西北工業大學

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第二节 多维随机变量及其分布(1)

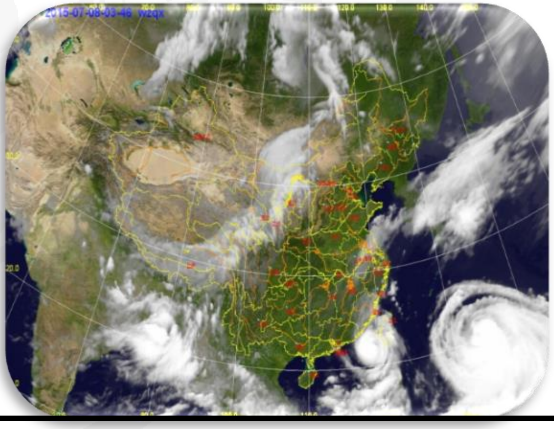
- 一、二维随机变量及其分布
- 二、二维离散型随机变量
- 三、二维连续型随机变量
- 四、常用的分布

一、二维随机变量及其分布

弹着点位置：横坐标、纵坐标

发育情况:性别、身高、体重

产品的质量:尺寸、外形、寿命

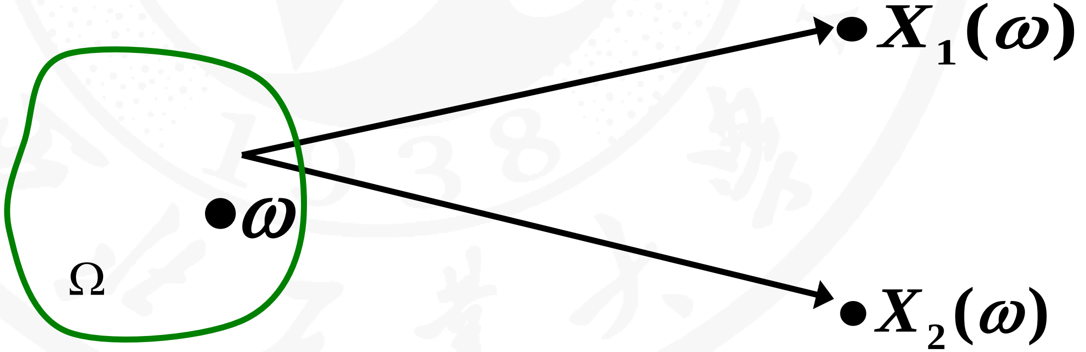


天气状况:温度、湿度、PM2.5

1.n维随机向量

定义2.3 设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $\Omega=\{\omega\}$，设$X_1=X_1(\omega), X_2=X_2(\omega), \cdots, X_n=X_n(\omega)$，是定义在 Ω 上的随机变量,由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 **n 维随机向量**或 **n 维随机变量**.

图示



2.n维随机向量的分布函数

定义 称 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数或联合分布函数.

其中 $\{X_1 \le x_1; X_2 \le x_2; \cdots; X_n \le x_n\}$

表示 $\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega : X_i(\omega) \le x_i\}$

当$n=2$时，二元函数

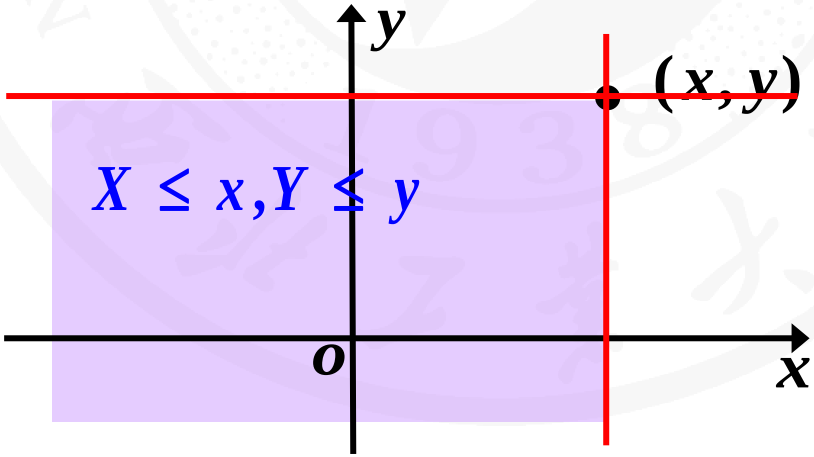
$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数,或称为随机变量X和Y的联合分布函数.

一维$F(x)=P(X\le x)$: 表示随机点X落在$(-\infty,x]$的概率.

