西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第一节 一维随机变量及其分布(2)

- 三、离散型随机变量
- 四、典型的离散型随机变量及其分布

随机变量： $\omega \to X(\omega)$

分类：

离散型随机变量：X的取值**有限或无限可列个**。如人数、产品数等。

连续型随机变量：X的取值为**无限不可列个**。如速度、候车时间、降水量等。

三、离散型随机变量

1. 离散型随机变量的分布律

定义 若随机变量X所有可能取值为 $x_1, x_2, \cdots$且

$$P\{X = x_i\} = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

或记为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

称上面两式为离散型随机变量X的分布律或分布列.

相同条件下射击n次，命中k次的概率

B_k : 5次射击，命中k次

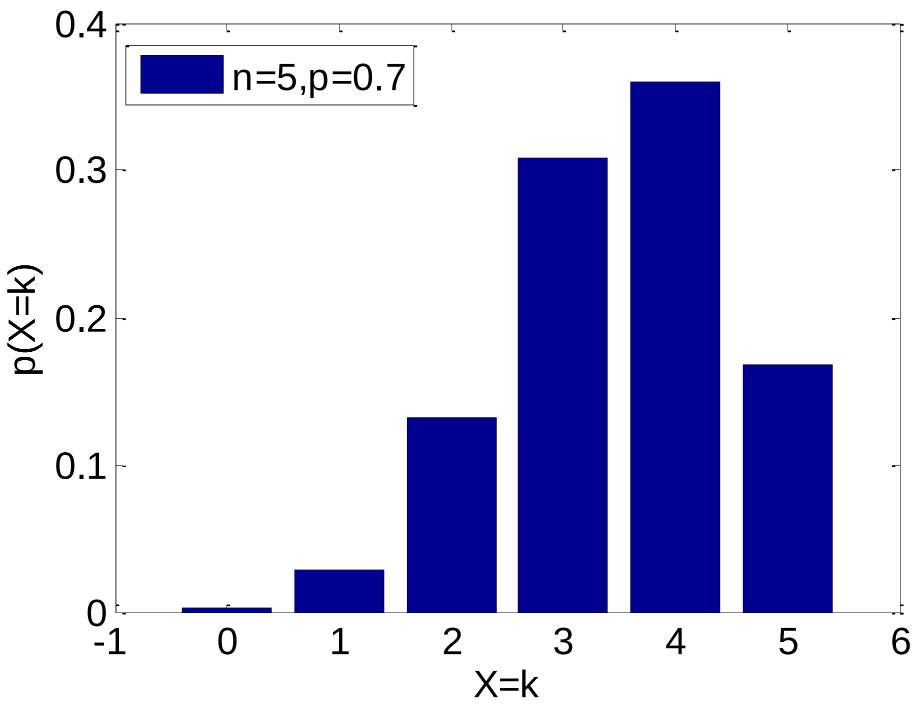
X : 投中的次数 $\in [0, n]$

$$P\{X=k\} = P_n(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

取p=0.3,n=5

X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
p	0.168;	0.36;	0.308;	0.132;	0.0283;	0.00243



性质 分布律中的 p_i 必须满足:

(1) $0 \le p_i \le 1, \quad (i = 1,2,\cdots);$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

基本幂级数

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ (-\infty < x < +\infty)$

例1 设随机变量的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{a\lambda^k}{k!} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

$\lambda > 0$为常数，试确定常数 a.

解 由$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$,得

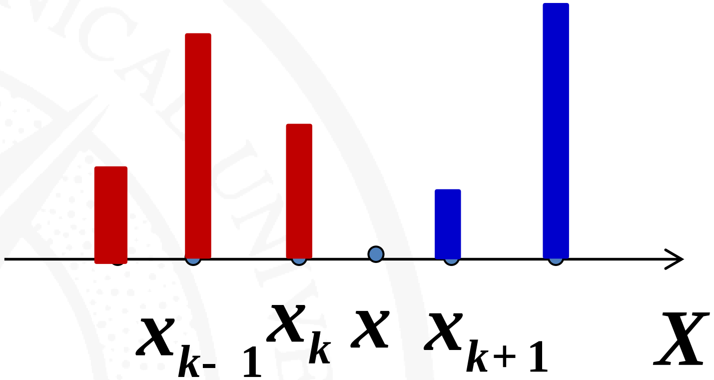
$$\sum_{k=0}^{\infty} a\frac{\lambda^k}{k!} = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = ae^{\lambda} = 1$$

所以 $a = e^{-\lambda}$.

2.离散型随机变量分布律与分布函数的关系

(1) 若已知X 的分布律:

$$p_k = P\{X = x_k\} \quad (k = 1,2,\cdots)$$



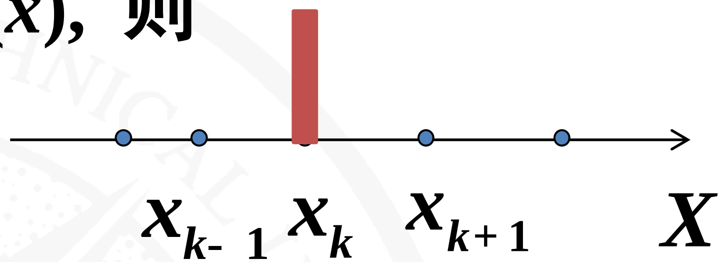
则X的分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = x_1 \cup X = x_2 \cdots\}(x_i \le x)$$

$$= \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\} \quad (x \in R)$$

∴ 分布函数为分布律的累积概率

(2) 若已知X的分布函数$F(x)$, 则



X的分布律

$$p_k = P\{X = x_k\}$$

$$= P(X \le x_k) - P(X < x_k)$$

$$= F(x_k) - F(x_k^-)$$

或

$$= F(x_k) - F(x_{k-1}) \quad (k = 1,2,\cdots)$$

$\therefore$ 分布律为分布函数的概率增量

例2 一盒内装有5个乒乓球，其中2个旧的，3个新的，从中任取2个，求取得的新球个数X的分布律与分布函数，并计算：

$$P\{0 < X \le 2\},\quad P\{0 \le X < 2\}.$$

解 X={ 取得的新球个数 }，其分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{C_3^k \cdot C_2^{2-k}}{C_5^2} \qquad (k = 0, 1, 2)$$

或

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

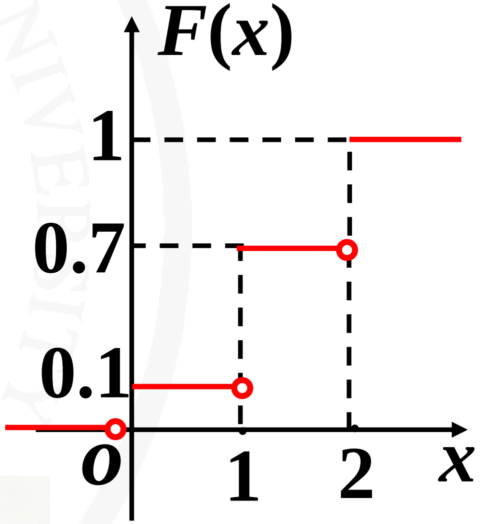
X的分布函数为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= \sum_{k \le x} P\{X = k\}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.1, & 0 \le x < 1, \\ 0.7, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$



分布律 → 分布函数 → 概率

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

方法1 $P\{0 < X \le 2\}$

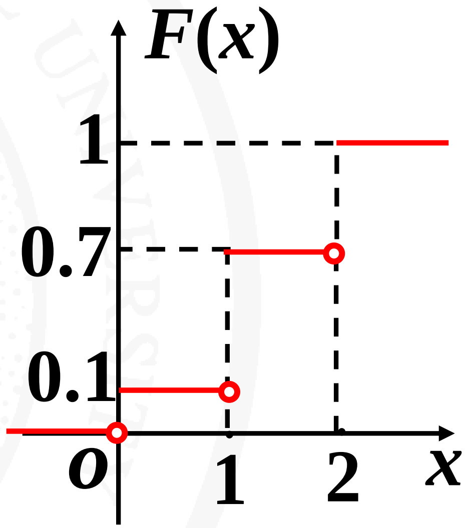
$= P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$

$= 0.6 + 0.3 = 0.9$

$P\{0 \le X < 2\}$

$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$

$= 0.1 + 0.6 = 0.7$



方法2 $P\{0 < X \le 2\} = F(2) - F(0) = 1 - 0.1 = 0.9$

$P\{0 \le X < 2\} = F(2^-) - F(0^-) = 0.7 - 0 = 0.7$

四、典型的离散型随机变量及其分布

1.退化分布(单点分布)

若随机变量X取常数值C的概率为1,即

$P\{X=C\}=1$ 则称X服从退化分布.

