西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第三章 随机变量的数字特征

§3.1 随机变量的数学期望

- 一、数学期望的概念
- 二、随机变量函数的数学期望
- 三、数学期望的性质
- 四、应用实例

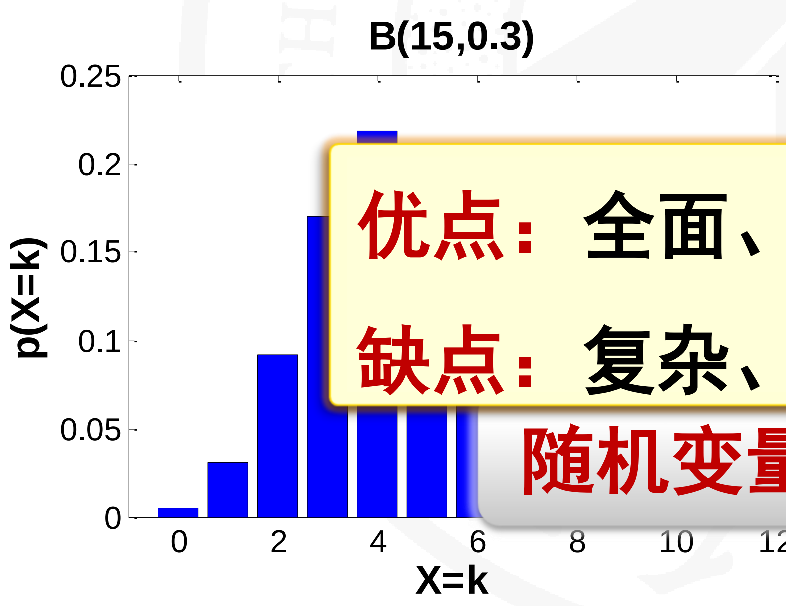
一、数学期望的概念

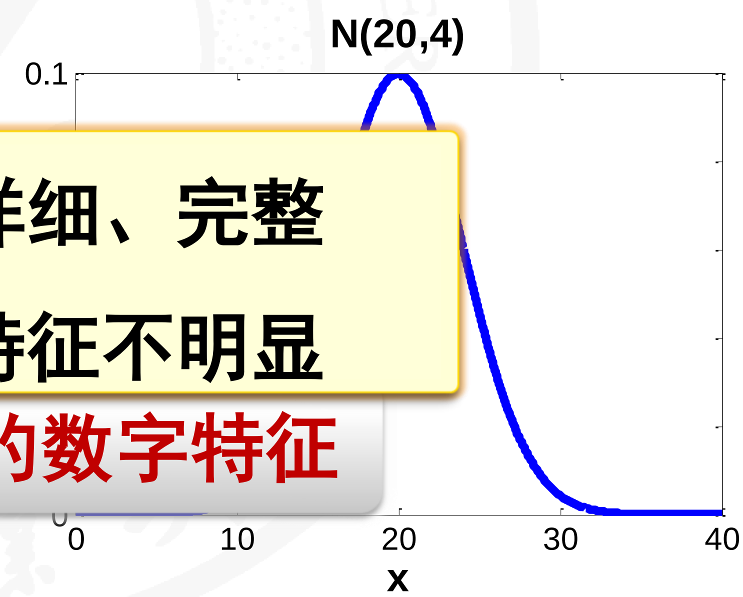
随机变量的统计特性

分布函数 $F(x) = P(X \le x)$

分布律 $P\{X = x_k\}$

概率密度 $p(x)$





优点：全面、详细、完整

缺点：复杂、特征不明显

随机变量的数字特征

1. 问题的提出

奖学金评定

设两学生五门功课成绩分别为

科目	计算机	高数	数据库	现代史	概率	$\bar{x}$
刘涛	84	78	96	80	92	86
王博	76	93	89	95	77	86
学分	3	6	2	1	3	

算术平均成绩

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + K + x_5}{5}$$

加权平均成绩

科目	计算机	高数	数据库	现代史	概率
刘涛	84	78	96	80	92
王博	76	93	89	95	77
学分	3	6	2	1	3

$$\overline{x_\omega} = \sum_{i=1}^{5} x_i\omega_i \Big/ \sum_{j=1}^{5}\omega_j$$

