西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第一节 一维随机变量及其分布(4)

- 五、连续型随机变量
- 六、典型的连续型随机变量及其分布

3.指数分布

设备故障检修

检修频繁

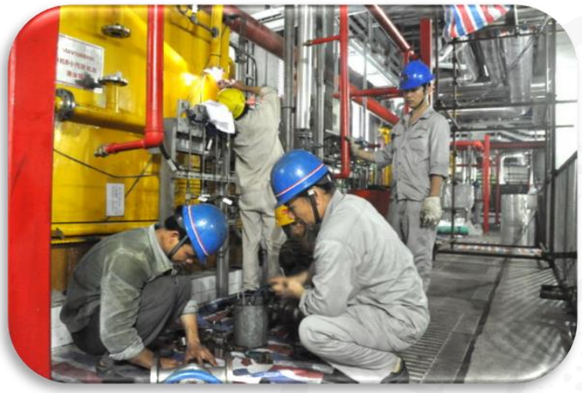
- 检修成本高
- 降低生产效率

检修次数少

- 设备故障
- 影响生产

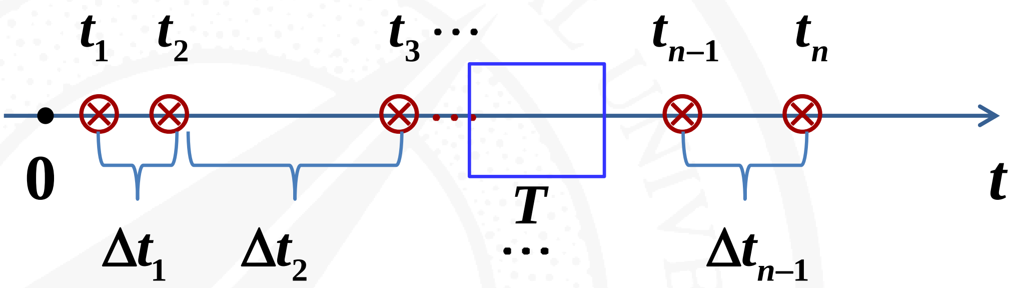
如何合理安排检修周期T？

排除故障　　**节省成本**



检修周期T

X：设备故障的时间间隔



可靠性：设备正常运行的概率

$\underline{P\{X>T\}}\geq\alpha \Rightarrow T$的范围

(1) 分析

1. 每次故障相互独立；
2. 设备的故障率保持不变

假 设 ⇨ 数学模型 ⇨ 概率分布

X:设备故障的时间间隔 $F(t)=P\{X\le t\}$

归一性

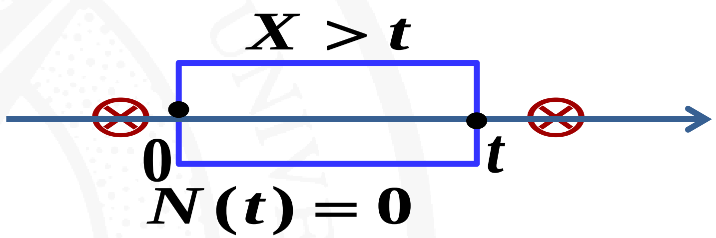
当$t<0$时， $F(t)=P\{X\le t\}=0$

当$t>0$时， $F(t)=P\{X\le t\}=1-P\{X>t\}$

$N(t)$:[0, t]时间段内的故障数 $\sim P(\lambda t)$

$$P\{X>t\}=P\{N(t)=0\}$$

$$=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}\quad=e^{-\lambda t}$$



泊松分布：单位时间内，随机事件发生的次数。 N

分布律 $P(N=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=1,2\cdots$ $\sim P(\lambda)$

其中$\lambda>0$,表示单位时间内随机事件的平均次数。

X:设备故障的时间间隔 **分布函数** $F(t)=P\{X\le t\}$

$$\begin{cases}\text{当}t<0\text{时，} & F(t)=0\\ \text{当}t>0\text{时，} & F(t)=1-P\{X>t\}=1-e^{-\lambda t}\end{cases}$$