二维$F(x,y)$: 表示随机点(X,Y)落在平面区域D的概率.

$$D=(-\infty,x]\times(-\infty,y]=\{(u,v)\mid u\le x,v\le y\}$$



3.二维分布函数$F(x,y)$的性质

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$$

(1) $0\le F(x,y)\le 1;$

(2) $F(x,y)$分别对x,y为单调非降函数，即

当$x_2\ge x_1$时，$F(x_2,y)\ge F(x_1,y);$

当$y_2\ge y_1$时，$F(x,y_2)\ge F(x,y_1).$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=F(-\infty,y)=0;$

$\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=F(x,-\infty)=0;$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=F(+\infty,+\infty)=1;$$

(4) $F(x,y)$分别关于x,y右连续，即

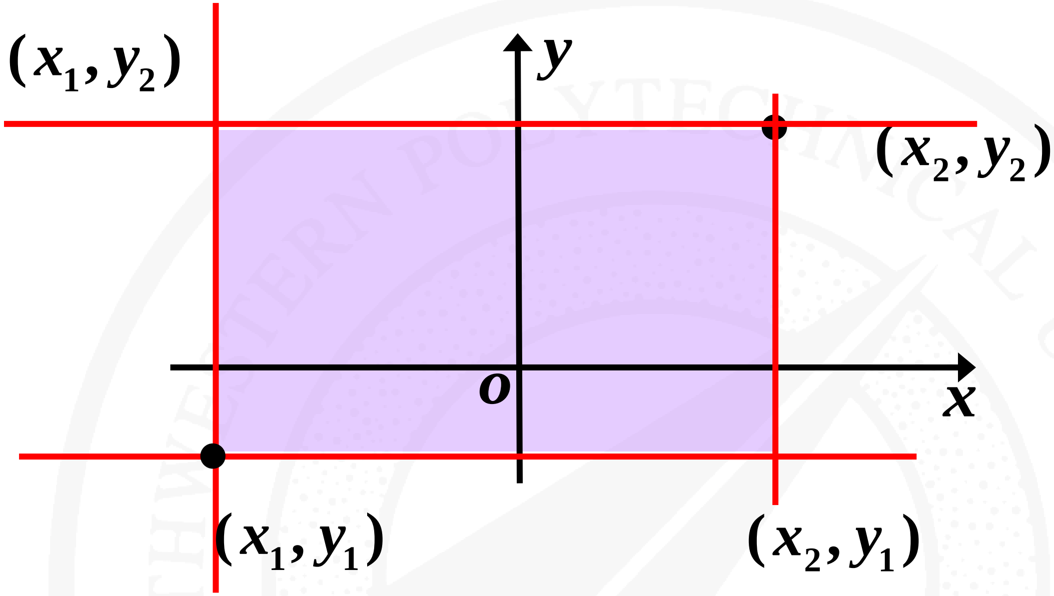
$$\lim_{x\to x_0^+} F(x,y)=F(x_0^+,y)=F(x_0,y),$$

$$\lim_{y\to y_0^+} F(x,y)=F(x,y_0^+)=F(x,y_0);$$

(5) 若 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$,则

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

$$=P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} \ge 0.$$



$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

$$= P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \geq 0.$$

可以证明： 一个函数若具有上述性质, 则此函数一定是某二维随机向量的分布函数.

二、二维离散型随机变量

1. 二维离散型随机变量

定义 若二维随机变量 (X,Y) 的分量 X, Y 均为离散型随机变量，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

2. 分布律

若 (X,Y) 的所有可能取值为

$$(x_i, y_j) \quad (i, j = 1,2,\cdots)$$

则称 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots)$

为(X,Y)的联合分布律（分布列），可记为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

其中 p_{ij} 满足：

(1) $p_{ij} \geq 0, \quad (i, j = 1,2,\cdots);$ (2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

注: (1)离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \leq x, y_j \leq y$ 的 i, j 求和.

(2) 设 G 是 xOy 平面上的一个区域,点 (X,Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X,Y) \in G\} = \sum_{(x_i,y_j)} \sum_{\in G} p_{ij},$$

例1 设随机事件A,B满足

$$P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=P(A|B)=\frac{1}{2}.$$

令$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{发生},\\ 0, & \text{若}A\text{不发生}.\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{发生},\\ 0, & \text{若}B\text{不发生}.\end{cases}$

求(X,Y)的联合分布率.

解 $P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2},$$

所以$P(AB)=\frac{1}{8}$，又 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$，

所以$P(B)=\frac{1}{4}$.从而

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{8}.$$

所以(X,Y)的联合分布率为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

三、二维连续型随机变量

1. 二维连续型随机变量

定义2.5 对于二维随机变量(X,Y),若存在非负可积函数$p(x,y)$,使对任意实数x,y,二元分布函数$F(x,y)$可表示为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量，

$p(x,y)$称为联合密度函数.

