西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学

数学与统计学院 应用概率统计系

第三节 随机变量的函数及其分布(2)

（二维随机变量函数的分布）

- 一、问题的引出
- 二、离散型随机变量的函数的分布
- 三、连续型随机变量的函数的分布

一、问题的引出

有一大群人，令X和Y分别表示一个人的年龄和体重，Z表示该人的血压并且已知Z与X,Y的函数关系$Z=f(X,Y)$,如何通过X,Y的分布确定Z的分布

$$p\{X=x_i,Y=y_j\}\Rightarrow p\{Z=z_k\}$$

$$p(x,y)\Rightarrow p_Z(z)$$

为了解决类似的问题,下面我们讨论二维随机变量函数的分布.

二、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量(X,Y)的分布律

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1)$X+Y$, (2)$\left|X-Y\right|$的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

$Z = f(X,Y)$为一维随机变量

等价于

P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$\left(\frac{1}{2},0\right)$	$(3,-2)$	$(3,-1)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	4	3

所以$X+Y, |X-Y|$的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$p\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i, j=1,2,$$

则随机变量函数$Z=f(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{f(X,Y)=z_k\}$$

$$=\sum_{z_k=f(x_i,y_j)} p_{ij} \qquad k=1,2\cdots$$

其中“$\sum\limits_{z_k=f(x_i,y_j)} p_{ij}$”是关于$f(x_i,y_j)=z_k$

的(x_i,y_j)求和.

例2 设X_1, X_2相互独立，且分别服从参数为λ_1, λ_2的泊松分布，求X_1+X_2的分布.

解

$$P\{X_1+X_2=k\}$$

$$=P\{X_1=0; X_2=k\}+P\{X_1=1; X_2=k-1\}$$

$$+\cdots+P\{X_1=k; X_2=0\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P\{X_1=i; X_2=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P\{X_1=i\}P\{X_2=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\{X_1=i\}P\{X_2=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\boxed{\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!i!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

泊松分布

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)^k$$

两个独立的均服从泊松分布的随机变量，其和仍服从泊松分布

所以$X_1+X_2\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

可加性：两个服从同种类型分布的独立随机变量，若它们的和仍为同种类型的分布，则称这个分布具有可加性。

常见分布中

1. 具有可加性：二项、泊松、正态、卡方、负二项、伽马、柯西。

2. 不具有可加性：0-1、几何、均匀、指数、贝塔。

三、连续型随机变量函数的分布

几种特殊形式的随机变量函数的分布

(1)$Z=X+Y$的分布　　$p(x,y)\Rightarrow p_Z(z)$?

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\mathrm{d}x$$

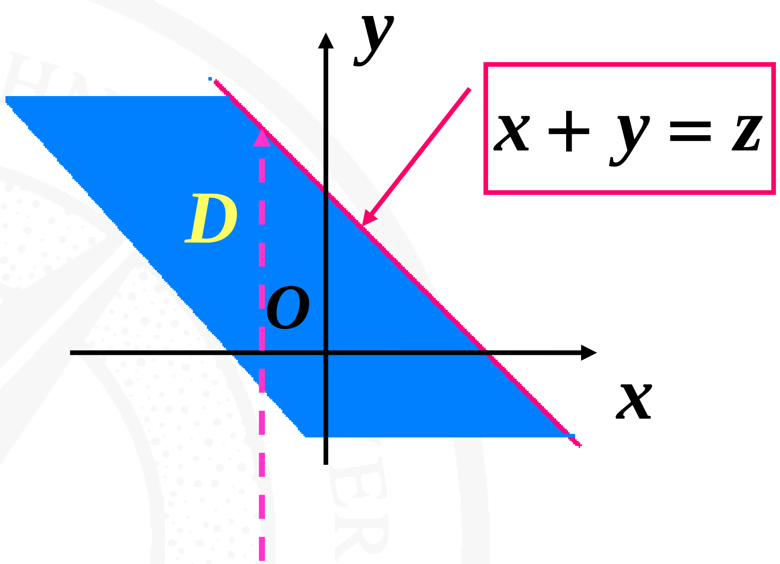
若X与Y独立时，

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

证 $\forall z \in R$

$$D=\{(x,y)\mid x+y\le z\}$$



$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$$

$$=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{令}\,y=u-x}{=\!=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z}p(x,u-x)\mathrm{d}u$$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

积分时 z 视为常数

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z} p(x, u-x)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u-x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \boxed{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u-x)\mathrm{d}x\right]}\mathrm{d}u$$

$$\int_{-\infty}^{z} g(u)\mathrm{d}u$$

$$\therefore \quad p_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)\mathrm{d}x$$

例3 设两个**独立**的随机变量 X 与 Y 都服从**标准正态分布**,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty<y<+\infty$$

由公式 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x$

得 $$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 Z 服从 $N(0,2)$分布.

说明

一般,设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z = X+Y$仍然服从正态分布,且有$Z \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

有限个**相互独立的**正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例如，设X、Y独立，都具有正态分布，则$3X+4Y$也具有正态分布.