检修周期T：可靠性 $P\{X>T\}=1-F(T)=e^{-\lambda T}\ge\alpha$

$$\Rightarrow T\le-\frac{\ln\alpha}{\lambda}$$

又 $\because F(t)=\int_{-\infty}^{t}p(x)dx$ $\xrightarrow{\text{密度函数}}$ $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

(2) 定义 若随机变量X的**密度函数**为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

连续型概率分布

其中为常数$\lambda>0$为常数，则称X服从参数为λ的**指数分布**，记作$X\sim Exp(\lambda)$

分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

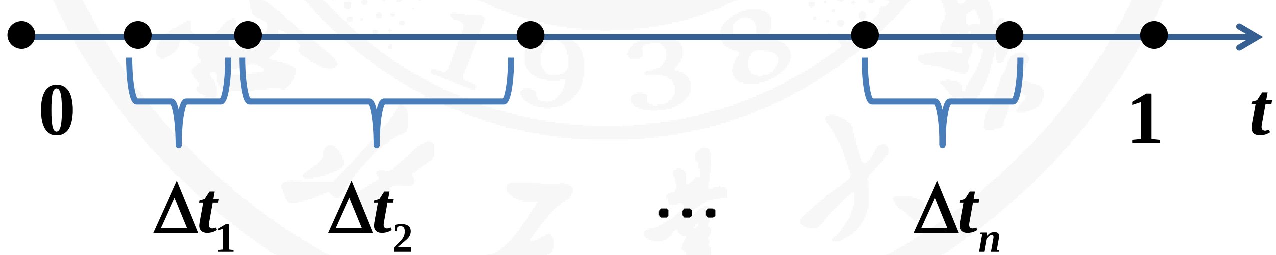
(3) 意义

泊松分布：单位时间内，随机事件发生的次数。

$N \sim p(\lambda)$　　　$\lambda > 0$：随机事件的平均次数。

指数分布：单位时间内，随机事件发生的时间间隔。

$T \sim Exp(\lambda)$　　　$\dfrac{1}{\lambda}$：随机事件的平均时间间隔。



拓展阅读：泊松分布和指数分布：10分钟教程

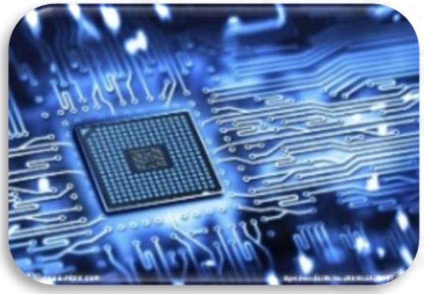
(3) 意义

指数分布：时间间隔

航班降落的次数 $N \sim p(\lambda)$

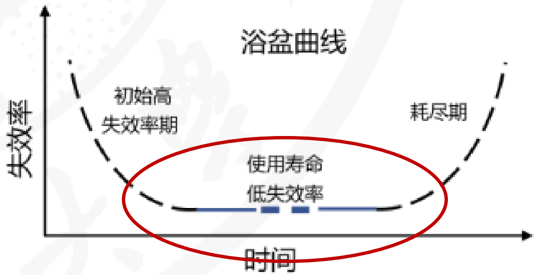
航班降落的时间间隔 $T \sim Exp(\lambda)$

指数分布（寿命分布）：一定条件下产品、系统的寿命



电子器件的寿命

玻璃制品的寿命

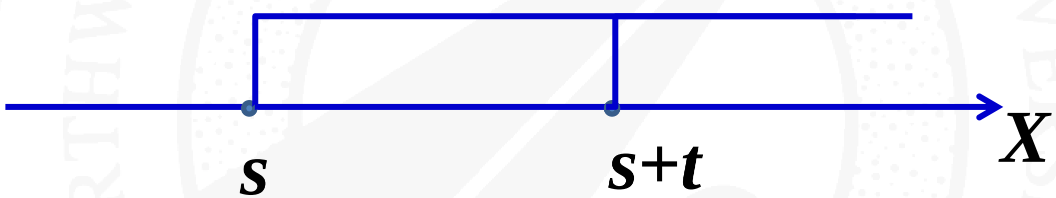


人的寿命

(4) 特点：无记忆性

若 $X \sim Exp(\lambda)$，对任意 $s>0, t>0$，有

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$$



