西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第四节　条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

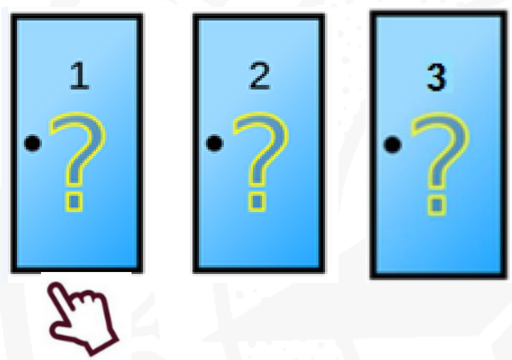
- 一、条件概率
- 二、全概率公式与贝叶斯公式

二、全概率公式与贝叶斯公式

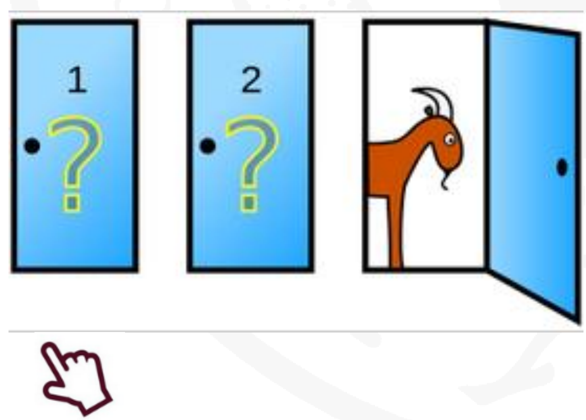
例3 蒙提·霍尔三门问题

(Monty Hall Problem)

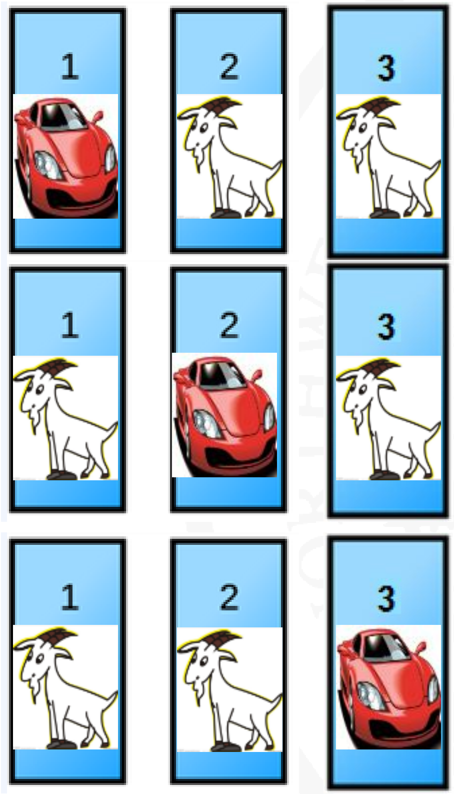
1



2



3 问：是否改变选择？



改变选择是否会增加赢得汽车的概率

不改变选择，选中汽车的概率？

1 / 3

改变选择，选中汽车的概率？

Ω

第一次选择选中汽车	第一次选择选中山羊

1. 样本空间的划分

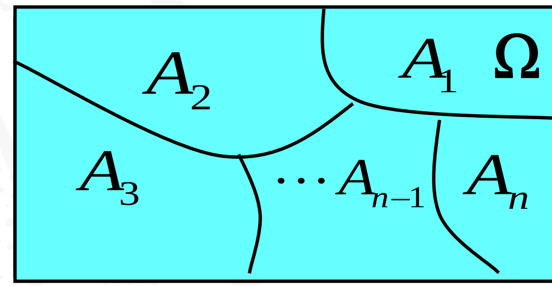
定义 设Ω为试验E的样本空间，$A_1, A_2,\ldots, A_n$

为E的一组事件，若

(1) $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(2) $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$

则称$A_1, A_2,\ldots, A_n$为Ω的一个划分。



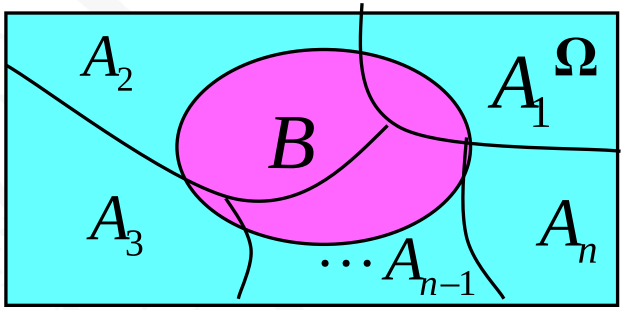
化整为零

注：1、同一样本空间的划分不唯一；

2、对于每次试验，$A_1, A_2,\ldots, A_n$中有且仅有一个发生。

2. 全概率公式

(1)分析 $B \subset \Omega$



$$A_iA_j = \varnothing \quad \Rightarrow (BA_i)(BA_j) = \varnothing$$

$$\because B = BA_1 \cup BA_2 \cup \cdots \cup BA_n.$$

$$\therefore P(B) = P(BA_1 \cup BA_2 \cup \cdots \cup BA_n)$$

有限可加性

$$= P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n)$$

乘法公式

$$= P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).}$$

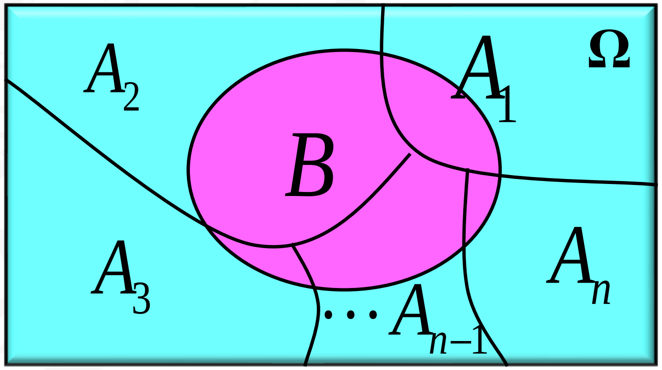
(2)定理 设Ω为试验E的样本空间，B为E的事件，$A_1, A_2,\ldots, A_n$ 为Ω的一个划分，且$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

称为全概率公式。（证明见分析）

注： $B \xrightarrow{\text{分解}} \sum_{i=1}^{n} BA_i$

化繁为简、化整为零



(3)意义

P(原因)

