西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第三节 随机变量的函数及其分布(1)

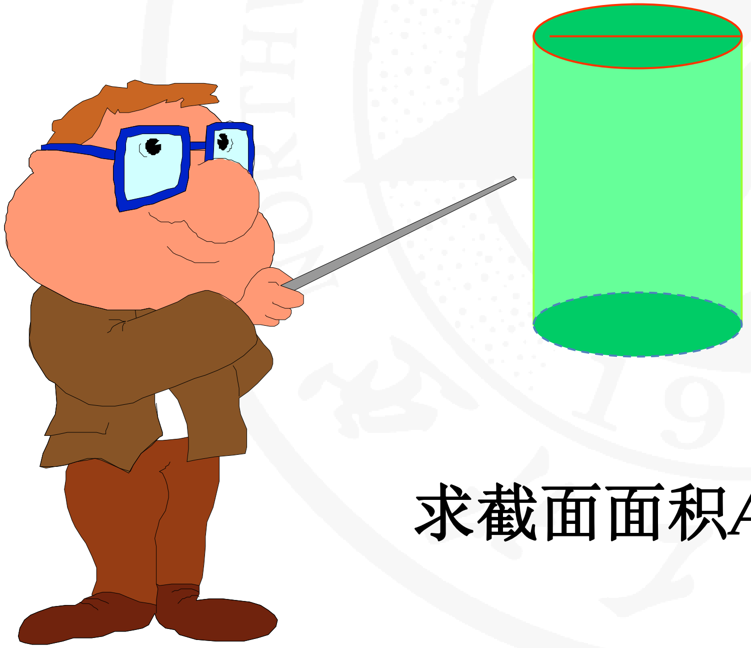
(单个随机变量的函数的分布)

- 一、问题的提出
- 二、离散型随机变量的函数的分布
- 三、连续型随机变量的函数的分布

一、问题的提出

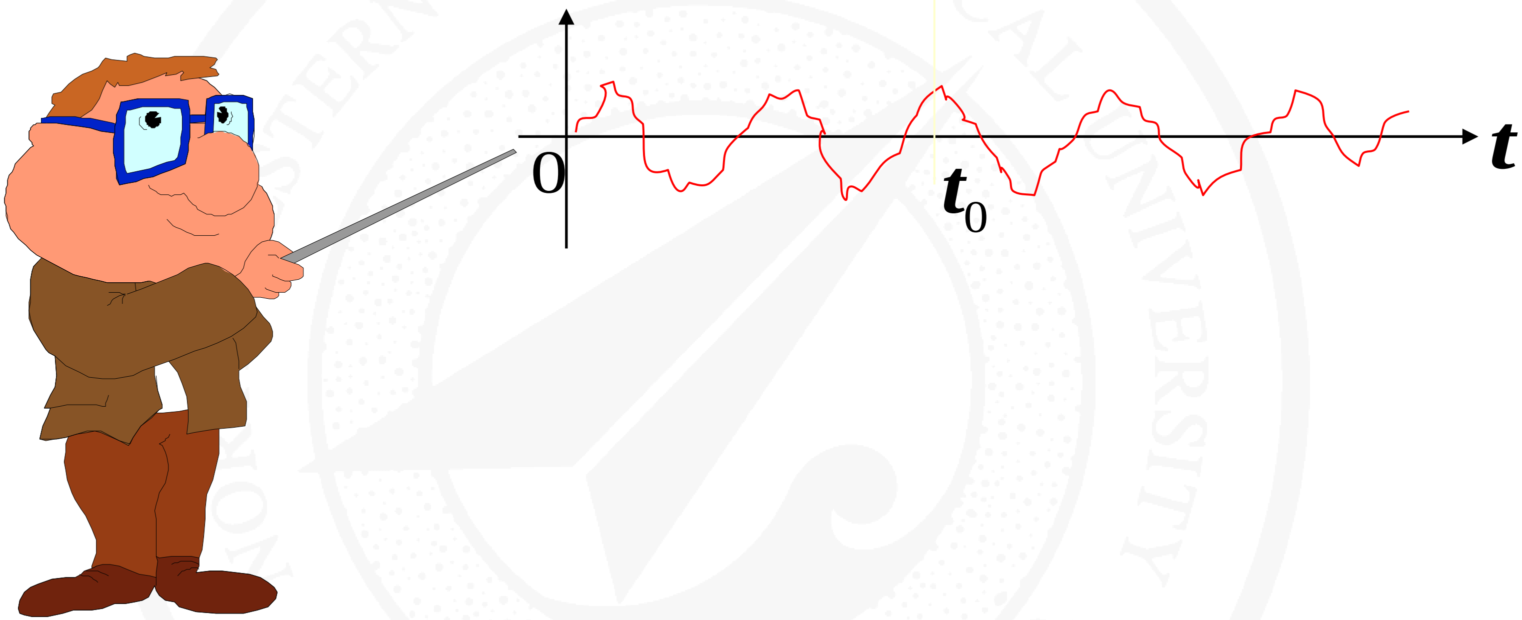
在实际中，人们常常对随机变量的函数更感兴趣.