已经使用时间 s，还能使用至少时间 t 的概率 = 至少使用时间 t 的概率

$$P\{X>2 \mid X>1\}=P\{X>1\}$$

证明:

条件概率

$$P\{X>s+t \mid X>s\} = \frac{P\{X>s+t, X>s\}}{P\{X>s\}}$$

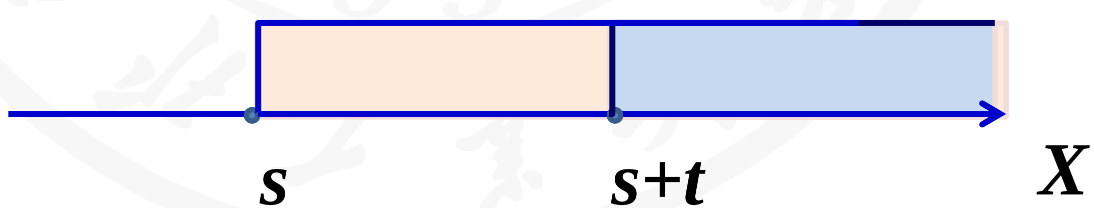
$$\{X>s+t\} \subseteq \{X>s\}$$

$$= \frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}$$

永远“年轻的分布”

$$\because X \sim Exp(\lambda) \qquad \therefore P\{X>s\} = 1 - F(s) = e^{-\lambda s}, s>0.$$

于是 $$P\{X>s+t \mid X>s\} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P\{X>t\}$$



例 5 设备故障检修

设相邻两次设备故障的时间间隔X服从参 数为1.2 的指数分布，求

(1) 2小时内不发生故障的概率?

(2) 已知过去13小时没有发生故障，那么 在未来2小时不发生故障的概率？

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

解：由题意 $X\sim Exp(\lambda), \lambda=1.2$

(1) $P\{X>2\}=1-F(2)=e^{-2\lambda}\approx 9.1\%$

无记忆性

故障间隔$X \sim Exp(\lambda), \lambda = 1.2$

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = P\{X > t\}$$

$$(2)\quad P\{X > 15 \mid X > 13\}$$

$$= P\{X > 2\}$$

$$= 1 - F(2)$$

$$= e^{-2\lambda} \approx 9.1\%$$

设备故障检修

设相邻两次设备故障的时间间隔X服从参数为1.2 的指数分布，求

(1) 2小时内不发生故障的概率?

(2) 已知过去13小时没有发生故障，那么在未来2小时不发生故障的概率?