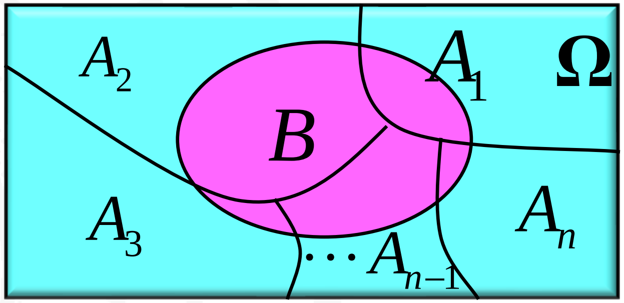
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

P(结果/原因)

A_1
A_2
$\vdots$
A_n

$\rightarrow B$

原因 ⇒ 结果



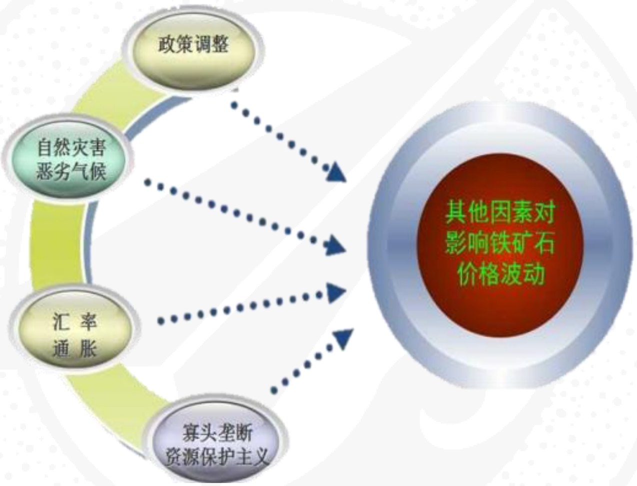
全概率公式：由因索果

注

条件：$\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 可换为 $B\subset\sum_{i=1}^{n}A_i\subset\Omega$

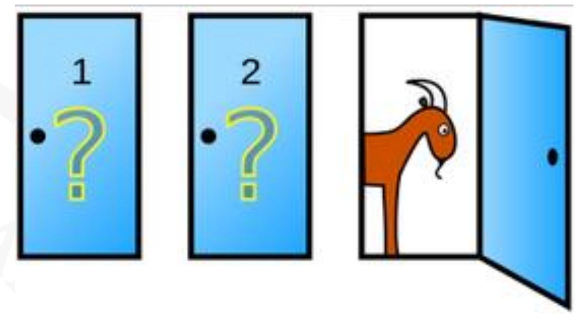
(4)应用

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$



儿童的生长发育　　价格的涨跌　　疾病的发生

例3　蒙提·霍尔三门问题 (Monty Hall Problem)



B：改变选择，选中汽车　A：第一次选中汽车

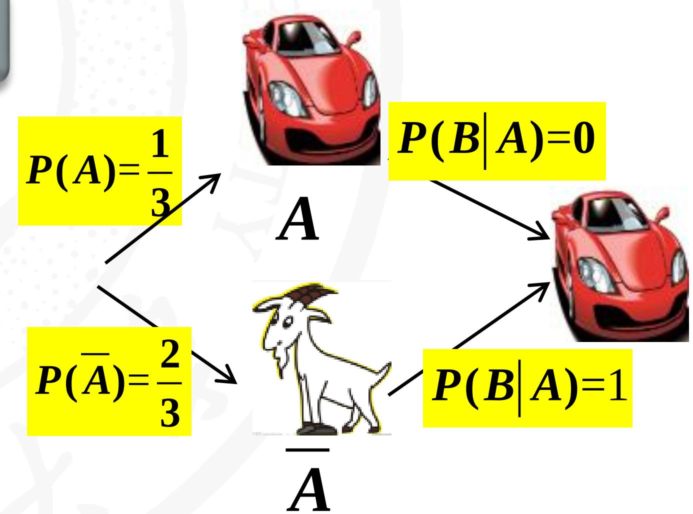
$\overline{A}$：第一次选中山羊

$A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \Omega=A\cup\overline{A}$

全概率公式

$$P(B)=\underline{P(A)}\,\underline{P(B|A)}+\underline{P(\overline{A})}\,\underline{P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}>\frac{1}{3}\ =P(A)$$



顺应时势，善于改变

例 4 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据：

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的， 且无区别的标志.

(1)在仓库中随机地取一只元件，求它是次品的概率；

解 设 A 表示"取到的是一只次品", $B_i\ (i=1,2,3)$ 表示"所取到的产品是由第 i 家工厂提供的".

则 B_1, B_2, B_3 是样本空间 Ω 的一个划分,

(1) 由**全概率公式**得

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$

$$=0.0125.$$

例 4 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

$P(A|B_i)$ $P(B_i)$

(2)在仓库中随机地取一只元件,若已知取到的是次品,为分析此次品出自何厂,需求出此次品出由三家工厂生产的概率分别是多少?

例 4 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

已知结果求原因的概率$P(B_i|A)$ $\qquad P(A|B_i)$ $\qquad P(B_i)$

全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

由因索果

结果 B ⟵ 原因 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$

外表长相

工作收入

谈吐学识

……

由果索因 $P(A_i \mid B)$?

