西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学

数学与统计学院 应用概率统计系

第三节 随机事件的概率

- 一、频率的定义与性质
- 二、概率的统计定义
- 三、古典概型
- 四、几何概型
- 五、概率的公理化定义

五、概率的公理化定义

1933年，苏联数学家**柯尔莫哥洛夫**(1903-1987)提出了概率论的公理化结构，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速的发展.

柯尔莫哥洛夫，A. H.

特殊 ⟶ 一般

1.定义1.7设E是随机试验，Ω是它的样本空间，对于E的每一事件A赋予一个实数，记作$P(A)$，若$P(A)$满足下列三条公理：

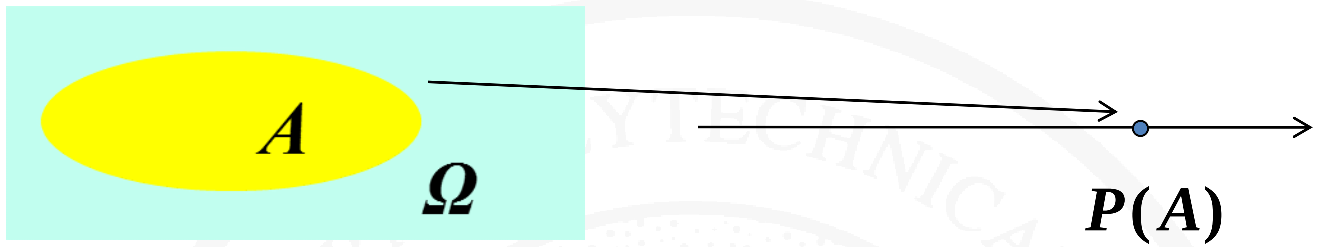
(1) 非负性：对于每一事件A，有 $P(A)\geq 0$;

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性：对于两两互斥的事件A_1，$A_2,\cdots$，即$i\neq j$时，$A_iA_j=\Phi \quad (i,j=1,2,\ldots)$，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m+\cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)+\cdots.$$

则称$P(A)$为事件A的概率。



$$A \to P(A)$$

$$A \subset \Omega, \quad A \in \mathcal{F}, P \in [0,1]$$

$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 概率空间

注 1^{o} 古典概率满足概率的公理化定义；

2^{o} 几何概率也满足概率的公理化定义(证明略).

2. 性质1.4 (公理化概率定义的性质)

(1) $P(\Phi)=0$

证 $\Omega=\Omega+\Phi+\Phi+\cdots$,

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\Phi)+P(\Phi)+\cdots,$$

$P(\Omega)=1$, $\therefore$ $P(\Phi)=0$.

(2) 有限可加性:

设A_1, $A_2,\cdots,A_m$为有限个两两互斥事件，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m).$$

证 $A_1+A_2+\cdots+A_m=A_1+A_2+\cdots+A_m+\Phi+$

$+\Phi+\Phi+\cdots,$

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)$$

$$=P(A_1+A_2+\cdots+A_m+\Phi+\Phi+\cdots)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)+P(\Phi)+P(\Phi)+\cdots$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m).$$

(3) 逆事件的概率： 对于任意事件A，有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

证 $A + \bar{A} = \Omega$, $\quad A\bar{A} = \Phi$,

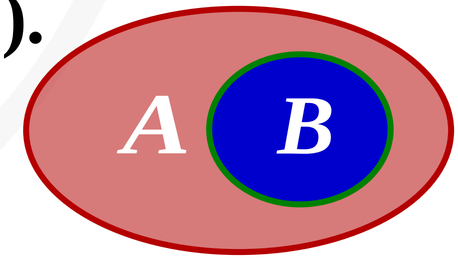
$$\therefore P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1,$$

即 $\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

(4) 若$A \supset B$，则 $P(A - B) = P(A) - P(B).$

证 $\because B \subset A$, $\therefore A = A \cup B = B + (A - B).$

又$\because \quad B(A - B) = BA\bar{B} = \Phi$,



$$\therefore \quad P(A) = P(B) + P(A-B),$$

即 $$P(A-B) = P(A) - P(B).$$

一般的 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ 减法公式

$\because A \supset AB$

$\therefore P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$

推论1(单调性) 若$A \supset B$，则 $P(B) \le P(A)$.

例5：假如某城市中，

30%家庭养猫 60%家庭养狗 20%家庭猫狗双全



若随机选一个家庭，他家养狗或养猫但不猫狗双全的概率？

解： 记养猫为事件C，养狗为事件D。

所以，猫狗双全可记为CD（即C∩D）

养猫但不养狗的概率

$$P(C\overline{D}) = P(C - CD)$$
$$= P(C) - P(CD) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

养狗但不养猫的概率

$$P(D\overline{C}) = P(D - CD)$$
$$= P(D) - P(CD) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

家养狗或养猫但不猫狗双全的概率

$$P(C\overline{D}) + P(D\overline{C}) = 0.5$$

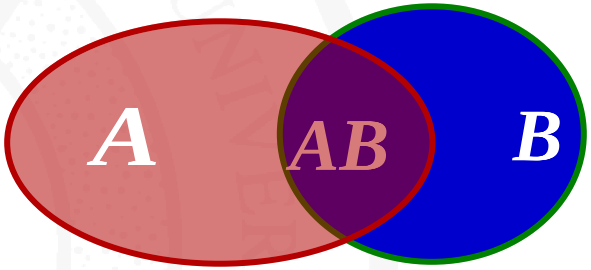
(5) 概率的加法公式:

对于任意两个事件A, B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证 由图可得,

$$A \cup B = A + (B - AB),$$



且 $A \cap (B - AB) = \varnothing,$

故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$

又由性质 4 得

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB),$$

因此得 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

推论2 $P(A\cup B)\le P(A)+P(B).$

一般地， $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\le\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$

推论3 设 A_1,A_2,A_3 是任意三个事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)$$
$$-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地，对于任意n个事件A_1，$A_2,\cdots$，A_n，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+$$
$$\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例5： 证明 $P(EF) \geqslant P(E) + P(F) - 1$

证明： 根据概率的取值范围和加法公式:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \le 1$$

即可证明。

Bonferroni不等式

例6： 设A,B,C是三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=1/3$，A,B,C至少有一个发生的概率为1，则下列说法**错误**的是( ).