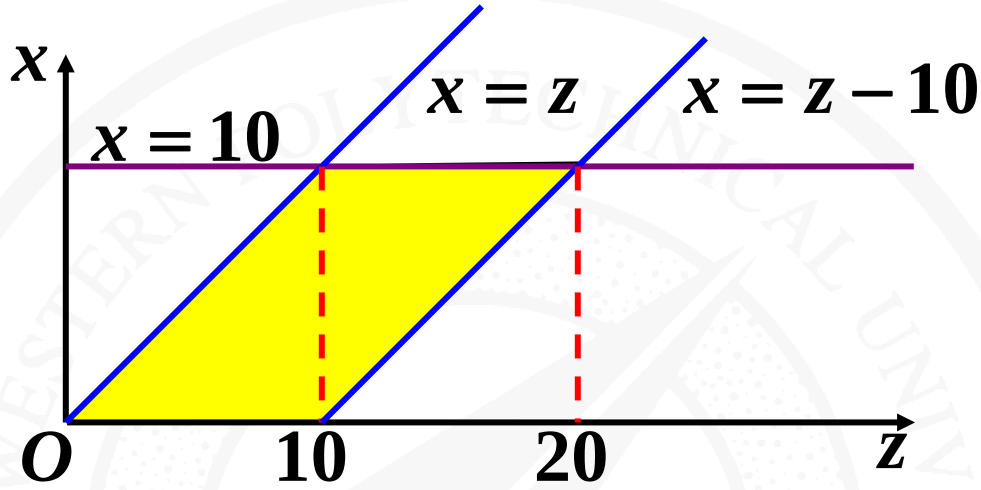
例6 在一简单电路中，两电阻R_1和R_2串联联接设R_1,R_2相互独立,它们的概率密度均为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求电阻$R=R_1+R_2$的概率密度.

解 由题意知 R 的概率密度为

$$p_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}\,x.$$

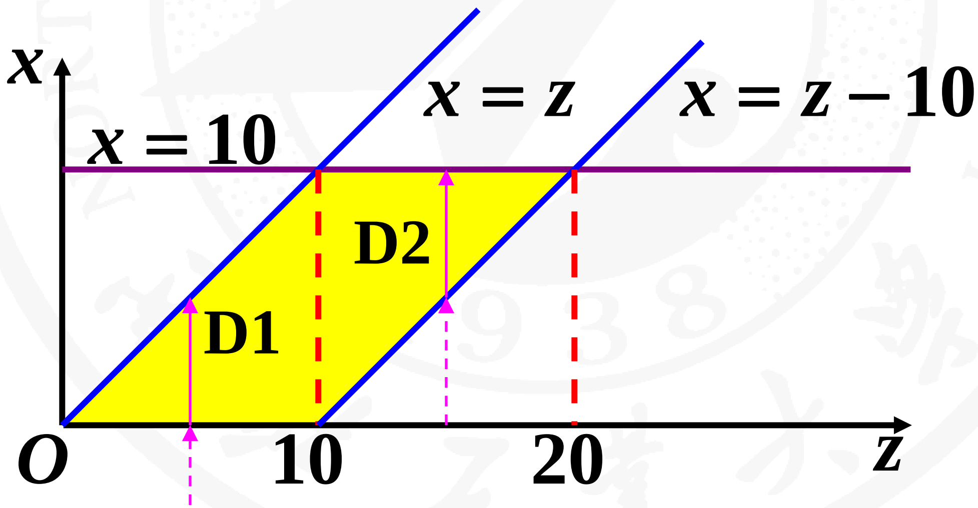


当 $\begin{cases} 0 \le x \le 10, \\ 0 \le z - x \le 10, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 \le x \le 10, \\ z - 10 \le x \le z, \end{cases}$ 时,

$p_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}x$ 中被积函数不为零.

此时

$$p_R(z)=\begin{cases}\int_0^z p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}x, & 0\le z<10,\\ \int_{z-10}^{10} p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}x, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{1}$$



将 $$p(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$p(z-x)=\begin{cases}\dfrac{10-(z-x)}{50}, & 0\le z-x\le 10,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

代入 (1) 式得

$$p_R(z)=\begin{cases}(600z-60z^2+z^3)/15000, & 0\le z<10,\\ (20-z)^3/15000, & 10\le z<20,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) $Z = X - Y$ 的分布

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z+y, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, x-z)\mathrm{d}x$$

当 X 与 Y 独立时，

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z+y)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(x-z)\mathrm{d}x$$

(3) $Z=\frac{X}{Y}$ 的分布

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\mathrm{d}y$$

当 X 与 Y 独立时,

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p_X(yz)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