结果 B ⇒ 原因

A_1

A_2

A_3

$\vdots$

A_n

外表长相

工作收入

谈吐学识

……

最可能原因：

$$\max\left\{P(A_i \mid B), i=1,2,\cdots,n\right\} \rightarrow A_i$$

4. 贝叶斯公式

(1)分析

B 结果 ⇨ A_i 原因

条件概率

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}$$

乘法公式

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

全概率公式

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

----贝叶斯公式

(2)定理 设Ω为试验E的样本空间，B为E的事件，

$A_1, A_2, \ldots, A_n$，为Ω的一个**划分**，且$P(B)>0$, $P(A_i)>0$ $(i=1\ldots n)$，

① $A_iA_j=\varnothing, i\neq j;$

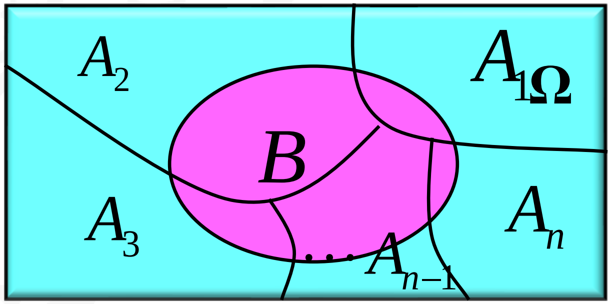
② $\sum_{i=1}^{n} A_i=\Omega$

则

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

原因 结果

称为**贝叶斯公式**。



由果索因——逆概公式

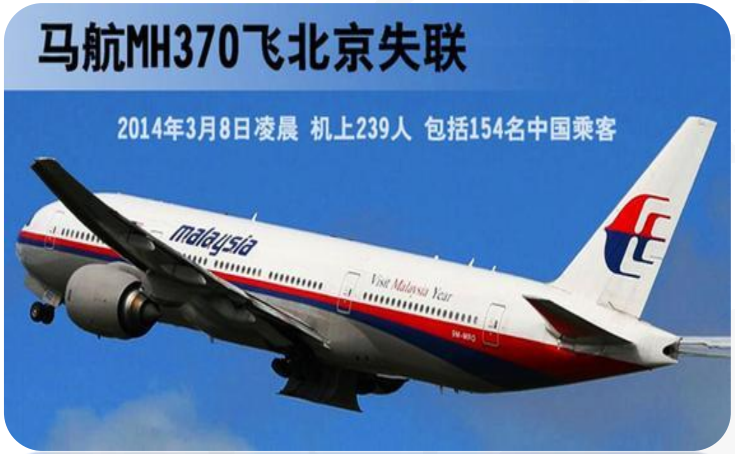
英国数学家 贝叶斯
Thomas Bayes
(1701-1761)

后验概率 $\xleftarrow[\text{修正}]{\text{结果}}$ 先验概率

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

贝叶斯公式 ＋ 统计推断 ⇨ 贝叶斯统计

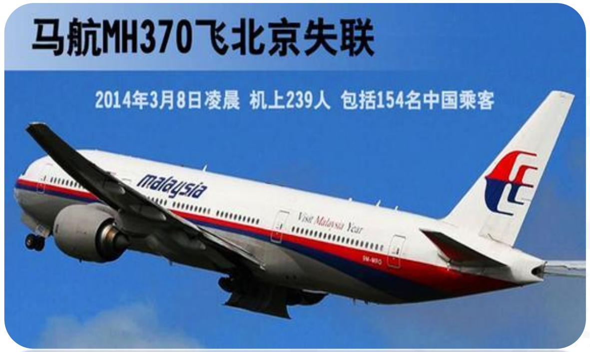
(3)应用



如何搜索失联的航班？

搜索位置

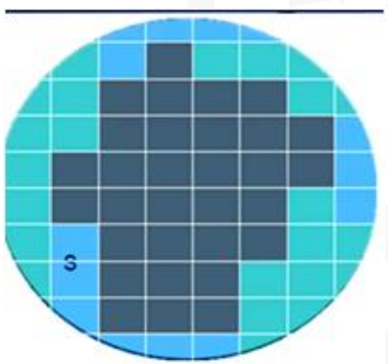
贝叶斯理论

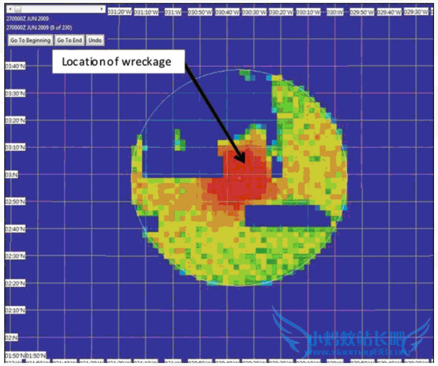


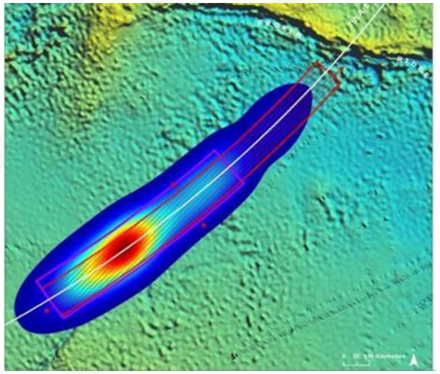
如何搜索失联的航班

贝叶斯理论 $max\{P(A_i \mid B)\}$

可能位置：$P(A_i)$　　坠毁：$P(B \mid A_i)$　　可能位置 $\Rightarrow P(A_i \mid B)$







疾病诊断　　风险决策　　刑事侦查

先验概率 → 后验概率 → 统计推断

例4 (2)在仓库中随机地取一只元件,若已知取到的是次品,为分析此次品出自何厂,需求出此次品出由三家工厂生产的概率分别是多少?

解

$P(A)=0.0125$

例 4 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

$P(B_i|A)$ $P(A|B_i)$ $P(B_i)$

由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

$$=\frac{0.02\times0.15}{0.0125}=0.24.$$

例 4 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

$P(A|B_i)$ $P(B_i)$

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=0.64,$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=0.12.$$

故这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大.

应用【垃圾邮件识别】经统计有40%的邮件是垃圾邮件。在80%的垃圾邮件中会出现“免费”一词；而仅有5%的正常邮件中会出现“免费”一词。

若收到一封邮件，出现了“免费”一词，则它为垃圾邮件的概率是多少？

解： $A=$“是垃圾邮件” $P(A)=0.4$

$B=$“邮件包含免费一词”

