西北工業大學

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第三节　参数的区间估计

- 一、基本概念
- 二、单个正态总体均值的区间估计
- 三、单个正态总体方差的区间估计
- 四、两个正态总体均值差的区间估计
- 五、两个正态总体方差比的区间估计

一、基本概念

定义6.7 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，θ为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体 X 的样本. 如果存在**两个统计量** $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，**对于给定的** $\alpha\ (0<\alpha<1)$，使得

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha.$$

置信下限　　置信上限　　置信度

则称区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$为参数 θ 的**置信度**为 $1-\alpha$ 的**置信区间.**

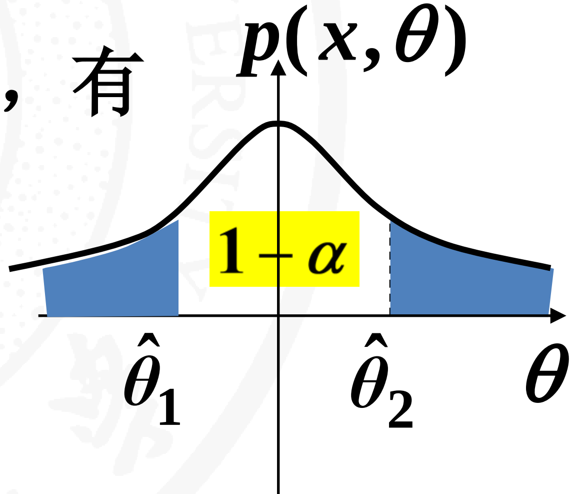
$$P\{\underline{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)}\le\theta\le\underline{\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)}\}=1-\alpha.$$

注 **1、置信区间是一个随机区间**

它以预先给定的高概率（置信度）覆盖未知参数，即对于任意的 $\theta\in\Theta$，有

$$P(\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2)=1-\alpha.$$

$$\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$$



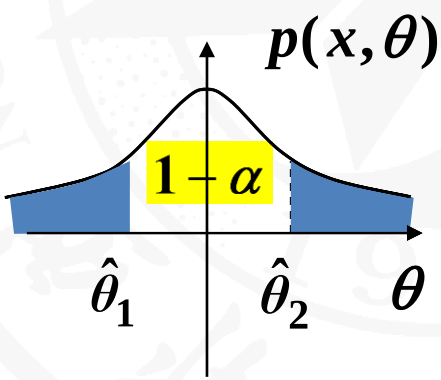
2、置信度 1-α：反映了区间估计的**可靠度**.

给定置信度 $1-\alpha$，尽量寻找最短的置信区间.

3、置信区间的长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ ：反映了区间估计的**精确度**.

置信区间 ⟺ 可靠度 ⟺ 精确度

长（短） 高（低） 低（高）



$$P\left\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\right\}=1-\alpha \Rightarrow \left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$$

美国统计学家

Neyman

回顾：统计量及其分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

(1)均值μ、方差σ^2已知:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(2)均值μ已知, 方差σ^2未知:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

(3)均值μ未知, 方差σ^2已知:

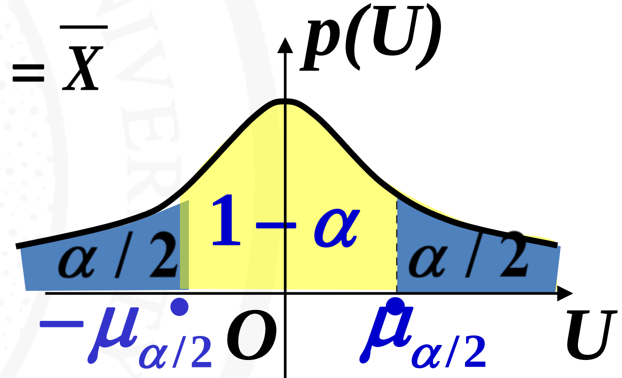
$$\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}=\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

二、单个正态总体均值的区间估计

1、正态总体X的方差σ^2已知，求μ的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

是来自总体X 的一个样本，则有：$\hat{\mu} = \overline{X}$



$$\boxed{P\{\hat{\mu}_1 \le \mu \le \hat{\mu}_2\} = 1-\alpha \quad \Rightarrow [\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2]?}$$

$$\because U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

则 $P\{|U| \le u_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

其中 $u_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $\alpha/2$ 上侧分位数 .

