西北工業大學

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第四节 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

- 一、条件概率
- 二、全概率公式与贝叶斯公式

随机事件的概率

$n >> N$

频率 ≈ 概率

古典概型 $P(A) = \dfrac{n_A}{n}$

几何概型 $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$

简单随机现象 → 复杂随机现象

一、条件概率

1. 问题的引入：

例 1 甲乙两台车床加工同一种机械零件，质量表如下：

	正品数	次品数	合计
甲车床	35	5	40
乙车床	50	10	60
总　计	85	15	100

从这100个零件中任取一个，求下列事件的概率：

(1) 取出的一个为正品； A $n_A=85$

(2) 取出的一个为甲车床加工的零件； B $n_B=40$

(3) 取出的一个为甲车床加工的正品； AB $n_{AB}=35$

(4) 已知取出的一个为甲车床加工的零件，其为正品. C

解 古典概型 $n_\Omega=100$

(1) $P(A)=\dfrac{85}{100}=0.85.$

(2) $P(B)=\dfrac{40}{100}=0.40.$

(3) $P(AB)=\dfrac{35}{100}=0.35.$

	正品数	次品数	合计
甲车床	35	5	40
乙车床	50	10	60
总　计	85	15	100

(4) C: 已知取出的一个为甲车床加工的零件, 其为正品.

附加条件B　　　　　　A

$C = A|B$:“B发生的条件下，A发生”

$\Leftrightarrow$ 属于B的样本点必然出现的条件下，属于A的样本点出现。

$n_\Omega=100 \Rightarrow n_B=40.$

	正品数	次品数	合计
甲车床	35	5	40
乙车床	50	10	60
总　计	85	15	100

$$P(C) = P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{35}{40}$$

$$= \frac{n_{AB}/n_\Omega}{n_B/n_\Omega} = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.875.$$

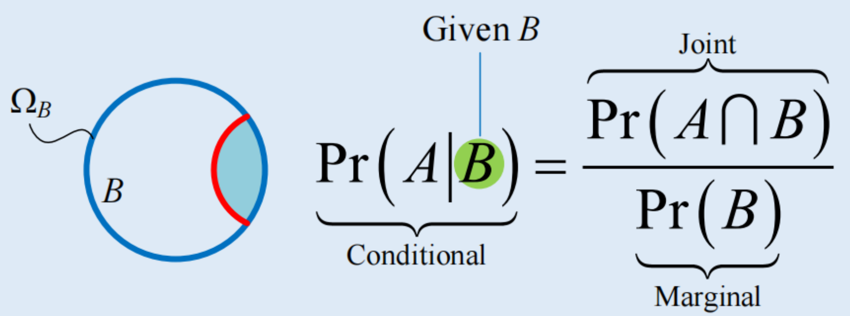
2. 定义1.8 (条件概率的定义)

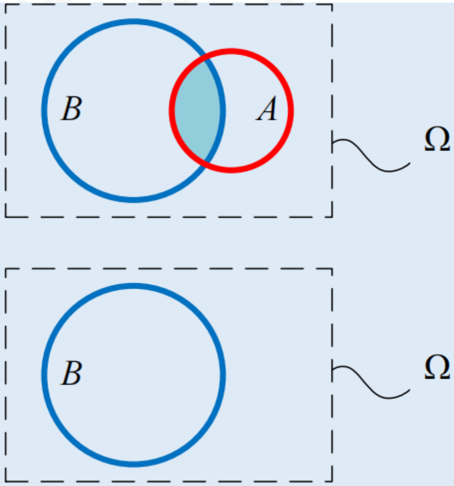
设A，B是两个事件，且$P(B) > 0$,则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

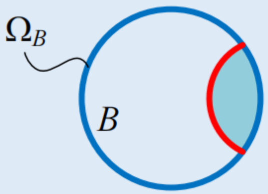
为事件B发生的条件下，事件A发生的**条件概率**.