2.两点分布 $B(1, p)$

若X的分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}(k=0,1)$

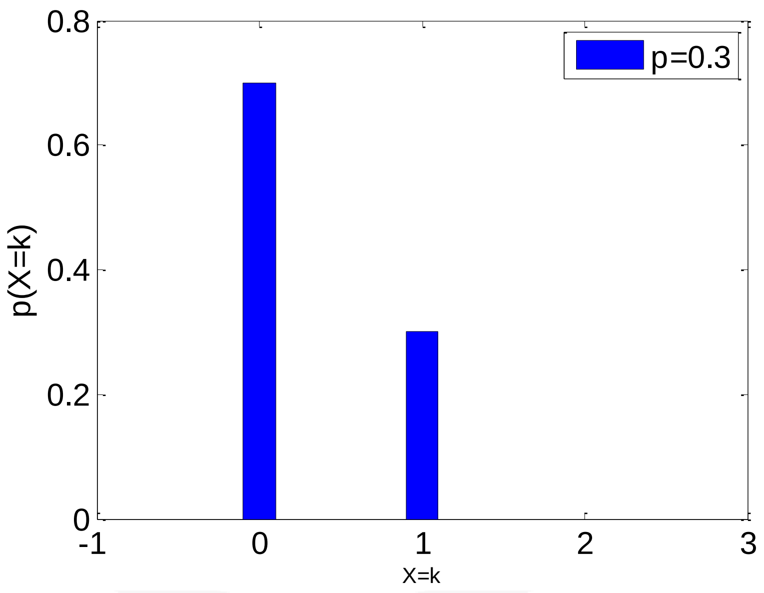
或记为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从 (0-1) 分布或两点分布.记为$X\sim B(1,p)$.

0-1分布描述只有两种结果的随机现象

部分外国教材中也称之为伯努利分布。

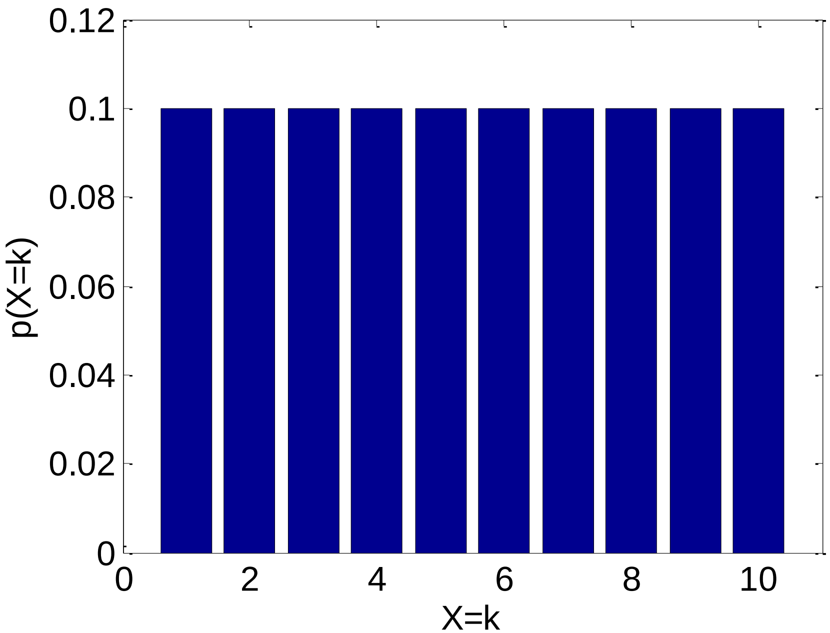


3.离散型均匀分布

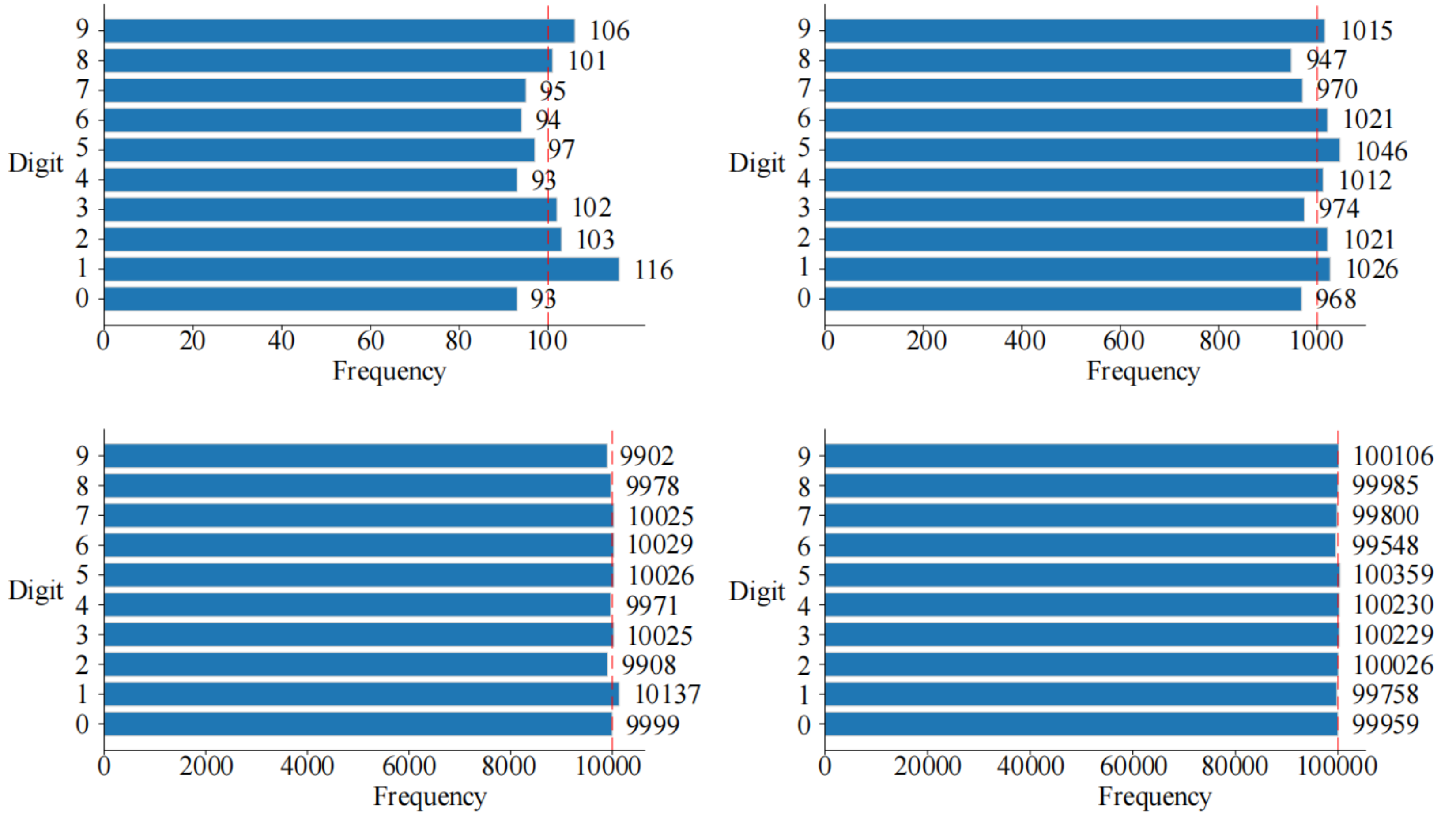
若X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=\frac{1}{n}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

则称X服从离散型均匀分布,这里要求 x_k 各不相同。



虽然没有严格证明，但是发现圆周率小数点后数字的分布近似服从均匀分布。



4. 二项分布

若X的分布律为

$$(p+q)^n = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

则称 X服从参数为n和p的二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$.