其中$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_5$分别为各门科的学分。

$$\overline{x}_{\omega刘} = 84.5 < \overline{x}_{\omega王} = 86$$

算术平均$\in$ 加权平均

$$\omega_i = \frac{1}{n}$$

王博更优秀！

平均值

2. 离散型随机变量的数学期望

通过上述3个引例, 我们可以给出如下定义

定义3.1 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ **绝对收敛**, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的**数学期望**, 记为$E(X)$, 即

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.}$$

数学期望 $\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.}$ **均值**

注1° $E(X)\in R$是**以概率为权的加权平均，**从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

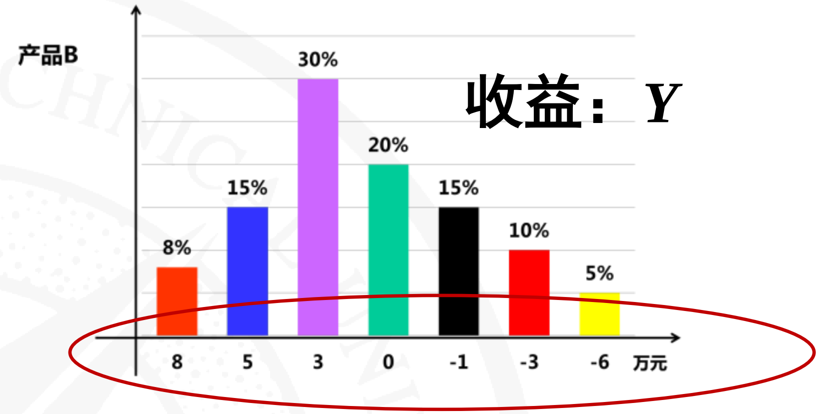
注2° 绝对收敛性 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<\infty$