设备故障检修周期仅与参数λ相关，与当前状态无关！

交通路口安全性评估

某交通路口平均每月发生5起交通事故，已知该路口过去20天没有发生交通事故，求未来10天不发生交通事故的概率？

内容小结

关键词：

随机变量、分布函数、分布律、概率密度函数

思维导图：

随机变量 ⇨ 分布函数

- 离散型随机变量
  分布律
- 连续性随机变量
  概率密度函数

统计特性

离散型随机变量的分布

分布函数 $F(x) = P(X \le x)$

分布律 $P(X = x_k) = p_i$

分布函数 $F(x) = \sum_{x_k \le x} P(X = x_k)$ 右连续

$$P(A) = P(x \in D) = \sum_{x_k \in D} P(X = x_k)$$

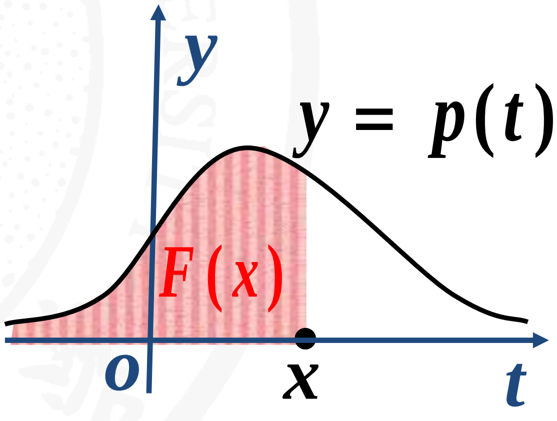

离散型
随机变量
两点
分布
二项
分布
均匀
分布
泊松
分布
超几何
分布
几何
分布
单点
分布

连续型随机变量的分布

分布函数 $F(x)$ **概率密度函数** $p(x)$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

$$P(A)=P\{X\in D\}=\int_{x\in D} p(x)dx$$



2.密度函数的性质

(1) $p(x) \geq 0,\ x \in R;$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1;$

(3) $P\{a < X \leq b\} = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x;$ (4) $P\{X \quad c\} \quad 0.$

连续型随机变量

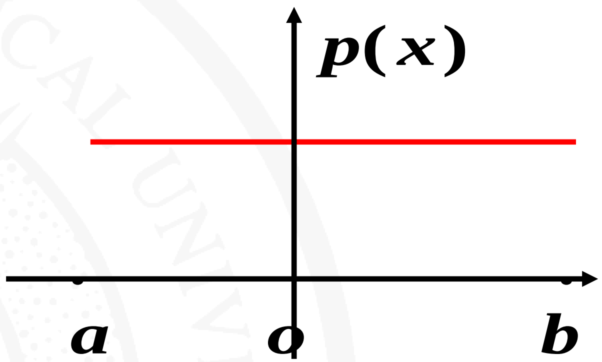
均匀分布

指数分布

正态分布

2. 常见连续型随机变量的分布

(1) 均匀分布 $X \sim U[a,b]$

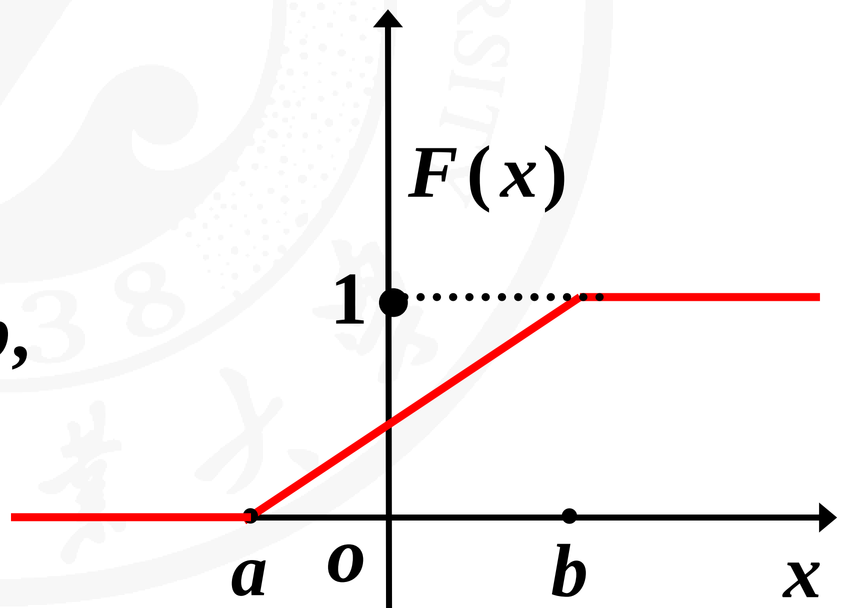


概率密度

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b,\\ 1, & x \ge b.\end{cases}$$



(2) 正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

密度函数

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$-\infty < x < \infty.$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \xrightarrow{\text{标准化}} \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

(3) 指数分布 $X \sim Exp(\lambda)$.

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

指数分布：单位时间内，随机事件发生的时间间隔。

$T \sim Exp(\lambda)$ $\quad \dfrac{1}{\lambda}$:随机事件的平均时间间隔。

指数分布（寿命分布）：一定条件下产品、系统的寿命

无记忆性 $\quad P\{X>s+t \mid X>s\} = P\{X>t\}$

2-1 一维随机变量

Thank You !

例 1 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} ke^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

试确定常数 k,并求 $P\{X>0.1\}$.

解 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} ke^{-3x}\mathrm{d}x = 1$

所以 $k=3$.

$$P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty} 3e^{-3x}\mathrm{d}x = -e^{-3x}\Big|_{0}^{+\infty} = 0.7408$$

备用题 **例1-1** 设连续型随机变量 X的分布函数为:

$$F(x) = A + B\arctan x \quad -\infty < x < \infty$$

求(1)常系数 A及B;

(2)随机变量X落在$(-1,1)$内的概率;

(3)随机变量X的分布密度.

解 $(1)\because F(+\infty) = A + \frac{\pi}{2}B = 1$

$$F(-\infty) = A - \frac{\pi}{2}B = 0$$

解之得 $A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}$

$$(2)\ P\{-1<X<1\}=F(1-0)-F(-1)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$(3)\ p(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+x^2}$$

例1-2 设

$$p_1(x)=\begin{cases}\frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \quad (a>0)$$

$$p_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_3(x)=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)上面 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$是否为随机变量X的密度函数.

(2) 若是X的密度函数,求出X的分布函数.

(3)求$P\{0 \le X \le 1\}$.

解 (1)因为在$x \in (-\infty,+\infty)$时, $p_1(x) \ge 0$,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{a} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} \Big|_{0}^{+\infty} = 1$$

所以 $p_1(x)$为X的密度函数.

因为当$x \in (\frac{\pi}{2},\pi]$时, $p_2(x) = \frac{1}{2}\cos x < 0$,所以 $p_2(x)$不是X的密度函数.又

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_3(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\mathrm{d}x$$

$$= \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 > 1$$

所以 $p_3(x)$不是X的密度函数.

(2)由(1)知 $p_1(x)$为X的分布密度,其分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t,$$因为

$x < 0$时, $p_1(x) = 0$,所以$F(x) = 0$

$x \geq 0$时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{t}{a}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\Big|_{0}^{x}=1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$$

综上所述 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}, & x\geq 0.\end{cases}$

(3)求$P\{0\leq X\leq 1\}$时,可以使用分布函数$F(x)$,也可以使用密度函数$p_1(x)$.则

$$P\{0\leq X\leq 1\}=F(1)-F(0)=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}}-0=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}}$$

或

$$P\{0\leq X\leq 1\}=\int_{0}^{1}\frac{x}{a}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\Big|_{0}^{1}=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}}$$

例2 设随机变量 X 在 $[2, 5]$上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测 ,试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 A 表示"对 X 的观测值大于 3",

即 $A=\{X>3\}$.

由于 $P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5 \frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

设 Y 表示对 X 进行3次独立观测中，观测值大于3的次数,

则 $Y \sim B(3, \frac{2}{3})$.

因而有

$$P\{Y \geq 2\}=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{20}{27}.$$

例 2-1 设 k 在(0,5)上服从均匀分布，求方程

$$4x^2+4kx+k+2=0$$

有实根的概率.

解 当 $16k^2-16(k+2)\geq 0$ 时,

即 $k^2-(k+2)=(k-2)(k+1)\geq 0$ 时,

亦即 $k\geq 2$ 或 $k\leq -1$ 时,有实根,

则有实根的概率为

$$p=\int_2^5 \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}.$$

例 5-1 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制), 服从正态分布，平均成绩为 72分，96分以上占考生总数的2.3%, 试求考生的外语成绩在 60分至 84分之间的概率.