如果为垃圾/正常邮件，则包含“免费”的概率：

$$P(B|A)=0.8,\quad P(B|\bar{A})=0.05$$

如果出现了免费一词，则为垃圾邮件的概率：

$$P(A|B)$$

$$P(A)=0.4,\ P(B|A)=0.8,\ \ P(B|\bar{A})=0.05$$

贝叶斯公式：

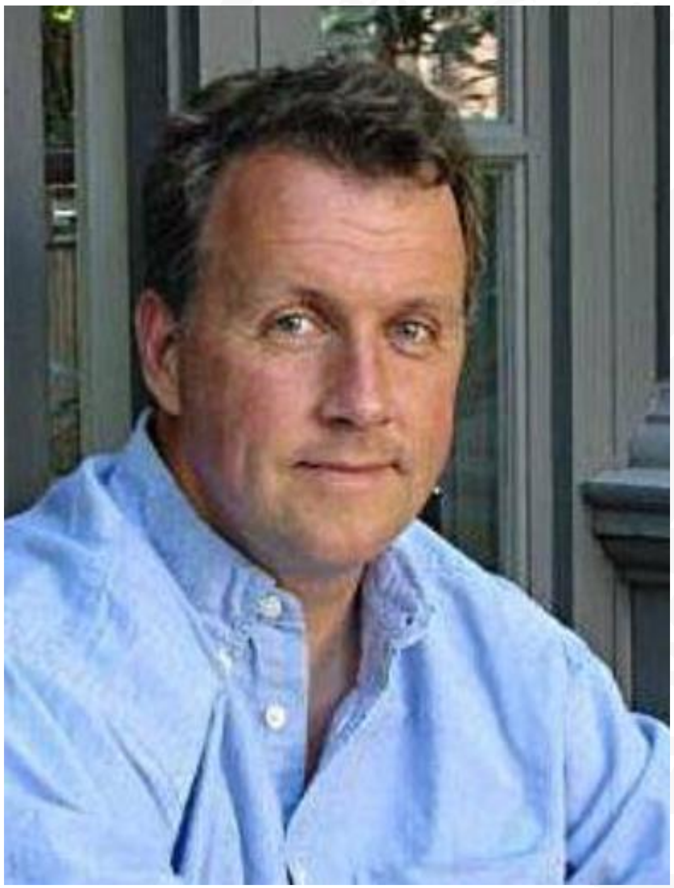
$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

$$=\frac{0.8\times 0.4}{0.8\times 0.4+0.05\times 0.6}$$

$$=\frac{32}{35}=91.42\%$$

所以出现了免费一词，为垃圾邮件的概率为91.42%！

Paul Graham根据这种思想，于2002年提出了贝叶斯垃圾邮件分类算法。



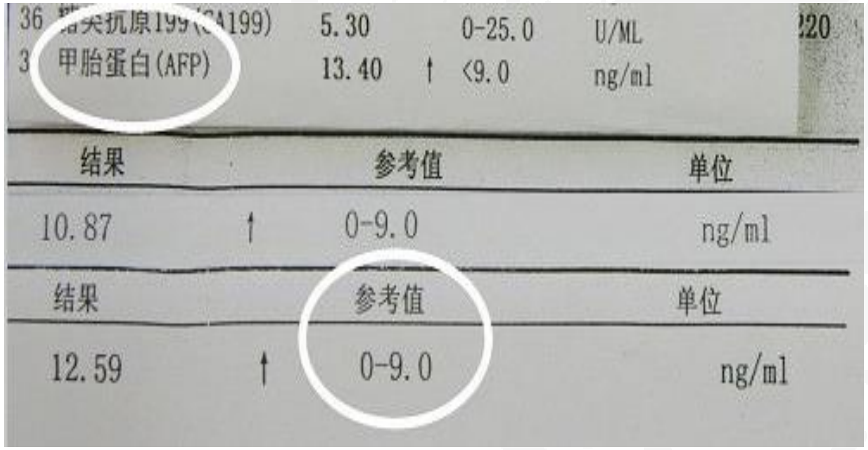
英文原文

中文大意

应用【医学检测】

某地区肝癌的发病率为0.04%，现用血清甲胎蛋白法进行普查。设A：被检验者患有肝癌，B：诊断被检验者患有肝癌（阳性）。

已知甲胎蛋白法的准确率为 $P(B|A)=0.95$, $P(\overline{B}|\overline{A})=0.99$



36 抗原199(CA199)	5.30	0-25.0	U/ML
3 甲胎蛋白(AFP)	13.40 ↑	<9.0	ng/ml

结果		参考值	单位
10.87	↑	0-9.0	ng/ml

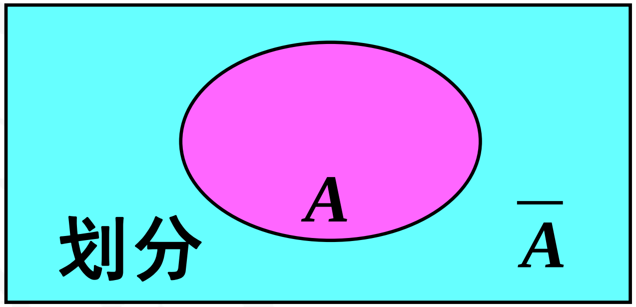
结果		参考值	单位
12.59	↑	0-9.0	ng/ml

现若有一人被诊断为患有肝癌，求此人真正患有肝癌的概率？

$P(A|B)$

解：利用贝叶斯公式

$$P(A)=0.0004 \Rightarrow P(\overline{A})=0.9996$$



检验的准确率

$$P(B|A)=0.95$$

$$P(\overline{B}|\overline{A})=0.99 \Rightarrow P(B|\overline{A})=0.01 \qquad P(A|B)$$

0.0004 A: 患肝癌 0.95

B: 阳性

0.9996 $\overline{A}$: 未患肝癌 0.01

原因 结果

由贝叶斯公式 $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$

后验概率

$$=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+0.9996\times 0.01}$$

先验概率

$$=0.0366 \quad > \quad P(A)=0.0004$$

1000个阳性反应的人中大约只有36人真正患有肝癌！

结果的准确率 $P(A|B)$
- 检验的准确率 $P(B|A)$
- 复查 $P(A|B)\to P(A)$

$$P(A)=0.0366 \quad \Rightarrow P(\overline{A})=0.9634;$$

$$P(B|A)=0.95; \quad P(B|\overline{A})=0.01$$

利用贝叶斯公式

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

$$= \frac{0.0366\times 0.95}{0.0366\times 0.95+0.9634\times 0.01} \approx 0.7831$$

$$P(A)=0.0366 \xrightarrow[\text{修正}]{\text{结果}A} P(A)=0.7831 \xrightarrow[\text{修正}]{\text{结果}A} P(A)=0.9971$$