2.性质

(1) $p(x,y) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty) = 1$;

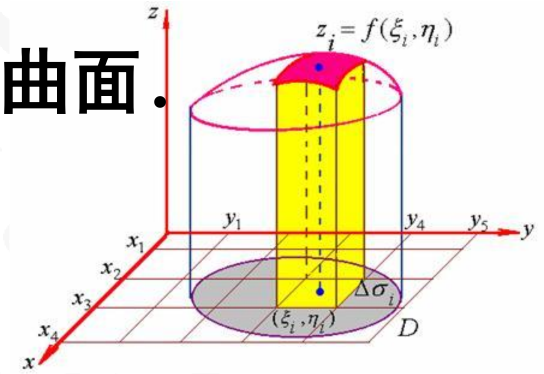
(3)若$p(x,y)$在(x,y)连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = p(x,y)$;

(4) 设G是xOy平面上的一个区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3.几何意义

几何上, $z = p(x, y)$ 表示空间的一个曲面.



$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

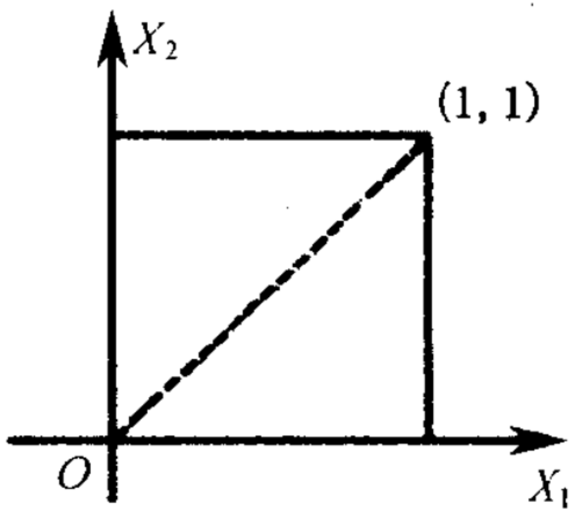
$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底, 以曲面$z = p(x, y)$为顶面的柱体体积.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

表示介于 $p(x, y)$和 xOy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

问题：X_1和X_2是连续型随机变量，那么2维随机变量(X_1,X_2)也是连续型的吗？

答案：不一定！比如，令X_1为均匀分布$U[0,1]$，且$X_2=X_1$，则(X_1,X_2)只能在矩形的对角线上取值，不存在函数$p(x,y)$使得$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)=1$，故$(X_1,X_2)$不是连续型随机变量

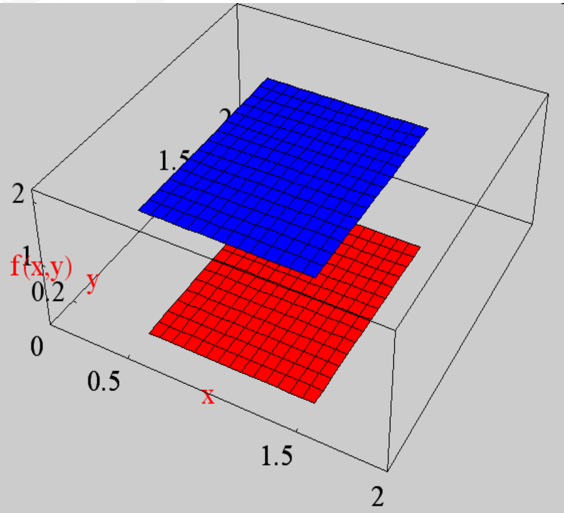


四、常用分布

1.均匀分布

定义 设D是平面上的有界区域,其面积为S,若二维随机变量(X, Y)具有密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



则称(X, Y)在D上服从均匀分布。

$$\iint\limits_{(x,y)\in D}\frac{1}{S}dxdy=1\Rightarrow S=S(D)$$

2. 二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有密度函数

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

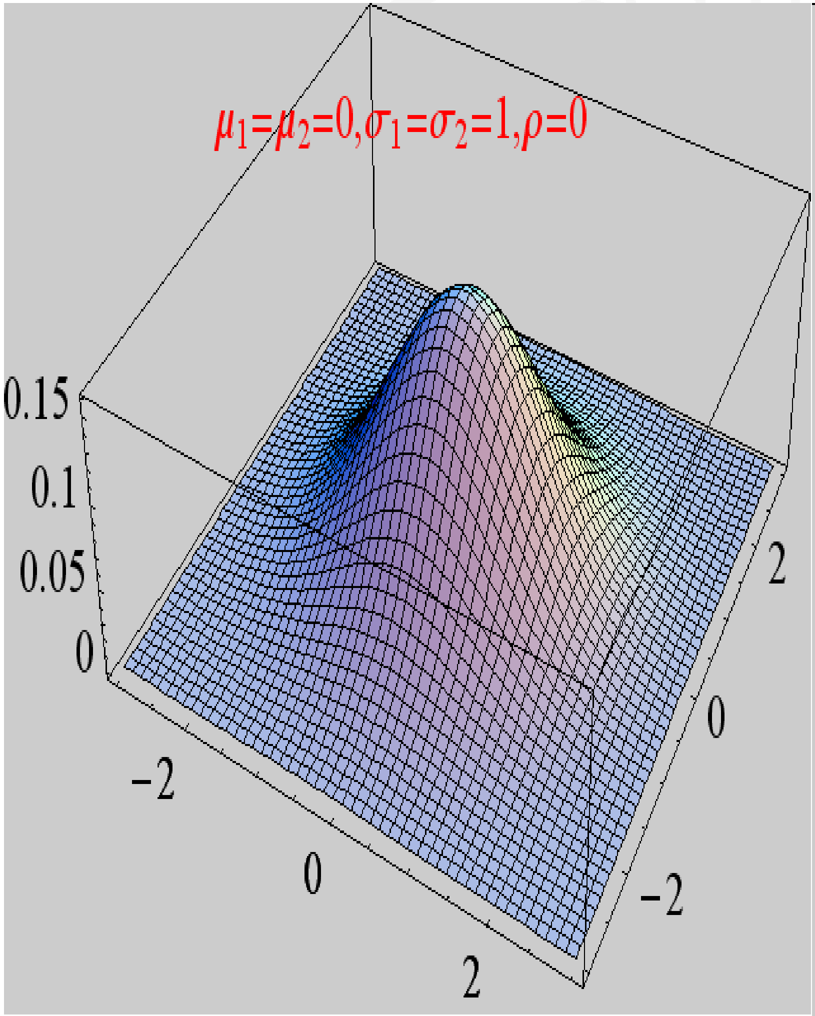
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