其中$n \in N, k = 0, 1, \cdots, n; 0 \le p = P(A) \le 1.$

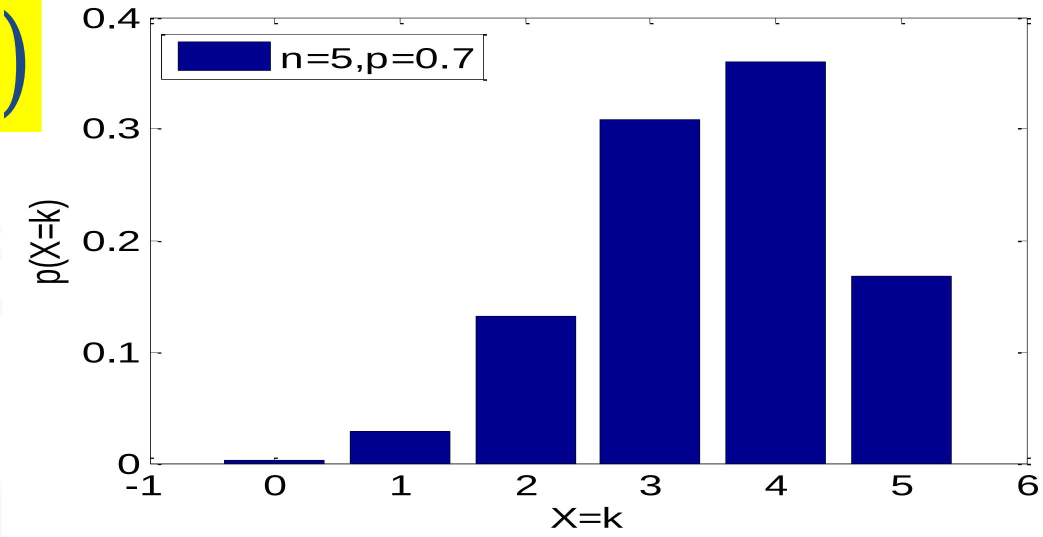
离散型概率分布

n重伯努利试验中，随机事件发生的次数

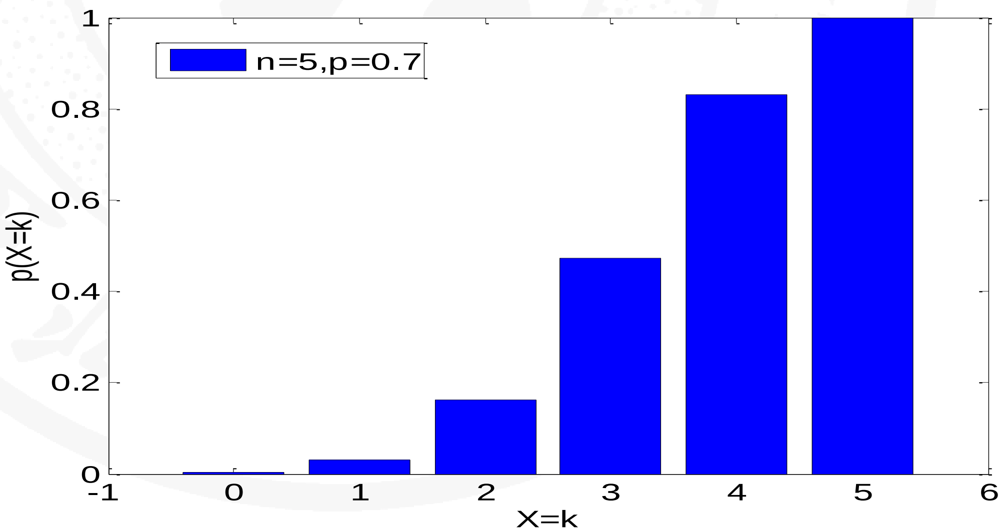
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

$X \sim B(n, p)$

分布率

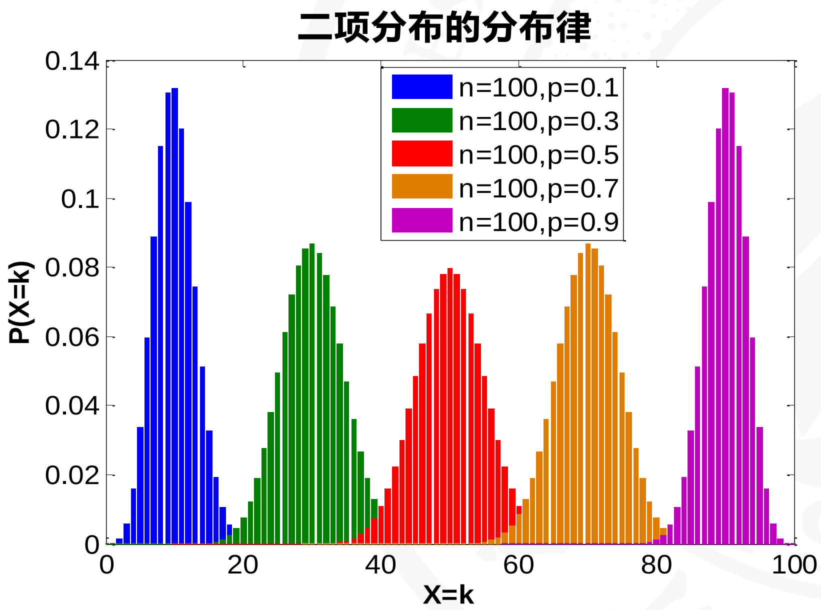


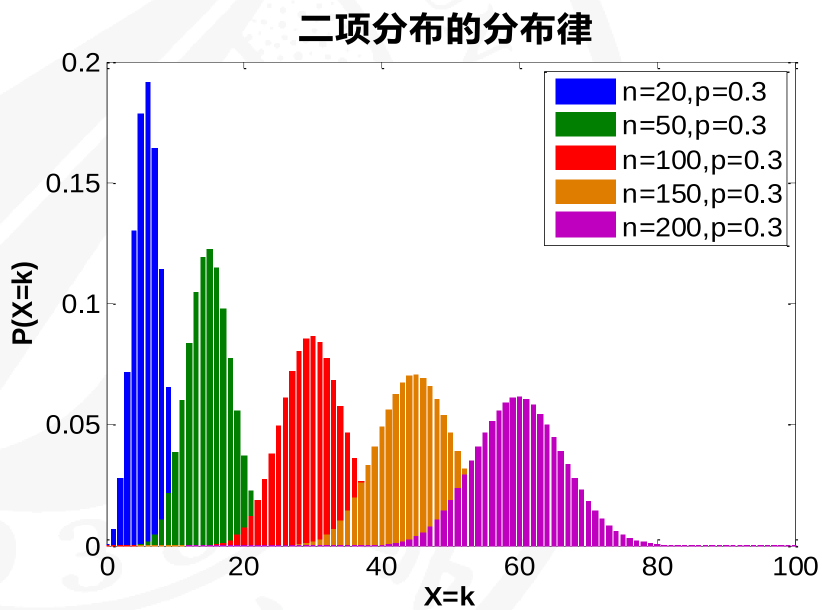
分布函数



参数的影响

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \sim B(n,p)$$





***n*越多，或*p*越高，*A*发生较多次数的概率越大！**

例3 交通事故评估

已知某路口平均每周发生2次交通事故，估计该路口每周发生k次事故的概率？

二项分布：

描述n重伯努里试验，事件A发生k次的概率。

一段时间内，事件A发生k次的概率。

划分为n段时间，表示做n次试验

p	p	p	p	p		…

X：交通事故A发生的次数 $\sim B(n, p)$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\overline{X}=2\approx n\times p$$