注

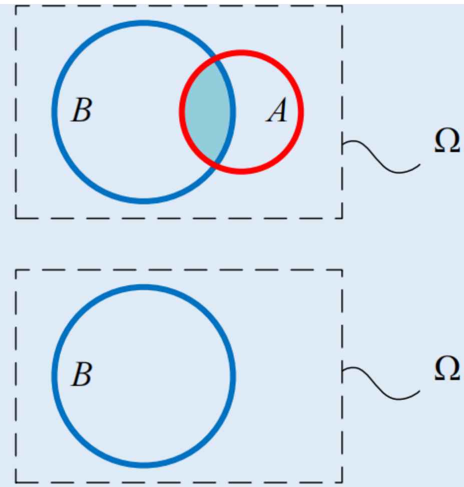




B 实际上是“新的样本空间”！

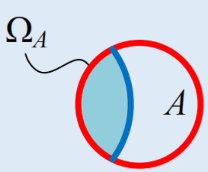


$$\underbrace{\Pr\left(A\middle|\overset{\text{Given }B}{B}\right)}_{\text{Conditional}}=\frac{\overbrace{\Pr\left(A\cap B\right)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{\Pr\left(B\right)}_{\text{Marginal}}}$$

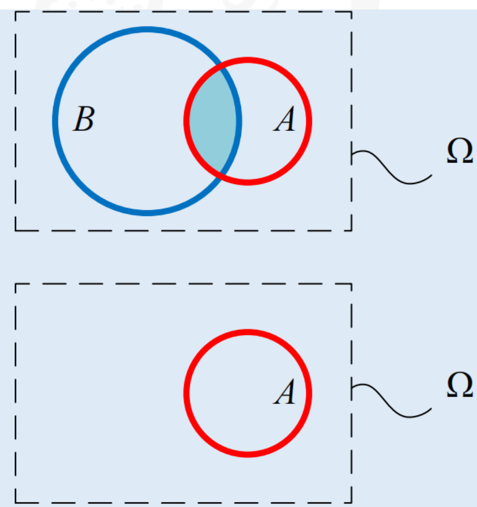


B 实际上是“新的样本空间”！

类似地，以A为条件，相当于把样本空间变为A



$$\underbrace{\Pr\left(B\middle|\overset{\text{Given }A}{A}\right)}_{\text{Conditional}}=\frac{\overbrace{\Pr\left(A\cap B\right)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{\Pr\left(A\right)}_{\text{Marginal}}}$$



3. 条件概率的性质

(1)非负性: $0 \le P(A|B) \le 1;$

证 $\because AB \subset B \quad \therefore 0 \le P(AB) \le P(B)$

又 $\because P(B) > 0 \quad \therefore \ 0 \le \dfrac{P(AB)}{P(B)} \le 1$

即 $0 \le P(A|B) \le 1.$

(2)规范性: $P(\Omega|B) = 1, \ P(\varnothing|B) = 0;$

证 $\because \Omega B = B$

$$\therefore P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(3) 可列可加性:

对于两两互斥的事件序列: $A_1, A_2, \cdots,$

有 $$P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \middle| B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k | B).$$

证 $$P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \middle| B\right) = \frac{P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P\left(\sum_{k=1}^{\infty} (A_k B)\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k | B).$$

(4) 加法公式：

$$P((A_1 \cup A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B).$$

证 $P((A_1 \cup A_2)B) = P(A_1B \cup A_2B)$

$$= P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B)$$

$$\therefore P((A_1 \cup A_2)|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2)B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1A_2 | B).$$

(5) 逆事件的条件概率： $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B).$

(数学一2012年第14题)设A,B,C是随机事件,A与C互不相容,$P(AB)=1/2,P(C)=1/3$，则$P(AB\mid\overline{C})=$____.