即 $$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

反解

$$P\left\{\boxed{\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\}=1-\alpha$$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

即 $P\left(\mu\in\left[\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)=1-\alpha$

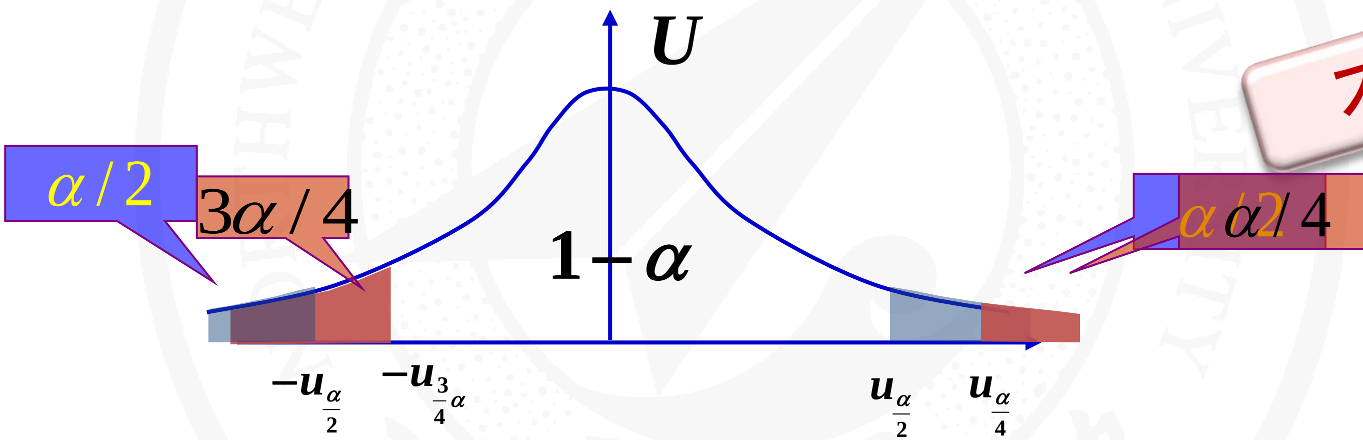
若给定 $\alpha=0.05$，查正态分布表得

$u_{0.025}=1.96$，于是得 μ 的**置信度为95%的置信区间为**：

$$\left[\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间:

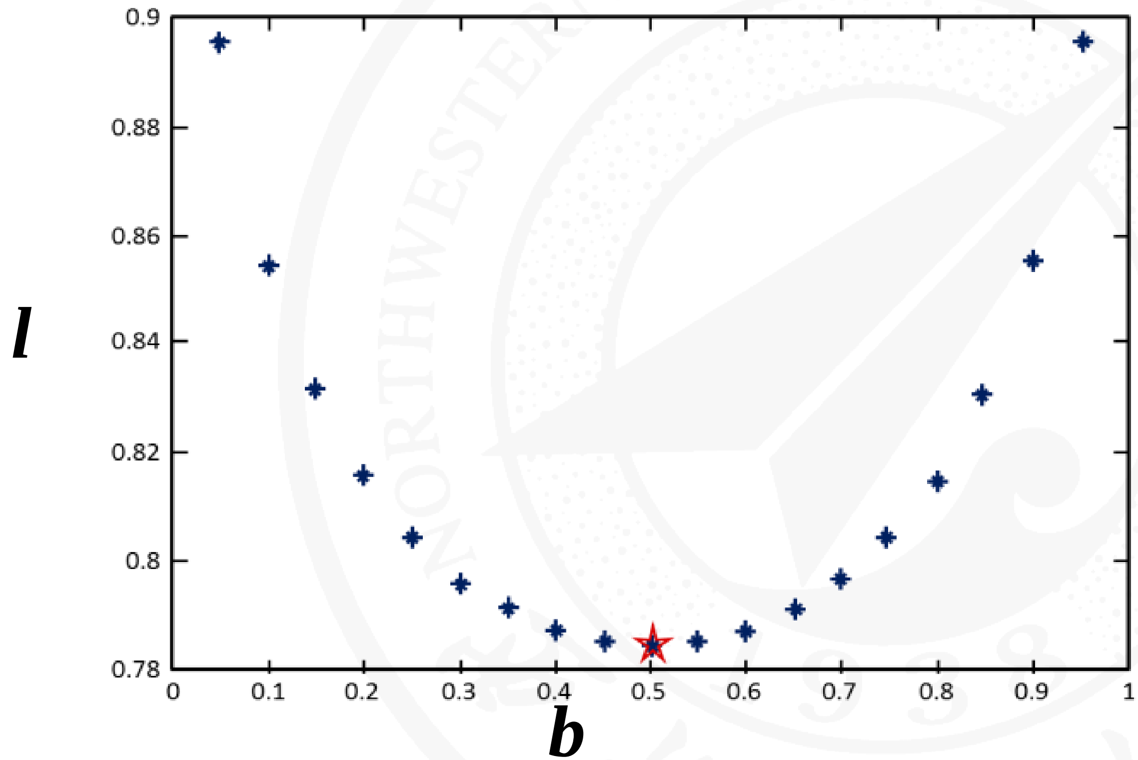
$$\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