$$P(A)=p\approx\frac{2}{n};\quad P(\overline{A})=1-p\approx 1-\frac{2}{n}$$

$$P(X=k)= \mathrm{C}_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{\cancel{n!}}{k!\cancel{(n-k)!}}\times\left(\frac{2}{n}\right)^k\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k}$$

$$=1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\times\frac{2^k}{k!}\times\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^k}$$

故当$n\to\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k)= 1\times\frac{2^k}{k!}\times\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$

$$\because \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{2}{n})^n = \lim_{n\to+\infty}[(1+\frac{2}{-n})^{-\frac{n}{2}}]^{-2}$$

$$\overset{x=-\frac{n}{2}}{=} [\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x]^{-2} = e^{-2}$$

已知某路口平均每周发生2次交通事故，

该路口每周发生k次事故的概率为

$$\lim_{n\to\infty} P\{X=k\} = \frac{2^k}{k!}\mathrm{e}^{-2} \qquad (k=0,1,2\ldots)$$

定义 若随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad(k=0,1,\cdots)$$

则称X服从参数为λ的**泊松分布**，记作$X \sim P(\lambda)$，

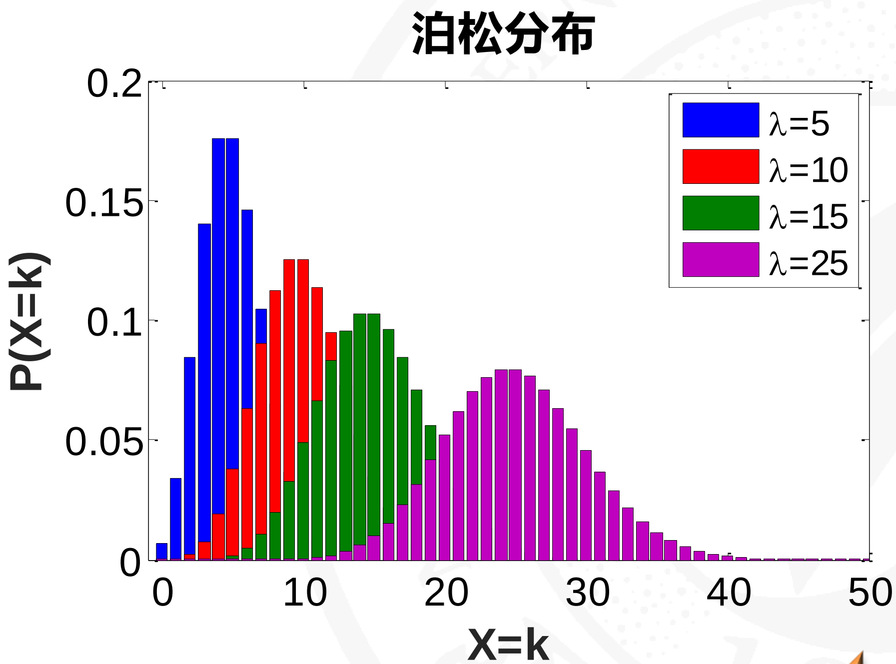
其中$\lambda>0$表示X的平均值。

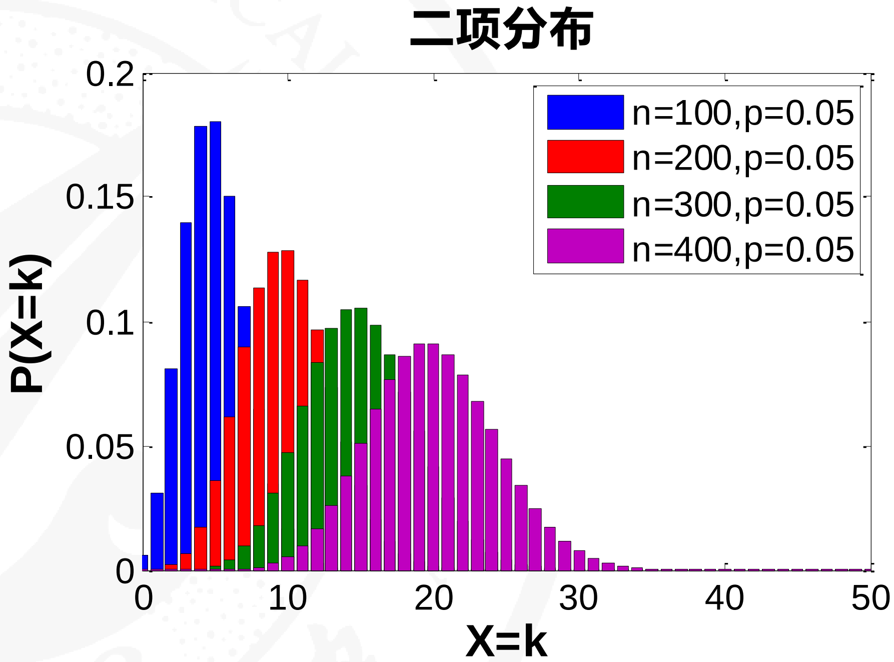
公交车站等车人数

来电次数

电子器件的故障数

泊松分布


泊松分布
0.2
0.15
0.1
0.05
0
P(X=k)
0
10
20
30
40
50
X=k
λ=5
λ=10
λ=15
λ=25


二项分布
0.2
0.15
0.1
0.05
0
P(X=k)
0
10
20
30
40
50
X=k
n=100,p=0.05
n=200,p=0.05
n=300,p=0.05
n=400,p=0.05

$P(\lambda)$ ⟷ $B(n, p)$

泊松定理

若$X \sim B(n, p_n)$,即

$$P\{X=k\}=C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k},$$

且满足: $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$

则对任意非负整数 k,有

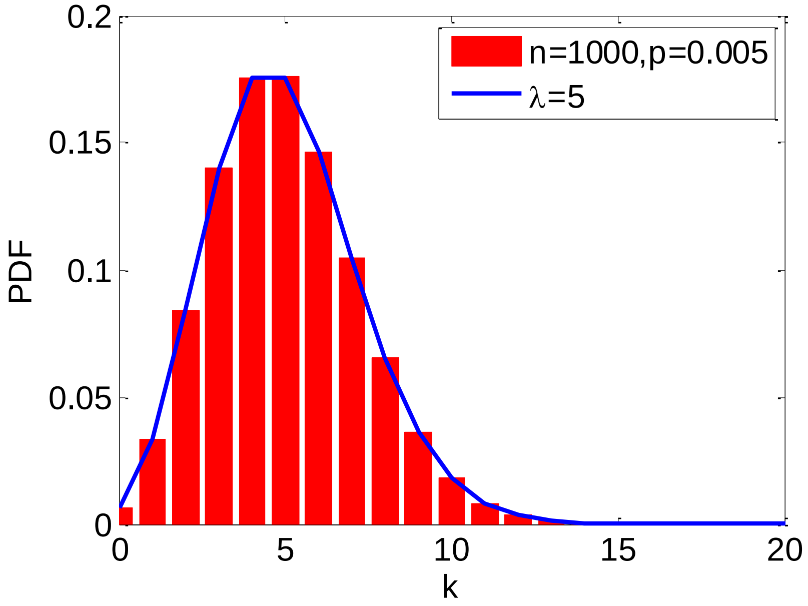
$$\lim_{n\to\infty} P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = 1$$

