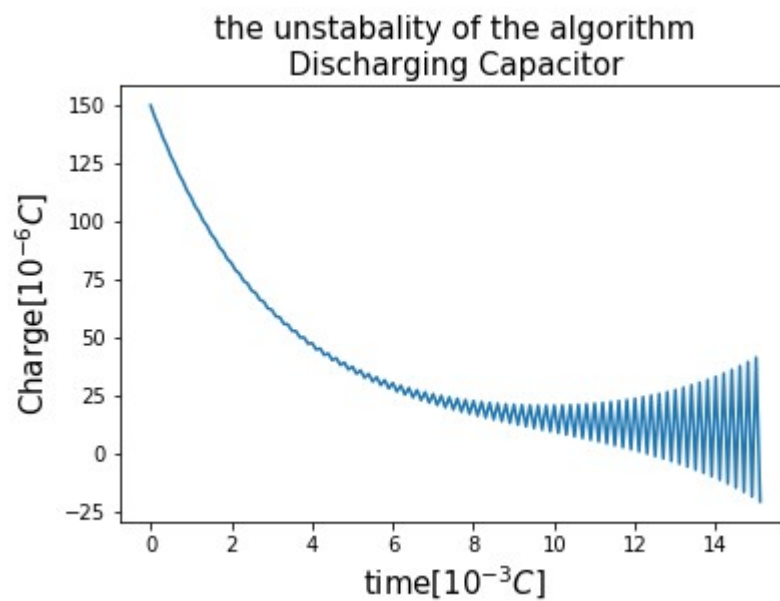
$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2y'_n h$$

در کلاس بررسی کردیم که این الگوریتم ناپایدار است و در این بخش از تمرین می‌خواهیم این را روی شارژ شدن و خالی شدن خازن بررسی کنیم:

۱. شارژ شدن خازن:



2. تخلیه شدن خازن:



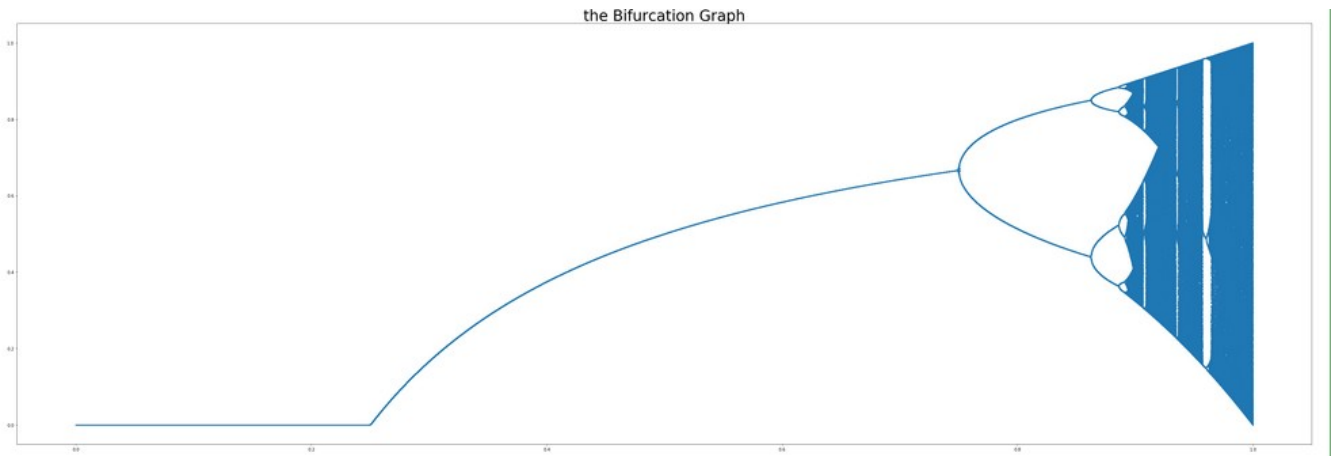
**پدیده آشوب:**

یکی از مدل های بسیار زیبایی که هم به زیبایی پدیده آشوب را نشان میدهد و هم در بسیاری از مدل های رشد جمعیت کاربرد دارد رابطه معروف زیر است:

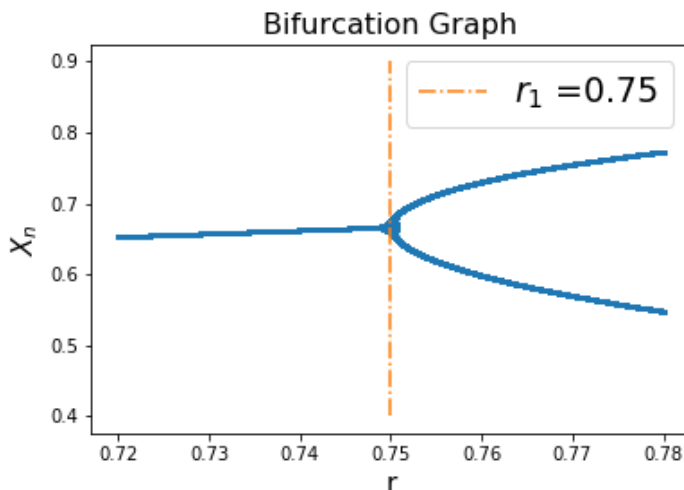
$$X_{n+1} = 4rX_n(1-X_n)$$

d

حال بیایید یک راهی برای نمایش دادن  $X_n$  ها بیابیم. ابتدا به ازای هر مقدار اولیه برای  $X_n$ ، اجازه میدیم چندین مرحله  $X_n$  ها تولید شوند. بعد از این مرحله  $X_n$  های تولید شده را به صورت زوج های مرتب به همراه مقدار  $r$  در یک آرایه ثبت میکنیم. حال اگر نمودار  $X_n$  به ازای  $r$  های مختلف را بکشیم به شکلی مثل شکل زیر خواهیم رسید:

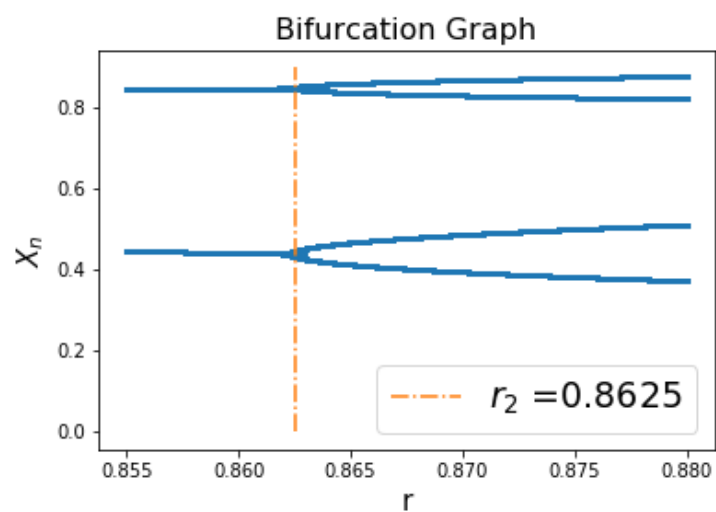


بسیار عجیب است. در نقاط خاصی مقدار  $X_n$  های به دست آمده دوشاخه می شوند و به صورت متناوب تکرار می شوند و بعد از یجایی به بعد مقدار  $X_n$  ها دیگر متناوب نیست و سیستم آشوبناک و فاقد نظم میشود. به نظر میرسد در این نقاط دوشاخه شدن اتفاق های جالبی می افتد. لذا به نظر جالب میرسد که در این نقاط زوم کنیم و این نقاط را بهتر مشاهده کنیم:



