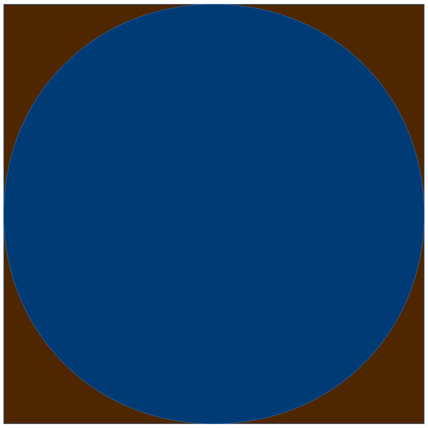
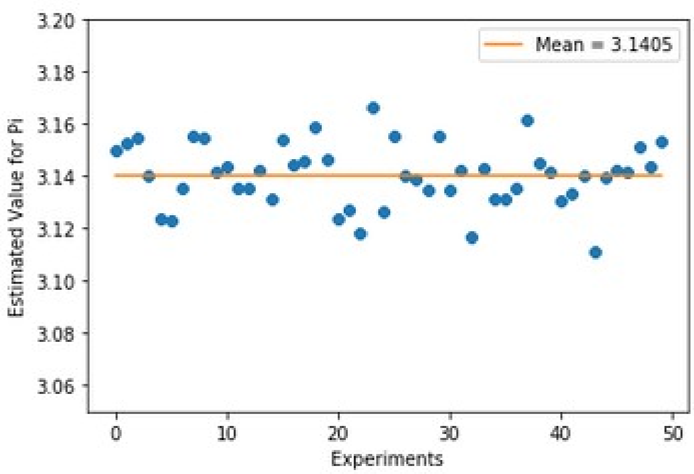
علی فعله پارنج ۹۵۱۰۰۸۸۶

محاسبه عدد پی به کمک الگوریتم شلپ:



در این بخش میخواهیم عدد پی را حساب کنیم.
فرض کنید که باغی به شکل روبرو داریم (مربع شکل) و حوضی درون آن وجود دارد که به شکل دایره است.
به صورت یکنواخت و رندم سنگ‌هایی داخل باغ می‌اندازیم. سنگ‌هایی که داخل آب می‌افتند صدای شلپ و سنگ‌هایی که روی خاک می‌افتند صدای تلپ میدهند. حاصل تقسیم شلپ ها بر کل ضرب در مساحت کل باغ انتظار داریم که برابر مساحت استخر باشد.

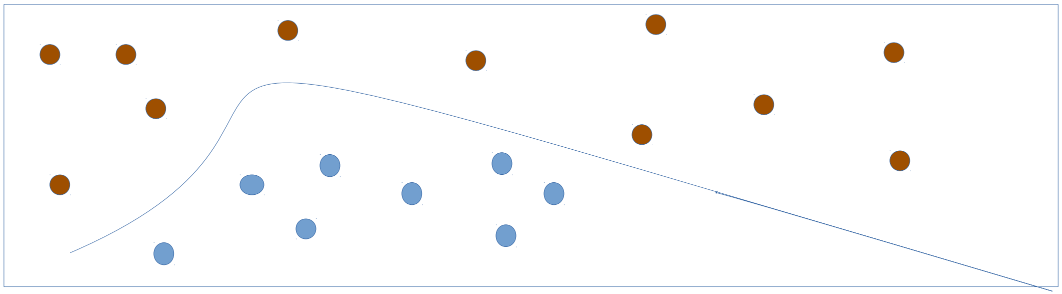
برای تست این ایده به نظر جالب خواهد بود اگر بخواهیم عدد پی را به کمک این رویکرد به دست بیاوریم.
برای این کار تعداد چندین جفت اعداد رندم تولید میکنیم و آن‌هایی که داخل دا
می‌افتند را قبول و سایرین را رد میکنیم.
انتظار داریم تعداد جفت اعداد رندم تولید شده به تعداد کل یک ضریبی از مساحت کل دایره باشد.
با کمی محاسبات میتوان مقدار عددی عدد پی را به دست آورد.
در شکل زیر مقدار عدد پی تولید شده به ازای آزمایش های مختلف را میتوانید مشاهده کنید:



متحیر کننده است. عدد پی با تقریب خوبی حساب شد.
حال ببینیم این روش را میتوان برای محاسبه انتگرال ها (که نقشی بسیار مهم و کلیدی در فیزیک دارند) نیز به کار بست؟

محاسبه انتگرال به روش simple sampling

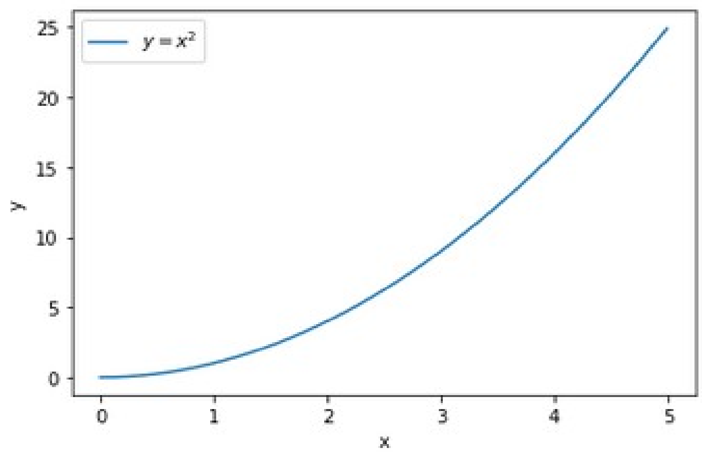
بیایید بجای حوض و باغ سنگ‌ها را داخل یک بخشی از صفحه مختصات بیندازیم.



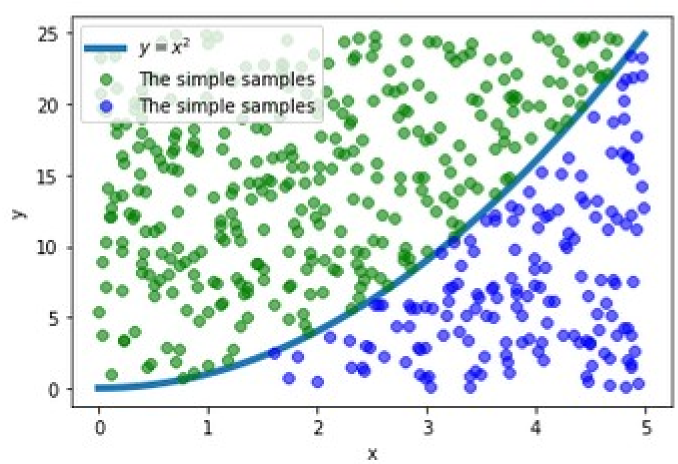
برای مثال شکل بالا را درنظر بگیرید.
دایره های آبی را شلپ و دایره های قهوه ای را تلپ در نظر بگیرید.
انتظار داریم که تعداد شلپ ها تقسیم بر تعداد کل ضرب در مساحت ناحیه مستطیلی نشان دهنده ی مساحت زیر منحنی باشد.

پس برای این کار به صورت رندم نقاط مختلفی از صفحه را انتخاب میکنیم و بررسی میکنیم که آیا زیر نمودار است یا نه و سپس تعداد نقاط زیر نمودار به تعداد کل را درمساحت بزرگترین مستطیلی که شکل را دربرمیگیرد ضرب میکنیم.
انتظار داریم این عدد برابر انتگرال ناحیه مربوطه باشد

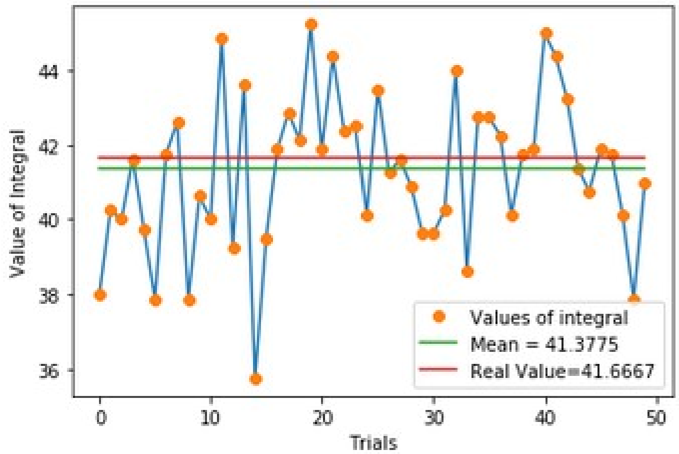
محاسبه انتگرال تابع سهمی:



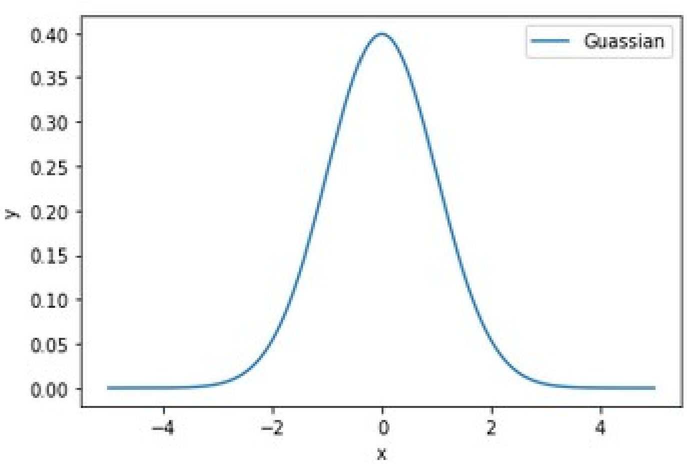
حال از نقاط مختلف صفحه نمونه برداری میکنیم:

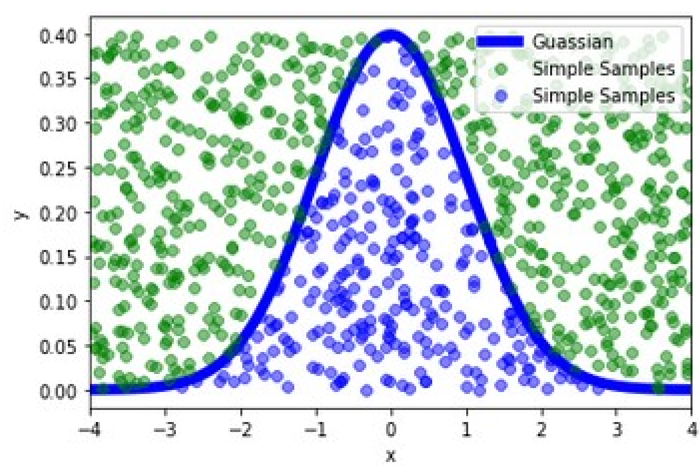


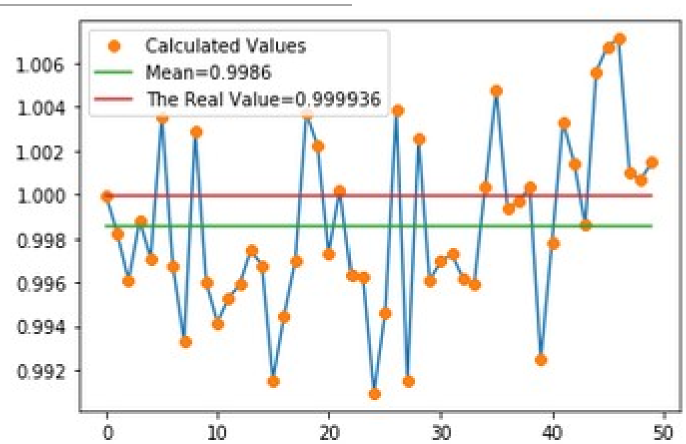
حال ببینیم برای آنسامبل های مختلف حاصل تقسیم تعداد نقاط زیر نمودار به تعداد کل نقاط ضرب در مربع محاط آیا انتگرال زیر نمودار را میدهد؟
شکل زیر این ایده را تست کرده است:



میبینیم که به شکل بسیار خوبی میتوان تقریبی از انتگرال داشت.
بیایید قبل از بهتر کردن روش انتگرال گیری با همین روش از زیر یک تابع گاوسی نیز انتگرال بگیریم:
محاسبه انتگرال تابع گوسی:

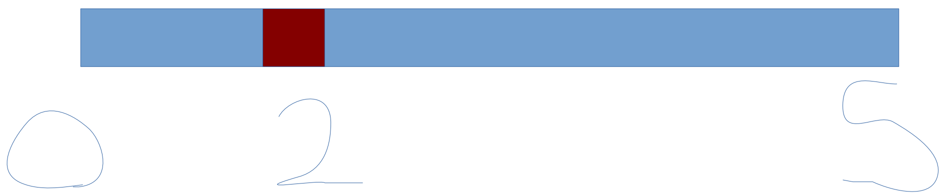




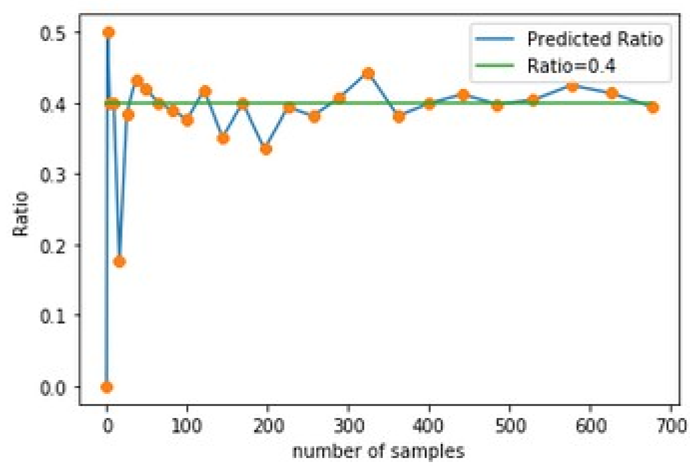


پس تا کنون با کلیت کار آشنا شدید.
اما حال وقت آن است که فکر کنیم آیا راهی وجود دارد که بتوانیم الگوریتم را بهتر کنیم؟

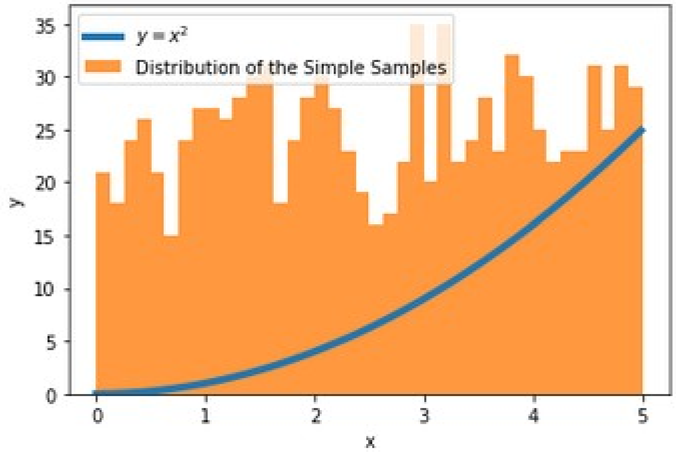
تصحیح نسبت:



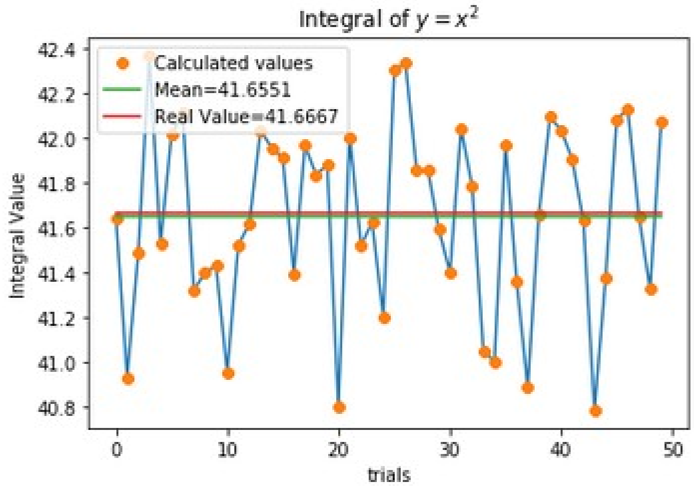
شکل بالا را درنظر بگیرید. فرض کنیم عداد رندمی بین ۰ تا ۵ تولید میکنیم و هر دفعه بررسی میکنیم ببینیم آیا بین بازه ۰ تا ۲ افتاده است یا ۲ تا ۵.
حدس میزنیم بنا به ویژگی‌هایی که از احتمال انتظار داریم، نسبت تعداد اعدادی که دربازه ۰ تا ۲ می‌افتند به تعداد کل برابر با 2/5 باشد. این موضوع را به کمک کامپیوتر چک میکنیم:

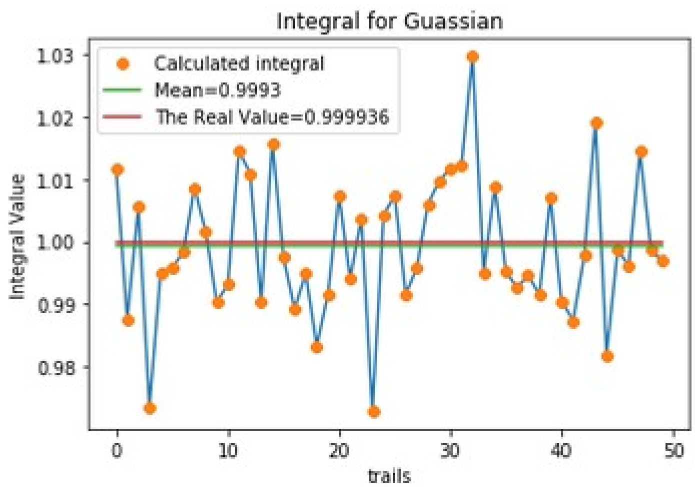


بی‌نظیر است. زیرا ما میتوانیم بجای تولید بینهایت عدد رندم برای قوی‌تر کردن آمار و دقیق‌تر گزارش کردن حاصل نسبت، بدون نیاز به تولید اعداد رندم به صورت تئوری مقدار نسبت را گزارش کنیم.
پس بجای تولید جفت اعداد تصادفی که کل صفحه را پوشش میدهد کافی است که اعداد روی محور افقی را به صورت رندم انتخاب کنیم (نمونه برداری کنیم) و حاصل تلپ به کل به ازای آن x را به صورت «مقدار تابع در آن نقطه تقسیم بر عرض مستطیل محاط» گزارش کنیم.
انتظار داریم که میانگین این مقدار که از سمپل های مختلف به دست می‌آید، اگر در مساحت مستطیل محاط ضرب شود مساحت زیر نمودار را به ما دهد.
در شکل مقابل میتوانید ببینید که درواقع با این کار به صورت یکنواخت از محور x ها نمونه برمیداریم و برای نقاط نمونه برداری شده مقدار ratio ای که بحثش شد را حساب میکنیم.



شکل زیر حاصل این انتگرال برای توابع گاوسی و سهمی که در بالا بررسی شد است:





با این تصحیح علاوه بر بیشتر شدن دقت در محاسبه انتگرال زمان اجرای آن نیز به شدت کاهش یافت (کمی جلوتر در جدولی همه این‌ها را مقایسه خواهم کرد)

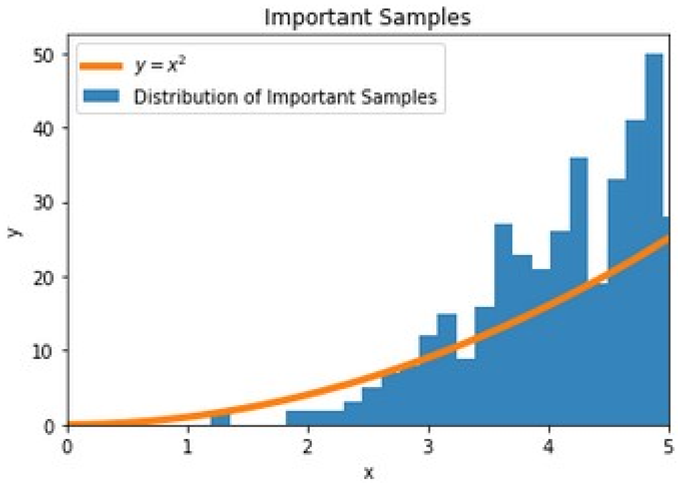
محاسبه انتگرال به کمک روش important sampling:

در قسمت قبل دیدیم که برای حساب کردن انتگرال به صورت «یکنواخت» از محور ایکس ها نمونه برداری کردیم و سپس میانگین حاصل تقسیم مقدار تابع به عرض مستطیل محاط را روی این سمپل ها حساب کردیم. این عدد ضرب در مساحت مستطیل محاط تقریبی از مساحت زیر منحنی به دست میداد.

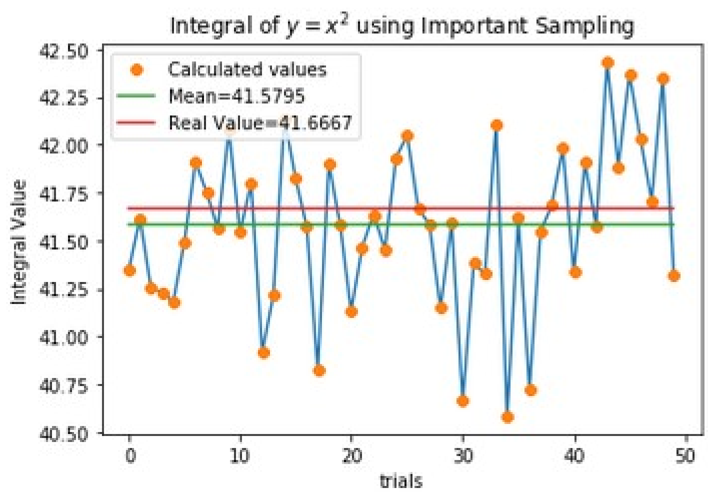
اما به نظرتان معقول تر نیست که بجای اینکه از نقاط محور ایکس به صورت یکنواخت سمپل گیری کنیم با تابع توزیعی که نزدیک تابع تحت انتگرال است سمپل گیری کنیم. با این کار با دقت بیشتری از ناهمواری های تابع سمپل گیری میکنیم و این کار دقت محاسبه انتگرال را بالا میبرد.

انتگرال گیری از تابع سهمی به کمک important sampling:

همانطور که بالاتر هم بحث شد بیایید بجایی اینکه به صورت یکنواخت

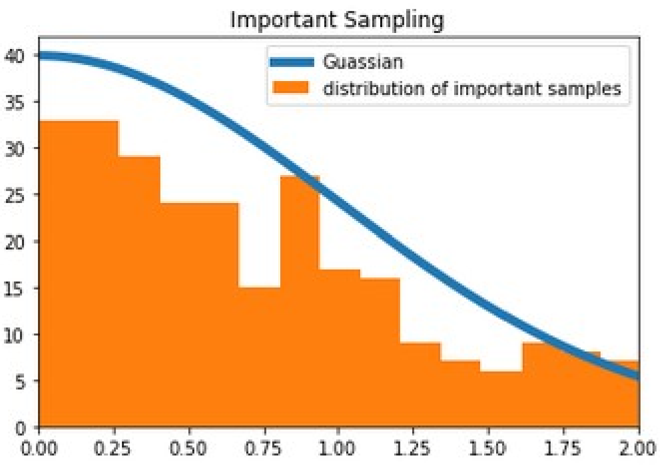


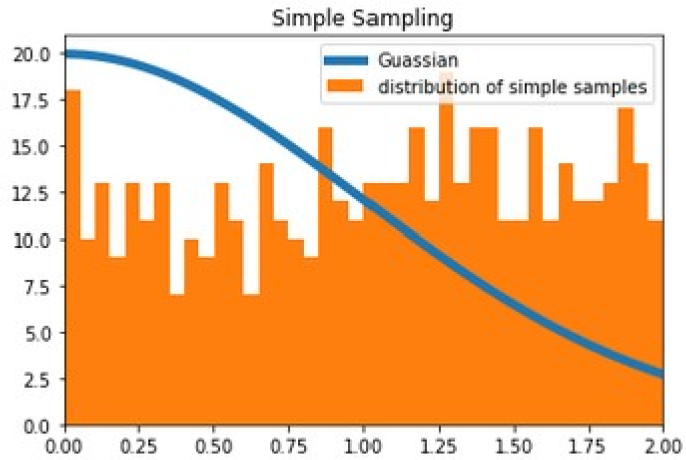
به نظر میرسد این روش خیلی خوبی برای محاسبه انتگرال است.
حال ببینیم مقدار انتگرال محاسبه شده با این روش چقدر است؟



مقایسه روش‌های مختلف انتگرال گیری از تابع گاوسی:

در این قسمت از تابع گاوسی در بازه 0 تا 2 انتگرال گیری میکنیم. برای این انتگرال گیری از دو روش simple sampling و important sampling استفاده میکنیم.
در روش important sampling از تابع نمایی برای سمپل گیری استفاده میکنیم. به عبارتی دیگر داریم:





حال به ازای تعداد سمپل های مختلف حاصل این دو انتگرال را حساب میکنیم و مقدار آنها، دقت خروجی، و تفاوت مقدار انتگرال با مقدار واقعی را مقایسه میکنیم. پارامتر بسیار مهم دیگری که بسیار جالب است بررسی کنیم مقایسه مقدار زمان لازم برای اجرای این انتگرال ها است:

N	Integral Value (SS)	Std	Delta	Time
100	0.4713	0.0229	0.0059	18.8
200	0.4888	0.0157	0.0115	11.6
400	0.4731	0.0114	0.0040	27.3
800	0.4742	0.0052	0.0030	59.6
1600	0.4764	0.0046	0.0007	73.6
3200	0.4762	0.0040	0.0010	164
6400	0.4793	0.0022	0.0021	262
12800	0.4768	0.0024	0.0004	425

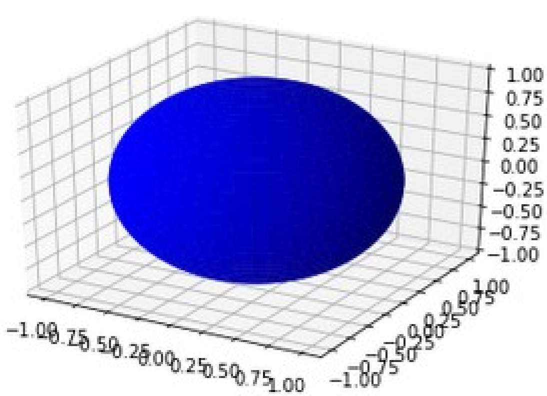
25600	0.4777	0.0010	0.0004	847

N	Integral Value (IS)	Std	Delta	Time
100	0.5330	0.0248	0.0558	20.3
200	0.5245	0.0233	0.0473	51.1
400	0.5193	0.0100	0.0421	43.1
800	0.5217	0.0091	0.0444	101
1600	0.5249	0.0066	0.0477	117
3200	0.5226	0.0029	0.0453	211
6400	0.5231	0.0033	0.0458	409
12800	0.5224	0.0025	0.0452	820
25600	0.5225	0.0007	0.0453	1.42

مشاهده می‌شود که روش IS در حساب کردن مقدار انتگرال دارای مقداری بایاس است. این بایاس به نظر میرسد بخاطر این است که رندم ژنراتور نمایی بخش‌هایی از تابع گاوسی (احتمالاً دمش را) نمیتواند خوب پوشش دهد.

