西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

# 概率论与数理统计


徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

# 第六章 参数估计

# 第一节 参数的点估计

- 一、问题的提出
- 二、矩估计法
- 三、最大似然估计

# 点估计

**(1)当总体$X$分布函数$F(x;\theta)$形式已知，参数$\theta$未知**

例如 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X \sim B(n, p), X \sim P(\lambda)$,

$$\boxed{(x_1, x_2, \mathrm{L}\ , x_n) \xrightarrow{\text{估计}} \theta}$$

**(2)当总体$X$分布函数$F(x;\theta)$形式未知**

$$\bar{X} \xrightarrow{p} EX \qquad S_n^{*2} \xrightarrow{p} DX$$

这类问题称为**参数的点估计。**

$$(x_1, x_2 \quad x_n) \xrightarrow{\text{估计}} \theta, E(X^k)$$

解决上述参数 $\theta$ 的点估计问题的思路是: 设法**构造一个合适的统计量** $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 对 $\theta$ 作出合理的估计.

在数理统计中称统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2,\cdots, X_n)$ 为 $\theta$ 的**估计量**, $\hat{\theta}$ 的观测值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\theta$ 的**估计值**.

点估计常用方法：**矩估计**和**最大似然估计**法.

# 二、矩估计法

英国统计学家皮尔逊(K.Pearson)在1894年提出.

**基本思想:**

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\text{估计}} E(X^k)$$

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X - \overline{X})^k \xrightarrow{\text{估计}} E[X - E(X)]^k;$$

并由此得到未知参数的估计量 .

理论基础

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{p} E(X^k)$$

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X - \bar{X}\right)^k \xrightarrow{p} E[X - E(X)]^k;$$

特别的

$$A_1 = \overline{X} \xrightarrow{P} EX$$

$$B_2 = S_n^2 \xrightarrow{P} DX$$

**例1** 设总体$X$服从泊松分布$P(\lambda)$，求参数$\lambda$的矩估计量.

**解** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X$ 的一个样本,

由于 $E(X) = \lambda$, 可得

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{E}X = \hat{\lambda}$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \overline{X}$$

# 矩估计法：

设总体 $X$ 的分布函数为 $F(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m)$

$(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m)$ 是 $m$ 个待估计的未知参数 。

**(1) 计算总体直到$m$阶矩**

$$\alpha_k = E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m) = \alpha_k(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m)$$

**(2) 用样本矩作为总体矩的估计，即令**

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \hat{\alpha}_k = \alpha_k\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots \hat{\theta}_m\right) \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

这便得到含$m$个参数$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2,\cdots$，$\hat{\theta}_m$的$m$个方程组,

(3) 解该方程组得

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

以$\hat{\theta}_k$作为参数$\theta_k$的估计量. 这种求出估计量的方法

称为**矩估计法**．

**例2** 求总体 $X$ 的均值 $\mu$ 和方差 $\sigma^2$ 的矩估计.

**解** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X$ 的一个样本,

(1)求各阶矩 $\begin{cases} E(X)=\mu \\ E(X^2)=D(X)+(EX)^2=\sigma^2+\mu^2 \end{cases}$

(2)用样本矩估计总体矩，故令

$$\begin{cases} \overline{X}=\hat{E}(X)=\hat{\mu} \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\hat{E}(X^2)=\hat{\sigma}^2+\hat{\mu}^2 \end{cases}$$

(3)解方程，得参数的矩估计

$$\begin{cases} \hat{\mu}=\overline{X} \\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=S_n^2 \end{cases}$$

**例3** 设总体 $X$ 服从区间上$[\theta_1,\theta_2]$的均匀分布，求参数 $\theta_1,\theta_2$ 的矩估计量.

**解** 设$X_1$, $X_2,\cdots$, $X_n$是总体 $X$ 的一个样本，容易求得

(1)求各阶矩

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2} \\ D(X) = \dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12} \end{cases}$$

(2)用样本均值/方差估计总体均值方差，故令

$$\begin{cases} \bar{X} = \hat{E}(X) = \dfrac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2} \\ S_n^2 = \hat{D}(X) = \dfrac{\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1\right)^2}{12} \end{cases}$$

(3)解得 $\theta_1$和 $\theta_2$的矩估计量为

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{3}S_n$$

$$\hat{\theta}_2 = \bar{X} + \sqrt{3}S_n$$

**例4** 设总体 $X$ 的分布 密度为

$$p(x;\ \theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}\quad(-\infty<x<+\infty,\ \ \theta>0)$$

$X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 为总体 $X$ 的一个样本，求参数 $\theta$ 的矩估计量 .