A $P(AB)=P(BC)$

B $P(A-B)=0$

C $P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})=1$

D $P(\overline{ABC})=0$

解： 由题意$P(A\cup B\cup C)=1$，即:

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=1.$$

$$\Rightarrow -P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.$$

因为$P(ABC)\le P(BC)$，所以

$$P(ABC)=P(BC)=P(AB)=P(AC)=0.$$

进而，$P(A-B)=P(A)-P(AB)=1/3.$

例7：假设一个班级有*n*个高中生，班主任让每个人上交自己的手机。

1. **如果领手机时每人从中随机拿一个手机，求没有人拿到自己手机的概率？**

2. **证明当*n*充分大的时候，这个概率约为1/e.**

提示：幂级数 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\ (-\infty<x<+\infty)$

令*x*=-1， $$e^{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\ +\ldots$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

1. 如果领手机时每人从中随机拿一个手机，求没有人拿到自己手机的概率？

解： 记事件$E_i=\{$第i个人拿到自己的手机$\}$

可以考虑至少有1人拿到自己的手机

$$P\text{ (no one selects hat)}$$

$$=1-P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)$$ 加法公式！

$$=1-\left[\sum_{i_i}P(E_{i_1})-\sum_{i_1<i_2}P(E_{i_1}E_{i_2})+\cdots+(-1)^{n+1}P(E_1E_2\cdots E_n)\right]$$

$$=1-\sum_{i_1}P(E_{i_1})-\sum_{i_1<i_2}P(E_{i_1}E_{i_2})-\sum_{i_1<i_2<i_3}P(E_{i_1}E_{i_2}E_{i_3})+\cdots$$
$$+(-1)^nP(E_1E_2\cdots E_n)$$

记事件$E_i=\{$第i个人拿到自己的手机$\}$

$P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_k})$表示$i_1$、$i_2\cdots i_k$拿到自己手机的概率

$=(n-k)!/n!$

怎么求？？？

匹配问题

例如

高中生	1	2	3	4	……	n
手机	3	2	4	1	……	n

1、3、4号没拿到自己的手机

- 所有手机编号随意排列有$n!$种情况
- i_1、$i_2\cdots i_k$拿到自己手机，剩下n-k个手机编号随意排列有$(n-k)!$种情况

从n个里面选k个

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_k}) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

P (no one selects hat)

$$= 1 - \sum_{i_1} P(E_{i_1}) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) - \sum_{i_1<i_2<i_3} P(E_{i_1}E_{i_2}E_{i_3}) + \cdots$$

$$+ (-1)^n P(E_1E_2\cdots E_n)$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!} \quad = e^{-1} (n \to \infty)$$

本节测试

1. 概率的定义包括____、 _____、 _____、 _____。

2. 古典概型随机试验的特征 ____________、

几何概型随机试验的特征___________。

3. 请写出概率满足的三条公理

____________、 ___________、 ____________。

课后预习

条件概率和无条件概率的区别和联系

乘法公式及其意义

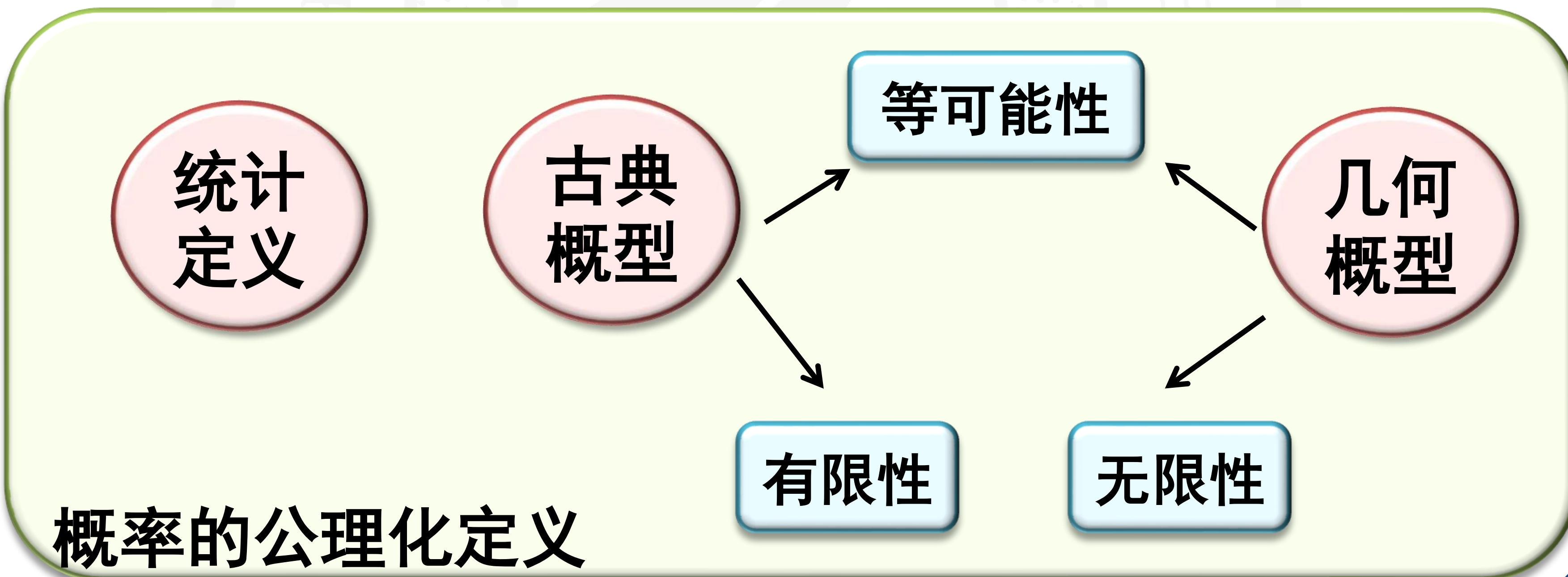
全概率公式及其意义

贝叶斯公式及其和全概率公式的区别和联系

内容小结

关键词:

概率、频率、古典概型、几何概型、概率的公理、概率的性质



内容小结

1. 概率的**统计定义**：

频率 (波动) $\approx$ 概率(稳定).