证 $\forall z\in R$, $D=\{(x,y)\mid \frac{x}{y}\le z\}$

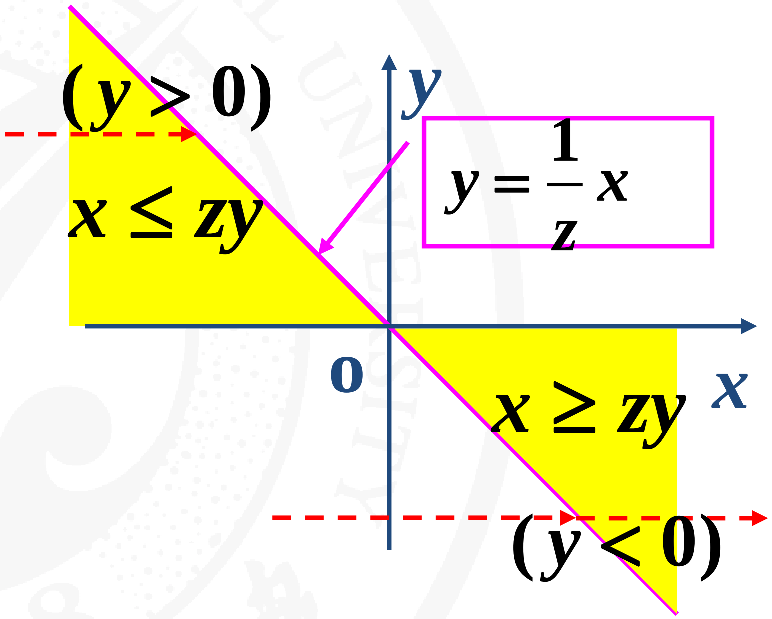
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

① 当$z \le 0$时，

$$F_Z(z) = P(\frac{X}{Y} \le z)$$

$$D = \{(x,y) \mid \frac{x}{y} \le z\}$$

$$= \iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{zy}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{zy}p(x,y)\mathrm{d}x$$

令$u=\frac{x}{y}$ $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z}^{+\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}u+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}p(yu,y)y\mathrm{d}u$

换元

$$= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}y \int_{z}^{-\infty} p(yu, y) y \mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{z} p(yu, y) y \mathrm{d}u$$

交换积分次序

$$= \int_{z}^{-\infty} \boxed{\int_{-\infty}^{0} p(yu, y) y \mathrm{d}y} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{z} \boxed{\int_{0}^{+\infty} p(yu, y) y \mathrm{d}y} \mathrm{d}u$$

$$p_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

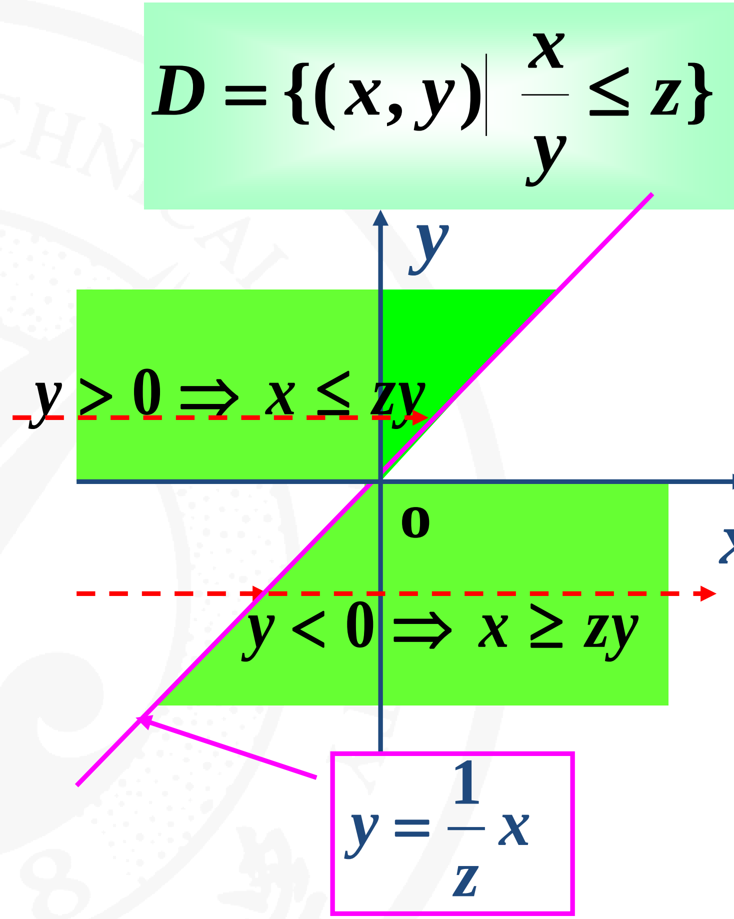
与z没有关系

$$= -\int_{-\infty}^{0} p(yz, y) y \mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} p(yz, y) y \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \, p(yz, y) \mathrm{d}y$$

② 当$z>0$时，

$$F_Z(z)=P(\frac{X}{Y}\le z)$$



$$\iint\limits_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{zy}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{zy}p(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\overset{令u=\frac{x}{y}}{=\!=\!=\!=}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z}^{-\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}u+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}p(yu,y)y\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z}^{-\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}u+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}p(yu,y)y\mathrm{d}u$$

$$=\int_{z}^{-\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{0}p(yu,y)y\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{z}\mathrm{d}u\int_{0}^{+\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}y$$

$$p_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

$$=-\int_{-\infty}^{0}p(yz,y)y\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}p(yz,y)y\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\mathrm{d}y$$