**解** 由于 $p(x;\ \theta)$ 只含有一个未知参数 $\theta$ ,一般只需求出 $E(X)$ 便能得到 $\theta$ 的矩估计量，但是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=0$$

即 $E(X)$ 不含有 $\theta$ ,故不能由此得到 $\theta$ 的矩估计量.

法一：由于

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

令 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\hat{E}\left(X^2\right)=2\hat{\theta}^2$

于是解得 $\theta$ 的矩估计量为 $\boxed{\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}$

法二：本例 $\theta$ 的矩估计量也可以这样求得

$$E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x}{\theta}}=\theta$$

故令

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i| = \hat{E}|X| = \hat{\theta}$$

即 $\theta$ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

该例表明参数的**矩估计量不唯一**.

# 三、最大似然估计

科比和一位同学一起打篮球，已知投中一球。

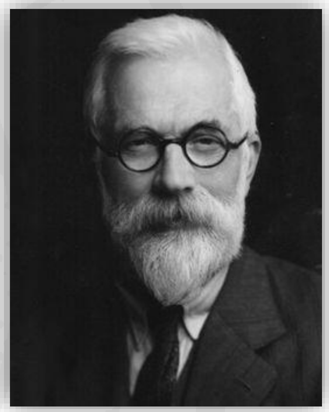

谁投中的

科 比

科比投中的概率最大

# 最大似然估计

## —用看起来最像的去估计



德国数学家、物理学家、
天文学家
Gauss (1777-1855)

英国统计与遗传学家，
R. A. Fisher
(1890～1962)

## 1. 基本思想

# 最大似然原理

**试验中概率最大的事件最有可能出现**

即如有一个试验若干个可能结果*A*, *B*,C… , 若在一次试验中，结果*A*出现，则认为*A*出现的概率最大。

# 例 5

实际问题

⇓

数学问题

## 100个球：白球和黑球 ○ ●

**90:10　10:90**

从盒中抽1个球，试根据**抽取的球的颜色**估计黑球的概率 $p$。

$$p = 1/10, 9/10?$$

**分析：**

当取白球，要使$P\{白球\} = 1 - p$最大，$\hat{p} = 1/10$

当取黑球，要使$P\{黑球\} = p$最大，$\hat{p} = 9/10$

$A$发生，$\boxed{P\{A;\ \theta\}}$，则由$P\{A;\ \theta\}_{\max} \Rightarrow \hat{\theta}$

## 2、似然函数　样本取样本值的概率 $P\{A;\ \theta\}$

设总体$X \sim p(x;\ \theta)$，其中$\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$是未知参数，

则$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$的联合分布为$\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)$。

当给定样本值$(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$后，它只是参数$\theta$的函数，

记为$L(\theta)$，即

似然函数

$$\boxed{L(\theta)=P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)}$$

$L(\theta)_{\max}$？

## 3、 最大似然估计

$$p\{A;\ \theta\} \Rightarrow L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta) \quad L(\theta)_{\max}?$$

**定义6.2**

如果$L(\theta)$在$\hat{\theta} = \left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m\right)$处达到最大，则称

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m$分别为$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$的最大似然估计值。

若将$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n)$中的样本值换成样本，

则$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1,\ X_2, \cdots,\ X_n)$为$\hat{\theta}_i$的最大似然估计量。

## 4、似然方程

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\ \theta)$

对数似然函数 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\ \theta)$

由于 $\ln L(\theta)$ 与 $L(\theta)$ 有相同的最大值点 .因此

$\hat{\theta}$ 为最大似然估计的必要条件为

$$\boxed{\left.\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0} \quad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

称为**似然方程**，其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$.