法国数学家
西莫恩·德尼·泊松
(S.-D. Poisson)
(1781-1840)

泊松分布是二项分布的极限分布

$$B(n,p_n)\xrightarrow{n\to\infty,\,p_n=\frac{\lambda+o(1)}{n}\to 0}P(\lambda)$$



$$C_{1000}^{k}0.05^{k}0.95^{1000-k}\approx\frac{5^{k}}{k!}e^{-5}$$

描述了单位时间内，小概率事件发生的次数，

是离散性随机变量的一种重要分布。

例 4 面向对象：30-40岁健康人群

保险费：每年1月1日缴纳1200元

赔偿金：死亡理赔20万元

统计一年中该人群的死亡的概率为0.002，假设有2500人购买此款人寿保险。求：

(1) 保险公司亏本的概率；

(2) 保险公司每年获利不少于100万元的概率.

解 (1) 保险公司每年的总收入为：

$$1200\times 2500=300(\text{万元}).$$

X：一年内死亡的人数，则

$$X \sim B(2500, 0.002)$$

保险公司在这1年中的总支出： $20X$ (万元)

设 A={保险公司亏本}，则

A发生 ⇨ $20X > 300$ ⇨ $X > 15$

$$\therefore \quad P(A) = P\{X > 15\}$$

$$= P\{X = 16 \cup X = 17 \cup \cdots X = 2500\}$$

$$= \sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^{k} (0.002)^k \times (1 - 0.002)^{2500-k}$$

保险评估

面向对象：30~40岁健康人群

保险费：每年1月1日缴纳1200元

赔偿金：死亡理赔20万元

统计一年中该人群的死亡概率为0.002，

现有2500人购买此款人寿保险，

求：保险公司每年获利不少于100万元的概率

$\because n = 2500$很大，$p = 0.002$很小，所以可用

$\therefore$ 可用$p(\lambda)(\lambda = np = 5)$近似代替$B(2500, 0.002)$,

即有 $P\{X > 15\} = 1 - P\{X \le 15\}$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{15} C_{2500}^{k} (0.002)^k \times (1 - 0.002)^{2500-k}$$

$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{15} \frac{5^k e^{-5}}{k!} \approx 0.000069.$$

保险公司亏本的概率约为0.0069%.

B

(2) 保险公司获利不少于100万元的概率.

$$P(B) = P\{300 - 20X \geq 100\}$$

A={保险公司获利不少于100万元}

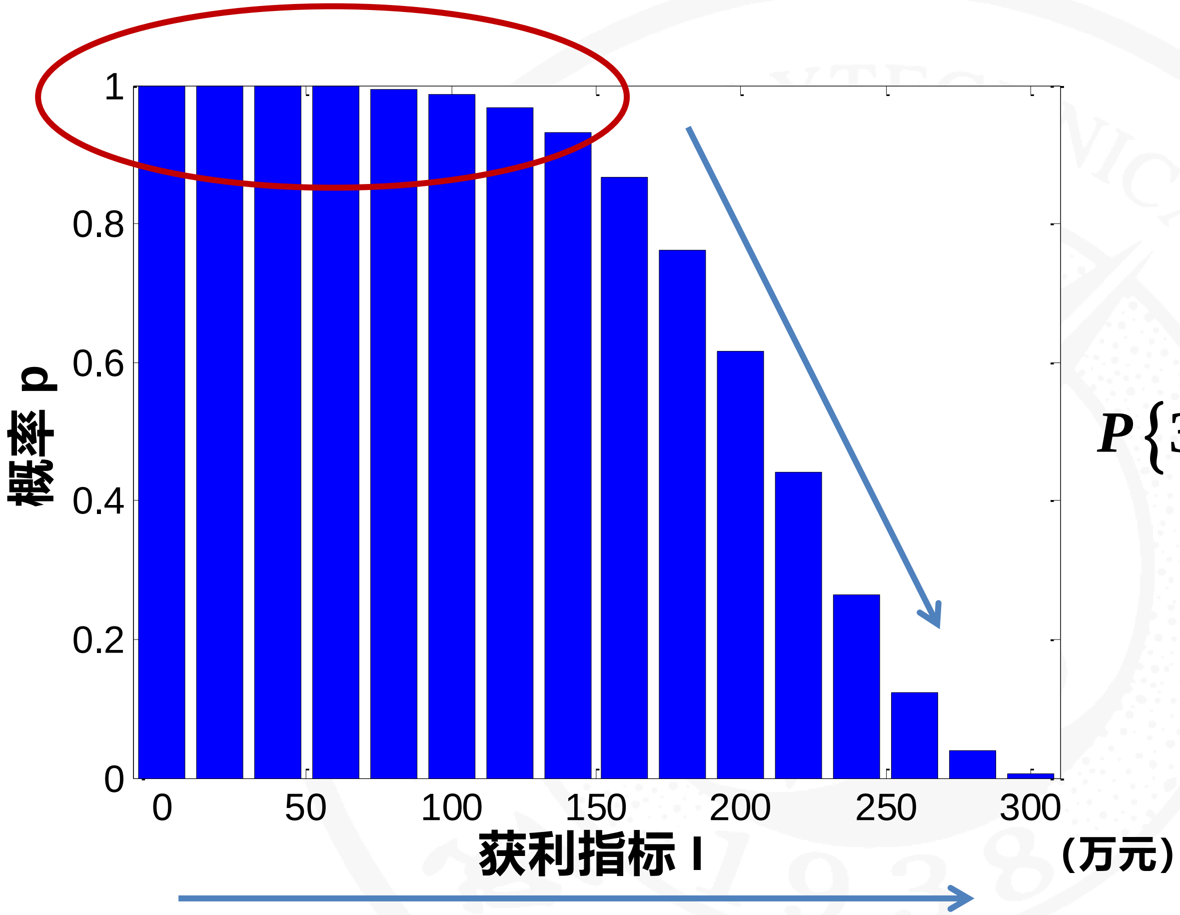
X：一年内死亡的人数~$B(2500,0.002)$

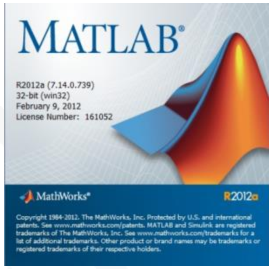
$$= P\{X \leq 10\}$$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{2500}^{k} (0.002)^k \times (1 - 0.002)^{2500-k}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k \mathrm{e}^{-5}}{k!} \approx 0.9864$$

即 保险公司获利不少于100万元的概率接近于98.64%.