课后预习

独立性的定义和性质

独立和互斥的区别

n重伯努利实验

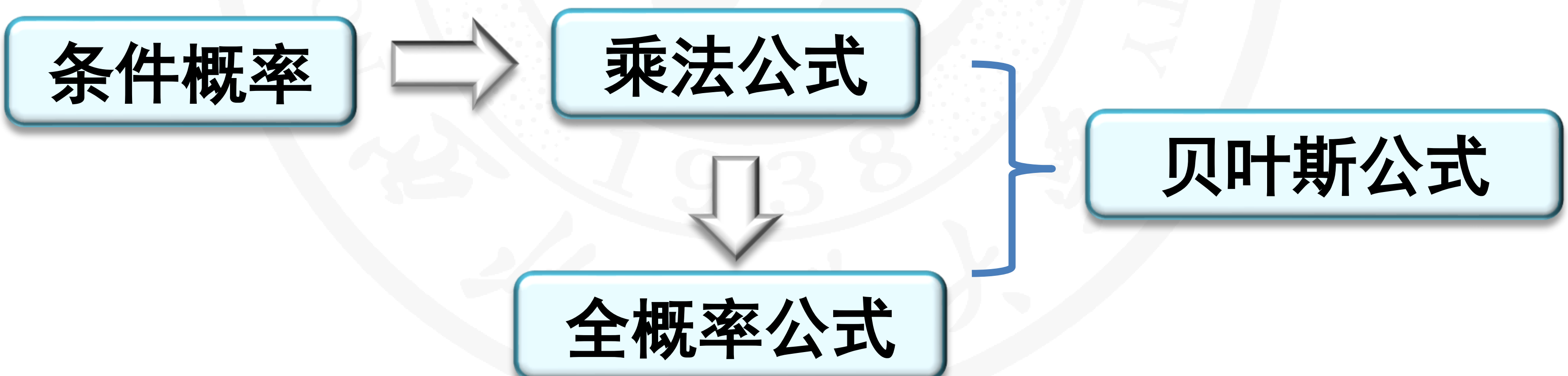
二项公式和几何公式

内容小结

关键词：

条件概率、乘法公式、划分、全概率公式、贝叶斯公式

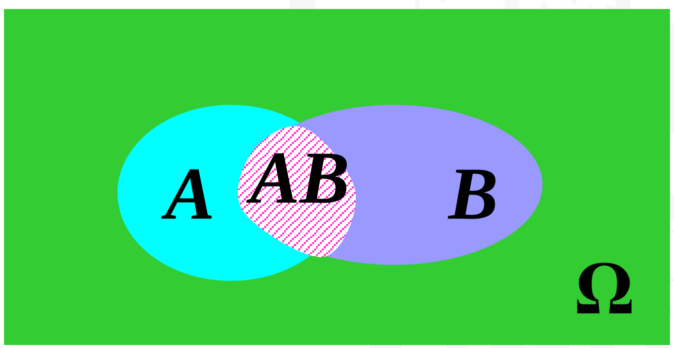
思维导图：



内容小结

1.条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ $\geq P(AB)$

2. 条件概率 $P(A|B)$与积事件$P(AB)$概率的区别



$$P(A|B)=\frac{AB\text{基本事件数}}{B\text{中基本事件数}}.$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{中的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件数}},$$

而 $P(A|B)$和$P(A)$没有确定大小关系.

3. 条件概率的性质

条件概率也是概率，故具有概率的性质：

(1)非负性 $P(B|A) \geq 0$;

(2)归一性 $P(\Omega|A) = 1$;

(3)可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$;

(4) $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$;

(5) $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$;

(6) $P(B_1 - B_2|A) = P(B_1|A) - P(B_1B_2|A)$.

条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

乘法公式

全概率公式

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$

贝叶斯公式

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

1-4 条件概率 全概率公式 贝叶斯公式

Thank You !

备用题

例1-1 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8, 活到25岁以上的概率为0.4, 如果现在有一个20岁的这种动物, 问它能活到25岁以上的概率是多少?

解 设 A =“能活 20 岁以上”的事件;

B =“能活 25 岁以上”的事件;

则有 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad (\because B\subset A,\ \therefore AB=B)$$

因为 $P(A)=0.8,\quad P(B)=0.4,\quad P(AB)=P(B),$

所以 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$$

例1-2 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张,将其中1张放在验钞机上检验发现上假钞 .求2张都是假钞的概率.

下面两种解法哪个正确?

解法1 令A表示"2 张都是假钞",

B表示"其中1张是假钞",

由缩减样本空间法得

$$P(A|B)=4/19=0.2105.$$

解法2　令 A 表示“抽到2 张都是假钞”

B 表示“2 张中至少有1张假钞”

$A \subset B$

则所求概率是$P(A|B)$（而不是$P(A)$!),

$$P(AB) = P(A) = C_5^2 / C_{20}^2$$

$$P(B) = (C_5^2 + C_5^1 C_{15}^1) / C_{20}^2$$

所以

$$P(A|B) = P(AB) / P(B)$$

$$= C_5^2 / (C_5^2 + C_5^1 C_{15}^1) = 10/85 = 0.118.$$

例2-1 设袋中有4只白球, 2只红球 , (1) 无放回随机地抽取两次, 每次取一球, 求在两次抽取中至多抽到一个红球的概率? (2) 若无放回的抽取 3次, 每次抽取一球, 求 (*a*) 第一次是白球的情况下, 第二次与第三次均是白球的概率? (*b*) 第一次与第二次均是白球的情况下，第三次是白球的概率?

解 (1)设 A 为事件“两次抽取中至多抽到一个红球”事 A_1 为“第一次抽取到红球”A_2 为“第二次抽到红球“.,

则有 $$A=\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2+A_1\overline{A_2},$$

$$P(A)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1\overline{A_2})$$

$$=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})$$

$$+P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)$$

$$=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{14}{15}.$$

(2)设事件 A_i 为"第 i 次取出的是白球", $i=1,2,3.$

$$(a)\ P(A_2A_3|A_1)=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1)},$$

因为 $P(A_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ P(A_1A_2A_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{6}{3}=\frac{1}{5},$

所以 $P(A_2A_3|A_1)=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1)}=\frac{1/5}{2/3}=\frac{3}{10}.$

$$(b)\ P(A_3 | A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)},$$

因为 $P(A_1A_2) = \binom{4}{2} \Big/ \binom{6}{2} = \frac{2}{5},$

$$P(A_1A_2A_3) = \binom{4}{3} \Big/ \binom{6}{3} = \frac{1}{5},$$

所以 $P(A_3 | A_1A_2) = \dfrac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} = \dfrac{1/5}{2/5} = \dfrac{1}{2}.$

例2-2 摸球试验(卜里耶模型)

箱中有b只黑球，r只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与抽出球同色的球c只，再取第二次，这样下去共取了n次球，问前n_1次取到黑球，后$n_2=n-n_1$次取到红球的概率是多少？

解 以A_1表示第一次取出黑球一事件，$\cdots\cdots, A_{n_1}$表示第n_1次取出黑球；A_{n_1+1}表示第n_1+1次取出红球，$\cdots\cdots, A_n$表示第n次取出红球，则

$$P(A_1)=\frac{b}{b+r},$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{b+c}{b+r+c}.$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_{n_1} | A_1 A_2 \cdots A_{n_1-1}) = \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}.$$

$$P(A_{n_1+1} | A_1 A_2 \cdots A_{n_1}) = \frac{r}{b+r+n_1 c}.$$

$$P(A_{n_1+2} | A_1 A_2 \cdots A_{n_1+1}) = \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}.$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) = \frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

因此 $P(A_1A_2\cdots A_n)$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$= \frac{b}{b+r} \times \frac{b+c}{b+r+c} \times \frac{b+2c}{b+r+2c}\cdots$$

$$\times \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}\frac{r}{b+r+n_1c}$$

$$\times \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}\cdots\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

此模型被卜里耶用来作为描述传染病的数学模型.