## 5、一般步骤

1° 求似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\ \theta)$$

2° 求出 $\ln L(\theta)$ 及似然方程

$$\boxed{\left.\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0}$$

$$(i=1,2,\cdots,\ m)$$

3° 解似然方程得到最大似然估计值

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m)$$

$$(i=1,2,\cdots,\ m)$$

4° 最后得到最大似然估计量

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_m)$$

$$(i=1,2,\cdots,\ m)$$

**例6** 假设某机场每天的乘客人数$X$服从泊松分布$P(\lambda)$，其中$\lambda$为未知参数。现统计一年数据，试估计参数$\lambda$的最大似然估计值。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 55 | 56 | 57 | 44 | 56 | 54 | 60 | 53 | 57 | 64 | 55 | 50 | 52 | 53 | 55 | 43 | 52 | 54 | 53 | 57 | 33 | 56 | 52 |
| 61 | 51 | 58 | 65 | 69 | 69 | 58 | 59 | 47 | 66 | 62 | 59 | 45 | 57 | 68 | 51 | 68 | 59 | 55 | 73 | 63 | 56 | 65 | 61 |
| 54 | 66 | 55 | 62 | 62 | 60 | 53 | 53 | 59 | 58 | 50 | 55 | 59 | 68 | 59 | 58 | 62 | 47 | 64 | 56 | 73 | 35 | 62 | 66 |
| 55 | 60 | 63 | 55 | 38 | 52 | 54 | 48 | 48 | 52 | 59 | 53 | 53 | 56 | 60 | 48 | 57 | 54 | 62 | 45 | 55 | 51 | 79 | 61 |
| 61 | 48 | 69 | 62 | 57 | 55 | 53 | 52 | 63 | 61 | 53 | 47 | 55 | 54 | 61 | 48 | 64 | 56 | 48 | 73 | 60 | 54 | 63 | 58 |
| 59 | 55 | 66 | 50 | 56 | 55 | 63 | 52 | 60 | 55 | 51 | 54 | 40 | 55 | 55 | 65 | 45 | 62 | 51 | 64 | 57 | 52 | 74 | 55 |
| 46 | 58 | 56 | 61 | 40 | 57 | 49 | 65 | 60 | 69 | 66 | 58 | 67 | 45 | 58 | 58 | 47 | 43 | 57 | 53 | 68 | 66 | 64 | 50 |
| 61 | 63 | 73 | 55 | 41 | 65 | 52 | 62 | 59 | 63 | 55 | 75 | 50 | 60 | 47 | 37 | 49 | 72 | 60 | 44 | 53 | 53 | 61 | 64 |
| 60 | 52 | 44 | 60 | 67 | 60 | 40 | 52 | 69 | 54 | 47 | 59 | 63 | 62 | 54 | 57 | 44 | 66 | 60 | 59 | 54 | 59 | 80 | 67 |
| 64 | 57 | 47 | 44 | 56 | 51 | 48 | 62 | 46 | 64 | 56 | 57 | 52 | 55 | 58 | 71 | 68 | 55 | 70 | 57 | 60 | 41 | 50 | 52 |
| 49 | 61 | 55 | 54 | 66 | 61 | 44 | 45 | 49 | 55 | 51 | 64 | 56 | 50 | 55 | 50 | 67 | 51 | 58 | 61 | 52 | 60 | 54 | 57 |
| 69 | 64 | 64 | 69 | 50 | 51 | 60 | 65 | 69 | 61 | 46 | 52 | 48 | 54 | 53 | 60 | 58 | 54 | 64 | 52 | 70 | 69 | 67 | 48 |
| 54 | 46 | 47 | 51 | 58 | 53 | 61 | 63 | 47 | 67 | 57 | 60 | 53 | 54 | 66 | 50 | 60 | 61 | 42 | 42 | 65 | 58 | 54 | 53 |
| 61 | 62 | 55 | 57 | 52 | 48 | 54 | 61 | 71 | 66 | 55 | 54 | 54 | 52 | 49 | 55 | 51 | 62 | 57 | 41 | 50 | 65 | 53 | 61 |
| 64 | 66 | 71 | 58 | 57 | 58 | 69 | 48 | 55 | 56 | 51 | 48 | 64 | 60 | 60 | 57 | 59 | 54 | 52 | 56 | 44 | 44 | 55 | 55 |