(3)$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\mathrm{d}y$$

当X与Y独立时，

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p_X(yz)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

例4 设X,Y分别表示两只不同型号的灯泡的寿命X,Y相互独立,它们的 概率密度分别为

$$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0, \\ 0, \quad 其他. \end{cases} \qquad p(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, y>0, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$$

试求$Z=\frac{X}{Y}$的概率密度函数

解 由公式 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\mathrm{d}y$

$$p_Z(z)=\int_0^{+\infty} yp(yz,y)\mathrm{d}\,y-\int_{-\infty}^{0} yp(yz,y)\mathrm{d}\,y,$$

$$p(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}, x>0, y>0,\\ 0, \quad\quad 其他.\end{cases}$$

得所求密度函数 (当$z>0$时)

$$p_Z(z)=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-yz}\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}\,y \quad -\ 0$$

$$=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}\,y=\frac{2}{(2+z)^2},$$

(当$z\le 0$时) $p_Z(z)=0$, 得 $p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

$$p_Z(z)=\int_0^{+\infty}yp(yz,y)\,\mathrm{d}\,y-\int_{-\infty}^{0}yp(yz,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

(4) 极值分布，即 $M=\max\{X,Y\}$，

$N=\min\{X,Y\}$的分布.

① 当X，Y相互独立时，有

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

② 当X，Y相互独立且同分布时，有

$$F_M(z)=F^2(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^2$$

证 $F_M(z)=P\{M\le z\}$

$$=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\} \qquad (X与Y独立)$$

$$=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

推广： 一般地，设

$$M = \max\{X_1, X_2, \cdots X_n\},$$

$$N = \min\{X_1, X_2, \cdots X_n\},$$

则当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且同分布时，

有 $$F_M(z) = F^n(z)$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

其中 $F(z) = P\{X_1 \le z\}$.

例5 对某种电子装置的输出测量了５次，得到的观观察值为X_1, X_2, X_3, X_4, X_5设它们是相互独立的随机变量，且都服从同一分布

$$F(z)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{2ze^2}{8}}, & z \geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求$\max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} > 4$的概率.

解 设 $D=\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$

因为 $F_{\max}(z) = [F(z)]^5,$

所以 $P\{D > 4\} = 1 - P\{D \le 4\}$

$$= 1 - F_{\max}(4)$$

$$= 1 - [F(4)]^5$$

$$= 1 - (1 - e^{-e^2})^5.$$

例 7 设(X,Y)的联合分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)问：X与Y是否相互独立？

(2)设含有a的二次方程为

$$a^2+2Xa+Y=0$$

求此方程有实根的概率；

(3)求(X,Y)的分布函数.

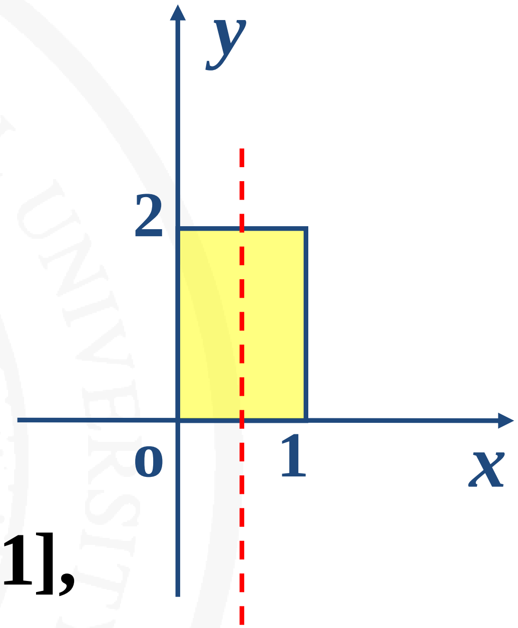
(1)先求$p_X(x), p_Y(y)$.

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} \int_0^2 p(x,y)\mathrm{d}y, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

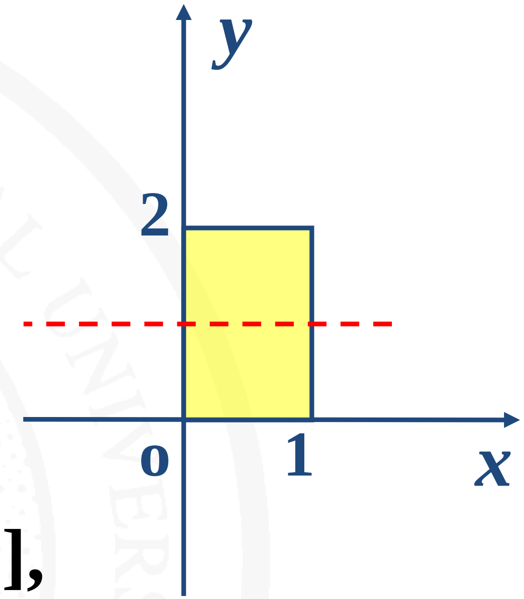
$$= \begin{cases} \int_0^2 (x^2 + \frac{1}{3}xy)\mathrm{d}y, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{3}x, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 p(x,y)\mathrm{d}x, & y\in[0,2],\\ 0, & 其它.\end{cases}$$