2. 最简单的随机现象 ⟶ 古典概型 ⟶ 几何概型

古典概型：有限性，等可能性

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{所包含的样本点的个数}}{\text{样本空间样本点的个数}}.$$

几何概型：无限性，等可能性

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

3. 概率的公理化定义和主要性质

$A \to P(A)$ 满足

公理： 非负性，规范性，可列可加性

$0 \le P(A) \le 1,\ P(\Omega) = 1,$（两两互斥）

性质：

(1) $P(\varnothing) = 0$　　(2)有限可加性（两两互斥）

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A);$

(4) $P(A-B) = P(A) - P(AB) \Rightarrow$

若$A \supset B$,则$P(A-B) = P(A) - P(B)$

推论：若$A \supset B$,则$P(A) \ge P(B)$.

⑸加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

推论：

$(1)P(AB)\geq P(A)+P(B)-1$;

$(2)P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

$$(3)P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

1-3 随机事件的概率

Thank You !

备用题 例1-1 摸球模型

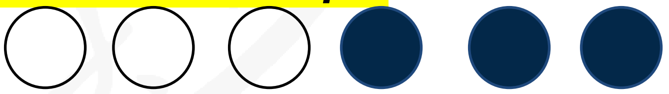
(1) 无放回地摸球

问题1 设箱中有 只白球和 β只黑球, 现从袋中**无放回**地依次摸出$a+b$只球,求所取球恰好含a个白球,b个黑球的概率(a, β b)?

解 设 A = {所取球恰好含a个白球,b个黑球}

样本空间样本点总数为: $n_\Omega = C_{\alpha+\beta}^{a+b}$,

A 所包含样本点的个数为 $n_A = C_\alpha^a \cdot C_\beta^b$,

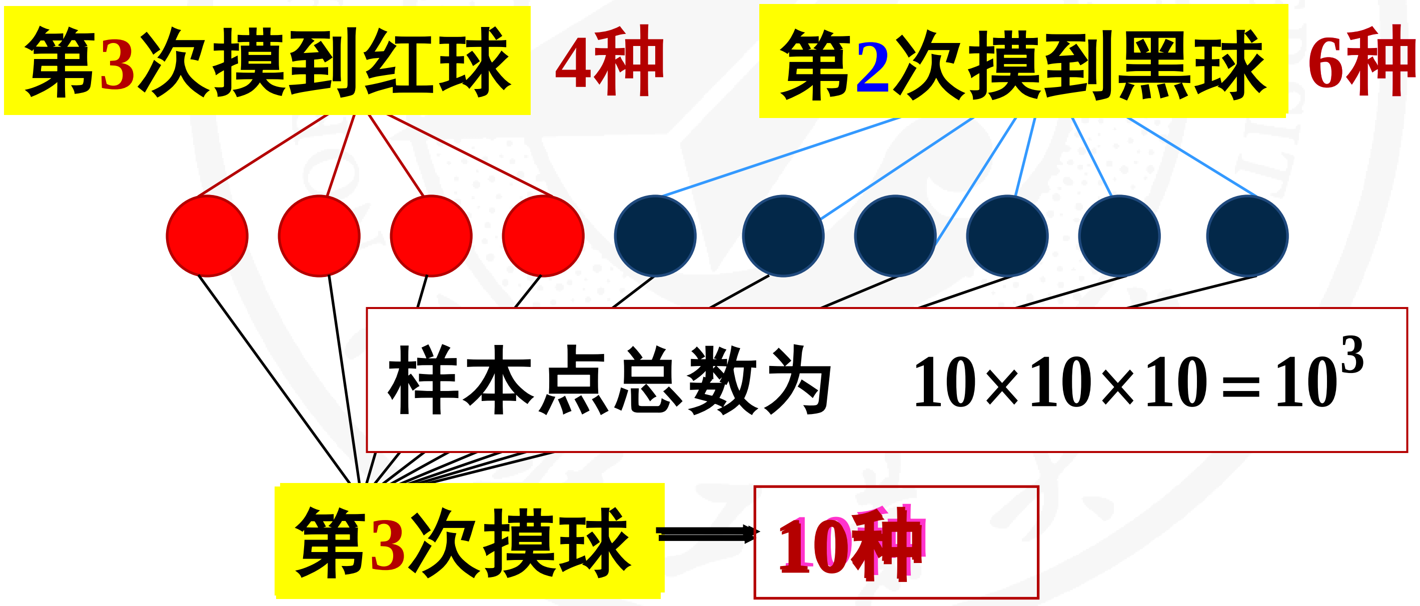


故 $$P(A) = \frac{C_\alpha^a \cdot C_\beta^b}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

(2) 有放回地摸球

问题2 设袋中有4只红球和6只黑球, 现从袋中有放回地摸球3次,求前2次摸到黑球、第3次摸到红球的概率.

解 设 $A=\{$前2次摸到黑球,第三次摸到红球$\}$



样本空间样本点总数为 $10\times10\times10=10^3$,

A 所包含样本点的个数为 $6\times6\times4$,

故 $P(A)=\dfrac{6\times6\times4}{10^3}=0.144.$

同类型的问题还有:

1) 电话号码问题;

2) 掷骰子问题;

3) 英文单词、书、报等排列、组合问题.

例1-2 分配模型

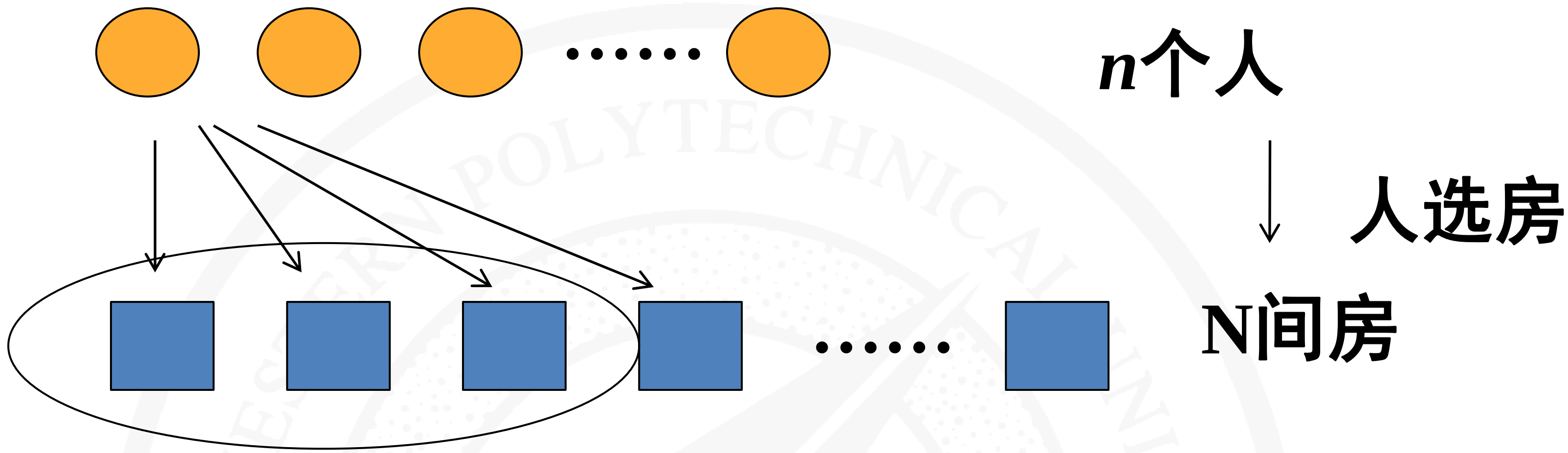
有n个人，每个人都以同样的概率 $1/N$被分配在$N(n\le N)$间房中的每一间中，试求下列各事件的概率：