例2-3 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为1/2,若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为7/10 , 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为9/10.试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以$A_i\,(i=1,2,3)$表示事件"透镜第 i 次落下打破",

以B 表示事件“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

所以 $P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

$$=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{9}{10})=\frac{3}{200}.$$

摸球试验(卜里耶模型)

例2-4　设袋中装有 r 只红球，t 只白球.每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入 a 只与取出的那只球同色的球，若在袋中连续去球4次，试求第一，二次取到红球且第三，四次取到白球的概率.

解　设 $A_i\,(i=1,2,3,4)$ 为事件“第 i 次取到红球”，

则 $\overline{A_3},\overline{A_4}$ 为事件第三，第四次取到白球”，

因此所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(\overline{A_4}|A_1A_2\overline{A_3})$$

$$=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}.$$

此模型被卜里耶用来作为描述传染病的数学模型.

例2-5 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过3次而接通电话的概率.

解 设A=“拨号不超过3次接通电话”,

A_i=“拨号i次接通电话”$(i=1,2,3)$,则

$$A=A_1+\bar{A}_1A_2+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3,$$

$$P(A)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$\because P(A_1)=\frac{1}{10};$$

$$P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2/\bar{A}_1)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}$$

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2A_3/\bar{A}_1)$$

$$= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)P(A_3/\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\times\frac{1}{9} + \frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

法二： $\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ **(拨号3次都未接通)**

$$\therefore \quad P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$$

$$\therefore \quad P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) \quad \text{(乘法公式)}$$

$$= \frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8} = \frac{7}{10}.$$

故 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{7}{10} = \dfrac{3}{10}.$

例3-1 设一仓库中有10 箱同种规格的产品, 其中由甲、乙、丙三厂生产的分别有5箱 , 3箱, 2 箱, 三厂产品的废品率依次为 0.1, 0.2, 0.3 从这 10 箱产品中任取一箱 , 再从这箱中任取一件产品, 求取得的正品概率.

解 设 A 为事件“取得的产品为正品”B_1, B_2, B_3, 分别表示“任取一件产品是甲、乙、丙生产的”,

由题设知 $P(B_1)=\dfrac{5}{10}$, $P(B_2)=\dfrac{3}{10}$, $P(B_3)=\dfrac{2}{10}$.

$$P(A|B_1)=0.9,\ \ P(A|B_2)=0.8,\ \ P(A|B_3)=0.7,$$

故

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=\frac{5}{10}\cdot\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{7}{10}$$

$$=0.82.$$

抓阄是否与次序有关?

例3-2 五个阄, 其中两个阄内写着“有”字, 三个阄内不写字, 五人依次抓取,问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?

解 设 A_i 表示"第 i 人抓到有字阄"的事件,

$i = 1,2,3,4,5.$ 则有 $P(A_1) = \dfrac{2}{5},$

$$P(A_2) = P(A_2\Omega) = P(A_2 \cap (A_1 \cup \overline{A_1})).$$

$$= P(A_1A_2 + \overline{A_1}A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$$

$$= \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = \frac{2}{5},$$

$$P(A_3) = P(A_3\Omega) = P(A_3(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}))$$

$$= P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}A_2)$$

$$+ P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\ \overline{A_2})$$

$$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5},$$

依此类推 $P(A_4) = P(A_5) = \dfrac{2}{5}.$

故抓阄与次序无关.

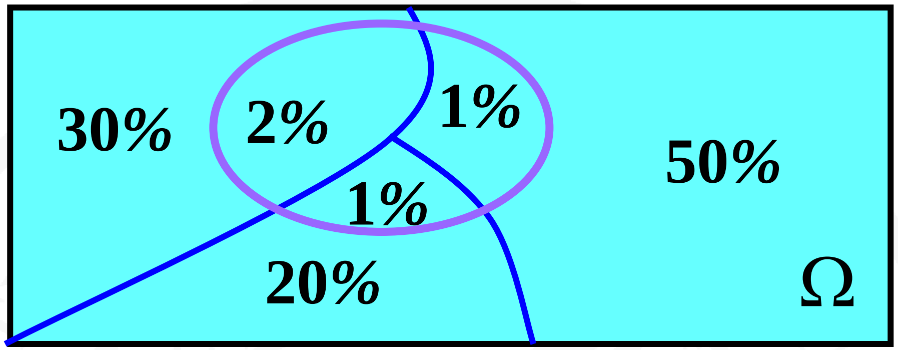
例3-4 有一批同一型号的产品,已知其中由一厂生产的占 30% , 二厂生产的占 50% , 三厂生产的占 20%, 又知这三个厂的产品次品率分别为2% , 1%, 1%,问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少?

解 设事件 A 为“任取一件为次品”,

事件 B_i 为"任取一件为 i 厂的产品", $i = 1,2,3.$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega,$$

$$B_i B_j = \varnothing, \quad i, j = 1,2,3.$$



由全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3).$$

$$P(B_1)=0.3,\ \ P(B_2)=0.5,\ \ P(B_3)=0.2,$$

$$P(A|B_1)=0.02,\ P(A|B_2)=0.01,\ P(A|B_3)=0.01,$$

故 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

$$=0.02\times 0.3+0.01\times 0.5+0.01\times 0.2=0.013.$$

例3-5 有3箱同型号的灯泡，已知甲箱次品率为1%，乙箱次品率为2%，丙箱次品率为3%，现从3箱中任取一灯泡，设取到甲箱的概率为$\frac{1}{2}$，而取到乙，丙两箱的机得次品的概率.

解 设 A_1, A_2, A_3 分别表示“灯泡分别取自甲，乙，丙箱”.B表示“取到次品”.

已知 $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{1}{4}$, $P(A_3)=\frac{1}{4}$.

$P(B|A_1)=1\%$, $P(B|A_2)=2\%$, $P(B|A_3)=3\%$.

所以

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.01+\frac{1}{4}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.03$$

$$=0.0175 \quad =1.75\%.$$

例3-6 播种用的一等小麦种子中混和2.0%的二等种子,1.5%的三等种子,1.0%的四等种子.用一等,二等,三等,四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率为0.5, 0.15, 0.1, 0.05.求这批种子所结的穗含有50颗以上麦粒的概率.

