西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

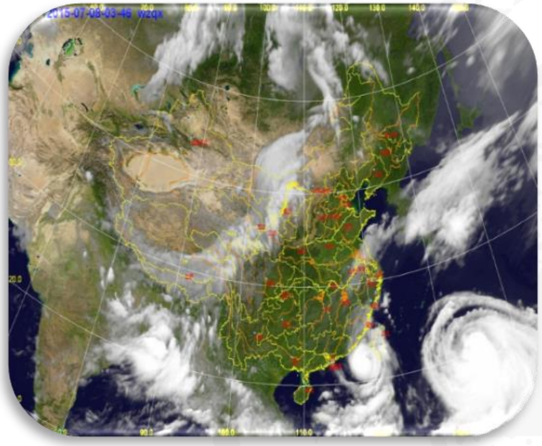
徐 爽

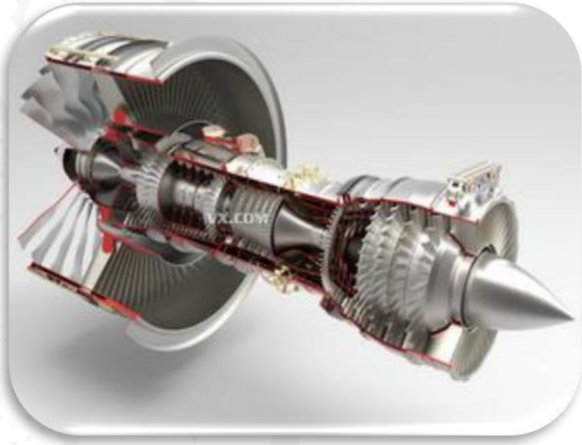
西北工业大学理学院概率统计教研室

第一节 大数定律

- 一、问题的提出
- 二、随机变量序列的收敛性
- 三、伯努利大数定律
- 四、常用的四种大数定律

一、问题的提出





万物看似随机，但有其统计的宿命。

随机现象 → 统计规律性

引例 相同条件下射击，命中率？

A：射击射中　　$P(A)=?$

n：射击次数

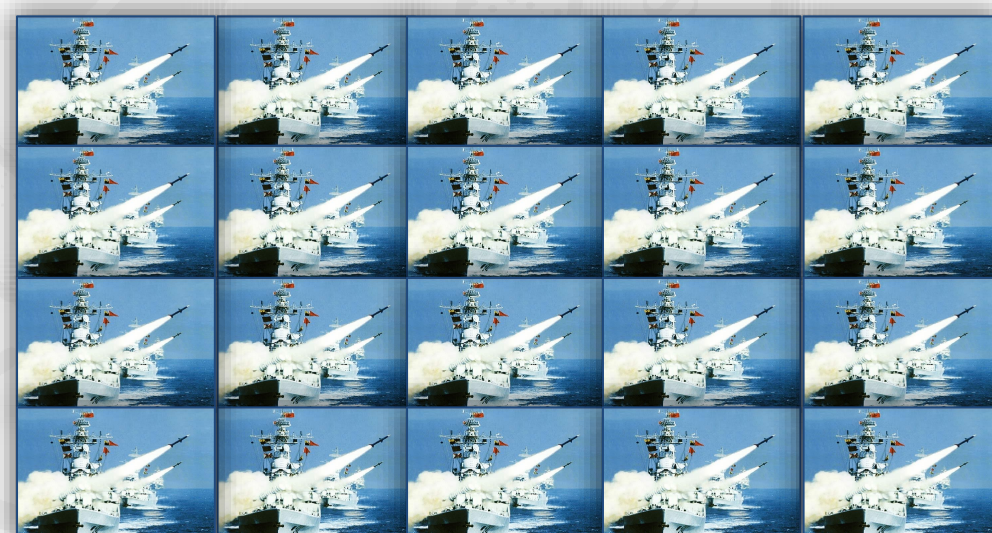
μ_n：命中次数

$$f=\frac{\mu_n}{n} \approx P(A)$$

命中频率≈ 命中率

理论依据 ？

随机现象 → 随机试验 → 揭示内在规律



二、随机变量序列的收敛性

定义4.2 设随机变量序列$\{Y_n\}$和随机变量Y，若对任意实数$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - Y| < \varepsilon\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - Y| \geq \varepsilon\} = 0$$