$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x, & y\in[0,2],\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y, & y\in[0,2],\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$\because \quad p(1,0)=1, \quad p_X(1)=\frac{8}{3}, \quad p_Y(0)=\frac{1}{3}$$

$$p(1,0)=1\neq p_X(1)\,p_Y(0)$$

$\therefore \quad X$与Y不独立.

（2）设含有a的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$

求此方程有实根的概率p;

$$\{a^2+2Xa+Y=0\text{有实根}\}$$

$$=\{4X^2-4Y\geq 0\}$$

$$=\{Y\leq X^2\}$$

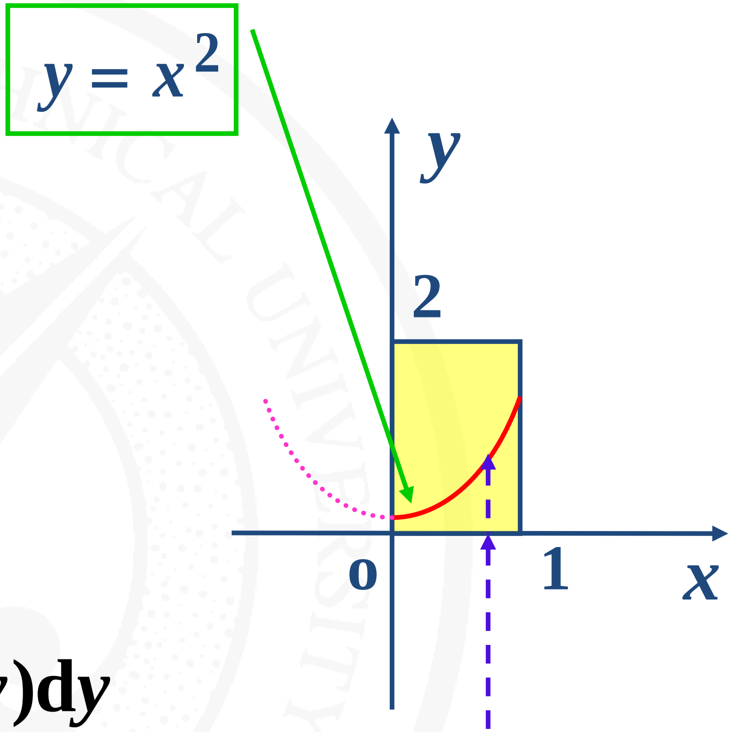
$$p = P\{Y \le X^2\}$$

$$= \iint\limits_{y \le x^2} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} p(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} (x^2 + \tfrac{1}{3}xy)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (x^4 + \tfrac{1}{6}x^5)\mathrm{d}x = \frac{41}{180} \approx 0.2278$$