**解** 由于总体 $X \sim P(\lambda)$，故有

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

## 1、似然函数:

$$L(\lambda)=P\{X_1=x_1,\ X_2=x_2,\cdots,\ X_n=x_n\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{-n\lambda}\Big/\prod_{i=1}^{n}x_i!$$

## 2、对数似然函数:

$$\ln L(\lambda)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\ln\prod_{i=1}^{n}\boxed{x_i!}-\boxed{n\lambda}$$

**似然方程** $\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0$

## 3、求解似然方程

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$$

即 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ 为**最大似然估计值**

## 4、由已知数据计算

$$\hat{\lambda}=\bar{x}\quad=\frac{20380}{360}\quad\approx 56.61\qquad\therefore X\sim P(56.61)$$

**例7** 设总体

$$X \sim p(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad \theta>0\text{未知},$$

试求参数 $\theta$ **矩估计量**和**最大似然估计量**.

**解** (1)设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 $X$ 的样本,

其观测值为 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p(x;\theta)dx$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\cdot e^{-\frac{\theta}{x}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\cdot e^{-\frac{\theta}{x}}dx$$

$$=\theta\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}}d\left(-\frac{\theta}{x}\right) \quad =-\theta$$

故 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=-\hat{\theta}$$

即 $\theta$的**矩估计量**为 $$\hat{\theta}=-\bar{X}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(2)

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}}\right), x_i>0(i=1,2,\cdots n)\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

当 $x_i>0(i=1,2,\cdots n)$ 时

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[2\ln\theta-\ln x_i^3-\frac{\theta}{x_i}]$$

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[2\ln\theta-\ln x_i^3-\frac{\theta}{x_i}]$$

令 $$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{\theta}-\frac{1}{x_i})=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$$

解得 $$\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

则最大似然计量 $$\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$$

$$X \sim p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \theta > 0\text{未知},$$

矩估计量 $\hat{\theta} = -\bar{X}$

最大似然估计量 $$\theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

哪个估计量好？

# 课后思考

某地区抽样调查表明成年男性的红细胞数（RBC）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。现对150个人的抽血化验结果进行分析，测得红细胞数分别为（单位$10^{12}$个/L），**试估计红细胞数的均值和方差，并思考估计的误差和精度？**

```
[ 5.19,  4.89,  5.15,  4.74,  4.79,  5.15,   4.3,  4.47,  4.13,  5.14,  4.54,   4.1,  5.82,   4.5,  4.87]
[ 4.02,  5.23,  5.01,  3.89,  4.33,  4.69,  4.54,  4.22,  4.64,  4.89,   4.7,  4.83,  5.17,  4.61,  4.97]
[ 4.49,  5.19,   4.9,   5.2,  4.93,  4.69,  4.81,  4.64,  4.82,   4.4,   5.4,  4.39,  4.61,   4.5,   4.1]
[ 4.63,  4.46,   5.3,  5.13,  5.05,  5.19,  4.62,  4.12,  5.08,  3.96,  4.37,  4.71,  4.94,   4.3,   4.3]
[ 4.94,  4.86,  5.16,  4.75,  5.13,  3.82,  4.88,  4.74,  4.63,  5.57,   5.1,   4.9,  4.29,  4.35,  4.55]
[ 4.02,  4.33,  4.86,  4.72,  4.45,  4.53,  4.93,   4.5,  5.44,  4.48,  4.89,  4.35,  5.58,  4.66,   4.8]
[ 4.96,  4.17,  4.45,  3.66,  4.95,  4.19,  4.34,  5.71,  4.54,   4.8,  4.65,  4.62,  5.16,   4.0,  5.25]
[ 4.22,  5.16,  4.46,  5.01,  4.79,  4.58,  4.67,  5.25,  4.89,   5.0,  4.28,   4.9,   5.1,  5.02,  4.62]
[ 4.78,  4.75,  5.27,  3.79,  5.11,  5.04,  3.81,  3.65,  5.04,   4.8,  4.62,  3.94,  4.36,   4.7,  5.31]
[ 5.04,  4.73,  4.04,  3.73,  4.99,  5.11,  5.25,  4.94,  4.79,  4.35,  4.71,  5.21,  4.89,  5.06,  4.96]
```