不唯一

$$\bar{X}-u_{\frac{3}{4}\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

置信区间: $\bar{X}-u_{b\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{(1-b)\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad 0<b<1$



$\sigma^2=4, n=100,$

$\alpha=0.05$

∴置信区间为对称区间

***b*=0.5时，区间长度*l*最短，精确度最高**

例 1 某车间生产的滚珠直径 X 服从正态分布 $N(\mu,0.06)$，现从某天生产的产品中抽取6个，测得直径分别为(单位:mm).

14.6, 15.1, 14.9, 14.8, 15.2, 15.1

试求**平均直径**置信度为95%的置信区间.

解： 由 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

故 μ的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

置信度为 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$ $\quad \therefore u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$

由样本值得 $\quad \bar{x}=14.95, n=6, \sigma=\sqrt{0.06}$

置信下限 $\bar{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.75$

置信上限 $\bar{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=15.15$

所以平均直径 μ 的**置信度为95%**的置信区间为

$$[14.75, 15.15].$$

若取 $\alpha=0.01$，可算出 μ 的**置信度为 99%** 的置信区间为 $[14.69, 15.21]$.

一般步骤

1、构造**统计量**$U(\theta)$，并确定其**抽样分布**；

2、给定**置信度**$1-\alpha$，反解参数的**置信区间**；

$$P\{a<U<b\}=1-\alpha \Rightarrow P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$$

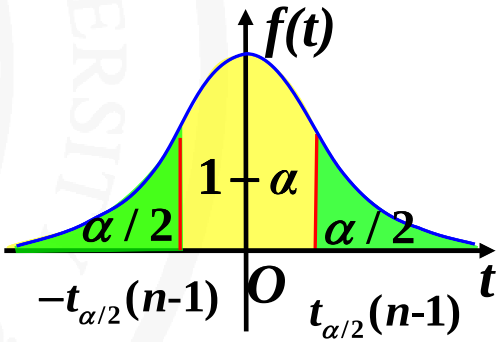
3、给定**样本值**，求置信下限和置信上限的值，并写出置信区间。

$$\theta_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\theta_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad [\theta_1,\theta_2]$$

2. 正态总体X的方差σ^2未知，求μ的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2未知, 求总体均值 μ 的区间估计. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$来自总体 X 的一个样本，则有：

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S_n^* / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



从而对于给定的置信度，$1-\alpha$ 有

$$P\left\{|T| \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

其中 $t_{\alpha/2}(n-1)$是自由度为 $n-1$ 的 t 分布关于 $\alpha/2$ 的上侧分位数

于是有 $$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}\right|\le t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

反解

$$P\left\{\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right]$$

例2 某地区抽样调查表明成年男性的红细胞数（RBC）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。现对150个人的抽血化验结果进行分析，测得红细胞数分别为（单位10^{12}个/L），**试估计红细胞数均值μ的置信度为95%的置信区间。**

```
[ 5.19,  4.89,  5.15,  4.74,  4.79,  5.15,   4.3,  4.47,  4.13,  5.14,  4.54,   4.1,  5.82,   4.5,  4.87]
[ 4.02,  5.23,  5.01,  3.89,  4.33,  4.69,  4.54,  4.22,  4.64,  4.89,   4.7,  4.83,  5.17,  4.61,  4.97]
[ 4.49,  5.19,   4.9,   5.2,  4.93,  4.69,  4.81,  4.64,  4.82,   4.4,   5.4,  4.39,  4.61,   4.5,   4.1]
[ 4.63,  4.46,   5.3,  5.13,  5.05,  5.19,  4.62,  4.12,  5.08,  3.96,  4.37,  4.71,  4.94,   4.3,   4.3]
[ 4.94,  4.86,  5.16,  4.75,  5.13,  3.82,  4.88,  4.74,  4.63,  5.57,   5.1,   4.9,  4.29,  4.35,  4.55]
[ 4.02,  4.33,  4.86,  4.72,  4.45,  4.53,  4.93,   4.5,  5.44,  4.48,  4.89,  4.35,  5.58,  4.66,   4.8]
[ 4.96,  4.17,  4.45,  3.66,  4.95,  4.19,  4.34,  5.71,  4.54,   4.8,  4.65,  4.62,  5.16,   4.0,  5.25]
[ 4.22,  5.16,  4.46,  5.01,  4.79,  4.58,  4.67,  5.25,  4.89,   5.0,  4.28,   4.9,   5.1,  5.02,  4.62]
[ 4.78,  4.75,  5.27,  3.79,  5.11,  5.04,  3.81,  3.65,  5.04,   4.8,  4.62,  3.94,  4.36,   4.7,  5.31]
[ 5.04,  4.73,  4.04,  3.73,  4.99,  5.11,  5.25,  4.94,  4.79,  4.35,  4.71,  5.21,  4.89,  5.06,  4.96]
```