以$A_i(i=1,2,3,4)$分别记任选一颗种子是i等$(i=1,2,3,4)$这一事件,

用B表示在这批种子中任选一颗且这颗种子所结的穗含50颗以上麦粒这一事件.

则 $A_i(i=1,2,3,4)$是一个划分.

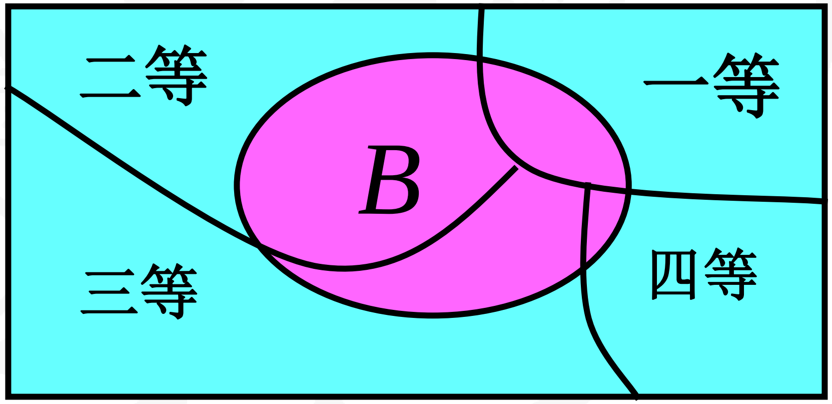
则由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B/A_i)$$

$$=0.955\times0.5+0.02\times0.15$$

$$+0.015\times0.1+0.01\times0.05$$

$$=0.4825.$$



例4-1 设有5个袋子中放有白球，黑球，其中1号袋中白球占 $\frac{1}{3}$，另外2，3，4，5号4个袋子中白球都占 $\frac{1}{4}$，今从中随机取1个袋子，从所取的袋子中随机取1个球，结果是白球，求这个球是来自1号袋子中的概率.

解 设$A_i=\{$取到第i号袋子$\}, i=1,2,3,4,5.$

$B=\{$取到白球$\}$, 求概率$P(A_1|B)$, 由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{5}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

例4-2 已知5%的男人和0.25%的女人是色盲患者，现随机地选取一人，此人恰为色盲患者，此人是男人的概率是多少？（假设男人，女人各占人数的一半）.

解 设A={选取的人患色盲}，设B={选取的人是男人}

则 $\overline{B}$ = {选取的人是女人}，依题意得

$$P(B)=\frac{1}{2},\quad P(A|B)=0.05,$$

$$P(\overline{B})=\frac{1}{2},\quad P(A|\overline{B})=0.0025.$$

根据逆概公式（贝叶斯公式），所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}$$

$$=\frac{20}{21}.$$

例4-3 盒中放有12个乒乓球，其中9 个是新的. 第1次比赛时从中选取3个来用，比赛后仍放回盒中，第2次比赛时再从盒中任取3个.

(1) 求第2次取出的球都是新球的概率;

(2) 又已知第2次取出的球都是新球，求第1次取到的都是新球的概率;

解 设 A_i = "第 1次比赛时用了 i个新球",

$$(i = 0, 1, 2, 3)$$

B = "第 2次取出的全是新球",

(1) 求第2次取出的球都是新球的概率；

A_i ="第 1次比赛时用了 i个新球"，

B ="第 2次取出的全是新球"，

第二次

新球： 9-i 个

旧球： 3+i 个

(比赛后放回的球变为旧球)

$$\because \quad P(A_i)=\frac{C_9^i \cdot C_3^{3-i}}{C_{12}^3} \quad (i=0,1,2,3),$$

$$P(B|A_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3},$$

$$\therefore \quad P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_9^i \cdot C_3^{3-i}}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

$$=0.146.$$

(2) 又已知第2次取出的球都是新球，求第1次取到的都是新球的概率；

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)},$$

$$\because \quad P(A_3B)=P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{C_9^6\cdot C_3^0}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{12}^3},$$

$$\therefore \quad P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{5}{21}=0.24.$$

第二次

新球： 9-3 个

旧球： 3+3 个

(比赛后放回的球变为旧球)

例4-4 某高校规定一门课程除了期末考试之外可以再给两次补考机会，某同学《概率论与数理统计》课程的基础不扎实，他每次考试及格的概率为60%.试求：

(1) 该同学最终通过《概率论与数理统计》的概率；

(2) 已知该同学最终通过了《概率论与数理统计》，在此条件下求他是第二次补考通过的概率.

补考通过的概率.

(1) $0.6+0.4\times0.6+0.4\times0.4\times0.6=0.936$

(2) $\dfrac{0.4\times0.4\times0.6}{0.936}=\dfrac{4}{39}=0.10$

例5-1 对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时， 产品的合格率为98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为55%.每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为95%.试求某日早上的一件产品是合格时，机器调整得良好的概率是多少?

解 设 A 为事件"产品合格".

B 为事件"机器调整良好".

则有

$$P(A|B)=0.98,\quad P(A|\bar{B})=0.55,$$

$$P(B)=0.95,\qquad P(\overline{B})=0.05,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

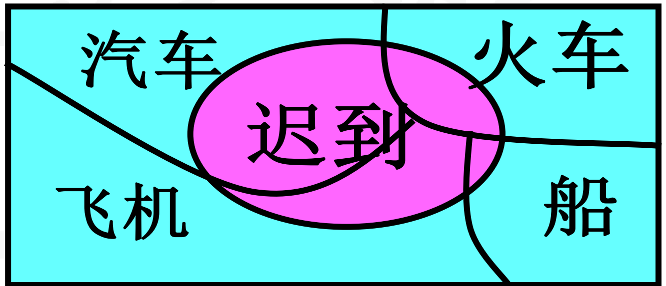
$$=\frac{0.98\times 0.95}{0.98\times 0.95+0.55\times 0.05}=0.97.$$

即当生产出第一件产品是合格品时,此时机器调整良好的概率为0.97.

例5-2 有朋友自远方来访,乘火车来的概率3/10,乘船,乘汽车,乘飞机来的概率分别为1/5,1/10,2/5 .若他乘火车来,迟到的概率是1/4;如果乘船,乘汽车来,迟到的概率是1/3,1/12;如果乘飞机便不会迟到,即迟到的概率为0.在结果是迟到的情形下,求他是乘火车的概率.