例如，已知圆柱截面直径 d 的分布



求截面面积$A=\dfrac{\pi d^2}{4}=f(d)$的分布.

已知 $t = t_0$ 时刻噪声电压 V 的分布



求功率 $W=V^2/R$ =g(V) (R为电阻）的分布等。

问题

如何根据已知的随机变量 X 的分布求得随机变量$Y=f(X)$的分布？

$$p\{X=x_i\}\Rightarrow p\{Y=y_j\},F_Y(y)$$

$$p_X(x)\Rightarrow F_Y(y),p_Y(y)$$

二、离散型随机变量的函数的分布

例 1 设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

离散型随机变量的函数的分布律

如果X是离散型随机变量，其函数$Y = f(X)$也是离散型随机变量，若X的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则$Y = f(X)$的分布律为

$Y = f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $f(x_k)$ 中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

$$P\{Y=y_k\}=P\{f(X)=f(x_k)\}$$
$$=\sum_{y_k=f(x_k)} p_k$$

三、连续型随机变量的函数的分布

X是连续型随机变量，$Y = f(X)$， $p_X(x) \to p_Y(y)$

例2 设随机变量X的概率密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求随机变量$Y = 2X + 8$的概率密度.

解 1° 先求Y=2X+8 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X + 8 \le y\}$$

解 1° 先求$Y=2X+8$的分布函数$F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

2° 由分布函数求概率密度.

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\left[\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} p_X(x)\,\mathrm{d}x\right]'$$

$$=p_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\left(\frac{y-8}{2}\right)'=p_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}, & 0 < \dfrac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

X是连续型随机变量，$Y=f(X)$, $p_X(x)\to p_Y(y)$

1. 分布函数法 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{f(X)\le y\}$

$$=\int_{f(X)\le y} p_X(x)dx \quad 再求：\quad p_Y(y)=F_Y'(y).$$

$f(x)$单增 $=P\{X\le f^{-1}(y)\}=\int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p_X(x)dx$

$$\therefore p_Y(y)=p_X\left[f^{-1}(y)\right]\cdot[f^{-1}(y)]'$$

$f(x)$单减 $=P\{X\ge f^{-1}(y)\}=\int_{f^{-1}(y)}^{+\infty} p_X(x)dx$

$$\therefore p_Y(y)=p_X\left[f^{-1}(y)\right]\cdot\{-[f^{-1}(y)]'\}$$

2. 公式法

定理 **(例2.18)** 设随机变量X具有概率密度$p_X(x)$，其中$-\infty < x < +\infty$.又设函数$f(x)$在（a,b）上可导，且恒有$f'(x) > 0$(或恒有$f'(x) < 0$)，则$Y = f(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[f^{-1}(y)] \cdot \left|[f^{-1}(y)]'\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $f^{-1}(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，(α,β)是$f^{-1}(y)$的定义域，

$$\left|[f^{-1}(y)]'\right| = \begin{cases} [f^{-1}(y)]', & \text{当 } f'(x) > 0 \text{时}, \\ -[f^{-1}(y)]', & \text{当 } f'(x) < 0 \text{时}. \end{cases}$$

例 3 设 $X \sim U(0,1)$, 求 $Y = \mathrm{e}^X$ 的密度函数.

解 $\because X \sim U(0,1)$

$\therefore X$的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

方法1 (公式法) $p_y(y) = p_X(f^{-1}(y)) \cdot \left|[f^{-1}(y)]'\right|$

$\because y = \mathrm{e}^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上可导，单调增加

$$x = f^{-1}(y) = \ln y, \quad [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \quad p_Y(y)=\begin{cases}1\cdot[f^{-1}(y)]', & 0<x=f^{-1}(y)<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1\cdot\dfrac{1}{y}, & 0<\ln y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

方法2 (分布函数法)

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$$

$$=\begin{cases}P(\varnothing), & y\le 0,\\ P\{X\le \ln y\}, & y>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \int_{-\infty}^{\ln y}p_X(x)\,\mathrm{d}x, & y>0.\end{cases}$$

$$p_X(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & x\notin[0,1]\end{cases}$$

当 $y>0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\ln y}p_X(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \ln y\le 0,\\ \int_0^{\ln y}p_X(x)\,\mathrm{d}x, & 0<\ln y<1,\\ \int_0^{1}p_X(x)\,\mathrm{d}x, & \ln y\ge 1.\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le y \le 1, \\ \ln y, & 1 < y < \mathrm{e}, \\ 1, & y \ge \mathrm{e}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 0, & 0 < y \le 1, \\ \ln y, & 1 < y < \mathrm{e}, \\ 1, & y \ge \mathrm{e}. \end{cases}$$