$$P\{300-20X \ge I\} \ge 80\%$$

$$I \in [0,150]$$

保险公司可以大力推广这种险种！

6.几何分布

若 B_k 表示伯努利试验中事件 A 首次发生在第k次,则k的可能取值:1,2,⋯

$$P(B_k)=P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A_k})$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ \cdots\ \cdot P(A_{k-1})\cdot P(\overline{A_k})$$

$$=(1-p)^{k-1}p$$

几何公式

X: 伯努利试验中事件 A 首次发生的次数

若随机变量 X的分布律为

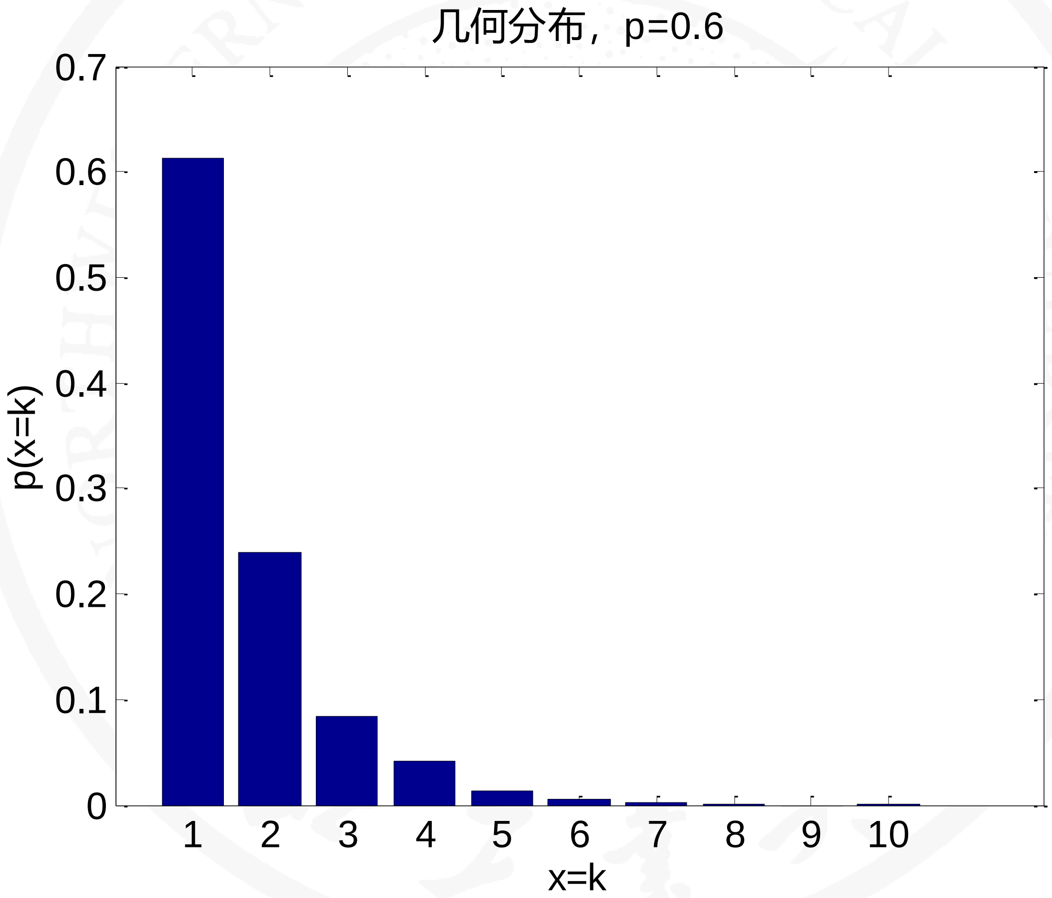
$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p \quad (k=1,2,\cdots)$$

则称 X服从几何分布.　　　　等比数列

注 几何分布可作为描述某个试验 “首次成功” 的概率模型.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=1$$

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p \quad (k=1,2,\cdots)$$



例 5 已知患色盲者占0.25%,试求为发现一例患色盲者至少要检查25人的概率?

解 设X表示恰好发现一例患色盲者所需要检查的人数，则X服从 $p = 0.0025$ 的几何分布.

$$P\{X \geq 25\} = \sum_{k=25}^{\infty} (1-p)^{k-1} p$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{24} (1-p)^{k-1} p$$

$$= 1 - p \frac{1-(1-p)^{24}}{1-(1-p)} = (1-p)^{24}$$

$$\because \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

7. 超几何分布

设 X的分布律为

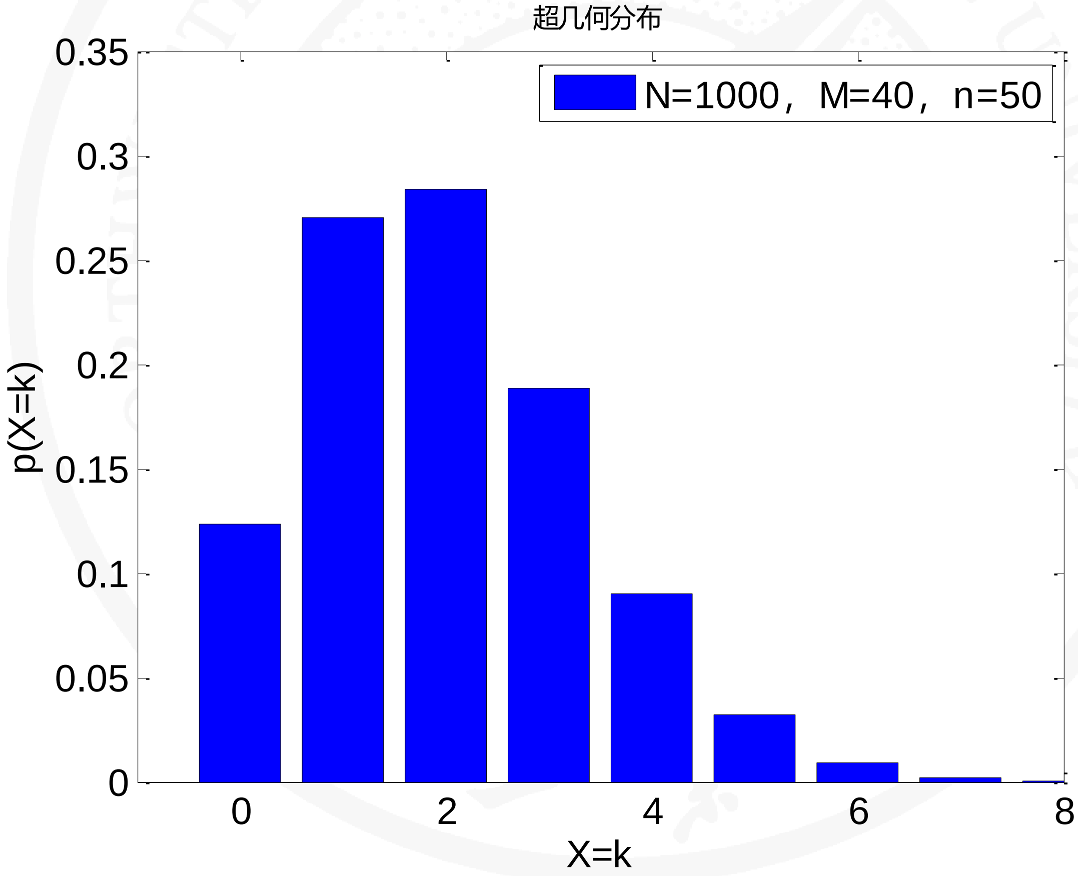
$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\quad (k=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\})$$

这里$n<N, k<M, M<N$,则称X服从超几何分布.

表示N件产品中有M件次品，从中任取n件，其中的次品数为X。超几何分布在关于废品的记件检验中经常用到。

拓展阅读：二项分布 泊松分布 几何分布 超几何分布 应该怎么区分?