保证了级数 的**存在唯一性。**（和不随级数各项次序的改变而改变）。

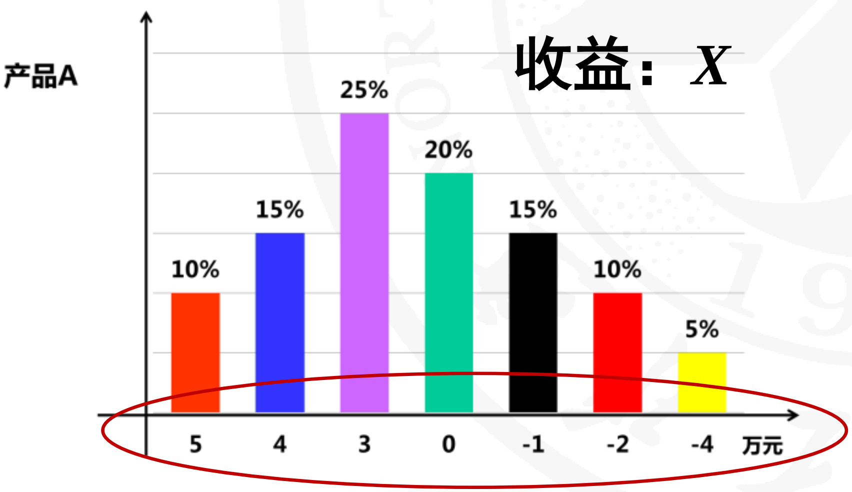
例1

20万元

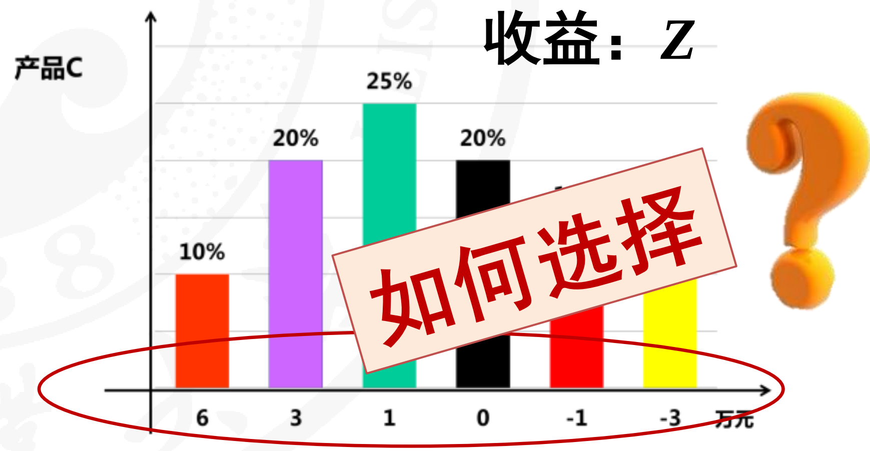
收益：Y



收益：X



收益：Z



X: 理财产品A的收益

X（万元）	5	4	3	0	-1	-2	-4
概率P	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05

Y: 理财产品A的收益

Y（万元）	8	5	3	0	-1	-3	-6
概率P	0.08	0.12	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05

Z: 理财产品A的收益

Z（万元）	6	3	1	0	-1	-3
概率P	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

预期收益

⇩

数学期望

X: 理财产品A的收益

X（万元）	5	4	3	0	-1	-2	-4
概率P	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05

预期收益

$$E(X)=\sum_i x_i p_i = 5\times 0.1+4\times 0.15+3\times 0.25+(-1)\times 0.15+(-2)\times 0.1+(-4)\times 0.05$$

$$=1.3(\text{万元})$$

$$E(Y)=1.39(\text{万元})$$ ✓ $$E(Z)=1.0(\text{万元})$$

3. 常见离散型随机变量的数学期望

猜数字游戏: 每节课结束前，随机在0-9中选择一个数字。下节课在0-9之间等可能的随机选择一个幸运数字。每次猜对的学生奖励一分，加入考试成绩。

$$X_k=\begin{cases}1 & \text{猜中}\\ 0 & \text{没猜中}\end{cases}$$

得分：$Y=\sum_{k=1}^{24}X_k \quad \sim B(24,0.1)$

$$E(Y)=?$$

例1 (二项分布) 设随机变量$X \sim B(n, p)$, 求$E(X)$.

解 设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布, 其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

$$0<p<1, k=0,1,2,\cdots,n.$$

则有 $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k \cdot P\{X=k\}$

$$=\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

关键:
求级数和

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{kn!}{k!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum^{n}\frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}p^{k}(1-p)^{(n-1)-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}p^{k}(1-p)^{n-k}=1$$

$$=np\left[p+(1-p)\right]^{n-1}$$

$$=np$$

同时可得两点分布$B(1,p)$的数学期望为 p.

猜数字游戏:每节课结束前，在点名册中自己名字后面填写一个0-9的数字。第二节上课后，请一位同学等可能的随机选择0-9之间的一个幸运数字。每次猜对的学生奖励一分，加入考试成绩。

$$X_k=\begin{cases}1 & \text{猜中}\\ 0 & \text{没猜中}\end{cases}$$

得分：$Y=\sum_{k=1}^{24}X_k \quad \sim B(24,0.1)$

$$E(Y)=2.4\text{分}$$

例2 (泊松分布) 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$, 求$E(X)$.

解 设$X\sim P(\lambda)$, 且其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda \quad =\lambda$$

意义：单位时间内，事件A发生的平均次数 .

例3 (几何分布) 设随机变量X 服从几何分布, 求$E(X)$.

解 设随机变量X 的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, q=1-p; k=1,2,\cdots,0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^{k}\right)'$$

$$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

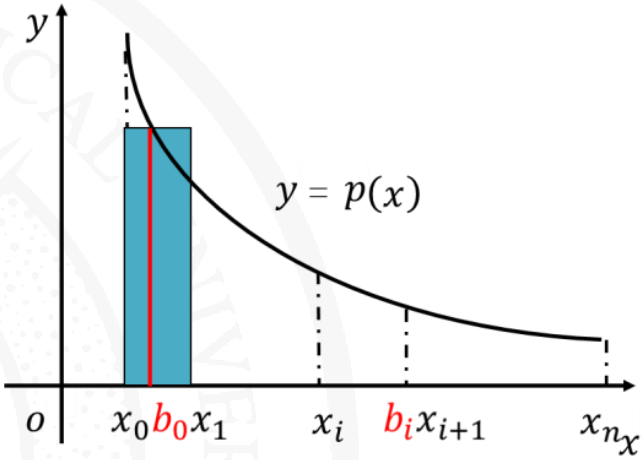
这是因为$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^k\right)'(|x|<1)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'.$