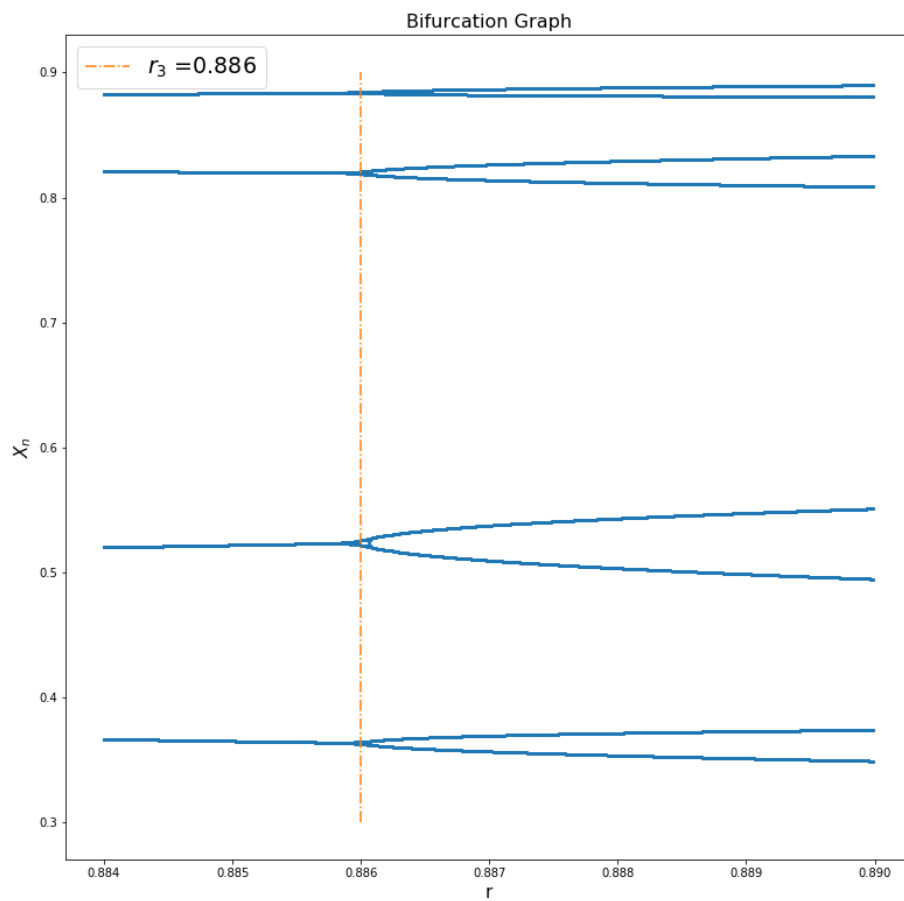
اولین دو تکه شدن در  $r = 0.75$  اتفاق می افتد. محل اتفاق افتادن را میتوانید در شکل روبرو ببینید.