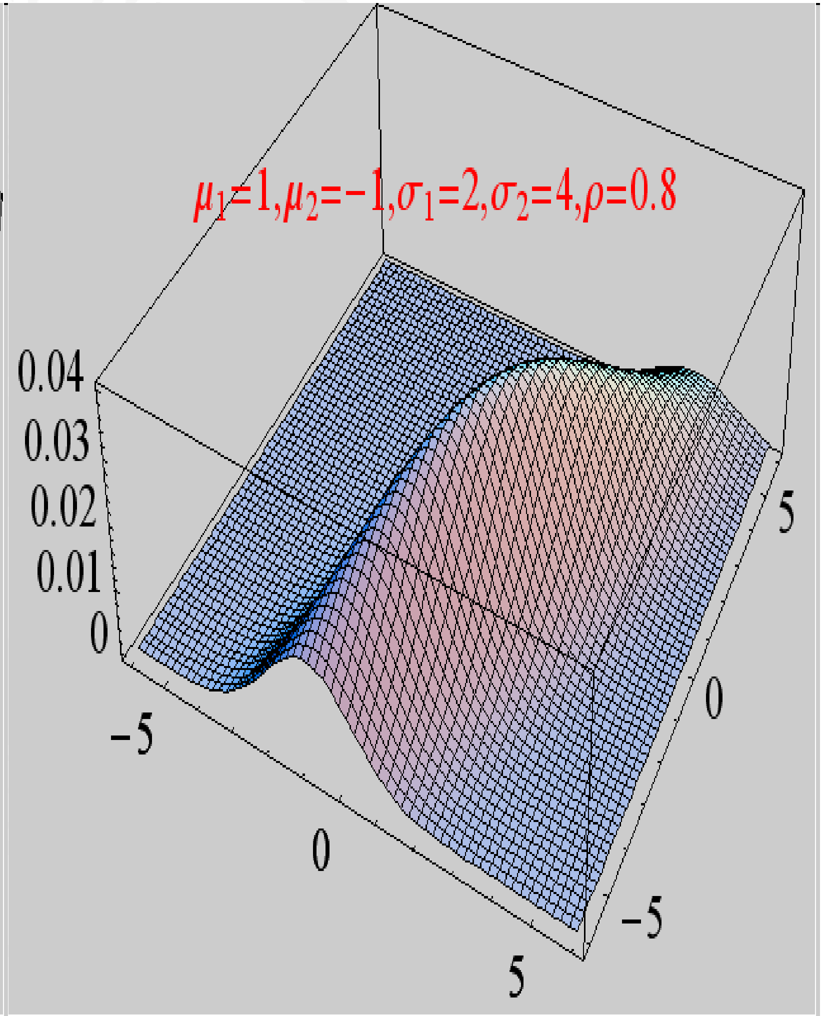
其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

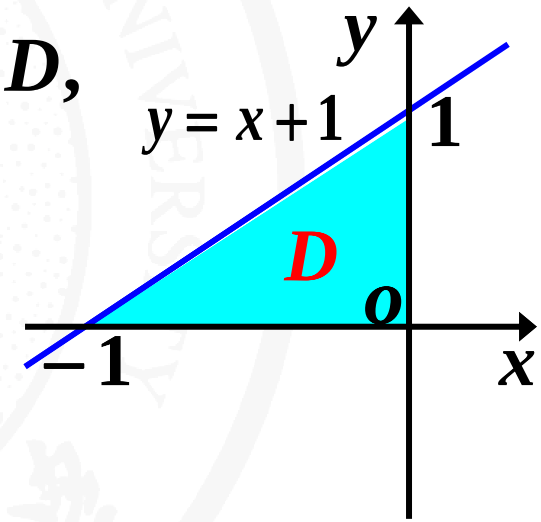
二维正态分布的图形


$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
−2
0
2
2
0
−2


$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−5
0
5
5
0
−5

例2 已知随机变量 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布，试求 (X, Y) 的**密度函数**及**分布函数**，其中 D 为 x 轴，y 轴及直线 $y = x+1$ 所围成的三角形区域．