常见离散型分布的数学期望小结

分布	分布律	$E(X)$
0–1 分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\dfrac{1}{p}$

4. 连续型随机变量数学期望的定义

离散型 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(x=x_k)$



连续型 $E(X)=?$

设连续型随机变量的密度函数为$p(x)$,

将x轴离散化为$x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots x_n$, $b_i\in[x_i,x_{i+1})$

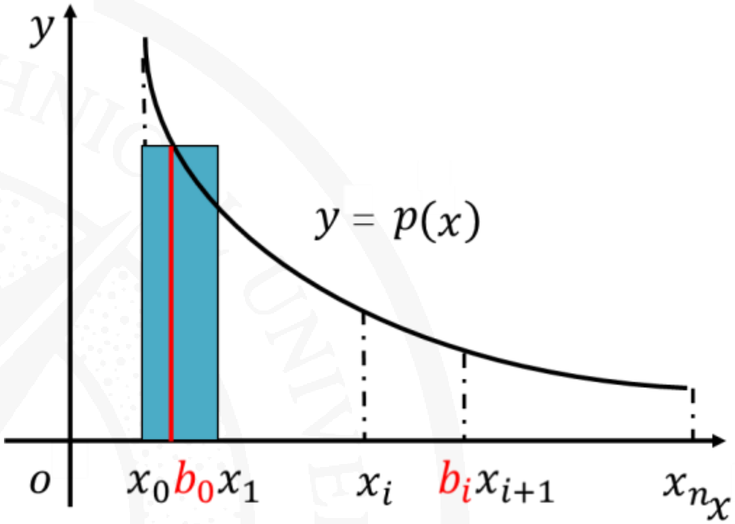
$$E(X)\approx\sum_{i=0}^{n} b_i P(x_i\le X\le x_{i+1})$$

$$E(X) \approx \sum_{i=0}^{n} b_i \underline{P(x_i \le X \le x_{i+1})}$$

$$\Big\Downarrow \quad n \to \infty$$

$$P(x_i \le X \le x_{i+1}) \approx p(b_i)\Delta x_i$$

$$E(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{\infty} b_i p(b_i)\Delta x_i$$



连续型 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$

离散型 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(x = x_k)$

定义3.2 设连续型随机变量X 的分布密度为$p(x)$, 若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$**绝对收敛**, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

保证期望存在唯一

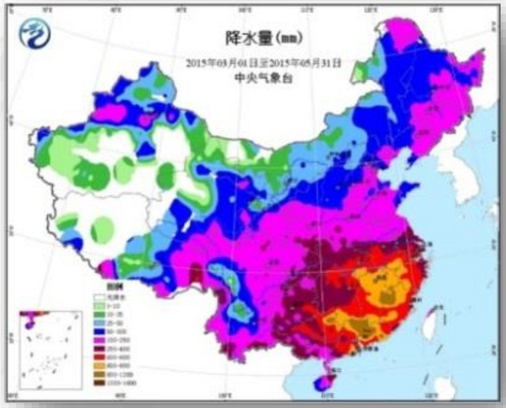
则称积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$的值为随机变量$X$ 的**数学期望**, 记为$E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x.$$

例4 降水量预测

设某地区的月降水量X的概率密度近似为

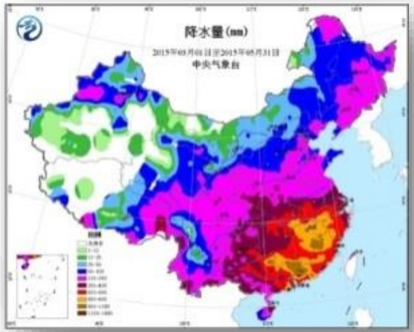
$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{400}xe^{-\frac{1}{20}x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



求其月平均降水量。

解 降水量X：连续型随机变量

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{400}x^2e^{-\frac{1}{20}x}dx \quad (令t=\frac{1}{20}x)$$