从而 $p_Y(y) = \dfrac{\mathrm{d}\, F_Y(y)}{\mathrm{d}\, y}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1 < y < \mathrm{e}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 4 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布

证 X 的概率密度为

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$$

设 $y = f(x) = ax + b$,

由公式 $\quad p_Y(y) = p_X[f^{-1}(y)] \cdot \left| [f^{-1}(y)]' \right|$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}, \quad \text{知}\ [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{a} \neq 0.$$

由公式 $p_Y(y) = p_X[f^{-1}(y)] \cdot \left|[f^{-1}(y)]'\right|$

得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < \frac{y-b}{a} < +\infty.$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

得 $Y = aX + b$

$\sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

例5 设 $X \sim N(0,1)$，求下列函数的密度函数.

$$(1)\ Y = X^2;\qquad (2)\ Y = |X|.$$

分析 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不单调，

$y = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导，

故不能直接用定理.

解法一 $(1)\ F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$

$$= \begin{cases} P(\varnothing), & y < 0, \\ P\{|X| \le \sqrt{y}\}, & y \ge 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}, & y \ge 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}), & y > 0. \end{cases}$$

$$\because \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, & y > 0. \end{cases}$$

即 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, & y > 0. \end{cases}$

$$\therefore \quad p_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ [2\Phi(\sqrt{y}) - 1]', & y > 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 2\Phi'(\sqrt{y}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}), & y > 0. \end{cases} \qquad \because \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

即 $p_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$

公式法推广

函数$f(x)$在(a,b)上分段严格单调，

$(a,b)=\bigcup(a_k,b_k)$，则

$$p_Y(y)=\sum_k p_X[f_k^{-1}(y)]\cdot\left|[f_k^{-1}(y)]'\right|$$

其中$x=f_k^{-1}(y)$是$y=f(x),x\in(a_k,b_k)$的反函数

解法二：公式法

$$\therefore \quad P_Y(y) = P_X(-\sqrt{y})\left|-\sqrt{y}\right|' + P_X(\sqrt{y})\left|\sqrt{y}\right|'$$

$$= [\varphi(-\sqrt{y}) + \varphi(\sqrt{y})]\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= [2\varphi(\sqrt{y})]\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}) \qquad y > 0$$

(2) $Y=|X|.$ $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

$$=P\{|X|\le y\}=\begin{cases}P(\varnothing), & y<0,\\ P\{-y\le X\le y\}, & y\ge 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 2\Phi(y)-1, & y>0.\end{cases}$$

$$\therefore\quad p_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 2\Phi'(y), & y>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y<0,\\ 2\varphi(y), & y\ge 0.\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

例 6 设随机变量 X 分布函数 $F(x)$ 是严格单调的连续函数，试证明：$Y=F(X)$ 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布.

证 $\because$ $F(x)$ 是分布函数

$\therefore$ $0 \le F(x) \le 1$, 且 $F(x)$ 单调不减

依题意，又知 $F(x)$ 严格单调增加

故 $\forall y \in \mathbf{R}$,

$$F_Y(y)=P\{Y \le y\}=P\{F(X) \le y\}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}$$

$$=\begin{cases} P(\varnothing), & y<0, \\ P\{F(X)\le y\}, & 0\le y\le 1, \\ P(\Omega), & y>1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y<0, \\ P\{X\le F^{-1}(y)\}, & 0\le y\le 1, \\ 1, & y>1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y<0, \\ F[F^{-1}(y)], & 0\le y\le 1, \\ 1, & y>1. \end{cases}=\begin{cases} 0, & y<0, \\ y, & 0\le y\le 1, \\ 1, & y>1. \end{cases}$$

$$\therefore \quad p_Y(y) = [F_Y(y)]'$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

即 $Y = F(X)$ 服从[0,1]上的均匀分布.

随机数生成算法：由[0,1]上的均匀分布随机数，生成其它各种分布的随机数。

$$\eta = \Phi(\xi) \sim U[0,1]$$

$$\xi = \Phi^{-1}(\eta) \sim N[0,1]$$

作业题：尝试求解下面的问题

3 (2013 年第 22 题) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅰ) 求 Y 的分布函数；

(Ⅱ) 求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

内容小结

1. 离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=f(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=f(X)$ 的分布律为

$Y=f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $f(x_k)$ 中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

2. 连续型随机变量的函数的分布 $Y = f(X)$

$$p_X(x) \Rightarrow F_Y(y), p_Y(y),$$

方法1 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{f(X) \le y\}$

$$= \int_{f(x) \le y} p_X(x)\mathrm{d}x \qquad (-\infty < x < \infty)$$

再对$F_Y(y)$求导得到Y的密度函数.