解 由 $p(x,y)=\begin{cases}1/S, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$



得 $p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p(u,v)\,du\,dv$$

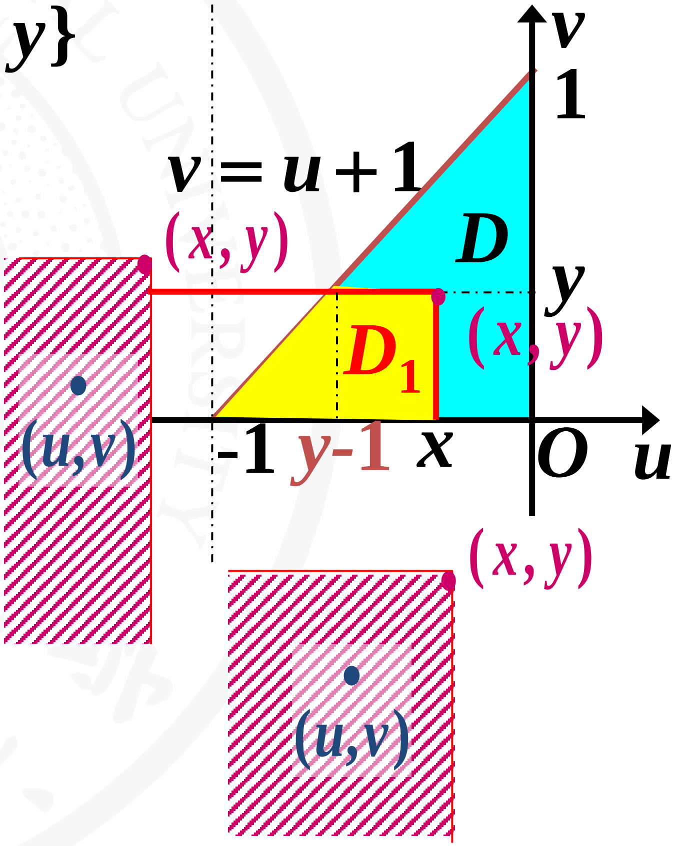
(1) 当 $x < -1$ 或 $y < 0$ 时,

$$p(u,v) = 0,\ (u,v) \in D^*,\ \text{其中}$$

$$D^* = \{(u,v) \mid -\infty < u \le x, -\infty < v \le y\}$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0;$$



(2) 当 $-1 \le x < 0, 0 \le y < x+1$ 时,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

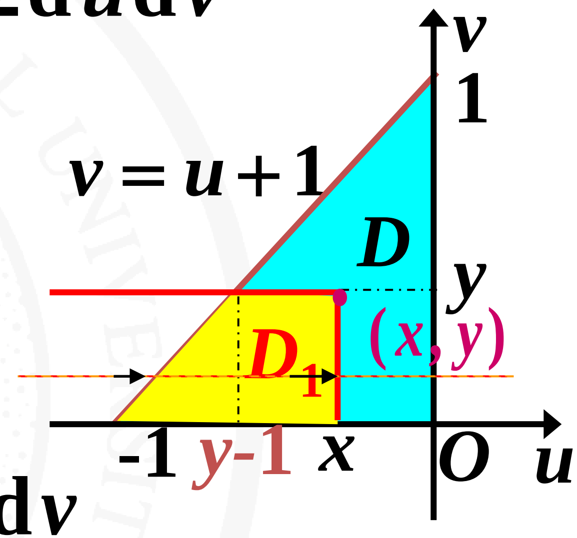
$$= \iint_{D_1} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

(2) 当 $-1 \le x < 0, 0 \le y < x+1$ 时,

$$F(x,y)=\iint_{D_1} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{D_1} 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=2\boxed{\iint_{D_1} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

梯形面积



或

$$=2\int_0^y \mathrm{d}v\int_{v-1}^x \mathrm{d}u=2\int_0^y (x-v+1)\,\mathrm{d}v$$