$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$$

$$=20\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt \quad =-20\int_0^{+\infty}t^2de^{-t}$$ 分步积分

$$=-20(t^2e^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}dt^2)$$

$$=40\int_0^{+\infty}tde^{-t}$$ 分步积分

$$=40(t^2e^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}dt) \quad =40$$

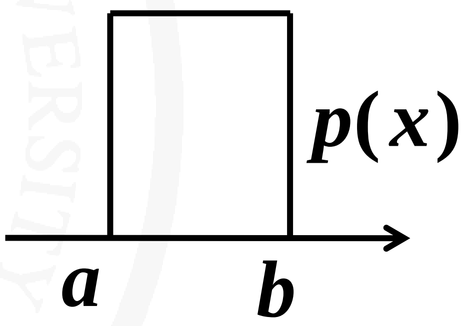
该地区月平均降水量为40ml

5. 常见连续型随机变量的数学期望

例5 (均匀分布) 设随机变量X服从均匀分布, 求$E(X)$.

解 设$X \sim U(a,b)$,其分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b, \\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$



则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{1}{b-a}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b).$$

因而**均匀分布数学期望位于区间的中点**.

例6 (正态分布) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其分布密度函数

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<\infty.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t$

所以 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

因而参数 μ 为正态分布的数学期望.

例7 (**指数分布**)

设随机变量 X 服从指数分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\lambda>0$,

求 $E(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-\int_{0}^{+\infty}x\,\mathrm{d}e^{-\lambda x}$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$$

意义：单位时间内， A发生的平均时间间隔 .

例8 (伽玛分布) 设随机变量$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, 求$E(X)$.

解 设随机变量$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, 则密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}e^{-\beta x}dx \underline{\underline{y=\beta x}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha}}{\beta}e^{-y}dy}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

当$\alpha=1$时, X服从指数分布Exp(β), 这时$E(X)=1/\beta$.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx \qquad \sqrt{x}=t, dx=2tdt$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha}dx=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx$$

$$=\alpha\Gamma(\alpha) \qquad \Rightarrow \Gamma(n+1)=n!$$

常见连续型分布的数学期望小结

	分布名称	概率密度	$E(X)$
$U(a,b)$	均匀分布	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	正态分布	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
$Exp(\lambda)$	指数分布	$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$\Gamma(\alpha,\beta)$	伽玛分布	$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$

二、随机变量函数的数学期望

(一) 一维随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{数学期望}"] \arrow[d] & E(X) \\ f(X) \arrow[r, "\text{数学期望}"] & E[f(X)] = ? \end{tikzcd}$$

f是连续函数, $f(X)$ 是随机变量, 如: $aX+b$, X^2等等.

飞机机翼受到的压力W是风速V 的二次函数，即$W=kV^2$, 已知风速在[0,100]上服从均匀分布，求W的数学期望？

2. 一维随机变量函数数学期望的计算

如何计算随机变量函数的数学期望?

方法1 (定义法): $f(X)$是随机变量, 按照数学期望的定义计算$E[f(X)]$.

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty} y_k p(Y=y_k)$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y)\,dy$$

见2.3节的相关内容

关键: 由X的分布求出$f(X)$的分布.

难点: 一般$f(X)$形式比较复杂的, 很难求出其分布.

方法2 (公式法):

定理3.1 设X是一个随机变量, $Y=f(X)$且E(Y)存在，则

$$E(Y)=E[f(X)]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f(x_k)p_k, & X\text{为离散型}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)\mathrm{d}x, & X\text{为连续型}\end{cases}。$$

当X为离散型时, $P(X=x_k)=p_k$, $(k=1,2,\ldots)$;

当X为连续型时, X的密度函数为$p(x)$.

求$E[f(X)]$时, 只需知道X的分布即可.