方法2

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[f^{-1}(y)]\left|[f^{-1}(y)]'\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

注意条件.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$$

$$Y = aX + b(a \neq 0) \quad \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

思考题

设$f(x)$是连续函数，若X是离散型随机变量则$Y=f(X)$也是离散型随机变量吗？若X是连续型的又怎样？

答： 若X是离散型随机变量，它的取值是有限个或可列无限多个，因此Y的取值也是有限个或可列无限多个，因此Y是离散型随机变量，若X是连续型随机变量，那么Y不一定是连续型随机变量.

例如 设X在(0,2)上服从均匀分布，概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又设连续函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2.\end{cases}$

则$Y=f(X)$的分布函数 $F_Y(y)$ 可以计算出来：

由于 Y 的取值为 [0,1]，所以

当 $y \le 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0;$

当 $y > 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1;$

当 $0 \le y \le 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{f(X) \le y\}$

$$= \int_{-\infty}^{y} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}.$$

故 Y 的分布函数为 $F_Y(Y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{y}{2}, & 0<y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$

因为$F_Y(y)$在$y=1$处间断，故$Y=f(X)$不是连续型随机变量，又因为$F_Y(y)$不是阶梯函数，故$Y=f(X)$也不是离散型随机变量.

2-3 随机变量的函数及其分布

Thank You !

备用题

例2-1 测量一类圆形物体的半径X为随机变量其分分布列为

X	10	11	12	13
P_k	0.1	0.4	0.3	0.2

求圆周长 Y_1和圆面积 Y_2的分布列.

解 $Y_1 = 2\pi X$和$Y_2 = \pi X^2$都是X的函数，Y_1和Y_2各自的值均不相等,不需合并.

所以 Y_1的分布列分

Y_1	20π	22π	24π	26π
P_k	0.1	0.4	0.3	0.2

Y_2 的分布列为

Y_2	100π	121π	144π	169π
P_k	0.1	0.4	0.3	0.2

例2-2 设某工程队完成某项工程所需时间X(天)近似服从 $N(100,52)$工程队规定:若工程在100天内完工可获奖金10万元;在100~115天内完工可获奖金3万元;超过115天完工,罚款5万元,求该工程队在完成此项工程时，所获奖金的分布列.

解 $X \sim N(100,5^2)$,Y是X的函数,可取值10,3,–5.故

$$P\{Y=-5\}=P\{115<X<+\infty\}=1-\Phi\left(\frac{115-100}{5}\right)$$

$$=1-\Phi(3)=0.0013,$$

$$P\{Y=3\}=P\{100<X\le 115\}$$

$$= \Phi(\frac{115-100}{5}) - \Phi(\frac{100-100}{5})$$

$$= \Phi(3) - \Phi(0) = 0.4987,$$

$$P\{Y = 10\} = P\{X \le 100\} = \Phi(\frac{100-100}{5})$$

$$= \Phi(0) = 0.5000$$

所以所获奖金Y的分布列为

Y	-5	3	10
p_k	0.0013	0.4987	0.5000

故从本例得知,连续型随机变量的函数也可以是离散型的.

例2-3 已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^{x}+e^{-x}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

试求随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度，其中

$$g(x)=\begin{cases}-1, & \text{当} x<0,\\ 1, & \text{当} x\geq 0.\end{cases}$$

解 因为 $p(x)$ 为偶函数,所以

$P(X<0)=P(X>0)=0.5$ 由此可得

$P(Y=-1)=P(X<0)=P(X\geq 0)=P(Y=1)=0.5$

所以Y的分布列为

Y	-1	1
P	0.5	0.5

例5-1 设随机变量X的概率密度为

$$p_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3\mathrm{e}^{-x^2}, & x\geq 0.\end{cases}$$

求随机变量$Y=X^2$和$Y=2X+3$的概率密度.

解 先求随机变量$Y=X^2$分布函数,

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}\quad (\text{当 } y>0 \text{ 时})$$

$$=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} p_X(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3 \mathrm{e}^{-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

再由分布函数求概率密度.

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = p_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - p_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (\sqrt{y})^3 \cdot \mathrm{e}^{-(\sqrt{y})^2} + 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y\mathrm{e}^{-y}}{2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

当 $Y=2X+3$ 时,有

$$y=2x+3\Rightarrow x=\frac{y-3}{2},$$

$$p_Y(y)=F_y'(y)=\left[\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}}p_X(x)\,\mathrm{d}x\right]'$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^3 \mathrm{e}^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y\geq 3,\\ 0, & y<3.\end{cases}$$