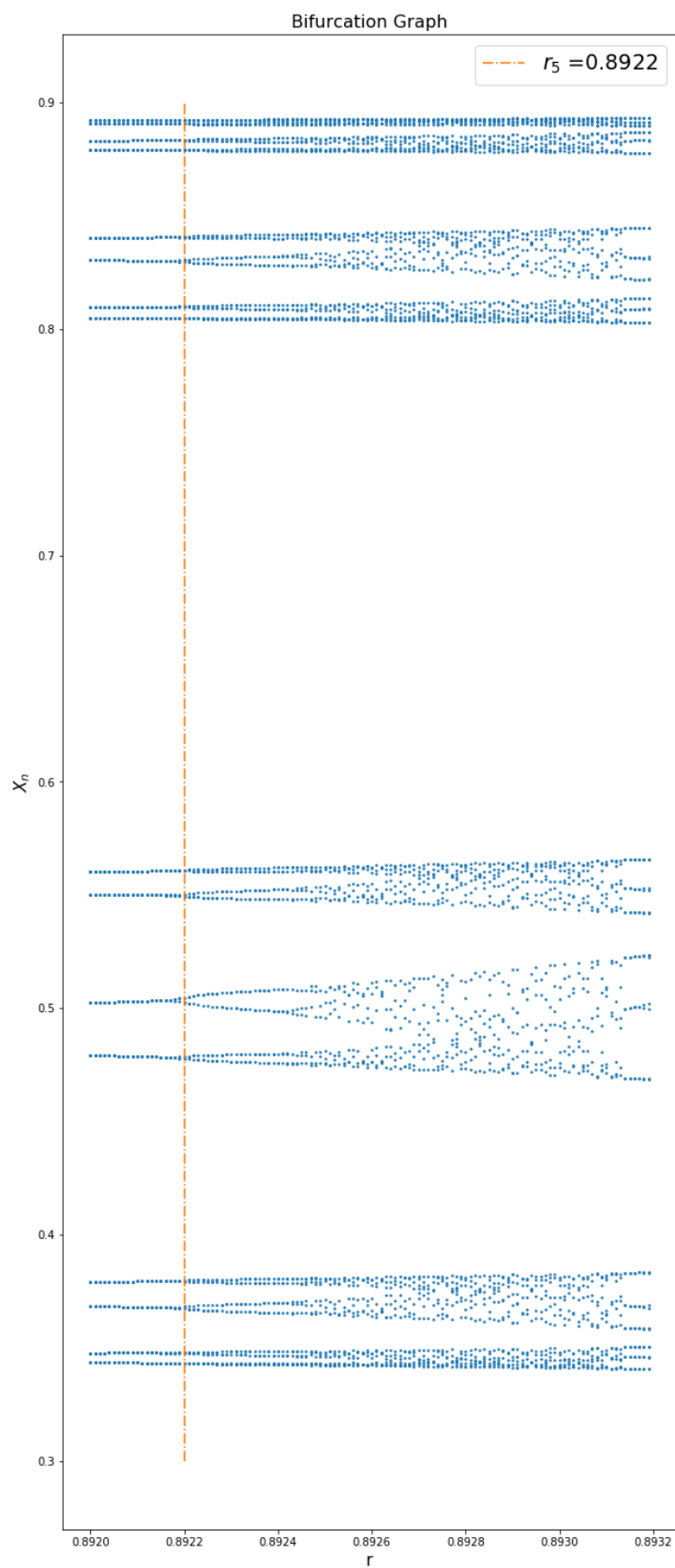
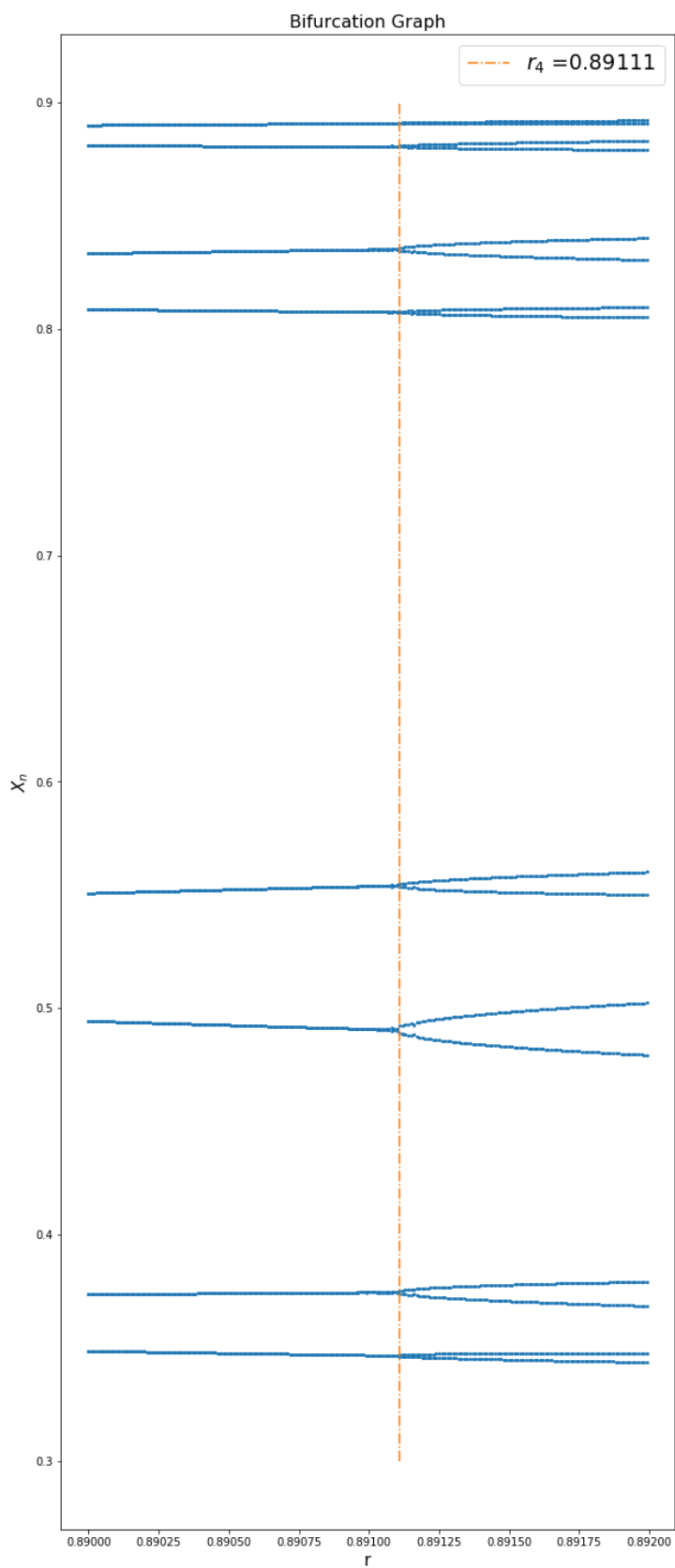




محل دومین دوشاخگی را می‌توانید در شکل مقابل ببینید. این اتفاق در  $r = 0.8625$  می‌افتد و بعد از آن نمودار درواقع چهار شاخه می‌شود. به عبارتی دیگر مقادیر  $X_n$  با تناوب چهار تکرار می‌شود.