(1) 某指定n间房中各有一人；

(2) 恰有n间房，其中各有一人；

(3) 某指定房中恰有m $(m\le n)$人.

解 1° 先求样本空间Ω所含的样本点总数.



样本点总数： $N\times N\cdots\times N = N^n$ （乘法原理）

2º (1) 设 A=“某指定n间房中各有一人”

第1个人选一间房：n种

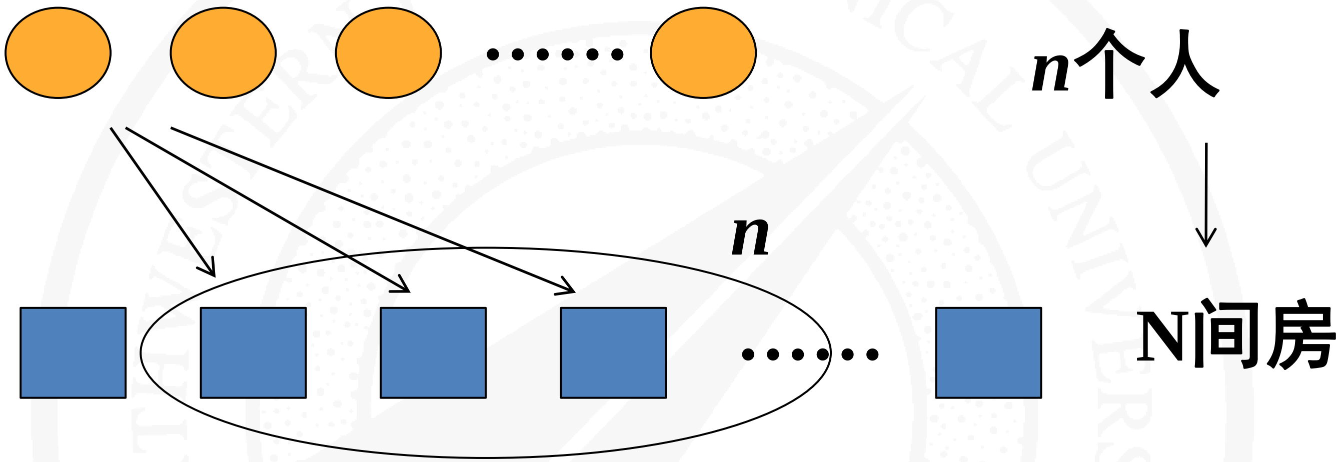
第2个人选一间房：$(n-1)$种……

第n个人选一间房：1种

则A所含样本点数：$P_n^n = n!$

$$\therefore\ P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 设 B=“恰有n间房，其中各有一人”.

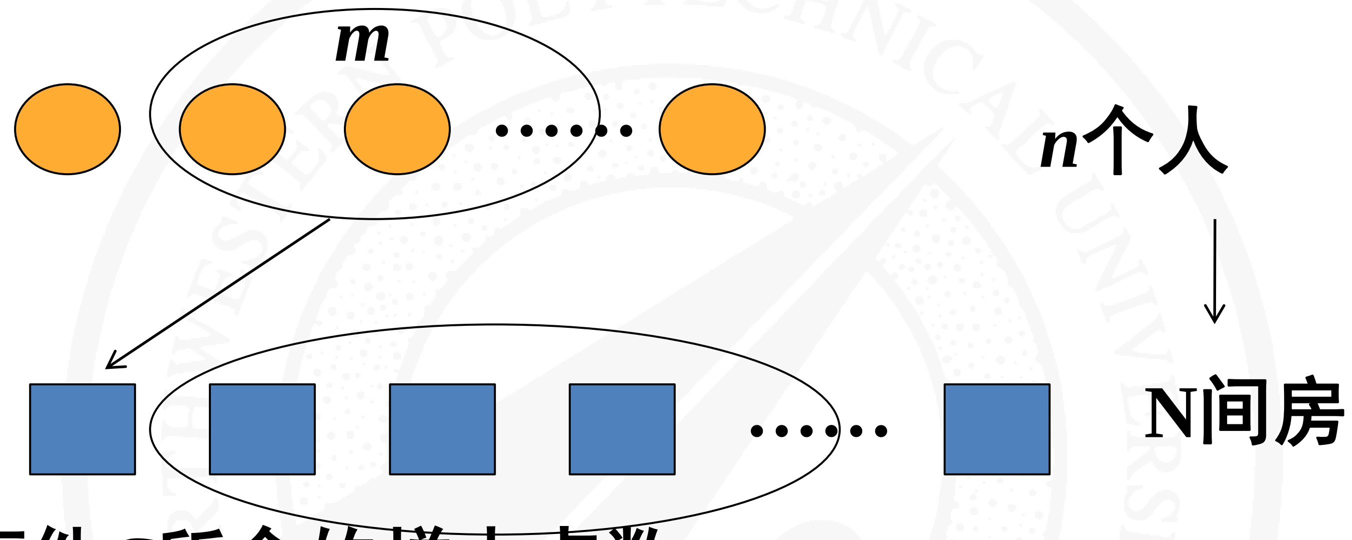


事件B所含的样本点数:

$$C_N^n \cdot n!.$$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}.$$

(3) 设 C =“某指定房中恰有m ($m \le n$)人”.