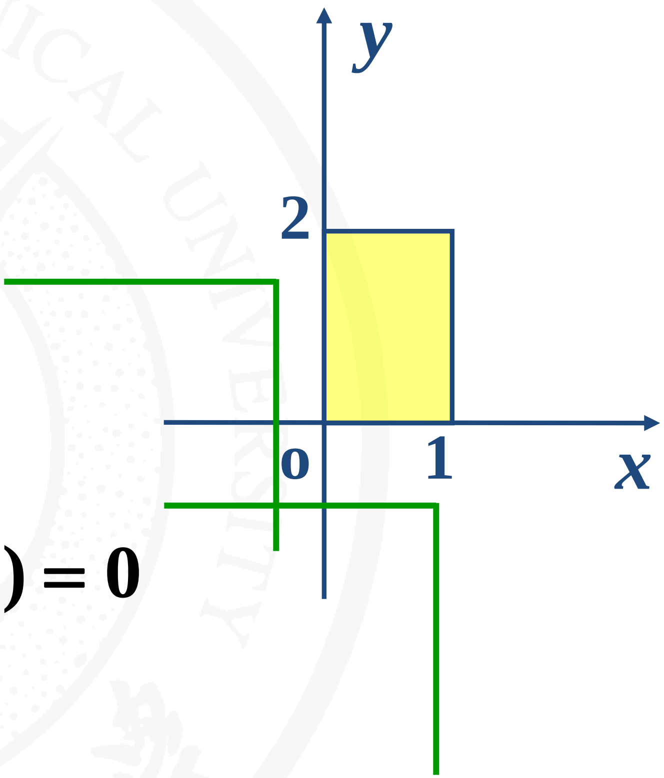


(3)求（X,Y)的分布函数

$$F(x,y)=p\{X\le x, Y\le y\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



① 当$x\le 0$或$y<0$时，$p(x,y)=0$

$\therefore \quad F(x,y)=0$

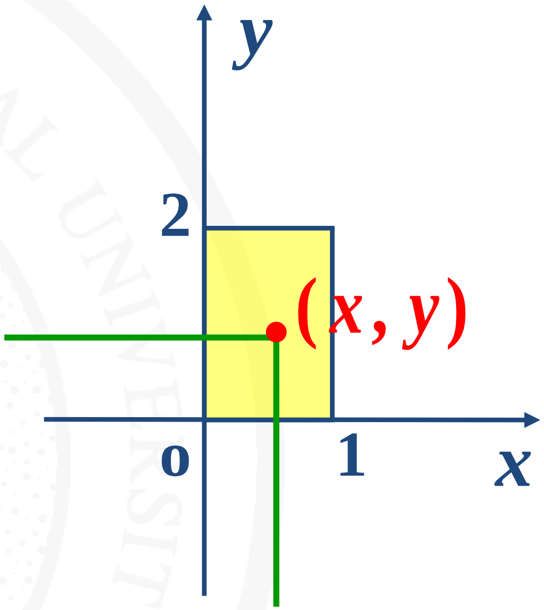
② 当$0 < x \le 1, 0 < y \le 2$时

$$F(x,y) = \iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^y p(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^y \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}x^3 y + \frac{1}{12}x^2 y^2.$$



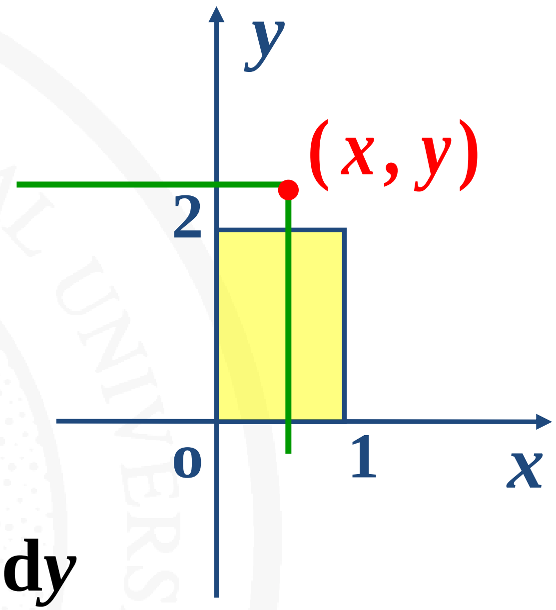
③ 当$0 < x \le 1, y > 2$时，

$$F(x,y) = \iint\limits_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^2 p(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^2 (x^2 + \frac{1}{3}xy)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)x^2.$$



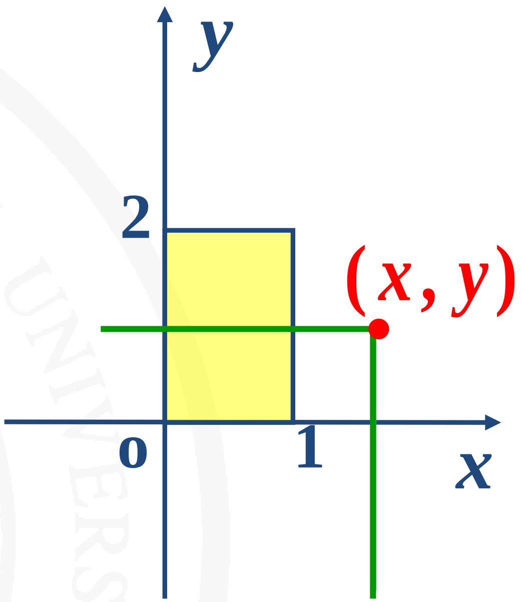
④ 当$x>1, 0<y\le 2$时，

$$F(x,y)=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^y p(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^y \left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{12}(4+y)y.$$



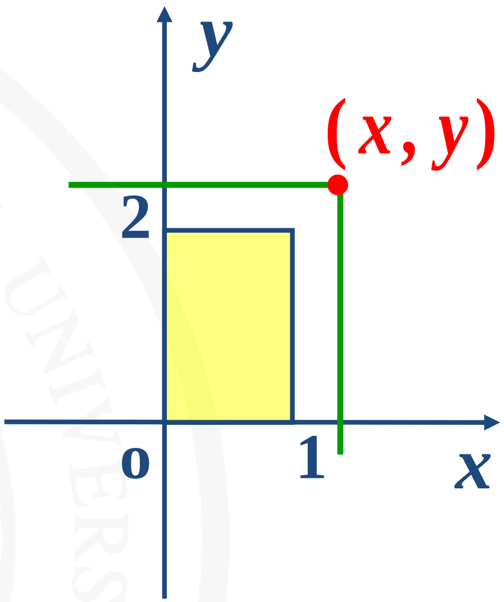
⑤ 当$x > 1, y > 2$时，

$$F(x,y)=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^2 p(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^2 (x^2+\frac{1}{3}xy)\mathrm{d}y$$

$$=1.$$



例8 设X,Y为随机变量且$P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7}$,
$P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$,求$P\{\max(X,Y)\geq 0\}$