# 内容小结

$$X \sim F(x;\theta)$$

估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 随机变量

估计值 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 常量

两种求点估计的方法: $\begin{cases} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{cases}$

## 矩估计

(1) 计算总体矩。

$$E\left(X^k\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k dF\left(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m\right)=\alpha_k\left(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m\right)$$

(2) 用样本矩作为总体矩的估计，即令

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k=\alpha_k\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots\hat{\theta}_m\right)\qquad\left(k=1,2,\cdots,m\right)$$

(3) 解该方程组得估计量

$$\hat{\theta}_k=\hat{\theta}_k\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\quad\left(k=1,2,\cdots,m\right)$$

估计值 $\hat{\theta}_k=\hat{\theta}_k\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$

## 最大似然估计

1° 求似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)$ ;

2° 求出 $\ln L(\theta)$ 及似然方程

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

3° 解似然方程得到**最大似然估计值**

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m) \qquad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

4° 最后得到**最大似然估计量**

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_m)\ (i=1,2,\cdots,\ m)$$

**在统计问题中往往先使用最大似然估计法，在最大似然估计法使用不方便时，再用矩估计法.**

**结论：** $X \sim P(\lambda) \Rightarrow$

$\lambda = \overline{X}$为矩估计，最大似然估计

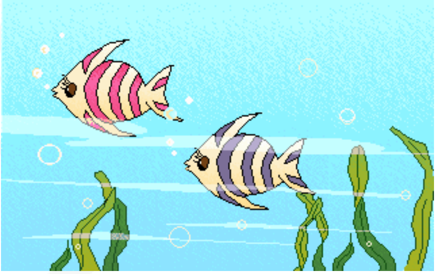
$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow$

$\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = S_n^2$为矩估计，最大似然估计

**思考题** 试用最大似然法估计湖中的鱼数.

为了估计湖中的鱼数$N$，第一次捕上$r$条鱼，做上记号后放回. 隔一段时间后，再捕出 $S$ 条鱼, 结果发现这$S$条鱼中有$k$条标有记号. 根据这个信息, 如何估计湖中的鱼数呢?

第二次捕出的有记号的鱼数$X$是$r.v$, $X$具有超几何分布:



$$P\{X=k\}=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{S-k}}{\binom{N}{S}},\quad 0 \le k \le \min(S,r)$$

$$P\{X=k\}=\binom{r}{k}\binom{N-r}{S-k}\Big/\binom{N}{S}$$

把上式右端看作$N$的函数，记作$L(N;k)$ .

应取使$L(N;k)$达到最大的$N$, 作为$N$的最大似然估计.

但用对$N$求导的方法相当困难, 我们考虑比值:

$$\frac{P(X=k;N)}{P(X=k;N-1)}=\frac{(N-S)(N-r)}{N(N-r-S+k)}$$

经过简单的计算知，这个比值大于或小于1,

由 $N<\dfrac{Sr}{k}$ 或 $N>\dfrac{Sr}{k}$ 而定 .

$$\frac{P(X=k;N)}{P(X=k;N-1)}=\frac{(N-S)(N-r)}{N(N-r-S+k)}$$

经过简单的计算知，这个比值大于或小于1，

由 $N<\dfrac{Sr}{k}$ 或 $N>\dfrac{Sr}{k}$ 而定．

这就是说，当$N$增大时，序列$P(X=k;N)$先是上升而后下降；当$N$为小于 $\dfrac{Sr}{k}$ 的最大整数时，达到最大值．故$N$的最大似然估计为$\hat{N}=[\dfrac{Sr}{k}]$.

# 6-1 参数的点估计

Thank You !