事件C所含的样本点数:

$$C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}.$$

$$\therefore \quad P(C) = \frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

例1-3　随机取数模型

从0, 1, 2,⋯,9共10个数字中任取一个.假定每个数字都以1/10的概率被取中, **取后还原**,先后取出7个数字，试求下列各事件的概率:

(1) 7个数字全不同;

(2) 不含4和7;

(3) 9恰好出现2次;

(4) 至少出现2次9.

0, 1, 2,⋯, 9

解 取第i次数字，均有10种可能，因此样本空间所包含的样本点总数：10^7.

(1) A="7个数字全不同". 无放回不可重复，排列

A所包含的样本点数：

$$P_{10}^{7}=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4.$$

$$\therefore \quad P(A)=\frac{P_{10}^{7}}{10^{7}}=\frac{10!}{10^{7}\cdot 3!}.$$

(2) B="不含4和7". 有放回可重复

$$P(B)=\frac{8^{7}}{10^{7}}\approx 0.2097.$$

(3) C="9恰好出现2次"，

$$P(C)=\frac{C_7^2\cdot 9^5}{10^7}.$$

(4) D="至少出现2次9",

$$D_k=\text{“9恰好出现}k\text{次”}(k\leq 7),$$

$$P(D_k)=\frac{C_7^k\cdot 9^{7-k}}{10^7}.$$

(解法1) 由于$D=D_2+D_3+\cdots+D_7$,

所以，$P(D)=P(D_2)+P(D_3)+\cdots+P(D_7)$.

$$\therefore \quad P(D)=\sum_{k=2}^{7}\frac{C_7^k\cdot 9^{7-k}}{10^7}.$$

(解法2) 由于$\bar{D}=D_0+D_1$,

$$P(D)=1-P(\bar{D})$$

$$=1-P(D_0)-P(D_1)$$

$$=1-\frac{9^7}{10^7}-\frac{C_7^1\cdot 9^6}{10^7}\approx 0.1497.$$

例2-1 (中彩问题) 从1,2, ⋯, 33共33个数字中任取一个，假定每个数字都以1/33的概率被取中，取后不放回，先后取出7个数字求取中一组特定号码A的概率.（不考虑顺序）

解 $$P(A)=\frac{1}{C_{33}^{7}}=\frac{7!\,26!}{33!}=\frac{1}{4272048}$$

$$\approx 2.3407\times 10^{-7}.$$

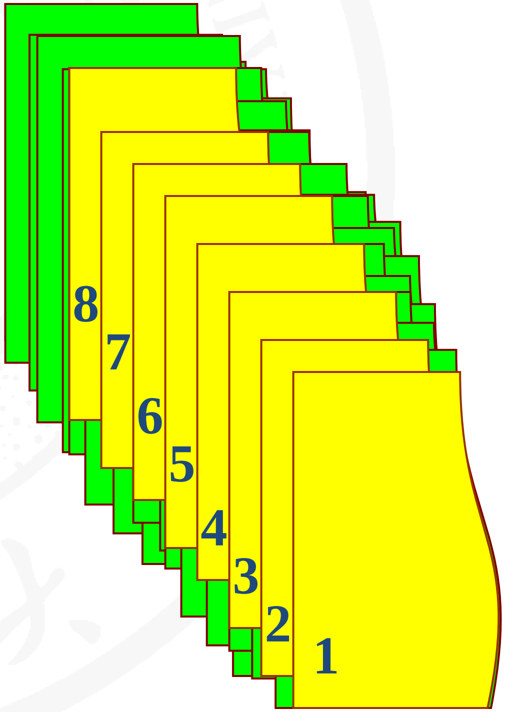
例2-2 把10本书任意地放在书架上，求其中指定的3本书放在一起的概率.

解 设 A=“指定的3本书放在一起”，

A所含的样本点数：

$$m = P_8^1 P_3^3 P_7^7$$

$$= 8 \cdot 3!\, 7! = 3!\, 8!.$$



$$P(A) = \frac{3!\, 8!}{10!} = \frac{1}{15} = 0.067.$$

例2-3 抽签问题

在编号为1, 2, 3, …, n 的n张赠券中，采用无放回的抽签，试求在第 k次($1\le k\le n$)抽到1号赠券的概率.

分析

1号赠券 ⟶ 白球

其他赠券 ⟶ 黑球

问题相当于：从装有1个白球和(n-1)个黑球的袋中，依次无放回地取球，求第k次摸到白球的概率.

解 设 A=“第k次抽到1号赠券”，

则样本空间样本点总数：$n = P_n^k$

A所含的样本点数：$m = P_{n-1}^{k-1} \cdot P_1^1$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{P_{n-1}^{k-1} P_1^1}{P_n^k}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{n}.$$

注 此题不能直接用组合方法. 原因：题目强调了次序：“第k次抽到1号赠券”.

例2-4 分组问题

将20个球队分成两组(每组10队)进行比赛，求最强的两队分在不同组的概率.

分析

强队 ⟶ 白球

其他队 ⟶ 黑球

$$\therefore\ P=\frac{C_{18}^{9}C_{2}^{1}}{C_{20}^{10}}=\frac{10}{19}.$$

问题相当于：袋中有2只白球，18只黑球，采用无放回抽取方式从中取出10个球，求恰有1个白球的概率.

例2-5 产品检验问题

设有N件产品,其中有D件次品,今从中任取n件问其中恰有$k(k \le D)$件次品的概率是多少?

解 在N件产品中抽取n件的所有可能取法共有

$$C_N^n \text{ 种},$$

在 N 件产品中抽取n件,其中恰有k 件次品的取法共有

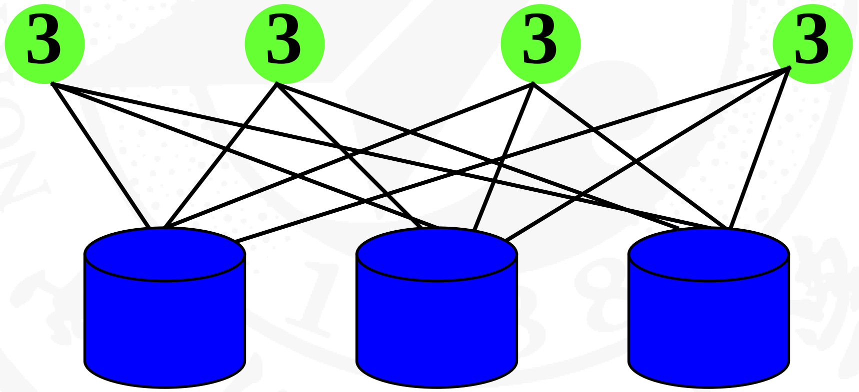
$$C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k} \text{ 种},$$

于是所求的概率为 $p = \dfrac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$.