7142,

置信度 $1-\alpha=0.95$

$$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(149) \approx u_{0.025} =1.96$$

则红细胞均值μ的置信度为95%的置信区间为

$$\boxed{\left[\ \overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\,S_n^*\big/\sqrt{n}\,,\ \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\,S_n^*\big/\sqrt{n}\ \right]}$$

$$=\left[\ 4.7142-1.96\times 0.4236/\sqrt{150},\ 4.7142+1.96\times 0.4236/\sqrt{150}\ \right]$$

$$=[4.6464,\ 4.7820]$$

$$P\{\mu\in[4.6464,\ 4.7820]\}=95\%$$

三、正态总体方差的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2未知, 求总体方差或标准差 σ 的区间估计. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体 X 的一个样本，则有：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

从而对于给定的置信度 $1-\alpha$，有

$$P\left\{ \boxed{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \chi^2 \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right\} = 1-\alpha$$

反解σ^2得:

$$P\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\}=1-\alpha$$

故 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

而 σ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right]$$

例3 从自动机床加工的同类零件中抽取16件，测得长度分别为(单位:cm):

12.15, 12.12, 12.01, 12.08, 12.09, 12.16,

12.06, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.01,

12.03, 12.01, 12.03, 12.06

假设零件长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，分别求零件**长度方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为95%的置信区间.**

解 由题意有

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$n=16, 1-\alpha=0.95, \alpha=0.05$，查 χ^2

分布表得 $\chi^2_{0.025}(15)=27.5, \chi^2_{0.975}(15)=6.26,$ 又

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=12.08,$$

$$(n-1)s_n^{*2}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2=0.037$$

置信下限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=$

置信上限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$

故σ^2的置信度为95%的置信区间为

$[0.0013, 0.0059]$，σ的置信区间为$[0.036, 0.077]$.

$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(1)均值差$\mu_1-\mu_2$已知，方差σ_1^2,σ_2^2已知

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(2)均值差$\mu_1-\mu_2$已知，方差$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_{n1}^{*\,2}+(n_2-1)S_{n2}^{*\,2}}{n_1+n_2-2}}$$

(3)均值差μ_1,μ_2未知，方差σ_1^2/σ_2^2已知

$$\frac{S_{n1}^{*\,2}/S_{n2}^{*\,2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

四、两正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

设 X 与 Y 是两个独立的正态总体，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 为总体 X 的样本，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$为总体 Y 的样本，

(1) $\boxed{\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}}$

则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$的置信区间为：

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

四、两正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(2) $\boxed{\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{未知，但}\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2}$

则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

$$\text{其中}S_w=\sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2-n_1\overline{X}^2)+(\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2-n_2\overline{Y}^2)}{n_1+n_2-2}}$$

五、两正态总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

设 X 与 Y 是两个独立的正态总体，且

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$未知.

σ_1^2 / σ_2^2的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1), \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1) \right).$$

例4 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径（mm）如下:

甲机床：15.0，14.8，15.2，15.4，14.9，15.1，15.2，14.8

乙机床：15.2，15.0，14.8，15.1，15.6，14.8，15.1，14.5，15.0

若两台机床生产的滚珠直径的标准差分别是$\sigma_1 = 0.18,\ \sigma_2 = 0.24$，求这两台机床生产的滚珠直径均值差$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间.

$$\boxed{n_1 = 8, n_2 = 9}$$

解：当 $\sigma_1 = 0.18,\ \sigma_2 = 0.24$ 时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.90的置信区间为

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X} - \bar{Y} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

查标准正态分布表得 $u_{0.05} = 1.645$，从而

$$\bar{X} - \bar{Y} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}} = -0.018$$

$$\bar{X} - \bar{Y} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 0.318$$

故置信区间为 $[-0.018, 0.318]$.

例5 机床厂某日从两台机床加工的零件中，分别抽取若干个样品，测得零件的尺寸分别如下（单位：cm）：

A台：6.2， 5.7， 6.5， 6.0，6.3， 5.8，5.7，6.0， 6.0， 5.8， 6.0

B台：5.6， 5.9， 5.6， 5.7， 5.8， 6.0， 5.5 5.7， 5.5

假设两台机器加工的零件尺寸均服从正态分布，且**方差相等**，取置信度为0.95，**试求两台机器加工的零件平均尺寸之差的区间估计.**

$$1-\alpha=0.95,\ n_1=11,\ n_2=9$$

解 设A台机器加工的零件尺寸为总体 X， B台机器加工的零件尺寸为总体 Y，则

$\mu_1-\mu_2$的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]$$

由题设知置信度 $1-\alpha=0.95,\ n_1=11,\ n_2=9$

查表 t 分布表得 $t_{0.025}(18)=2.1009$

经计算得两台机器加工的零件平均尺寸分别为

$$\bar{x}_A = 6.0,\quad \bar{y}_B = 6.7$$

$$n_1 S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - n_1 \bar{x}_A^2 = 0.64$$

$$n_2 S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 - n_2 \bar{y}_B^2 = 0.24$$

$$S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^{*2} + (n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{0.64+0.24}{11+9-2}} = 0.2211$$

则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信上下限分别为

置信下限：$\overline{X}-\overline{Y}-t_{0.025}(18)S_w\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{9}}=0.0912$

置信上限：$\overline{X}-\overline{Y}+t_{0.025}(18)S_w\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{9}}=0.5088$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为95%的置信区间为

$$[0.0912,\ 0.5088]$$

例6 为了考查温度对某物体断裂强度的影响，在70°C与80°C分别重复做了8次试验，测得断裂强力的数据如下 (单位：MPa)：

70°C：20.5，18.8，19.8，20.9，21.5，19.5，
21.0，21.2

80°C：17.7，20.3，20.0，18.8，19.0，20.1
20.2，19.1

假设70°C下的断裂强度用 X 表示，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$
80°C下的断裂强度用 Y 表示，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为度为90%的置信区间.

解 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为90%置信区间为

$$\left[\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}},\ \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\right]$$

由题设知置信度为 $1-\alpha=0.9,\ n_1=n_2=8,$

查 F 分布表得 $F_{0.05}(7,7)=3.79$

$$\Rightarrow \frac{1}{F_{0.25}(n_1-1,n_2-1)}=0.2639$$

由 F 分布分位数的性质得

$$\frac{1}{F_{0.95}(7,7)}=F_{0.25}(7,7)=3.79$$

经计算得两正态总体的样本均值和样本修正方差分别为

$$\bar{x} = 20.4,\quad \bar{y} = 19.4,\quad s_1^{*2} = 0.8857,\quad s_2^{*2} = 0.8286$$

则 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为90%置信区间为

$$\left[\frac{1}{F_{0.25}(n_1-1, n_2-1)}\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}},\ F_{0.25}(n_2-1, n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\right]$$

$$=\left[0.2639\times\frac{0.8857}{0.8286},\ 3.79\times\frac{0.8857}{0.8286}\right]$$

$$=[0.2821,\ 4.0515]$$

内容小结

置信区间是一个随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$,它表示未知参数在该区间具有预先给定的置信度1-$\alpha$,即对于任意的 $\theta \in \Theta$,有 $P(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$.

求置信区间的步骤:

(1)构造含有样本和参数的统计量$W = W(X_1, X_2, \cdots X_n; \theta)$,并确定其分布;

(2)给定置信度$1-\alpha$,利用统计量W的分布确定其范围,使得$P(a \le W \le b) = 1 - \alpha$:

(3)由不等式$a \le W \le b$,反解出的取值范围$\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2$,即为置信区间$\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right]$。

正态总体均值与方差的区间估计

1. 单个总体均值 μ 的置信区间

$$\begin{cases} (1)\ \sigma^2\text{已知，}\ U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1); & \left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right). \\ (2)\ \sigma^2\text{未知，}\ T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1); & \left(\overline{X}\pm\dfrac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right). \end{cases}$$

2. 单个总体方差 σ^2 的置信区间

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1);\qquad \left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

其中$S_n^{*2}=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$

3. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1)σ_1^2和σ_2^2均为已知，

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

(2)$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但$\sigma^2$为未知，

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中$S_w=\sqrt{\dfrac{(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2-n_1\overline{X}^2)+(\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2-n_2\overline{Y}^2)}{n_1+n_2-2}}$

4. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为未知,

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1), \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right).$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6-3 参数的区间估计

Thank You !