Resolução de Problemas de Natureza Discreta

TEMA 02: RELAÇÕES

As relações são uma ferramenta fundamental na Matemática Discreta que ajudam a descrever e analisar as ligações entre objetos, conjuntos e estruturas.

Entender o conceito de relações é importante para entender muitos tópicos em Matemática, como grafos, álgebra booleana, lógica e teoria dos conjuntos.

Produto cartesiano de conjuntos

Dados dois objetos quaisquer a e b, podemos formar um novo objeto (a, b), chamado par ordenado a, b.

O adjetivo ordenado enfatiza aqui que a ordem pela qual os objetos a e b aparecem entre parênteses é essencial. Note que o par ordenado (a, b) não é o mesmo que o conjunto $\{a, b\}$.

Produto cartesiano de conjuntos

Definição: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, é chamado o produto cartesiano de A e B, e é denotado por $A \times B$.

$$\boldsymbol{A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}}$$

Exemplo 1: Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1,2\}$. Encontre os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$.

Exemplo 2: Sejam A um conjunto qualquer. Encontre os produtos cartesianos $A \times \emptyset$ e $\emptyset \times A$.

Teorema: Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então

a. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Demonstração:

Teorema: Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então

b. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Demonstração:

Relações

Definição: Uma relação $\mathcal{R}$ de A para B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Definição: Sejam A e B dois conjuntos, não necessariamente distintos, e seja $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. Então a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ da relação $\mathcal{R}$ é a relação de B para A. Ou seja,

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

<u>Exemplo 3:</u> Sejam $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, e seja $\mathcal{R} \subset A \times B$. Então:

$\mathcal{R} =$

$\mathcal{R}^{-1}$=

Exemplo 4: Seja $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x\ divide\ y\}$. Então:

$\mathcal{R}^{-1}$=

Exemplo 5: Seja $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{3,5,7,9\}$. Escreva as relações:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in A \times B | y = x - 2\}$$

$$\mathcal{R}_1^{-1} =$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in A \times B | y > x\}$$

$$\mathcal{R}_2^{-1} =$$

Definição: Seja $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. O domínio da relação $\mathcal{R}$, denotado por $Dom(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos aqueles $a \in A$ tais que $(a, b) \in \mathcal{R}$ para algum $b \in B$; e a imagem de $\mathcal{R}$, denotada por $Im(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos aqueles $b \in B$, tais que $(a, b) \in \mathcal{R}$ para algum a $\in A$.

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A | (a, b) \in \mathcal{R} \; para \; algum \; b \in B\}$$

$$Im(\mathcal{R}) = \{b \in B | (a, b) \in \mathcal{R} \; para \; algum \; a \in A\}$$

Nos exemplos anteriores qual é o domínio e a imagem?

Definição: Seja $\mathcal{R}$ uma relação num conjunto X. Então:

a. $\mathcal{R}$ é reflexiva se e somente se $(x,x) \in \mathcal{R}, \forall x \in X$.

b. $\mathcal{R}$ é simétrica se e somente se $(x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$.

c. $\mathcal{R}$ é transitiva se e somente se $(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$.

d. $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência se e somente se $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

e. $\mathcal{R}$ é antirreflexiva se $(x,x) \notin \mathcal{R}, \forall x \in X$.

f. $\mathcal{R}$ é antissimétrica se $(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$.

LEMBRETE:

Reflexiva: Todo x está relacionado consigo mesmo.

Simétrica: Se x estiver relacionado com y, então y estará relacionado com x.

Transitiva: Se x estiver relacionado com y e y estiver relacionado com z, então x estará relacionado com z.

Antissimétrica: Se x estiver relacionado com y e y estiver relacionado com x, então x = y.

ATENÇÃO:

Relação Simétrica: Todos os pares têm inversos (ou são reflexivos).

Relação Antissimétrica: Se tem pares invertidos, eles são reflexivos.

Relação Não Simétrica: Pelo menos um par não tem inverso.

Relação Não Antissimétrica: Existem pares invertidos distintos (ex: (1,2) e (2,1)).

Observações:

1. Uma relação pode ser simétrica e antissimétrica.
2. Uma relação pode ser simétrica e não antissimétrica.
3. Uma relação pode ser não simétrica e antissimétrica.
4. Uma relação pode ser não simétrica e não antissimétrica.
5. Uma relação pode ser transitiva, mas não reflexiva.
6. Uma relação pode ser transitiva, mas não simétrica.
7. Portanto, enquanto algumas relações podem ter todas as três propriedades, a transitividade por si só não garante reflexividade ou simetria.

<u>Exemplo 6:</u> Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e

$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

Exemplo 7: Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e

$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$.

Exemplo 8: Seja $A = \{1, 2, 3, 4{,}5{,}6\}$ e
$\mathcal{R} = \{$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3)}.

Exemplo 9: Seja $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$.

Exemplo 10: Seja m um inteiro positivo qualquer fixado. A relação de congruência $\equiv$ módulo m, no conjunto $\mathbb{Z}$ dos número inteiros é definida por $x \equiv y \ (mod\ m)$ se e somente se $x - y = km$ para algum $\mathrm{k} \ \in \mathbb{Z}$. A relação de congruência é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.