解 依题意，考生外语成绩 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

其中 $\mu = 72$，且

$$P\{X > 96\} = 0.023$$

于是 $P\{X \le 96\} = 1 - P\{X > 96\}$

$$= 1 - 0.023 = 0.977$$

又 $\because \quad P\{X \le 96\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{96-\mu}{\sigma}\}$

$$=\Phi(\frac{96-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{96-72}{\sigma}) = \Phi(\frac{24}{\sigma})$$

$\therefore \quad \Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977$

查表，知 $\Phi(2) = 0.977$

由 $\Phi(x)$的单调增加性，得 $\frac{24}{\sigma} = 2$

$\therefore \quad \sigma = 12$

因而 $\quad X \sim N(72, 12^2)$

故 $$P\{60 \le X \le 84\} = P\{\frac{60-72}{12} \le \frac{X-72}{12} \le \frac{84-72}{12}\}$$

$$= \Phi(\frac{84-72}{12}) - \Phi(\frac{60-72}{12})$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \quad = 2\Phi(1) - 1$$

查表，得

$$\Phi(1) = 0.841$$

$$\therefore \quad P\{60 \le X \le 84\} = 2 \times 0.841 - 1 = 0.682$$

例5-2 设X的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{-(x^2+4x-4)/6},\quad -\infty<x<+\infty.$$

求:(1)$P\{1<x<3\}$;

(2)使$\int_C^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{C}p(x)\mathrm{d}x$的$C$.

解 $$P\{1<X<3\}=\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{3}}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{3}}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-1$$

因为$\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{(-x^2+4x-4)/6}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-(x-2)^2/(2\times3)}$,

所以，$X\sim N(2,3)$.从而

$$= 2\Phi(0.5773) - 1 = 0.438(\text{查表}).$$

（2）要使$\int_C^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{C} p(x)\mathrm{d}x$,则$C$为概率分布的对称点.由正态分布的性态知$C = \mu = 2$为所求.

例5-3 公共汽车车门的高度是按成年男子与门楣碰头的概率不大于0.01设计的,设成年男子身高(单位：厘米）$X \sim N(170, 6^2)$,试确定车门应设计的最低高度h.

解 设车门高度为h，则应有$P\{X > h\} \le 0.01$.

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \le h\} = 1 - \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \le 0.01,$$

即$\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \ge 0.99$,查表知$\frac{h-170}{6} \ge 2.33$,于是

$$h = 170 + 2.33 \times 6 \approx 184.$$

所以,车门最低高度应为184厘米.

例5-4 从甲地飞往乙地的航班,每天上午10:10起飞,飞行时间X服从均值是4h,标准差是20min的正态分布.

(1) 该机在下午2:30以后到达乙地的概率是多少?

(2) 该机在下午2:20以前到达乙地的概率是多少?

(3) 该机在下午1:50至2:30之间到达乙地的概率是多少?

解 设时间单位为min,则$X \sim N(240,20^2)$.

(1) 所求概率为

$$P(X \geq 260) = 1 - \Phi((260 - 240)/20) = 1 - \Phi(1)$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

(2) 所求概率为

$$P(X \leq 250) = \Phi((250 - 240)/20) = \Phi(0.5) = 0.6915.$$

(3) 所求概率为

$$P(220 \leq X \leq 260) = 2\Phi(1) - 1$$

$$= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826.$$

例6-1 某仪器装有3支独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:h)都服从同一指数分布,密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求在仪器使用的最初200h内,至少有一个电子元件损坏的概率。

解 设$X_i(i=1,2,3)$表示第i支元件的使用寿命.

$A_i(i=1,2,3)$表示事件:{在仪器使用最初200h内第i支电子元件损坏}

$\overline{A_i}(i=1,2,3)$表示事件:{在仪器使用最初200h内第i支电子元件未损坏}

$$P(A_i)=P\{X_i\le 200\}=\int_0^{200}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{1}{600}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$$

$$\alpha=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-[1-(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})]^3=1-\mathrm{e}^{-1}$$