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\})$$



课后思考

假设某家小杂货店，平均每天售出4个水果罐头。请问该店水果罐头的最佳库存量是多少？

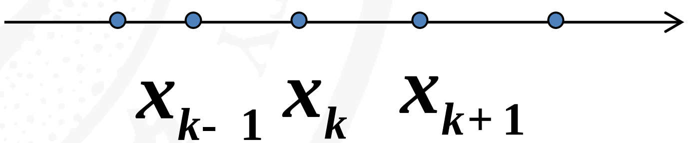
内容小结

1. 离散型随机变量 X 的分布律(分布列)

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

$$0 < p_i < 1; \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

分布律和分布函数的关系



$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\} \quad (x \in R)$$

∴ 分布率为分布函数的概率增量

2、描述离散型随机变量的统计特性

（1）分布律 $P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$

（2）分布函数

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

（3）概率

$$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a) = \sum_{x_i \in (a,b]} P(X = x_i)$$

$$P\{X \in D\} = \sum_{x_k \in D} P\{X = x_k\}$$

3. 常见的离散型分布及其应用背景.

分布名称	记号	分布律	背景
退化分布 (单点分布)		$P\{X=c\}=1$	必然事件
两点分布 (或 0–1分布)	$X \sim B(1,p)$ $(0<p<1)$	$P\{X=k\} = p^k(1-p)^{1-k}$ $(k=0,1)$	伯努利事件

注：随机变量的所有可能取值范围

分布名称	记号	分布律	背景
离散型均匀分布		$P\{X=x_k\}=\frac{1}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$	古典概型
二项分布	$X \sim B(n,p)$ $(0<p<1)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots,n)$	n重伯努利概型中，事件发生k次的概率
泊松分布	$X \sim P(\quad)$ $(\quad >0)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	稀有事件发生k次的概率

分布名称	记号	分布律	背景
几何分布		$P\{X=k\}$ $=(1-p)^{k-1}p$ $(k=1,2,\cdots)$	在n次伯努利试验中，A首次发生的试验次数为X.
超几何分布		$P\{X=k\}=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots,l)$ $l=\min\{M,n\})$ $n\le N, M<N$	设N件产品中有M件次品，从中任取n件，其中的次品数为X. (古典概型)

4. 泊松定理

泊松分布是二项分布的极限分布

$$B(n,p_n) \xrightarrow{n\to\infty,\ p_n=\frac{\lambda}{n}\to 0} P(\lambda)$$

2-1 一维随机变量

Thank You !

备用题

例1-1 设随机变量的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{a}{N}\quad(k=1,2,\cdots,N)$$

试确定常数 a.

解 由$\sum_{k=1}^{N} p_k=1$,得

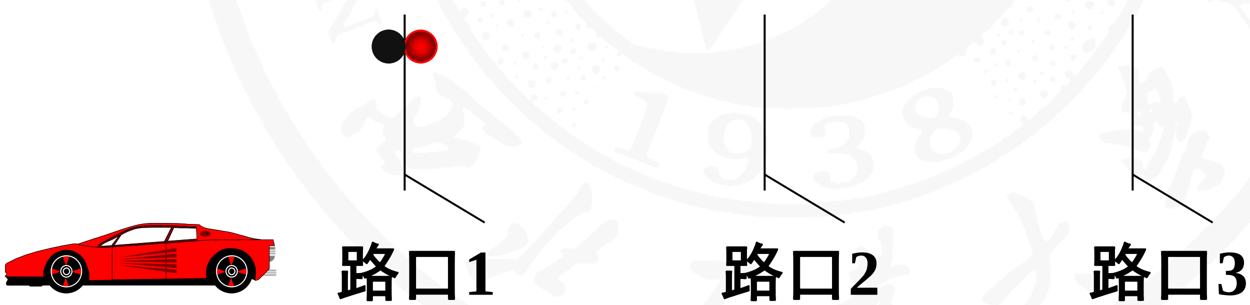
$$\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=N\times\frac{a}{N}=1$$

所以 $a=1$.

例2-1 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等. 以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求X的概率分布.

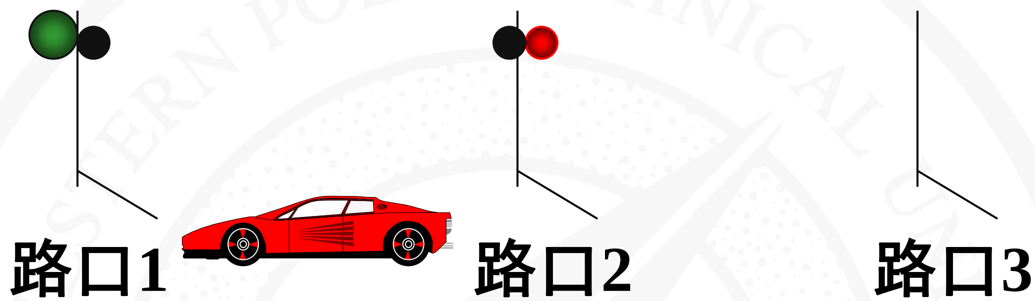
解 依题意, X可取值0, 1, 2, 3.

设 $A_i=\{\text{第}i\text{个路口遇到红灯}\}, i=1,2,3$

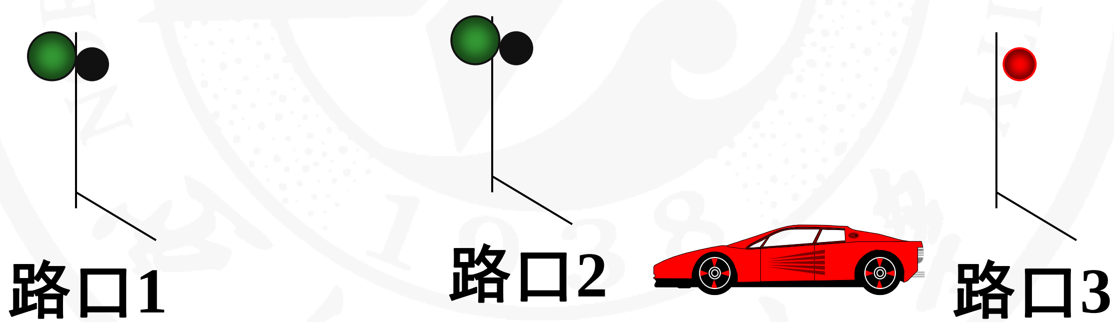


$$P(X=0)=P(A_1)=1/2,$$

$$A_i = \{\text{第}i\text{个路口遇到红灯}\},\ i = 1,2,3$$

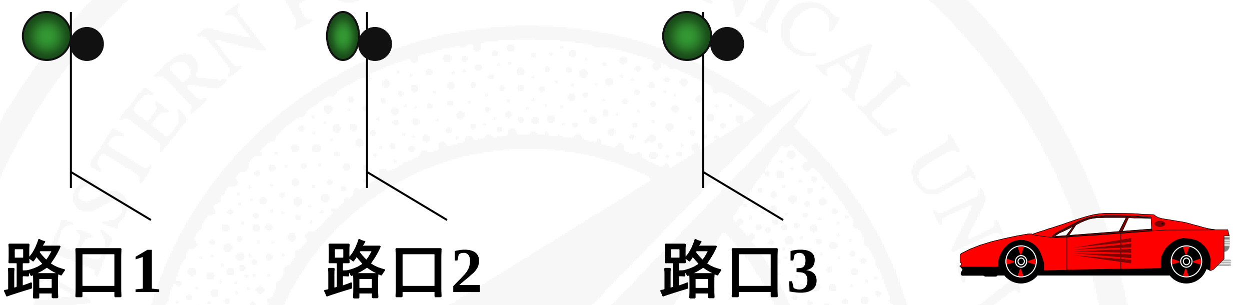


$$P(X=1) = P(\overline{A_1}A_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



$$P(X=2) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$A_i = \{第 i 个路口遇到红灯\},\ i = 1,2,3$$



$$P(X=3) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

即
$$X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

例2-2 两名蓝球队员轮流投篮,直到某人投中为止,若第一名队员投中的概率为0.4,第二名队员投中的概率为0.6,求每一名队员投篮次数的概率分布列(设由第一名队员先投).