解 由$P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7},P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$

可知 $P\{\max(X,Y)\geq 0\}=P\{X\geq 0\text{或}Y\geq 0\}$

$$=P\{X\geq 0\}+P\{Y\geq 0\}-P\{X\geq 0,Y\geq 0\}$$

$$=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

例6-1 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且其分布密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}\quad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的分布密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,所以 (X,Y) 的分布密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

随机变量 Z 的分布函数为

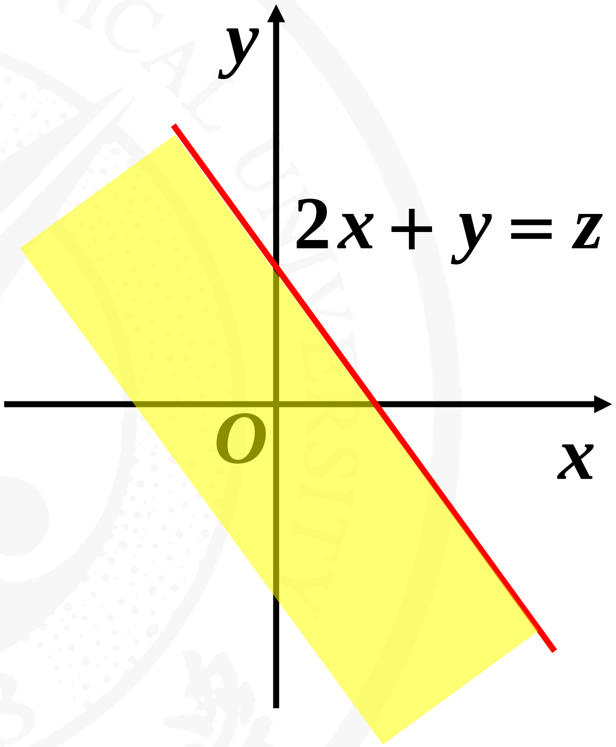
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= P\{2X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{2X+Y\le z} p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{2X+Y\le z} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$(0 \le x \le 1, y > 0)$$



$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}(1-e^{2x-z})\,dx, & 0<z\le 2,\\ \int_0^1(1-e^{2x-z})\,dx, & z>2.\end{cases}$$

所以随机变量 Z 的分布密度为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ (1-e^{-z})/2, & 0<z\le 2,\\ (e^2-1)e^{-z}/2, & z\ge 2.\end{cases}$$

例6-2 若X和Y独立,具有共同的概率密度

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解 由卷积公式

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

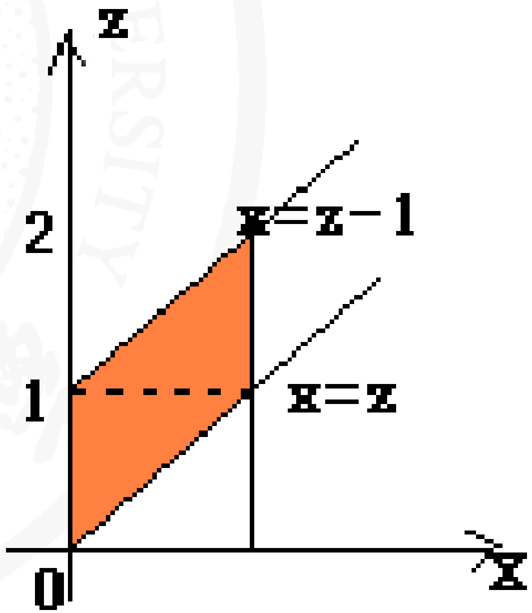
$$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le z-x\le 1,\end{cases}\quad \text{也即}\quad \begin{cases}0\le x\le 1,\\ z-1\le x\le z,\end{cases}$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le z-x\le 1,\end{cases}\quad \text{也即}\quad \begin{cases}0\le x\le 1,\\ z-1\le x\le z,\end{cases}$$

如图示:



于是

$$p_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z \mathrm{d}x=z, & 0\le z\le 1,\\ \int_{z-1}^1 \mathrm{d}x=2-z, & 1\le z<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

内容小结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z=f(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{f(X,Y)=z_k\}$$
$$=\sum_{z_k=f(x_i,y_j)} p_{ij} \qquad k=1,2,\cdots.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1)$Z = X + Y, Z = X - Y$的分布

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x)\mathrm{d}x \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z - y, y)\mathrm{d}y$$

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, x - z)\mathrm{d}x \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z + y, y)\mathrm{d}y$$

(2)$Z = \dfrac{X}{Y}$的分布

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, p(yz, y)\mathrm{d}y$$

(3)$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

当X，Y相互独立时，有

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

当X，Y相互独立且同分布时，有

$$F_M(z)=F^2(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^2$$

推广： 一般地，设

$$M = \max\{X_1, X_2, \cdots X_n\},$$

$$N = \min\{X_1, X_2, \cdots X_n\},$$

则当$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且同分布时，

有 $F_M(z) = F^n(z)$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

其中$F(z) = P\{X_1 \le z\}$.