解: $$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB-C)}{1-P(C)}$$
$$=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{1/2-0}{1-1/3}=\frac{3}{4}$$

(数学一2015年第7题)若A,B为任意两个随机事件，则:

A $P(AB)\ge(P(A)+P(B))/2$

B $P(AB)\ge P(A)P(B)$

C $P(AB)\le(P(A)+P(B))/2$

D $P(AB)\le P(A)P(B)$

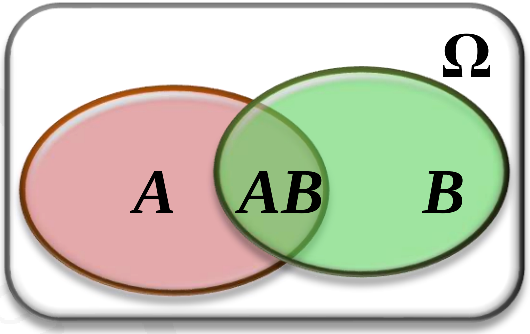
提示：$P(A|B)=P(AB)/P(B)\le 1$

C

4.乘法公式

条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$



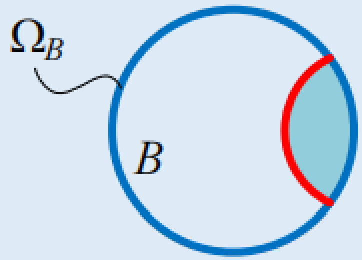
乘法公式

若$P(B)>0$,则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

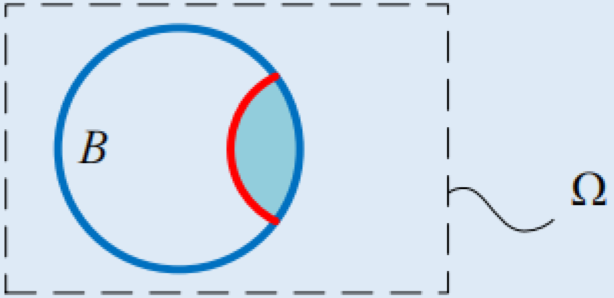
若$P(A)>0$,则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

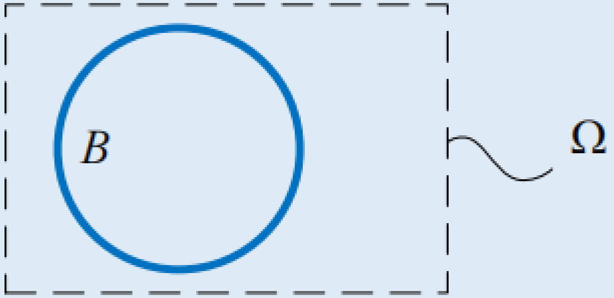
意义：积事件的概率等于某一事件的概率乘以另一事件在该事件发生条件下的条件概率。

乘法公式把样本空间又变成Ω

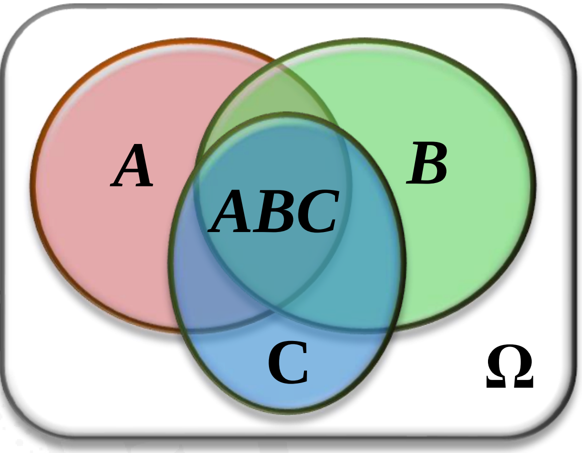


$$\underbrace{\Pr(A\cap B)}_{\text{Joint}}=\underbrace{\Pr(A,B)}_{\text{Joint}}=\underbrace{\Pr(A|B)}_{\text{Conditional}}\cdot\underbrace{\Pr(B)}_{\text{Marginal}}$$





乘法公式推广



设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$, 则

$$P(ABC)=P(AB)P(C\mid AB)$$

$P(A)>0$

$P(B)>0$

$$=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB).$$

简单 → 复杂 | 特殊 → 一般

乘法公式

若$P(B)>0$,则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

若$P(A)>0$,则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

乘法公式推广

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个事件,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,

则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots$

$\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

复杂事件的概率 $\xrightarrow{\text{分解}}$ 简单事件概率的乘积

例2 抽奖是否与次序有关?