解 设X,Y分别表示第一、二名队员的投篮次数.

X的可能取值为$1,2,\cdots$,Y的可能取值为$0,1,2,\cdots$, $X=k$表示第一名运动员和第二名运动员在前k-1次都未投中,而第一名运动员的第k次投中,或者第一名运动员在自己的前k次中未投中及第二名运动员在自

己的前k-1次中未投中,但在第k次时投中,故

$$P(X=k)=0.6^{k-1}\times 0.4^{k-1}\times 0.4+0.6^{k}\times 0.4^{k-1}\times 0.6$$

$$=0.76\times 0.24^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

仿上述分析,可得

$$P(Y=0)=0.4$$

$$P(Y=k)=0.6^{k}\times 0.4^{k-1}\times 0.6+0.6^{k}\times 0.4^{k}\times 0.4$$

$$=0.76\times 0.6^{k}\times 0.4^{k-1},\quad k=1,2,\cdots.$$

例3 某人进行射击,设每次射击的命中率为0.02,独立射击400次,试求至少击中两次的概率.

解 设击中的次数为 X, 则 $X \sim B(400, 0.02)$.

X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k},$$

其中 $k=0,1,\cdots,400$.

因此 $P\{X \geq 2\} = 1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$

$$=1-(0.98)^{400}-400(0.02)(0.98)^{399}$$

$$=0.9972.$$

例3-1从一批含有10件正品及3件次品的产品中一件、一件地取产品.设每次抽取时, 所面对的各件产品被抽到的可能性相等.在下列三种情形下, 分别求出直到取得正品为止所需次数 X 的分布律.

(1)每次取出的产品经检定后又放回这批产品中去在取下一件产品;(2)每次取出的产品都不放回这批产品中;(3)每次取出一件产品后总以一件正品放回这批产品中.

解 (1) X 所取的可能值是 1, 2, 3, $\cdots$,

$$P\{X=1\}=\frac{10}{13},\ P\{X=2\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{13},\ P\{X=3\}=\left(\frac{3}{13}\right)^2\frac{10}{13},$$

$$\cdots,\quad P\{X=k\}=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\cdot\frac{10}{13},\ \cdots.$$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$
p	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{13}$	$\left(\frac{3}{13}\right)^2\frac{10}{13}$	$\cdots$	$\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\cdot\frac{10}{13}$	$\cdots$

(2) 若每次取出的产品都不放回这批产品中时，

X 所取的可能值是 1，2，3，4.

$$P\{X=1\}=\frac{10}{13},\qquad P\{X=2\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{12},$$

$$P\{X=3\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11},\qquad P\{X=4\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{10}{10},$$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{12}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}$

(3) 每次取出一件产品后总以一件正品放回这批产品中.

X 所取的可能值是　1,　2,　3,　4.

$$P\{X=1\}=\frac{10}{13},\qquad P\{X=2\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{13},$$

$$P\{X=3\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{12}{13},\qquad P\{X=4\}=\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{13}{13},$$

故 X 的分布律为

X	1	2	3	4
p	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{12}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{13}$

例3-2 某射手命中10环的概率为0.7,命中9环的概率为0.3.试求该射手三次射击所得的环数不少于29环的概率.

解 记X为三次射击中命中10环的次数,则

$X \sim B(3,0.7)$. 因为“所得的环数不少于29环”相当于

“射击三次至少二次命中10环”，故所求概率为

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= 3 \times 0.7^2 \times 0.3 + 0.7^3 = 0.784$$

例3-3 经验表明：预定餐厅座位而不来就餐的顾客比例为20%．如今餐厅有50个座位，但预定给了52位顾客，问到时顾客来到餐厅而没有座位的概率是多少？

解 记X为预定的52位顾客中不来就餐的顾客数，则$X \sim B(52, 0.2)$. 因为“顾客来到就餐没有座位”相当于“52位顾客中最多1位顾客不来就餐”，所以所求 概率为

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= 0.8^{52} + 52 \times 0.8^{51} \times 0.2 = 0.0001279.$$

例4-1 在保险公司里有2500名同龄和同社会阶层的人参加了人寿保险，在一年中每个人的死亡的概率为0.002, 每个参加保险的人在1月1日须交120元保险费，而在死亡时家属可从保险公司里领取20000元赔偿金. 求:

(1) 保险公司亏本的概率;

(2) 保险公司获利不少于200000元的概率.

解 (1) 以“年”为单位，在1年的1月1日，保险公司的总收入为：$2500 \times 120 = 300000$ (元).

设1年中死亡的人数为 X，则

$$X \sim B(2500, 0.002)$$

保险公司在这一年中，应付出：20000*X* (元)

设 *A*={保险公司亏本}，则

A发生 $\Leftrightarrow 20000X > 300000$ 即 $X > 15$（人）

$$\therefore \quad P(A) = P\{X > 15\}$$

$$= \sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^{k} (0.002)^k \times (1-0.002)^{2500-k}$$

因为 $n=2500$ 很大，$p=0.002$ 很小，所以可用参数 $\lambda=np=5$ 的泊松分布近似代替二项分布，

即有 $P\{X>15\}=1-P\{X\leq 15\}$

$$=1-\sum_{k=0}^{15} C_{2500}^{k}(0.002)^{k}\times(1-0.002)^{2500-k}$$

$$\approx 1-\sum_{k=0}^{15}\frac{5^{k}\mathrm{e}^{-5}}{k!} \approx 0.000069.$$

保险公司亏本的概率约为0.0069%.

(2) 保险公司获利不少于200000元的概率.

B

$$P(B)=P\{300000-20000X\geq 200000\}$$

$$=P\{X\leq 5\}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}C_{2500}^{k}(0.002)^{k}\times(1-0.002)^{2500-k}$$

$$\approx\sum_{k=0}^{5}\frac{5^{k}\mathrm{e}^{-5}}{k!}\approx 0.615961$$

即 保险公司获利不少于200000元的概率接近于62%.

例6-1 某射手连续向一目标射击，直到命中为止，已知他每发命中的概率是p，求所需射击发数X的分布律.

解 显然，X 可能取的值是1,2,… ,

为计算 $P(X=k)$，$k=1,2,\ldots$,

设 $A_k=\{$第k发命中$\}$, $k=1,2,\cdots$

于是 $P(X=1)=P(A_1)=p$,

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2)=(1-p)\cdot p$$

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=(1-p)^2\cdot p$$

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$$

这就是求所需射击发数X的分布律.

不难验证

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p=1$$

例6-2 已知患色盲者占0.25%,试求:(1)为发现一例患色盲者至少要检查25人的概率;(2)为使发现色盲者的概率不小于0.9,至少要对多少人的辨色力进行检查?

解 设X表示恰好发现一例患色盲者所需要检查的人数，则X服从 $p = 0.0025$ 的几何分布.

$$(1) P\{X \geq 25\} = \sum_{k=25}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= (1-p)^{24} \sum_{k-24=1}^{\infty} p(1-p)^{k-24-1} = (0.9975)^{24} \approx 0.94.$$

(2)设至少对n个人的辨色力进行检查,于是

$$P\{X \le n\} \ge 0.9$$

$$P\{X \le n\} = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}$$

$$= 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= 1 - (1-p)^n \sum_{k-n=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1-n}$$

$$= 1 - (1-p)^n$$

由$1-(1-p)^n \geq 0.9$,得$n \geq \dfrac{\lg 0.10}{\lg 0.9975} = 919.8827$.因此,

至少要检查920人才能使发现一例色盲患者的概率不少于0.9.

注 从本题可看出根据概率分布律求事件的概率,一般要分两步进行:**一是要求随机变量X的分布,二是求相应事件的概率.**