例 9 设随机变量X的分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}3x^2/8, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 $E(1/X^2)$

$$p_Y(y)=p_X[f^{-1}(y)]\cdot\left|[f^{-1}(y)]'\right|$$

解 **法一：定义法** 令 $Y=1/X^2 \Rightarrow f^{-1}(y)=y^{-\frac{1}{2}}$

$$p_Y(y)=p_X\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{3y^{-1}}{8}\cdot-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{16}y^{-\frac{5}{2}} \qquad y\geq\frac{1}{4}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot p_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} y\cdot -\frac{3}{16}y^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{3}{16}\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} y^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y \quad =\frac{3}{4}$$

法二：公式法

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot p(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{3}{8}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

(二) 二维随机变量函数的数学期望

例 10 设(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

解 X的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X)=1\times 0.4+2\times 0.2+3\times 0.4=2.0.$

Y的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得$E(Y)=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0.$

因为(X,Y)的分布律为

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

方法1 (定义法):

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

Y/X的分布律为

Y/X	-1	$-1/2$	0	$1/3$	$1/2$	1
p	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1	0.1

计算可得

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times0.2-\frac{1}{2}\times0.1+0\times0.4+\frac{1}{3}\times0.1$$

$$+\frac{1}{2}\times0.1+1\times0.1\quad=-\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

$(X-Y)^2$的分布律为

p	0.1	0.2	0.3	0.4
$(X-Y)^2$	0	1	4	9

得 $E\left[(X-Y)^2\right] = 4\times 0.3 + 1\times 0.2 + 0\times 0.1 + 9\times 0.4$

$= 5.$

方法2（公式法）：

对于二维随机变量而言，其函数的数学期望计算方法可以由类似于**定理3.1**得到.

1. 二维离散型情形

设(X,Y)为二维离散型随机变量，$Z=f(X,Y)$为二元函数，如果$E(Z)$存在，

$$E(Z)=E[f(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)p_{ij}$$

其中(X,Y)的联合分布率为p_{ij}.

方法2（公式法）：

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

$$E[(X-Y)^2]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-y_j)^2 p_{ij}$$

$$=4\times0.2+1\times0.1+9\times0.1$$

$$+4\times0.1+1\times0.1+9\times0.3$$

$$=4\times0.3+1\times0.2+0\times0.1+9\times0.4 \quad =5.$$

2. 二维连续型情形

设(X,Y)为二维连续型随机变量, $Z=f(X,Y)$为二元连续函数, 如果$E(Z)$存在, 则

$$E(Z)=E[f(X,Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中(X,Y)的联合概率密度为$p(x,y)$.

例11 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X 与Y相互独立, 求 $E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)$.

解 $E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(作极坐标变换)

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r^2}\mathrm{d}\frac{r^2}{2}=\left\{\left(-r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\right\}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

三、数学期望的性质

性质3.1 设C是常数, 则有$E(C)=C$.

证 $E(X)=E(C)=1\times C=C.$

性质3.2 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

证 $E(CX)=\sum_k Cx_k p_k = C\sum_k x_k p_k = CE(X).$

性质3.3 设 X、Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证 $E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)+E(Y).$$

推广 $E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i).$

性质3.4 设 X、Y是**相互独立**的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

证 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp_X(x)p_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)E(Y).$$

注 离散型随机变量 X 的数学期望的性质类似. 上述证明只证了一类.

例12 设随机变量$X\sim N(0,1)$, $Y\sim U(0,1)$, $Z\sim B(5,0.5)$, 且X, Y, Z相互独立, 求随机变量$W=(2X+3Y)(4Z-1)$的数学期望.

解 $EX=0,$ $EY=\dfrac{1}{2},$ $EZ=5\times 0.5=2.5$

$$
\begin{aligned}
E(W)&=E[(2X+3Y)(4Z-1)]\\
&=E(2X+3Y)E(4Z-1)\\
&=[2E(X)+3E(Y)][4E(Z)-1]\\
&=\left(2\times 0+3\times\frac{1}{2}\right)(4\times 5\times 0.5-1) \quad =\frac{27}{2}.
\end{aligned}
$$