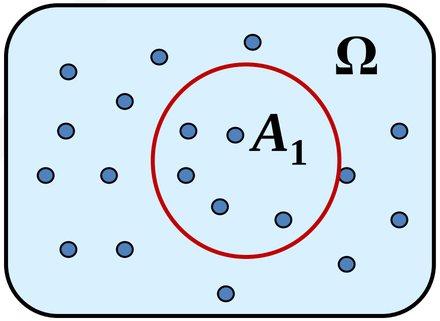
10000张奖券, 其中100张有奖，先后无放回抽奖，则每个人中奖的概率是否相同?

解　设A_i表示第i个人中奖，$i=1,2,\cdots n$

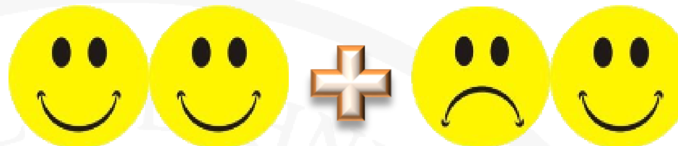
古典概型

$$P(A_1)=\frac{k}{n}=\frac{1}{100}$$

其中$n=10000, k=100$。



A_2：第2个人中奖



$$A_2 = A_1A_2 \cup \overline{A_1}A_2 \quad (A_1A_2 \cap \overline{A_1}A_2 = \varnothing)$$

有限可加性

$$P(A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2)$$

乘法公式

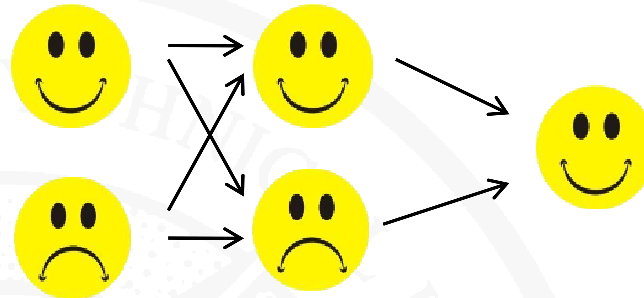
古典概型

$$= \underline{P(A_1)}\boxed{P(A_2 \mid A_1)} + \underline{P(\overline{A_1})}\boxed{P(A_2 \mid \overline{A_1})}$$

$$= \frac{k}{\underline{n}} \times \boxed{\frac{k-1}{n-1}} + \frac{n-k}{\underline{n}} \times \boxed{\frac{k}{n-1}} = \frac{1}{100}$$

其中$n = 10000, k = 100$。

A_3 : 第3个人中奖



$$P(A_3) = P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

乘法公式推广

古典概型

$$P(A_1\overline{A_2}A_3) = P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)P(A_3\mid A_1\overline{A_2}) = \frac{k}{n}\times\frac{n-k}{n-1}\times\frac{k-1}{n-2}$$

$$P(\overline{A_1}A_2A_3) = P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})P(A_3\mid \overline{A_1}A_2) = \frac{n-k}{n}\times\frac{k}{n-1}\times\frac{k-1}{n-2}$$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\,|\,\overline{A_1})P(A_3\,|\,\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=\frac{n-k}{n}\times\frac{n-k-1}{n-1}\times\frac{k}{n-2}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2)$$

$$=\frac{k}{n}\times\frac{k-1}{n-1}\times\frac{k-2}{n-2}$$

$$\therefore P(A_3)=P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)$$

$$+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=\frac{k}{n}=\frac{1}{100}$$

抽奖是否与次序有关? 10000张奖券, 其中100张有奖, 先后无放回抽奖，则每个人中奖的概率是否相同?

解 设A_i表示第i个人中奖, $i=1,2\cdots n$

则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{100}$

依次类推 $P(A_4)=P(A_5)=\cdots=P(A_{10000})=\dfrac{1}{100}.$

抽奖是公平的，中奖率与次序无关！

抽奖原理（抓阄原理）：

n个人抽奖，奖项有m个（$m < n$），则第k个人中奖的概率为$\frac{m}{n}$.

例子：设袋中有50只乒乓球，其中20只黄球，30只白球，现从中依次不放回地任取两只，则第二次取得黄球的概率为____2/5____.