西北工業大學

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

# 概率论与数理统计


**徐 爽**

**西北工业大学理学院概率统计教研室**

# 第一节 一维随机变量及其分布

- 一、随机变量的定义
- 二、分布函数的性质

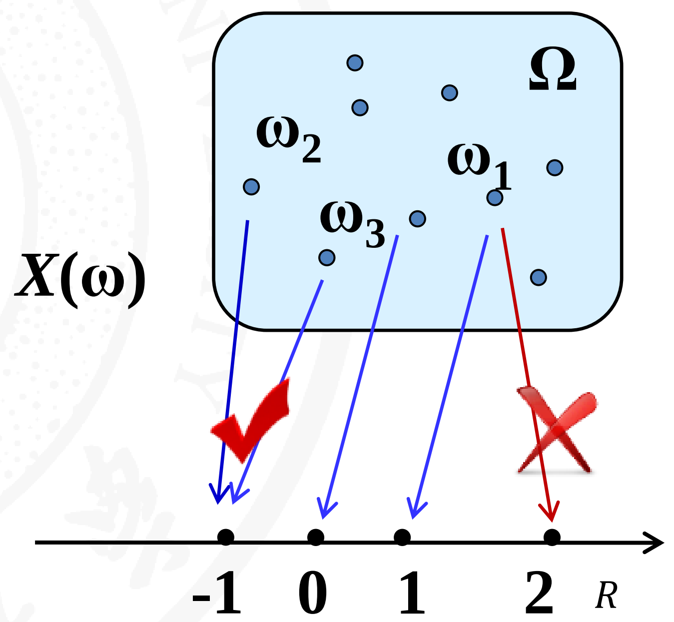
实际生活中，有些变量的取值取决于随机事件是否发生。

- 球赛中一个球队的得分
- 想要坐车的人数
- 在概率统计考试中的成绩
- ……

# 一、随机变量的定义

## 1. 随机变量的定义

设 $E$是随机试验，其样本空间为Ω,称定义在样本空间Ω上的单值实函数 $X=X(\omega)$ 为**随机变量**，简记为$X$.




注

1° $\omega \xrightarrow{\text{唯一}} X(\omega)$

$$\omega_i \neq \omega_j \Leftarrow X(\omega_i) \neq X(\omega_j)$$

2° X取值是随机的，每一个可能取值都有一定的概率。

## 2. 作用

$$\Omega=\{\text{正面、反面}\},\ X=\begin{cases}0, & \text{正面、合格、阴性…} \quad A\\ 1, & \text{反面、不合格、阳性…} \quad \overline{A}\end{cases}$$


**随机变量可描述一类随机现象**

## 2. 作用

## 随机变量可简化表示随机事件

**实例1** $\Omega=\{HHH, HHN, HNH, NHH, HNN, NNH, NHN, NNN\}$

射击3次

$H$:命中

$N$:不中

$X$：射击3次，不命中的次数

$A$：射击3次，不命中两次

$=\{HNN, NNH, NHN\}=\{\omega : X(\omega)=2\}=\{X=2\}$

$B$：至少命中一次$=\{X\geq 1\}$

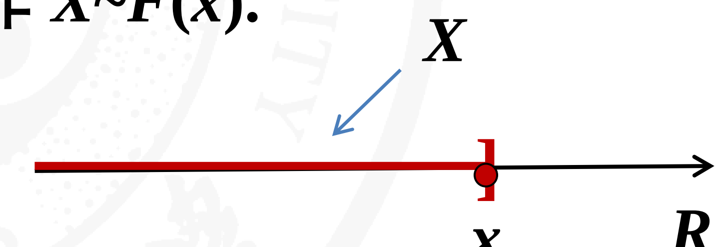
# 二、分布函数及其性质

## 1.分布函数的定义

设$X$为随机变量，$x$为任意实数，称函数

$$F(x) = P\{X \le x\} \qquad -\infty < x < \infty$$

为随机变量$X$ 的分布函数，记作 $X \sim F(x)$.




注

**几何意义**：表示随机点$X$落在$(-\infty, x]$的概率

$$F(x) = P\{X \in (-\infty, x]\}$$

**为什么引入分布函数？？？**

**例 1** 假设云天苑有$m$个窗口，每次去吃饭时选择每个窗口概率分别为$p_1,\cdots,p_m$，且$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$。令$X$表示每个窗口都至少1次时需要的吃饭次数”。求$P\{X = n\}$，（这里$n \geq m$）。

**解** 直接求$P\{X = n\}$比较难

此时可以考虑分布函数的逆:$P\{X > n\}$！

$P\{X > n\}$表示：吃了$n$次后至少还有1个窗口没吃的概率

记$A_i$表示：吃了$n$次后第$i$个窗口仍然还没吃过

$$P\{X > n\} = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$$

$$P\{X>n\}=P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)-\sum_{i<j}\sum P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{m+1}P(A_1\cdots A_m)$$

**$n$次后，第$i$个窗口还没吃的概率** $P(A_i)=(1-p_i)^n$

**$n$次后，第$i$和$j$个窗口都还没吃的概率**

$$P(A_iA_j)=(1-p_i-p_j)^n$$

$$P\{X > n\} = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum\sum_{i<j} P(A_i A_j)$$

$$+\sum\sum\sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{m+1} P(A_1 \cdots A_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (1 - p_i)^n - \sum\sum_{i<j} (1 - p_i - p_j)^n$$

$$+\sum\sum\sum_{i<j<k} (1 - p_i - p_j - p_k)^n - \cdots$$

**因此，有了$P\{X>n\}$后，就可以计算结果**

$$P\{X=n\}=P\{X>n-1\}-P\{X>n\}$$

**即**

$$P\{X=n\}=\sum_{i=1}^{m}p_i(1-p_i)^{n-1}-\sum_{i<j}\sum(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)^{n-1}$$
$$+\sum_{i<j<k}\sum\sum(p_i+p_j+p_k)(1-p_i-p_j-p_k)^{n-1}-\cdots$$

## 2.分布函数的性质

(1) $0 \le F(x) \le 1,\ x \in R$;

(2) $F(x)$是单调不减的;

(3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$

(4) $F(x)$为右连续，即

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0) \quad (x \in \mathbb{R})$$

**例 2** 已知随机变量 $X$的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

其中$\lambda > 0$为常数，求常数 $A$，$B$的值.

**解** 由 $F(+\infty) = 1$， 得

$$1 = F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} (A + Be^{-\lambda x}) = A$$

$$\therefore \quad A = 1$$

**由分布函数的右连续性，得**

$$\lim_{n\to 0^+} A+Be^{-\lambda x}=F(0)=0$$

即 $F(0)=A+B=0$

$\therefore$ $B=-A=-1$

## 3. 分布函数的作用

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

(1) $P\{X \le b\} = F(b)$;

(2) $P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\}$
$= F(b) - F(a)$

(3) $P\{X > a\} = 1 - F(a)$;

(4) $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} P\{X \le x\} = F(b^-)$;

(5) $P(X = b) = P\{X \le b\} - P\{X < b\}$
$= F(b) - F(b^-)$;

## 3. 分布函数的作用

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$(6) P(X \ge a) = 1 - P\{X < a\} = 1 - F(a^-);$$

$$(7) P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b^-) - F(a^-).$$

$$(8) P\{a \le X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a^-).$$

随机变量落在任一区间范围内的概率都可以由分布函数表示

**1** (2010年第7题) 设随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ (　　)

(A) 0.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D) $1-e^{-1}$.

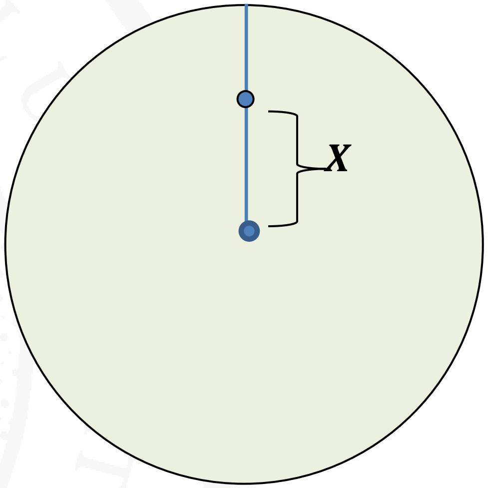
**根据公式计算:**

$$(5)P(X=b)=P\{X\leq b\}-P\{X<b\}$$
$$=F(b)-F(b^{-});$$

$$P\{X=1\}=F(1)-F(1^{-})=\left(1-e^{-1}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$$

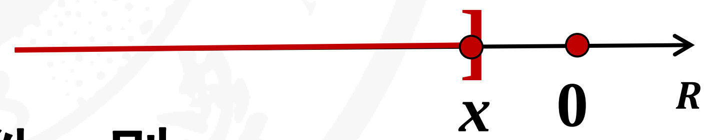
**例3 导弹射击**　**目标海域：以敌舰为中心，半径为2千米的圆。**

若导弹均落在目标海域内，且击中目标海域内**任一点范围内的概率与该点到敌舰距离的平方成正比。**




$X$：弹着点与敌舰的距离，求$X$的分布函数？

**解：** $F(x) = P\{X \le x\}$　$X \ge 0$



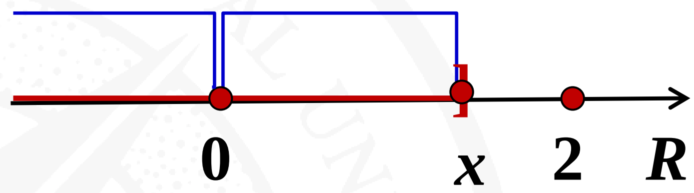

若$x<0$，$\{X \le x\}$是不可能事件，则

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\Phi\} = 0$$

若$0\le x\le 2$，根据题意 $P\{0\le X\le x\}=kx^2$， $k$为常数

又 $P\{0\le X\le 2\}=1$，

得 $4k=1$，即$k=1/4$




此时 $P\{0\le X\le x\}=\dfrac{x^2}{4}.$

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}.$$

若$x>2$， $\{X\le x\}$是必然事件，于是

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

$$=P\{\Omega\}=1$$

**导弹射击**

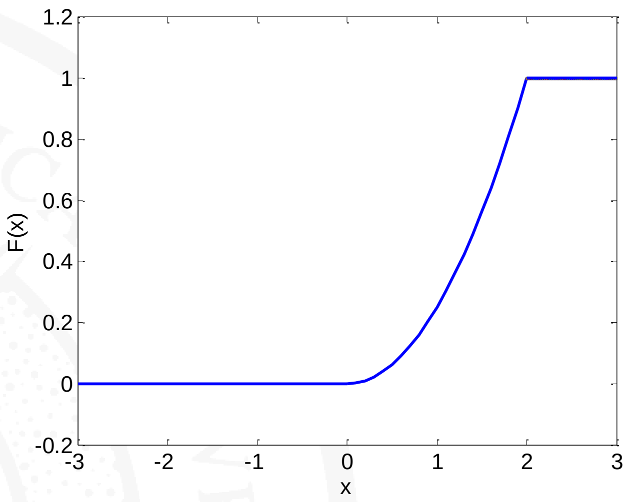
目标海域：以敌舰为中心，半径为2千米的圆。

若导弹均落在目标海域内，且击中目标海域内任一点范围内的概率与该点到敌舰的距离成正比。

$X$：弹着点与敌舰的距离，求$X$的分布函数？

综上，$X$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$



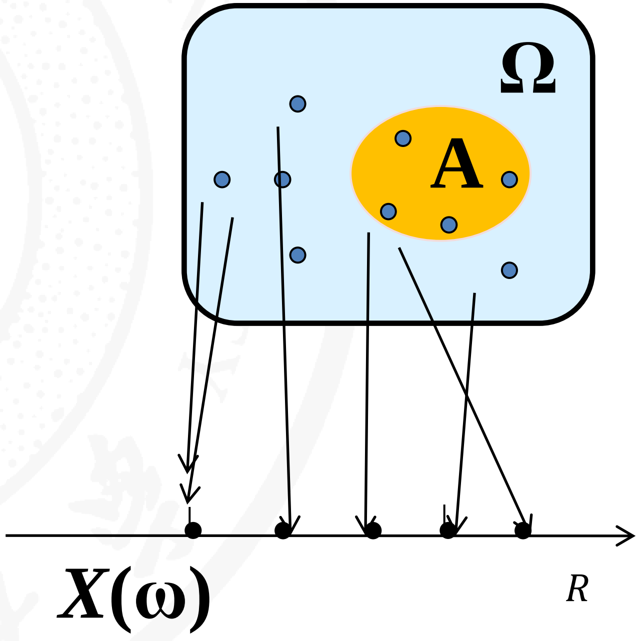
- 描述随机事现象的统计特性

1、概率 → 2、分布函数

# 内容小结

1. 随机变量是一个函数，是定义在样本空间上的函数.

$$\omega \to X(\omega)$$




2. 随机变量分布函数的概念.

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

# 3. 分布函数的性质.

(1) $0 \leq F(x) \leq 1,\ x \in R$;

(2) $F(x)$是单调不减的;

(3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$

(4) $F(x)$为右连续，即

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0) \quad (x \in \mathbb{R})$$

# 4、用分布函数表示随机事件的概率公式

$$F(x) \to P(A) = P\{X \in D\}$$

(1) $P\{X \le b\} = F(b)$;

(2) $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$;

(3) $P\{X > a\} = 1 - F(a)$;

(4) $P\{X < b\} = F(b^-)$;

(5) $P\{X = b\} = P\{X \le b\} - P\{X < b\} = F(b) - F(b^-)$;

(6) $P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b^-) - F(a^-)$.

# 2-1 一维随机变量及其分布

Thank You !

# 思考题

**不同的随机变量,他们的分布函数一定不相同吗?**

**解** 不一定.例如抛均匀硬币, 令

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{正面}, \\ -1, & \text{反面}. \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 1, & \text{反面}, \\ -1, & \text{正面}. \end{cases}$$

**$X_1$与$X_2$在样本空间上对应法则不同,是两个不同的随机变量,但它们却有相同的分布函数.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1/2, & -1 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

# 备用题

**例3-1 设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为:**

$$F(x) = A + B\arctan x \qquad -\infty < x < +\infty$$

**求: (1) 常系数 $A$及$B$;**

**(2) 随机变量 $X$ 落在(-1,1)内的概率.**

**解 (1) 根据分布函数的性质可知**

$$F(+\infty) = 1, \quad F(-\infty) = 0$$

**依题意可得**

$$F(+\infty)=A+\frac{\pi}{2}B=1$$

$$F(-\infty)=A-\frac{\pi}{2}B=0$$

**联立上面两个方程可以解得**

$$A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$$

**(2) 随机变量 *X* 落在(-1,1)内的概率可以表示为**

$$P\{-1<X<1\}=P\{X<1\}-P\{X\le -1\}=F(1^-)-F(-1)$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$$

# 例4-1 抛掷均匀硬币

$$X=\begin{cases}1, & \text{正面},\\ 0, & \text{反面}.\end{cases}$$

**求随机变量$X$的分布函数.**

**解** $$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$$

当 $x<0$ 时

$$F(x)=P\{X\le x<0\} \qquad =P(\emptyset)=0,$$

当$0 \le x < 1$时，

$$F(x) = P\{X \le x\} \qquad = P\{X = 0\} \qquad = P(\overline{A}) = \frac{1}{2},$$

当$x \ge 1$时，

$$F(x) = P\{X \le x\} \quad = P(\Omega)$$

$$= P\{X = 0\} \quad + P\{X = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad = 1.$$

得 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$