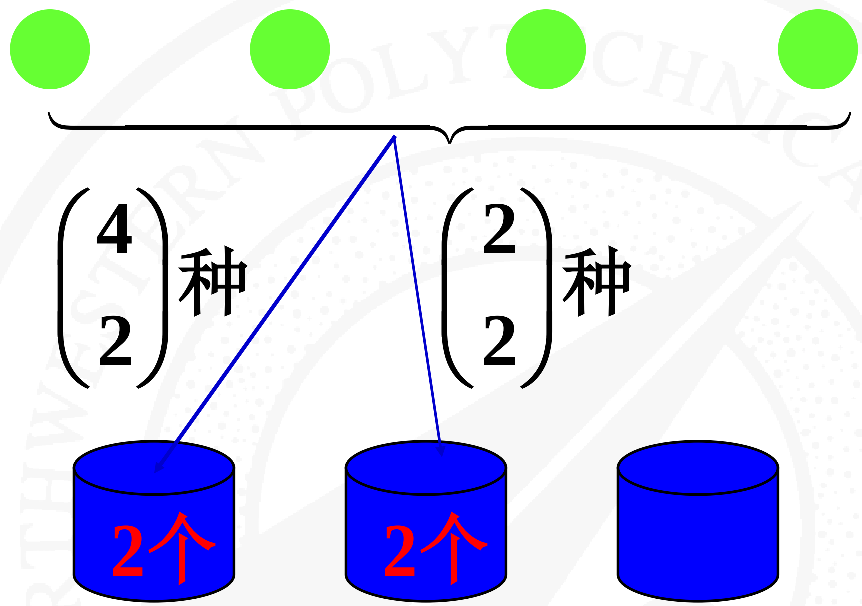
例2-6 球放入杯子问题

(1)杯子容量无限

问题1 把 4 个球放到 3个杯子中去,求第1、2个杯子中各有两个球的概率, 其中假设每个杯子可放任意多个球.



4个球放到3个杯子的所有放法 $3\times3\times3\times3=3^4$种,



因此第1、2个杯子中各有两个球的概率为

$$p=\binom{4}{2}\binom{2}{2}\Big/3^4=\frac{2}{27}.$$

(2) 每个杯子只能放一个球

问题2 把4个球放到10个杯子中去,每个杯子只能放一个球, 求第1 至第4个杯子各放一个球的概率.

解 第1至第4个杯子各放一个球的概率为

$$p = \frac{P_4^4}{P_{10}^4} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{10\times 9\times 8\times 7}$$

$$= \frac{1}{210}.$$

例2-7 生日问题

全班共有学生30人，求下列事件的概率：

(1) 某指定30天，每位学生生日各占一天；

(2) 全班学生生日各不相同；

(3) 全年某天恰有二人在这一天同生日；

(4) 至少有两人的生日在10月1日.

解 日 房，$N=365$(天),

$n=30$,

样本空间所包含的样本点总数：$N^n=(365)^{30}$.

(1) A=“某指定30天，每位学生生日各占一天”，

则 $$P(A)=\frac{n!}{N^n}=\frac{30!}{365^{30}}.$$

(2) 设B=“全班学生生日各不相同”，

则 $$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{C_{365}^{30}\cdot 30!}{365^{30}}.$$

(3) 设 C=“全年某天恰有二人在这一天同生日”，

$m=2,$

$$\therefore\quad P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}=\frac{C_{30}^2\cdot(364)^{28}}{365^{30}}.$$

(4) 设 D="至少有两人的生日在10月1日"，

D_1="恰有一人的生日在10月1日"，

D_2="无一人的生日在10月1日"，

则 D_1与D_2互斥，且 $\bar{D} = D_1 + D_2$,

$$P(\bar{D}) = P(D_1) + P(D_2) = \frac{C_{30}^{1} \cdot (364)^{29}}{365^{30}} + \frac{C_{30}^{0} \cdot (364)^{30}}{365^{30}}$$

$$= \frac{394 \cdot (364)^{29}}{365^{30}} \approx 0.9969.$$

$$\therefore \quad P(D) = 1 - P(\bar{D}) \approx 0.0031.$$

例2-8 5个人在第一层进入11层楼的电梯,假如每个人以相同的概率走出任一层(从第2层开始),求此5个人在不同楼走出的概率.

解 把楼层看成是房子,则此问题是5个人进入10个房间,且每个房间可以有多个人.根据分房模型10个房间中的5个房间各有一人的概率为

$$\frac{p_{10}^{5}}{10^{5}} = 0.3024.$$

例2-9 将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中去，这15名新生中有3名是优秀生.问:

(1) 每一个班级各分配到一名优秀生的概率是多少?

(2) 3 名优秀生分配在同一个班级的概率是多少?

解 15名新生平均分配到三个班级中的分法总数:

$$\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{15!}{5!\,5!\,5!}.$$

(1) 每一个班级各分配到一名优秀生的分法共有

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}=(3!\times 12!)/(4!\,4!\,4!)\text{种}.$$

因此所求概率为

$$p_1 = \frac{3!\times 12!}{4!\,4!\,4!} \Big/ \frac{15!}{5!\,5!\,5!} = \frac{25}{91}.$$

(2)将3名优秀生分配在同一个班级的分法共有3种,

对于每一种分法,其余12名新生的分法有 $\dfrac{12!}{2!\,5!\,5!}$种.

因此3名优秀生分配在同一个班级的分法共有

$(3\times 12!)/(2!\,5!\,5!)$ 种, 因此所求概率为

$$p_2 = \frac{3\times 12!}{2!\,5!\,5!} \Big/ \frac{15!}{5!\,5!\,5!} = \frac{6}{91}.$$

例2-10 在电话号码簿中任取一个电话号码, 求后四个数全不相同的概率 (设后面四个数中的每一个数都是等可能的取0, 1, … , 9).