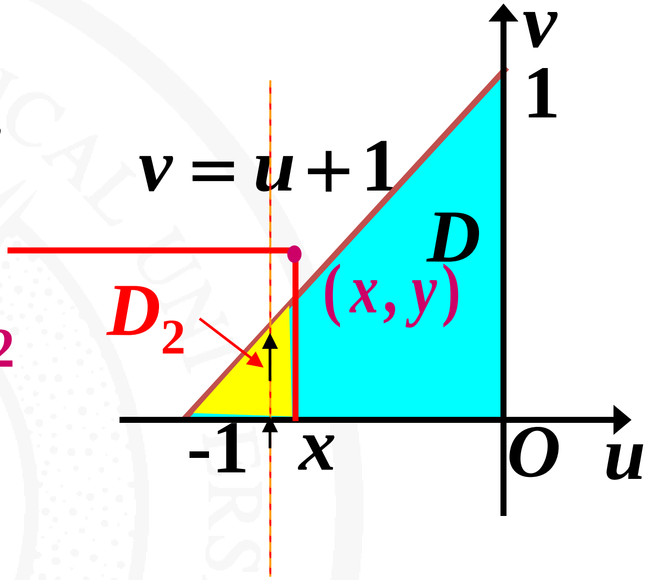
$$=(2x-y+2)y;$$

(3) 当 $-1 \le x < 0, y \ge x+1$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\iint\limits_{D_2}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \overset{\text{或}}{=} 2\cdot\frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$=\int_{-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1}2\,\mathrm{d}v=(x+1)^2;$$

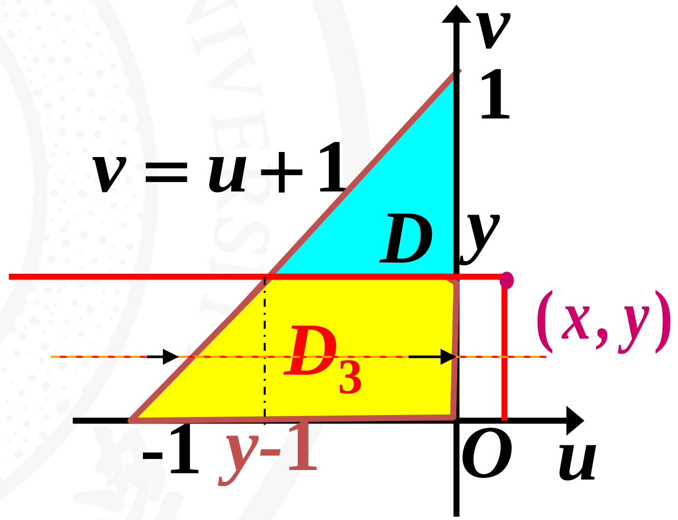


(4) 当 $x \ge 0, 0 \le y < 1$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{D_3}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=2\int_0^y \mathrm{d}v\int_{v-1}^{0}\mathrm{d}u$$

$$=(2-y)y;$$



(5) 当 $x \ge 0, y \ge 1$ 时,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_D 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1.$$

所以 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < -1, \text{或 } y < 0, \\ (2x-y+2)y, & -1 \le x < 0, 0 \le y < x+1, \\ (x+1)^2, & -1 \le x < 0, y \ge x+1, \\ (2-y)y, & x \ge 0, 0 \le y < 1, \\ 1, & x \ge 0, y \ge 1. \end{cases}$$

例 3 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,\quad 2<y<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求:(1)常数k;(2)$P\{X<1,Y<3\}$;

(3)$P\{X+Y\le 4\}$.

解 (1)$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_2^4\mathrm{d}y\int_0^2 k(6-x-y)\mathrm{d}x=k\int_2^4(10-2y)\mathrm{d}y=8k,$$

故 $k=1/8$.

$$p(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, \quad 2<y<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$(2)P(X<1,Y<3)=\int_{-\infty}^{3}\int_{-\infty}^{1}p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{2}^{3}dy\int_{0}^{1}\frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{2}^{3}\frac{1}{8}\left(\frac{11}{2}-y\right)\mathrm{d}y=\frac{3}{8}.$$

$$(3)P(X+Y<4)=\iint\limits_{x+y<4}p(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{2}dx\int_{2}^{4-x}(6-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{2}(6-4x+x^2/2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

$$\text{或}=\frac{1}{8}\int_{2}^{4}dy\int_{0}^{4-y}(6-x-y)dx$$

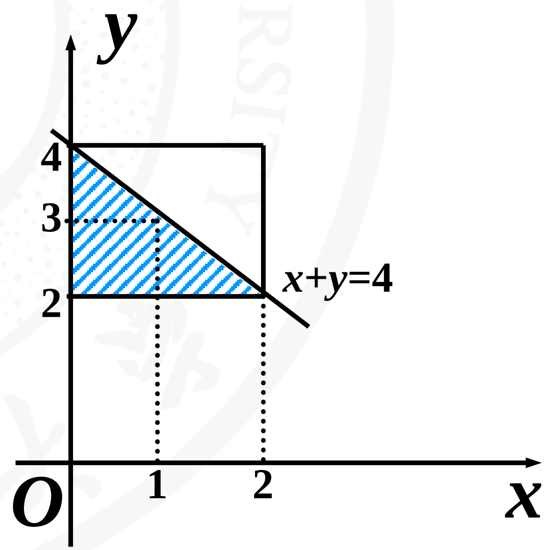


图2

内容小结

1. 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}.$$

意义：表示随机点(X,Y)落在平面区域$(-\infty,x]\times(-\infty,y]$的概率.

2. 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{x_i\le x}p_{ij}.$$

$$P\{(X,Y)\in G\}=\sum_{(x_i,y_j)}\sum_{\in G}p_{ij},$$

3. 二维连续型随机变量的分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

其中$p(u,v)$为联合密度函数。

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{G}p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4、常用分布

均匀分布

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

二维正态分布

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

2-2 多维随机变量及其分布 (1)

Thank You !

思考题

令$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geq -1,\\ 0, & x+y<-1.\end{cases}$

请判断 $F(x,y)$ 是否为某个二维随机向量的分布函数.

不是, 虽然 $F(x,y)$ 满足性质(1)–(4), 但不满足性质(5),

因为 $F(1,1)-F(1,-1)-F(-1,1)+F(-1,-1)$

$=1-1-1+0=-1<0.$

备用题 **例1-1** 将一枚均匀的硬币掷 3次，令：

$X=\{3$次抛掷中正面出现的次数$\}$;

$Y=\{3$次抛掷中正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值$\}$.

试求(X,Y)的联合分布律.

解 $X=k$; 可能取值0，1，2，3;

$Y=|k-(3-k)|=|2k-3|$ 可能取值1，3 ;

$$P\{X=k\}=C_3^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}=\frac{C_3^k}{8}$$

$$P\{X=0,\ Y=1\} = P\{\Phi\} = 0;$$

$$P\{X=1,\ Y=1\} = P\{X=1\} = \frac{3}{8};$$

$$P\{X=2,\ Y=1\} = P\{X=2\} = \frac{3}{8};$$

$$P\{X=3,\ Y=1\} = P\{\Phi\} = 0;$$

$$P\{X=0,\ Y=3\} = P\{X=0\} = \frac{1}{8};$$

$$P\{X=1,\ Y=3\} = P\{\Phi\} = 0;$$

$$P\{X=2,\ Y=3\} = P\{\Phi\} = 0;$$

$$P\{X=3,\ Y=3\} = P\{X=3\} = \frac{1}{8}.$$

由此得随机变量(X,Y)的联合分布律为

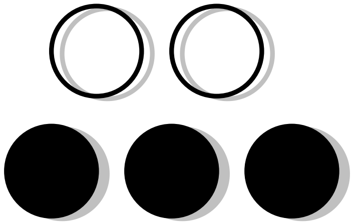
$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

例1-2 箱中装两个白球,三个黑球;分别进行有放回的摸球和无放回的摸球,定义如下随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{第1次摸白球,}\\ 0, & \text{第1次摸黑球.}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{第2次摸白球,}\\ 0, & \text{第2次摸黑球.}\end{cases}$$

则(X,Y) 的分布律可以写为



有放回

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$

$$X=\begin{cases}1, & \text{第1次摸白球},\\ 0, & \text{第1次摸黑球}.\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{第2次摸白球},\\ 0, & \text{第2次摸黑球}.\end{cases}$$

无放回

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$

例1-3 设随机变量Y服从参数为$\lambda=1$的指数分布，定义随机变量X_k如下：

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k,\\ 1, & Y>k.\end{cases}\qquad k=1,2,$$

求X_1和X_2的联合分布列.

解 (X_1,X_2)的联合分布列共有如下4种情况：

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\le 1,Y\le 2)=P(Y\le 1)$$

$$=1-\mathrm{e}^{-1}=0.63212,$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(Y \le 1, Y > 2) = 0,$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(Y > 1, Y \le 2) = P(1 \le Y \le 2)$$

$$= e^{-1} - e^{-2} = 0.23254,$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(Y > 1, Y > 2) = P(Y > 2)$$

$$= 1 - P(Y \le 2) = e^{-2} = 0.13534.$$

所以(X_1,X_2)的联合分布列为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.63212	0.00000
1	0.23254	0.13534

例1-4 设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取值, 另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值. 试求 (X,Y) 的分布律.

解 $\{X=i, Y=j\}$ 的取值情况是： $i=1,2,3,4,$

j取不大于i的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j \mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4,\quad j\le i.$$

于是 (X,Y) 的分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},\qquad i=1,2,3,4,\quad j\le i.$$

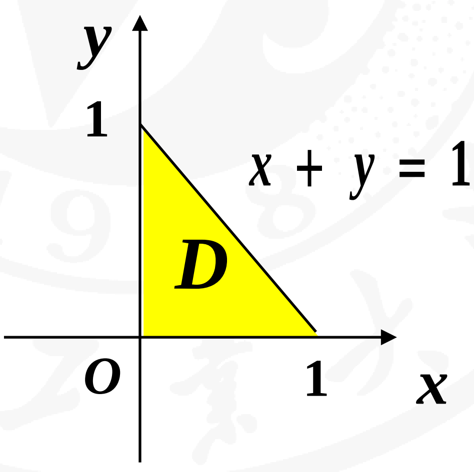
$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

例2-1 设(X,Y)的分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求$F(x,y)$;

(2) 求(X,Y)落在区域D内的概率,区域D如图所示.



解(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

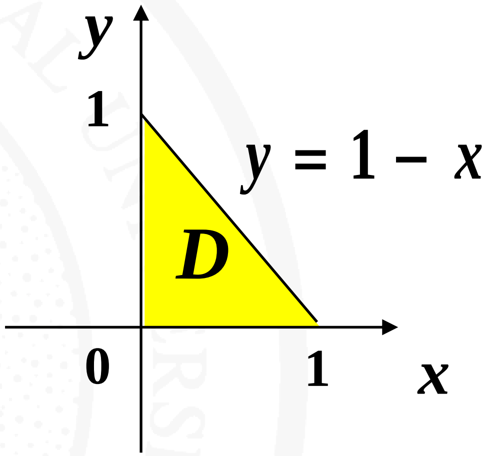
$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y.$$

$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{x-1})\,\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-1})\,\mathrm{d}x$$

$$=1-2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.2642$$



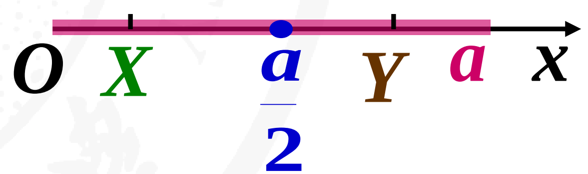
例2-3 在长为a的线段的中点的两边随机地各取一点，求两点间的距离小于$a/3$的概率.

解 记X为线段中点左边所取点到端点0的距离，

Y为线段中点右边所取点到端点0的距离，

则$X \sim U(0, a/2), Y \sim U(a/2, a)$，且$X$与$Y$相互

独立，它们的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}, & 0<x<\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}<y<a, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

而$p(x,y)$的非零区域与$\{|x-y|<a/3\}$的交集为

图2.2的阴影部分，因此，所求概率为

$$P\left(|Y-X|<\frac{a}{3}\right)$$

$$=\int_{\frac{a}{6}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{3}+x}\frac{4}{a^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{9}.$$

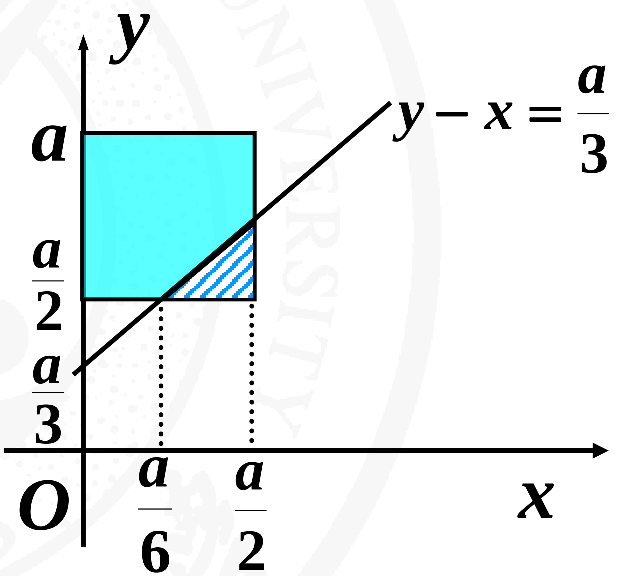


图2-2

例2-4 设随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} c-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:(1)常数c;(2)概率密度函数 $p(x,y)$.

解 (1)由$1=F(+\infty,+\infty)=c$

得$c=1$.

$$(2)\ p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3^{-x}\ln 3-3^{-x-y}\ln 3)$$

$$= 3^{-x-y}(\ln 3)^2, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

故 $$p(x,y) = \begin{cases} 3^{-x-y}(\ln 3)^2, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

例2-5 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数k;

(2)求(X,Y)落在区域D的概率,

其中$D=\{(x,y);0<x\le 1,0<y\le 2\}$.

解 (1)由联合密度的性质知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

$$\text{而}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= k\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y = \frac{k}{12} = 1,$$

所以$k = 12.$

(2)求(X,Y)落在区域D内的概率，使用公式

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint_{D} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此时$D = \{(x,y);0 < x \le 1, 0 < y \le 2\}$

于是有

$$P\{0 < X \le 1, 0 < Y \le 2\} = 12\int_0^1 \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^2 \mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y$$

$$= (-\mathrm{e}^{-3x})\Big|_0^1 \cdot (-\mathrm{e}^{-4y})\Big|_0^2$$

$$= (1-\mathrm{e}^{-3})(1-\mathrm{e}^{-8})$$

$$\approx 0.9502$$