اگر کمی جلوتر رویم در  $r = 0.886$  نمودار دوباره دوشاخه می‌شود و اینبار مقادیر  $X_n$  با تناوب ۸ تکرار میشوند.





در دوشکل بالا مشاهده میکنید که برای بار چهارم و پنجم نیز نمودار دوشاخه میشود. اما بعد از  $r$  خاصی این تناوب ها از بین می رود و سیستم آشوبناک میشود.

حال اگر این  $r$  ها را کنار هم بگذاریم خواهیم داشت:

0.75, 0.8625, 0.886, 0.89111, 0.8922

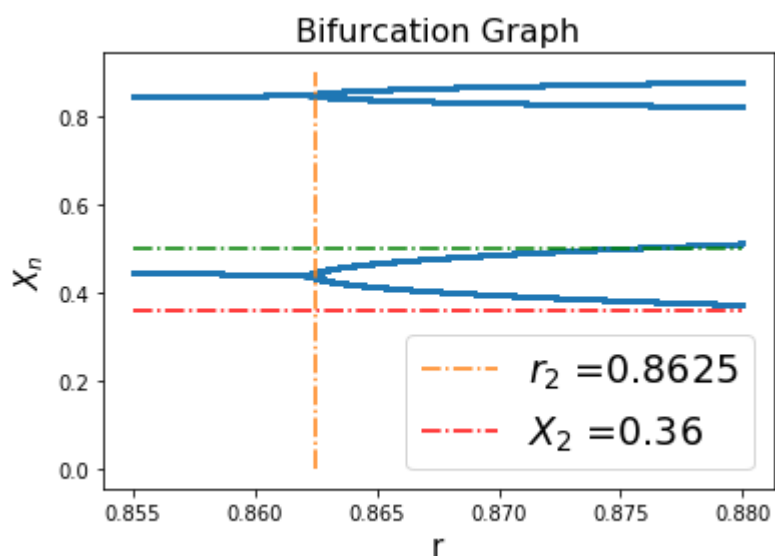
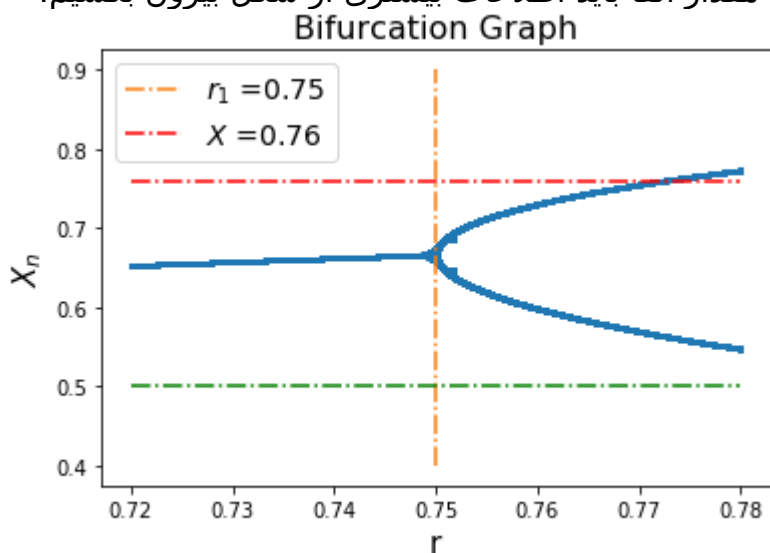
همانطور که میبینید این شعاع ها رفته رفته به هم نزدیک تر می شوند تا اینکه به شعاع بحرانی برسند. حال اگر بخواهیم از این اعداد مقدار دلتا را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n}$$

پس مقدار حساب شده برای دلتا برابر است با:

$$\delta = 4.6881$$

حال برای حساب کردن مقدار آلفا باید اطلاعات بیشتری از شکل بیرون بکشیم:



به دلیل اینکه دسترسی به مقدار قطر بازشدگی نمودار برای  $r$  های بزرگ بسیار سخت است لذا به دوتای اول اکتفا میکنیم.  
پس برای حساب کردن آلفا اگر بنویسیم :

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_2}{X_1}$$

$$\alpha = 0.4736$$