解 随机试验是观察电话号码的后四位数字, 因此可以认为样本空间Ω的样本点总数10^4, 而后四位数字全不相同的样本点总数为P_{10}^4.

$$\therefore p = P_{10}^4 / 10^4 = 0.504.$$

例2-11 设电话号码由7位数字组成 (第一位数字不为0),试求下列事件的概率:

(1)7位数字为3501896;　　(2)7位数字完全相同;

(3)7位数字不含0和9;　　(4)7位数字不含0或9;

(5)7 位数字含0不含9.

解 由0, 1, …, 9这十个数可以形成9×10^6个不同的电话号码.

于是,有

$$(1)P_1=\frac{1}{9\times10^6}=0.0000001;$$

$$(2)P_2=\frac{9}{9\times10^6}=0.000001;$$

$$(3)P_3=\frac{8^7}{9\times10^6}=0.23301689;$$

$$(4)P_4=\frac{9^7+8\times9^6-8^7}{9\times10^6}=0.7708161;$$

$$(5)P_5=\frac{8\times9^6-8^7}{9\times10^6}=0.2393751.$$

例2-12 掷五次骰子, 试求:

(1)恰好有3次点数相同的概率;

(2)至少有两次6点的概率.

解 随机试验的样本空间所含的基本事件总数为6^5.

(1) 5次中恰好有3次是1点的基本事件数是 $C_5^3 5^2$,

恰好有三次是2,3 ,..., 6点的基本事件数也是$C_5^3 5^2$,

故

$$p = \frac{6 \cdot C_5^3 \cdot 5^2}{6^5} = \frac{125}{648} = 0.193.$$

(2)不出现6点的基本事件数是5^5, 只出现一次6点的基本事件数是$C_5^1 5^4$, 故至少出现两次6的概率是

$$p = 1 - \frac{5^5}{6^5} - \frac{C_5^1 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{1526}{7776} = 0.196.$$

例2-13 从5双不同的鞋子中任取4只,求4只鞋子中至少有2只鞋子配成一双的概率是多少?

解法1 设A = 4只鞋子中至少有两只配成一双,

A_1 = 4只鞋子中有2只配成一双,

A_2 = 4只鞋子恰好配成2双,

于是 $A = A_1 + A_2$ 且 $A_1A_2 = \varnothing$,

则 $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$$= \frac{C_5^1[C_4^2 2^2]}{C_{10}^4} + \frac{C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

解法2 设$\overline{A}=4$只鞋子都不能配成双,

$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21},$$

则 $P(A)=1-P(\overline{A})$

$$=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

例2-14 n对新人参加婚礼，现进行一项游戏：随机地把人分为n对,问每对恰为夫妻的概率是多少？

解 把$2n$个人从左至右排成一列, 共有$(2n)!$ 种排法. 处在1, 2位置的作为一对夫妻, 3, 4位置的作为一对夫妻, 等等. 第一位可有$2n$种取法: 第二位只有一种取法, 第三位有$2n-2$种取法, 第四位也只有一种取法, 如此类推. 故有利的排列总数为 $2n(2n-2)\ldots2=2^n n!$.

所以 $P=\dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

例2-15 有n双不同的鞋混放在一起, 有n个人每人随即地取走两只, 求下列事件的概率.

(1)每人取走的鞋恰为一双的概率;

(2)每人取走的鞋不成一双的概率.

解 设第一个人从$2n$只中取任取2只, 第2个人从$2n$-2只中任取2只, … ,第n个人取走最后2只, 依乘法原理, 基本事件的总数为

$$\frac{2n(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\cdots\cdots\frac{2\cdot 1}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}.$$

(1)每个取走一双鞋的事件数为

$$C_n^1 C_{n-1}^1\cdots\cdots C_2^1 C_1^1=n!,$$

于是 $P=n!/[(2n)/2^n]=(2n)!!/(2n)!.$

(2)每个人取走的2只鞋都不成双的事件数为$(n!)^2$.

因为第一个人可以从n只右脚鞋中取一只, 又可以从n只左脚中取一只 (只要2只鞋不成双), 其余类推.

于是

$$P = (n!)^2 / [(2n)! / 2^n]$$

$$= 2^n (n!)^2 / (2n)!$$

$$= n! / (2n-1)!!.$$

例3-1（会面问题）

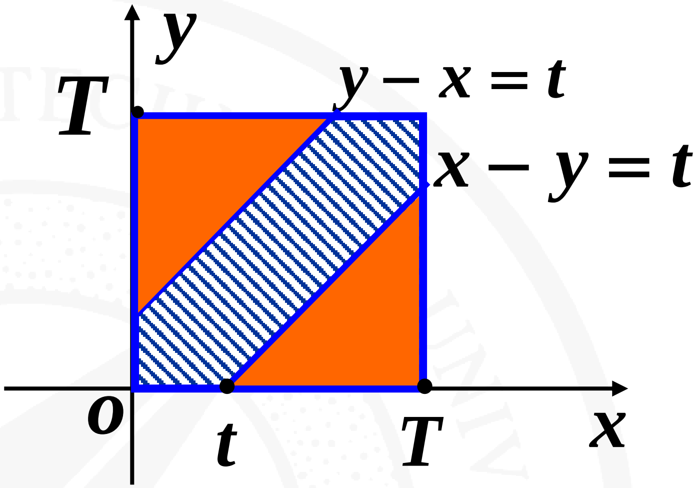
甲、乙两人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 先到的人等候另一个人, 经过时间 t $(t<T)$后离去.设每人在0 到T 这段时间内各时刻到达该地是等可能的 , 且两人到达的时刻互不牵连.求甲、乙两人能会面的概率.