解 以B表示迟到这一事件,设A_1,A_2, A_3, A_4分别表示乘火车、乘船、乘汽车,乘飞机来的事件.

由Bayes公式,有



$$P(A_1|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$= \frac{3/10 \times 1/4}{3/10 \times 1/4 + 1/5 \times 1/3 + 1/10 \times 1/12 + 2/5 \times 0}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

例 5-3 炮战中，在距目标250m,200m,150m处射击的概率分别为0.1，0.7，0.2，而在该处射击命中目标的概率分别为0.05，0.1，0.2.现在已知目标被击毁，求击毁目标的炮弹是由距目标250m处射出的概率.

解 设B表示“目标被击毁”A_1, A_2, A_3分别表示距目标250m,200m,150m处射击，则

$$P(A_1) = 0.1, P(A_2) = 0.7, P(A_3) = 0.2$$

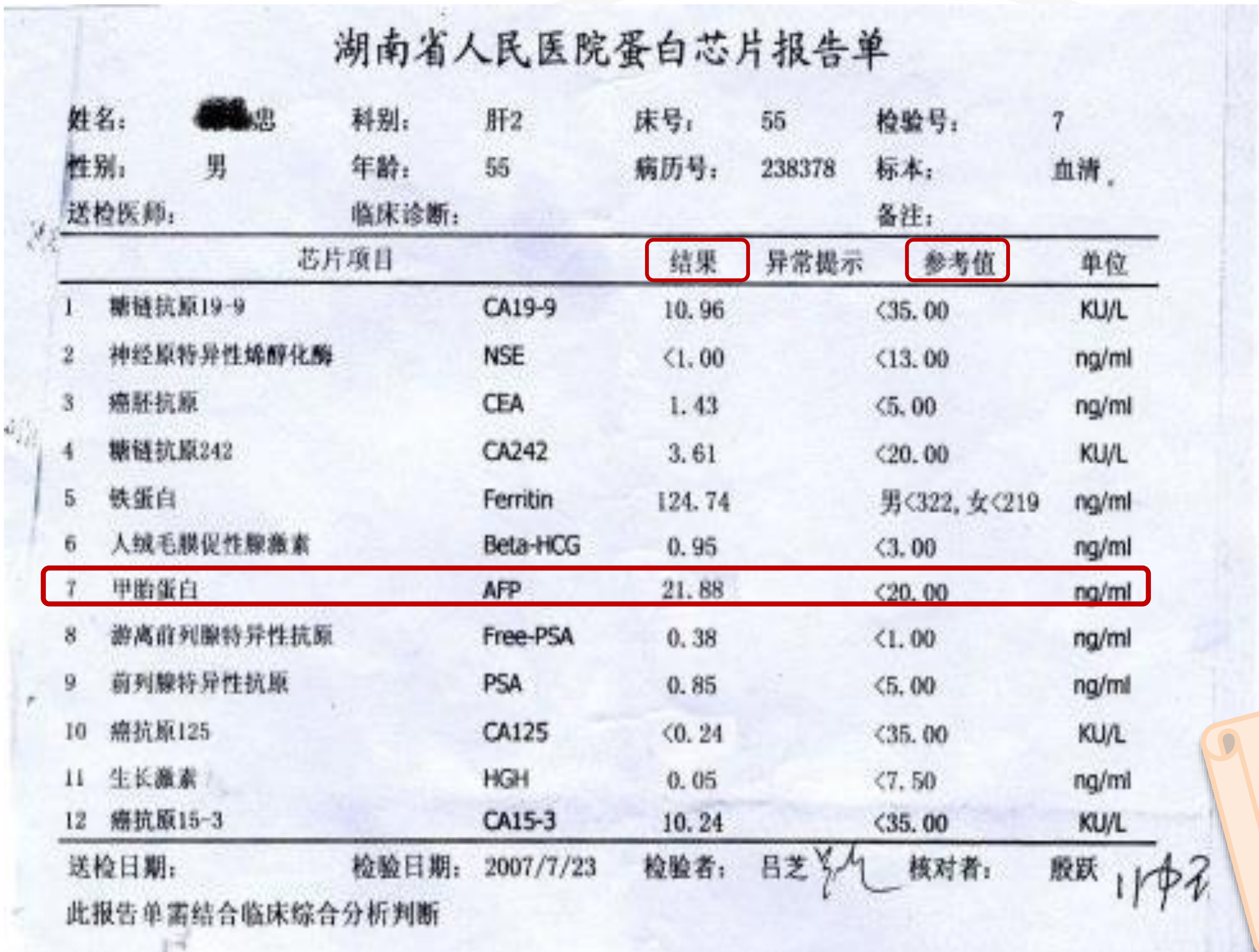
$$P(B|A_1) = 0.05, P(B|A_2) = 0.1, P(B|A_3) = 0.2$$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$=\frac{0.1\times 0.05}{0.1\times 0.05+0.7\times 0.1+0.2\times 0.2}$$

$$=0.04535.$$



湖南省人民医院蛋白芯片报告单

姓名: [redacted]忠　　科别: 肝2　　床号: 55　　检验号: 7

性别: 男　　年龄: 55　　病历号: 238378　　标本: 血清

送检医师:　　临床诊断:　　备注:

芯片项目			结果	异常提示	参考值	单位
1	糖链抗原19-9	CA19-9	10.96		<35.00	KU/L
2	神经原特异性烯醇化酶	NSE	<1.00		<13.00	ng/ml
3	癌胚抗原	CEA	1.43		<5.00	ng/ml
4	糖链抗原242	CA242	3.61		<20.00	KU/L
5	铁蛋白	Ferritin	124.74		男<322,女<219	ng/ml
6	人绒毛膜促性腺激素	Beta-HCG	0.95		<3.00	ng/ml
7	甲胎蛋白	AFP	21.88		<20.00	ng/ml
8	游离前列腺特异性抗原	Free-PSA	0.38		<1.00	ng/ml
9	前列腺特异性抗原	PSA	0.85		<5.00	ng/ml
10	癌抗原125	CA125	<0.24		<35.00	KU/L
11	生长激素	HGH	0.05		<7.50	ng/ml
12	癌抗原15-3	CA15-3	10.24		<35.00	KU/L

送检日期:　　检验日期: 2007/7/23　　检验者: 吕芝　　核对者: 殷跃

此报告单需结合临床综合分析判断

患肝癌?

贝叶斯资料

Thomas Bayes

Born: 1702 in London, England

Died: 17 April 1761 in Tunbridge Wells, Kent, England