3. 常用结论

(1) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b,(a\sigma)^2)$.

(2) $X_1 \sim P(\lambda_1), X_2 \sim P(\lambda_2)$, 且 $X_1 X_2$ 相互独立

$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

(3) X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

则 $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

(4) X, Y 相互独立且 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$,

则 $Z = X / Y$ 服从柯西分布

$$p_Z(z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}$$

2-3 随机变量的函数

Thank You !

备用题

例3-1 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求：$Z=\max(X,Y)$的分布律.

解 因为X与Y相互独立,

所以$p\{X=x_i,Y=y_j\}=p\{X=x_i\}p\{Y=y_j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$p\{\max(X,Y)=i\}$$
$$=P\{X=i,Y<i\}$$
$$+P\{X\le i,Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\}=P\{0,0\}=\frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\}=P\{1,0\}+P\{0,1\}+P\{1,1\}$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

故 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

例2 设两个独立的随机变量X与Y的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例4-1 设随机变量X与Y独立，且

$$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=p>0,$$

$$P\{X=0\}=P\{Y=0\}=1-p>0,$$

$$令Z=\begin{cases}1, & X+Y为偶数,\\ 0, & X+Y为奇数.\end{cases}$$

要使X与Z独立，则$p=$ $\frac{1}{2}$.

解

P	$2p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$
(X,Y)	$(0,1),(1,0)$	$(0,0),(1,1)$
Z	0	1

若X与Z独立,则

$$Z=0 \leftrightarrow \begin{cases}(X,Y)=(0,1)\\(X,Y)=(1,0)\end{cases}$$

$$P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Z=0\}=2p(1-p)$$

又$\because$ 事件$\{X=0,\ Z=0\}=\{X=0,\ Y=1\}$

$$\therefore\quad P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,Y=1\}$$

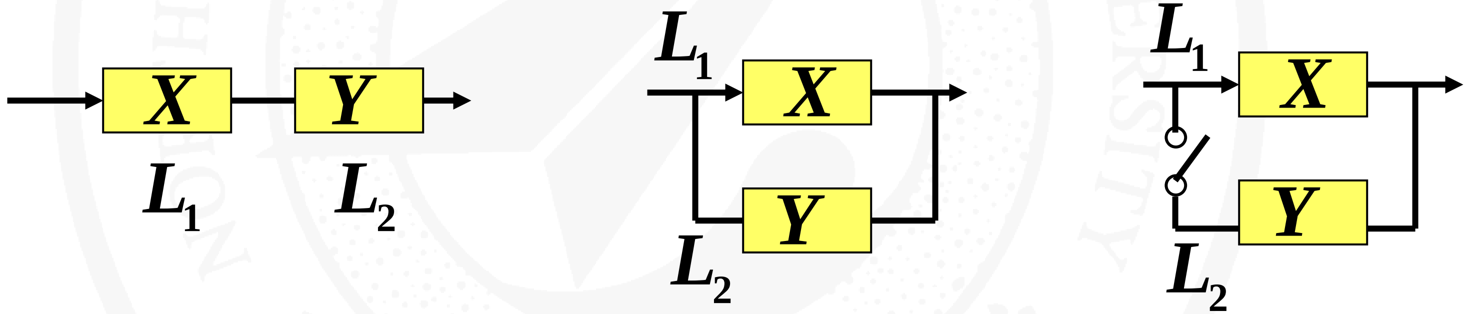
$$=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\}$$

$$=(1-p)\cdot p$$

从而 $\cancel{(1-p)\cdot p}=\cancel{(1-p)}\cdot 2\cancel{p}(1-p)$

$\because\quad 1-p>0 \therefore\quad 2(1-p)=1 \quad\therefore\quad p=\dfrac{1}{2}$

例8-1 设系统L由两个相互独立的子系统L_1,L_2联接而成，连接的方式分别为(*i*)串联,(*ii*)并联,(*iii*)备用(当系统L_1损坏时,系统L_2开始工作),如图所示



设 L_1,L_2 的寿命分别为 X,Y,已知它们的概率密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad p_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中$\alpha>0,\beta>0$且$\alpha\neq\beta$.试分别就以上三种联接方式写出L的寿命Z的概率密度.

解 (i)串联情况

由于当 L_1,L_2 中有一个损坏时,系统 L 就停止工作,所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $p_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

由 $p_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta x}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$p_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha z} + \beta \mathrm{e}^{-\beta z} - (\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta) z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 才开始工作，因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和，即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时，$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z-y)\, p_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^z \alpha\, \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta\, \mathrm{e}^{-\beta y} \mathrm{d}y$$

$$= \alpha\beta\, \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}]$$

当 $z < 0$ 时, $f(z) = 0$,

于是 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$p(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$