解 设 x, y 分别为甲,乙两人到达的时刻,

那末 $0 \le x \le T, \quad 0 \le y \le T.$

两人会面的充要条件为 $|x-y| \le t,$

若以 x, y 表示平面上点的坐标，则有



故所求的概率为

$$p = \frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}$$

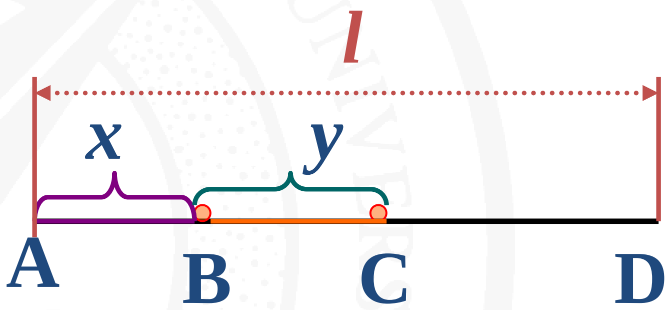
$$= \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2}$$

$$= 1 - (1 - \frac{t}{T})^2.$$

例3-2 在线段AD上任取两点B，C.在B，C处折断得三条线段，求“这三条线段能构成三角形”的概率.

解 依题意，有

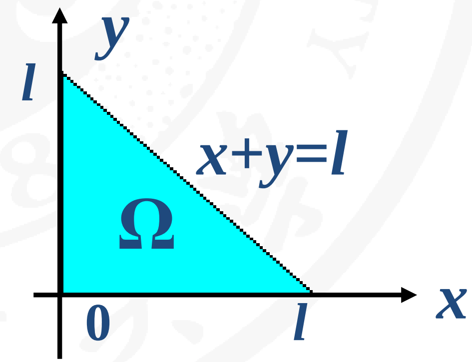
$$\begin{cases} 0 < x < l, 0 < y < l \\ 0 < l - (x + y) < l \end{cases}$$



样本空间Ω:

$$0 < x < l, \quad 0 < y < l,$$

$$0 < x + y < l.$$



$\because$ 三线段能构成三角形

$\Leftrightarrow$ 其中任一线段之长小于其余两线段之和

$\therefore \quad 0 < x < l - x,\ 0 < y < l - y,$

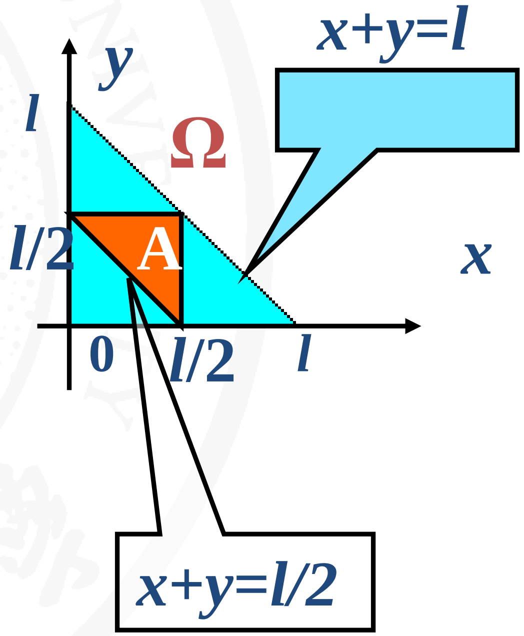
且 $\quad 0 < l - (x + y) < x + y.$

设 $A =$ “三线段能构成三角形”

则 $A: 0 < x < \dfrac{l}{2},\ 0 < y < \dfrac{l}{2},$

$$\frac{l}{2} < x + y < l.$$

$$\therefore P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}l^2} = \frac{1}{4}.$$



例4-1 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0,$
$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$,求事件$A$,$B$,$C$全不发生的概率.

解 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})$

$$=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)].$$

$\because ABC\subset AB \quad \therefore \quad 0\le P(ABC)\le P(AB)=0,$

$\therefore \quad P(ABC) = 0.$

从而 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C})$

$$= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - 0$$
$$- P(BC) - P(AC) + 0]$$
$$= 1 - (\frac{3}{4} - \frac{2}{16}) = \frac{3}{8}.$$

例4-2 设A, B不互不相容, $P(A)=p$, $P(B)=q$, 求

$$P(A\cup B), P(\overline{A}\cup B), P(AB), P(\overline{A}B), P(\overline{A}\,\overline{B}).$$

解

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q,$$

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-P,$$

$$P(AB)=P(\Phi)=0,$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)=q,$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$$

$$=1-P(A\cup B)=1-p-q.$$

例4-3 已知事件A,B满足$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$,记$P(A)=p$, 试求$P(B)$.

解 $\because P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

由此得

$$1-P(A)-P(B)=0,$$

$$\therefore P(B)=1-P(A)=1-p.$$

例5-1 对任意事件A, B, C,证明:

$$(1) P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A);$$

$$(2) P(AB)+P(AC)+P(BC)$$

$$\ge P(A)+P(B)+P(C)-1.$$

证 $(1) p(A)\ge P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)$

$$=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$$

$$\ge P(AB)+P(AC)-P(BC).$$

$$(2)\because 1 \geq P(A \cup B \cup C)$$

$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

$$\therefore P(AB)+P(AC)+P(BC)$$

$$\geq P(A)+P(B)+P(C)+P(ABC)-1$$

$$\geq P(A)+P(B)+P(C)-1.$$

例5-2 证明:对任意事件A,B有

$$P(A\cup B)P(AB)\le P(A)P(B).$$

证

$$P(A\cup B)P(AB)$$

$$=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)$$

$$+P(AB)P(AB)$$

$$\le P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)$$

$$+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)$$

$$=[P(A-B)+P(AB)][P(B-A)]+P(AB)]$$

$$=P(A)P(B),$$

$$\therefore P(A\cup B)P(AB)\le P(A)P(B).$$

例5-3 证明: $|P(AB)-P(A)P(B)|\le \frac{1}{4}$.

证 不妨设 $P(A)\ge P(B)$, 则

$$P(AB)-P(A)P(B)\le P(B)-P(B)P(B)$$

$$=P(B)[1-P(B)]\le \frac{1}{4},$$

另一方面,还有

$$P(A)P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)[P(AB)+P(\overline{A}B)]-P(AB)$$

$$= P(A)P(\overline{A}B) + P(AB)[P(A) - 1]$$

$$\leq P(A)P(\overline{A}B) \leq P(A)P(\overline{A})$$

$$= P(A)[1 - P(A)] \leq \frac{1}{4}.$$

综合两方面可得

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

柯尔莫哥洛夫

(А. Н. Колмогоров 1903-1987)

柯尔莫哥洛夫，A. H.

俄国数学家

1939年任苏联科学院院士.先后当选美,法,意,荷,英,德 等国的外籍院士 及皇家学会会员.为20 世纪最有影响的俄国数学家.