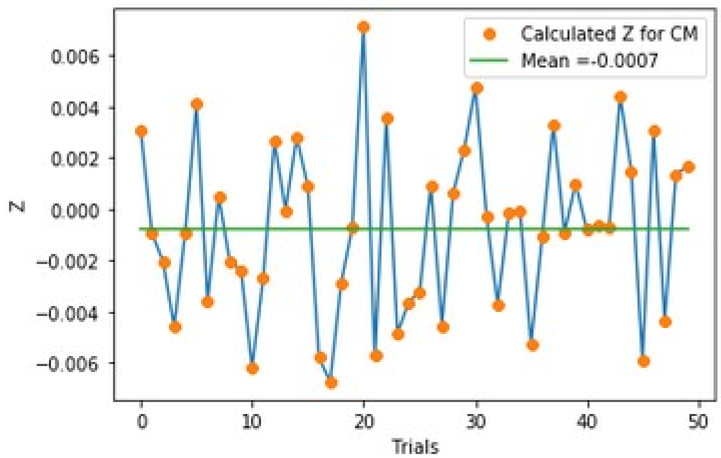
محاسبه مرکز جرم کره:

کره را به شعاع یک بگیرید که در مرکز قرار دارد.

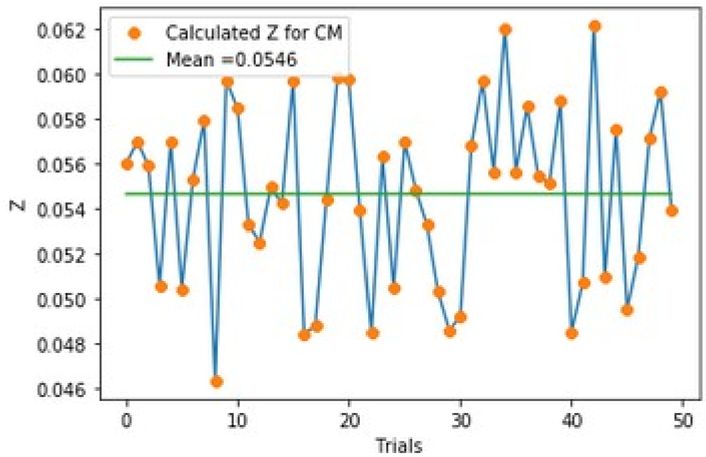


ابتدا برای اینکه چک کنیم که آیا برنامه درست کار میکند یا نه بیایید در نظر بگیریم که کره دارای چگالی یکنواخت است.
برای محاسبه مرکز جرم، به صورت رندم نقاطی را از داخل دایره انتخاب میکنیم و به صورت میانگین وزندار که وزن همان بردار آلمان جرم انتخاب شده است.
اما از آنجایی تقارن سمتی داریم (در جهت فی چگالی تغییر نمیکند) لذا کافی است که روی مولفه ی z انتگرال بگیریم.
برای اینکار دو عدد رندم تولید میکنیم که یکی در بازه r تا -r و دیگری در بازه o تا پی است. اولی نشان دهنده ی بردار r و دومی نشان دهنده ی تتا (مولفه های مختصات کروی) است.
با انتگرال گیری روی این مولفه میتوان مختصات z مرکز جرم را به دست آورد.
برای مختصات x,y هم میدانیم که بخاطر تقارن سمتی ای که شکل دارد هردو صفر هستند.

برای اینکه تست کنیم آیا این روش جواب میدهد یا نه بهتر است که یکبار مساله را برای حالتی که میدانیم جوابش چیست امتحان کنیم. یک حالت بسیار بدیهی کره ای با چگالی یکنواخت است.
شکل زیر مختصات z مرکز جرم کره را نشان میدهد:



جواب بینظیر است. پس حال میتوانیم روش خود را برای مساله مطرح شده در درسنامه استفاده کنیم:
کره ای که میخواهیم مختصات مرکز جرم آن را حساب کنیم کره ای است که چگالی آن به صورت خطی در جهت z تغییر میکند به صورتی که چگالی در چگال ترین قسمت آن برابر نصف چگالی در کم چگال ترین قسمت آن است.
مختصات مرکز جرم برای این کره در نمودار زیر آورده شده است:



پس مختصات مرکز جرم برابر 0.546 است که این عدد با دقت 0.004 بیان شده است