例12

假设一个班级有n个高中生，班主任让每个人上交自己的手机。如果领手机时每人从中随机拿一个手机，平均多少人能拿到自己的？

解　X表示拿到自己手机的人数。

引入随机变量X_i,取值为**1**表示拿到了自己的手机；否则为**0**。

则，$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

其中$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{N}$

所以，$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = 1$

例13 一民航送客车载有 25 位旅客自机场开出，旅客有9个车站可以下车. 如没有旅客下车就不停车，以X表示停车的次数，求$E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量X_i,

$$X_i=\begin{cases}0,\text{在第}i\text{站无人下车}\\1,\text{在第}i\text{站有人下车}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots 9)\qquad \sim B(1,p)$$

$$P(X_i=0)=\left(\frac{8}{9}\right)^{25},P(X_i=1)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25}\quad(i=1,2\cdots 9)$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_9$

$$\because E\left(X_i\right) = P\left(X_i = 1\right) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{25} \left(i = 1, 2 \cdots 9\right)$$

得 $E\left(X\right) = E\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_9\right)$

$$= E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right) + \cdots + E\left(X_9\right)$$

$$= 9\left[1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{25}\right] = 8.5269(\text{次})$$

四、应用实例

厂家的销售策略

某设备寿命X(以年计)服从$\lambda=\frac{1}{4}$的指数分布. 按规定：出售的设备在售出的一年内损坏可予以调换. 若出售一台设备赢利100元，调换一台设备厂方需花费300元. 求厂方出售一台设备净赢利Y的数学期望.

解 依题设, 有 $p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

则 $P\{X \le 1\} = \int_{-\infty}^{1} p_X(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

寿命不超过1年的概率＝出售的设备在售出一年之内调换的概率

$$P\{X > 1\} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

寿命超过1年的概率＝不需调换的概率

因此出售一台设备净赢利 Y 的分布律为

Y	100	$100-300$
p	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$

则 $EY = 100\mathrm{e}^{-1/4} - 200\left(1 - \mathrm{e}^{-1/4}\right) \approx 33.64$(元).

商家的收入

一个饭店每天平均的顾客数量为100人，每个顾客的平均消费为50元，饭店一天的平均收入是多少？（已知顾客数和每位顾客的消费额独立）

解 直观上看平均收入应为100×50=5000元。

但是，用概率论分析此问题是十分困难的！

记N为顾客数，X_i为第i个顾客的消费，它们均为随机变量，所以收入$Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$是不确定个随机变量之和！

重新思考期望公式

$$E(X)=\int x p_X(x)\mathrm{d}x$$

把边缘概率密度公式代入其中，

$$E(X)=\int x\left[\int p(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int\int x p(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\int x\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}p_Y(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int\int x p_{X|Y}(x)\mathrm{d}x\,p_Y(y)\mathrm{d}y$$

先关于条件分布$X|Y$求期望$E(X|Y)$

然后对$E(X|Y)$关于Y求期望！

以$N = n$为条件，求Y的条件期望

$$\begin{aligned} E(Y \mid N = n) &= E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N = n\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N = n\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= nE(X_i) \end{aligned}$$

所以，$E(Y \mid N) = NE(X_i)$

对$E(Y \mid N)$关于Y求期望得

$E(Y) = E(N)E(X_i) = 100 \times 50 = 5000$

.

注1： $Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$为N个独立随机变量之和，是一种复合随机变量(compound random variable)，其期望为$E(Y)=E(N)E(X_i)$

注2：一般的，$E(Y)=E\big(E(Y\mid X)\big)$成立。为我们提供了一种新的期望计算方法：先关于条件分布$Y\mid X$计算条件期望，再对齐结果关于X计算期望。可以看成全概率公式在期望中的一种拓展！

$$E(Y)=E\big(E(Y\mid X)\big)=\sum_{i} E(Y\mid X_i=x_i)P(X_i=x_i)$$

迷宫问题

发生矿难后，矿工深陷在有2个门的矿井之中。第一个门经过5小时可以脱险，第二个门经过3小时返回原地。假定门没有任何标志可以区分，所以矿工每次都等可能地选择一个门，其脱险所需时间的期望为多少？

解 记脱险所需时间为X，则

$$E(X)=E(X\mid Y=1)P(Y=1)+E(X\mid Y=2)P(Y=2)$$

$$=\frac{1}{2}E(X\mid Y=1)+\frac{1}{2}E(X\mid Y=2)$$

$$=\frac{1}{2}\times 5+\frac{1}{2}\times\left(3+E(X)\right)\qquad\Rightarrow E(X)=8$$

课后思考

分赌本问题

甲乙两人赌技相同，各出赌金50元，并约定先胜五局者获得全部100元赌金。

由于出现意外情况，在**甲胜4局，乙胜3局**时，不得不终止赌博，如果要分赌金，该如何分配才算公平?