则称随机变量序列$\{Y_n\}$**依概率收敛**于随机变量Y，

简记为
$$Y_n \xrightarrow{P} Y$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - Y| < \varepsilon\} = 1$$

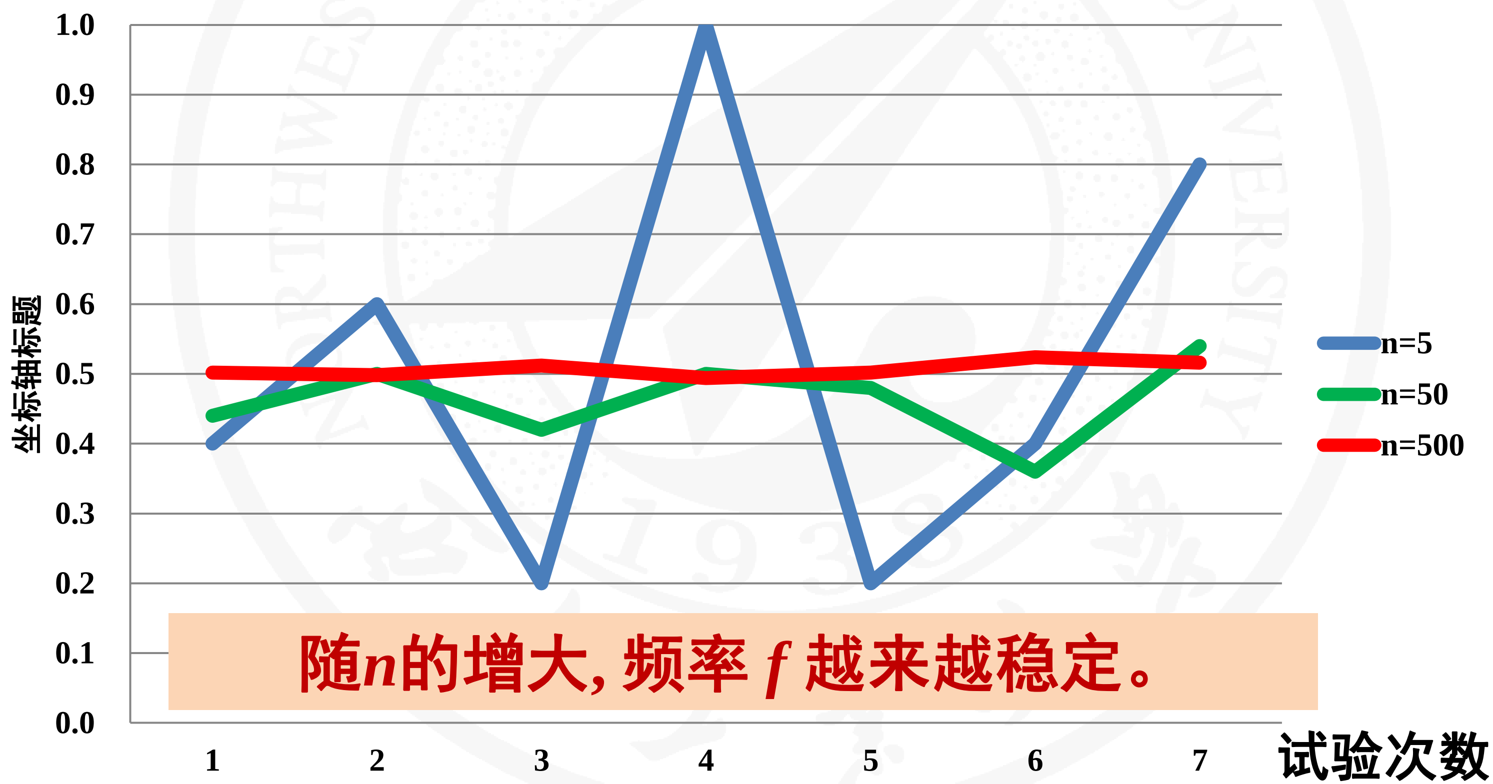
依概率收敛表示：Y_n 与 Y 的绝对误差小于任意小的正数 ε 的**可能性(即概率)**将随着n增大而愈来愈大，直至趋于1.

定理4.1 设 $\{Y_n\}$ 为一随机变量序列，$Y_n \xrightarrow{P} C$ (常数)，且函数$g(\cdot)$ 在点C处连续，则有

$$g(Y_n) \xrightarrow{P} g(C).$$

三、伯努利大数定律

1. 频率的稳定性 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.



试验者	n	μ_n	f
德.摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
杰万斯	20480	10379	0.5068
罗曼.诺夫斯基	80640	39699	0.4932

$$f_n \approx 0.5 = P(\text{正面})$$

频率的稳定性

频率的稳定性：概率统计定义的理论基础

随机现象在大量重复试验中呈现明显的统计规律性，即事件发生的频率具有稳定性.

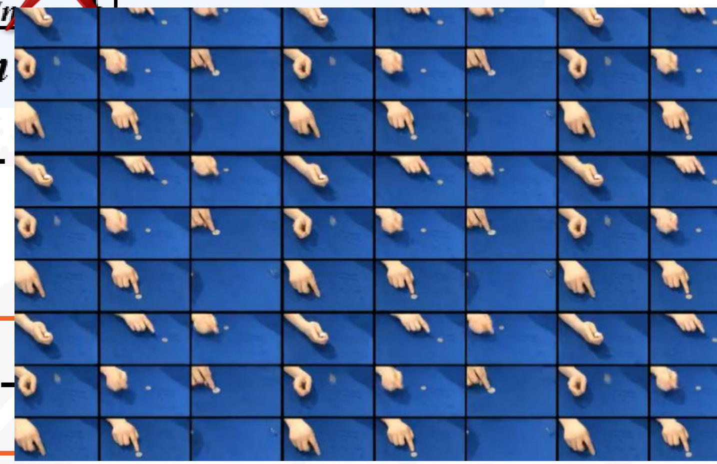
$$\text{频率} \xrightarrow{n\to\infty} \text{概率}$$

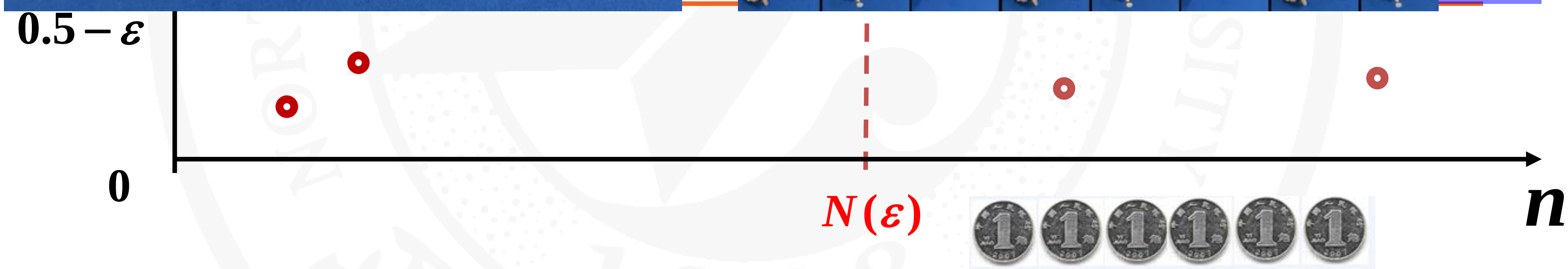
数学上如何准确刻画频率的稳定性？ 数列极限？

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow$ 任意实数 $\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$，有

$$\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|$$





极端情况： $\frac{\mu_n}{n}=1,\quad \frac{\mu_n}{n}=0 \Rightarrow \quad \left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon$

$$P\left\{\frac{\mu_n}{n}=1\right\}=\frac{1}{2^n},\quad P\left\{\frac{\mu_n}{n}=0\right\}=\frac{1}{2^n}$$

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}=P\left\{\frac{\mu_n}{n}=0\right\}+P\left\{\frac{\mu_n}{n}=1\right\}$$

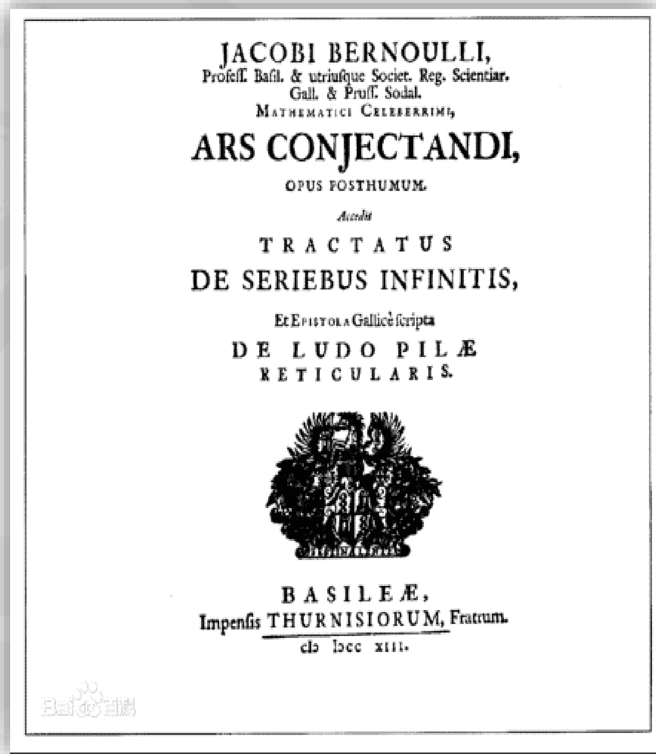
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

一般情况：

$$\forall\varepsilon>0,\quad P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\varepsilon\right\}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

瑞士数学家 伯努利

Jakob Bernoulli (1654-1705)



JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta

DE LUDO PILÆ RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIɔ Iɔcc xiii.

伯努利大数定律

2. 伯努利大数定律

设μ_n是n重伯努利试验中事件A发生的次数，

p为每次试验中事件A发生的概率,则对于任意$\varepsilon \geq 0$，

有 $$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

依概率收敛性: 即 $$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

当n很大，频率与概率有较大偏差的可能性很小

证明:

$\because \mu_n$ 是n重伯努利试验中事件A发生的次数,且$P(A)=p$

$\therefore \mu_n \sim B(n,p)$ 且有$E(\mu_n)=np;\ D(\mu_n)=np(1-p);$

令$X=\dfrac{\mu_n}{n} \Rightarrow E(X)=E(\dfrac{\mu_n}{n})=p;\ D(X)=D(\dfrac{\mu_n}{n})$

$$=\frac{D(\mu_n)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$$

由Chebyshev不等式

$$0 \le P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right| \ge \varepsilon\right\}=0$$

证明完毕.

历史上第一个大数定律，奠定了概率论的理论基础！

意义：以严格的数学形式证明了频率的稳定性，揭示了随机现象中的统计规律性。 $\dfrac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$

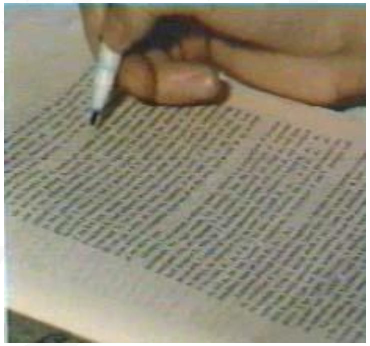
当$n \to \infty$时，

射中的频率$f_n \approx$命中率$P(A)$

理论依据：伯努利大数定律

四、常用的四种大数定律

在实践中，人们认识到单个随机现象没有规律，但大量随机现象**的算术平均值**具有稳定性. 大数定律就是用于研究**大量随机现象中平均结果的稳定性**的理论.



$$X \sim B(100, 0.3) \Rightarrow \quad Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$n = 100$

30.58, 29.91, 29.79……

$n = 10000$

30.0019, 30.0494, 29.9655……

$n = 1000000$

30.0065, 30.0115, 29.9991

$n \to \infty$

$Y_n \approx 30 = EX = EY_n$

$X \sim N(4,3) \Rightarrow$ $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$n = 100$ ⟹ 3.9481, 3.9846, 4.5133……

$n = 10000$ ⟹ 4.0177, 3.9876……

$n = 1000000$ ⟹ 4.0007, 4.0028,……

$n \to \infty$ ⟹ $Y_n \approx 4$ $= EX = EY_n$

定义4.5 大数定律

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是随机变量序列，

令
$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

如果存在这样一个常数序列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,

对任意的$\varepsilon > 0$,恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a_n| < \varepsilon\} = 1 \quad \text{即} Y_n \xrightarrow{P} a_n$$

则称随机变量序列$\{X_n\}$服从大数定律.

描述了随机变量序列均值的收敛性

定理4.3 切比谢夫大数定律

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是两两不相关的随机变量序列，每一随机变量都有有限的方差，并有公共的上界

$$D(X_1)\le C, D(X_2)\le C,\cdots,D(X_n)\le C,\cdots$$

则对任意的$\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$$

即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$

注1° 当 n 很大时，随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 接近于它们的数学期望的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

这种接近是概率意义下的！

通俗地说，在定理条件下，n 个随机变量的算术平均值，当 n 无限增加时，几乎变成一个常数.

定理4.4 伯努利大数定律

设μ_n是n次独立重复伯努利试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对任意的$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

即 $\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$

证 引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & \text{在第}k\text{次试验中事件 }A\text{不发生} \\ 1, & \text{在第}k\text{次试验中事件 }A\text{发生} \end{cases}$$

$k = 1, 2, \cdots, n.$

显然,由于$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的,且同服从$B(1, p)$分布,故有

$$E(X_k) = p, D(X_k) = p(1-p) \le \frac{1}{4} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

由**定理4.3**对任意的$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

即

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

证毕.

定理4.4 推广 泊松大数定律*

如果在一个独立试验序列中,事件A在第k次试验中出现的概率等于p_k, 以μ_n记在前n次试验中事件A出现的次数, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

即 $\dfrac{\mu_n}{n} \xrightarrow{p} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$

证 令

$$X_k = \begin{cases} 0, & \text{第}k\text{次试验中}A\text{不发生} \\ 1, & \text{第}k\text{次试验中}A\text{发生} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

X_k独立且服从$B(1, p_k)$ 由定理4.3可得结论.

定理4.5 辛钦大数定律

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立,服从同一分布,且具有数学期望$E(X_i)=\mu \quad (i=1,2,\cdots,n)$,则对任意的$\varepsilon>0$,都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

$$\text{即}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(X_i)$$

注1° 与切比谢夫大数定理相比,不要求方差存在且有界.

2° 伯努利大数定理是辛钦大数定理的特例.

例2 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是独立同分布的随机变量序列，$E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$均存在，证明

$$Y_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$$

依概率收敛到μ.

解 大数定律

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i=\mu$$

切比谢夫不等式

$$0 \le P\left\{\left|Y_n - E(Y_n)\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

其中 $$Y_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$$

因为 $$E(Y_n) = E\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right]$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iE(X_i) = \frac{2\mu}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i = \mu$$

$$D(Y_n)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X_i)=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)\sigma^2}{6n^2(n+1)^2}=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)}$$

从而对任意给定的$\varepsilon>0$, 由**切比谢夫不等式**得

$$0\le P\{|Y_n-\mu|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

$$=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)\varepsilon^2}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

因此 $Y_n \xrightarrow{P} \mu.$

例3 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且$E(X_k)=0$, $D(X_k)=\sigma^2$, $k=1,2,\cdots$,证明对任意正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=1$$

解 由**辛钦大数定律**知,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2)=E(X_k^2)$$

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是相互独立的，所以 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2, \cdots$也是相互独立的. 由 $E(X_k)=0$,

得 $$E(X_k^2)=D(X_k)+[E(X_k)]^2=\sigma^2.$$

由**辛钦大数定律**知, 对于任意正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{P}E(X_k^2)$

该结论为数理统计中的**矩估计法**的理论基础。

内容小结

四个大数定理

切比谢夫大数定律

不相关、方差有界：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$

伯努利大数定律

独立同分布，$X \sim B(1,p)$ ：$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{p} p$

泊松大数定律

独立不同分布，$X \sim B(1,p_k)$ ：$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k$

辛钦大数定律

独立同分布：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{p} E(X_i)$

4-1 大数定律

Thank You !