内容小结

1. 数学期望

实数, 而非变量, 它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

$$E(X)=\sum_k x_k p_k.$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x.$$

绝对收敛

常见离散型分布的数学期望小结

分布	分布律	$E(X)$
0–1 分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\dots,n$	np
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\dots$	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\dots$	$\dfrac{1}{p}$

常见连续型分布的数学期望小结

分布名称	概率密度	$E(X)$
均匀分布	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
正态分布	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
指数分布	$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
伽玛分布	$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$

2. 随机变量函数的数学期望

$$E(Y)=E[f(X)]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k, X\text{为离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\mathrm{d}x, X\text{为连续型}\end{cases}$$

$$E(Z)=E\left[f(X,Y)\right]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(x_i,y_j)p_{ij}\\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases}$$

3. 数学期望的性质

$$
\begin{cases}
1^0\ E(C)=C; \\
2^0\ E(CX)=C(X); \\
3^0\ E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i); \\
4^0\ X,Y\text{独立} \Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y).
\end{cases}
$$

数学期望 → 数字特征

3-1 随机变量的数学期望

Thank You !

备用题

例 8-1 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=n\}=\frac{1}{n(n+1)},n=1,2,\cdots,$$

求证: 随机变量X没有数学期望.

证 由定义, 数学期望应为

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}np_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

由微积分学可知, 右边的级数发散.

因此, 随机变量X 没有数学期望.

例8-2 (**柯西分布**) 设随机变量X服从柯西分布，求$E(X)$.

解 因X服从柯西分布, 则其密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

由于$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=\frac{1}{\pi}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{+\infty}=\infty$$

因而其数学期望$E(X)$不存在.

例9-1 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光, 电梯于每个正点的第5分钟、第25分钟和第55分钟从底层起行. 假设在早上的8点的第X分钟到达底层候梯处, 且X在[0,60]上服从均匀分布求游客等候时间的数学期望. （考研试题）

解 已知X在[0,60]上服从均匀分布, 其密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设Y是游客等候电梯的时间(单位:分), 则

$$Y = g(X) = \begin{cases} 5 - X & 0 \le X \le 5 \\ 25 - X & 5 < X \le 25 \\ 55 - X & 25 < X \le 55 \\ 65 - X & 55 < X \le 60 \end{cases}$$

因此

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{60}\int_{0}^{60} g(x)\mathrm{d}x$$

$$E(Y)=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=11.67$$

例 9-2 设随机变量X的分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}3x^2/8, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 $E(1/X^2) = \dfrac{3}{4}$

解 法一：定义法 令 $Y=1/X^2$

$$p_Y(y)=p_X\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3y^{-1}}{8}\cdot -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{16}y^{-\frac{5}{2}} \qquad y\geq\frac{1}{4}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot p_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} y\cdot -\frac{3}{16}y^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{3}{16}\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} y^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y \quad =\frac{3}{4}$$

法二：公式法

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{3}{8}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

例 9-3（报童问题）设某报童每日的潜在卖报数X服从参数为λ的泊松分布. 如果每卖出一份报可报酬a, 卖不掉而退回则每份赔偿b, 若某报童买进n份报, 试求其期望所得. 进一步, 再求最佳的卖报份数.

解 若记真正卖报数为Y, 则Y与X的关系如下：

$$Y=\begin{cases} X, & X<n \\ n, & X\geq n \end{cases}$$

则Y的分布为 $P\{Y=k\}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & k<n\\ \displaystyle\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, & k=n\end{cases}$

记所得为Z, 则Z与Y的关系如下:

$$Z=f(Y)=\begin{cases}aY-b(n-Y), & Y<n\\ an, & Y=n\end{cases}$$

因此期望所得为

$$M(n)=E[f(Y)]$$

$$M(n)=E[f(Y)]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}[ka-(n-k)b]+\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)na$$

$$=(a+b)\lambda\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-n(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+na$$

当a, b, λ给定后, 求n使$M(n)$达到极大.

利用软件包求得计算结果如下: