西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第三章 随机变量的数字特征

第一节 随机变量的数学期望

第二节 随机变量的方差和矩

第三节 协方差及相关系数

§3.2 随机变量的方差和矩

- 一、方差的概念
- 二、方差的性质
- 三、矩的概念
- 四、应用实例

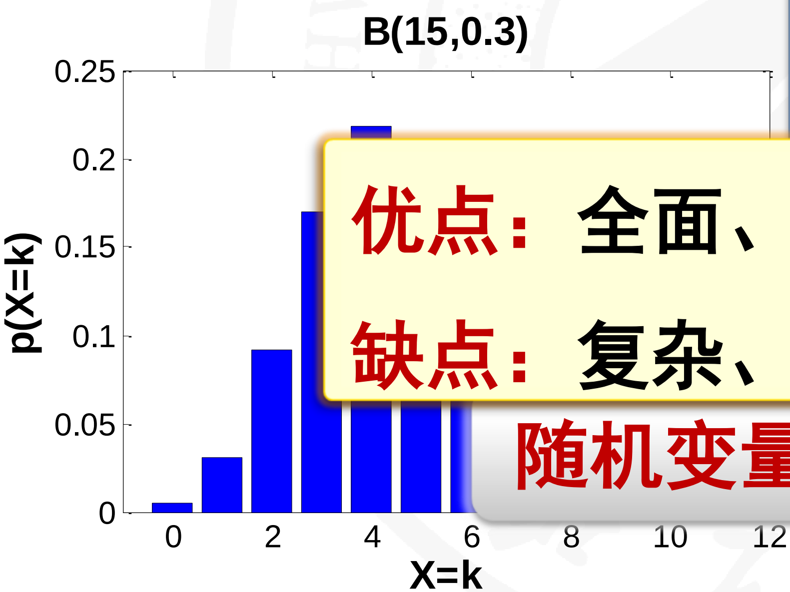
一、方差的概念

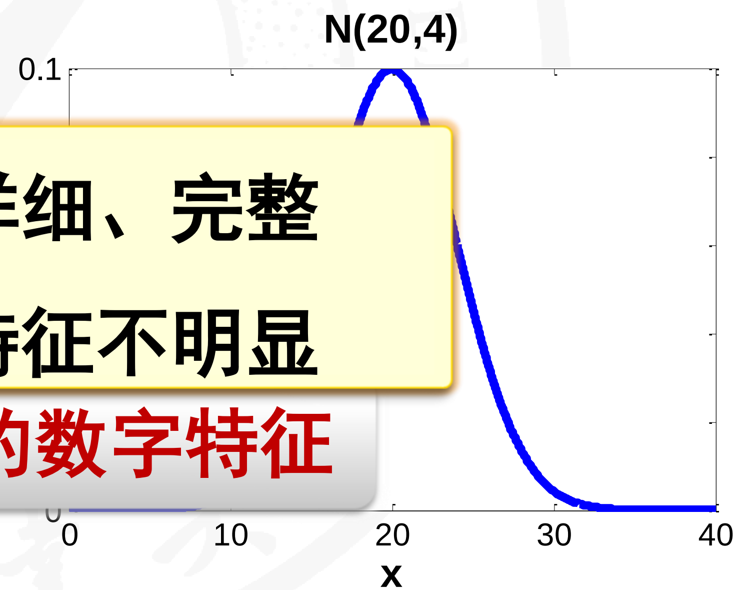
随机变量的统计特性

分布函数 $F(x)=P(X\le x)$

分布律 $P\{X=x_k\}$

概率密度 $p(x)$





优点： 全面、详细、完整

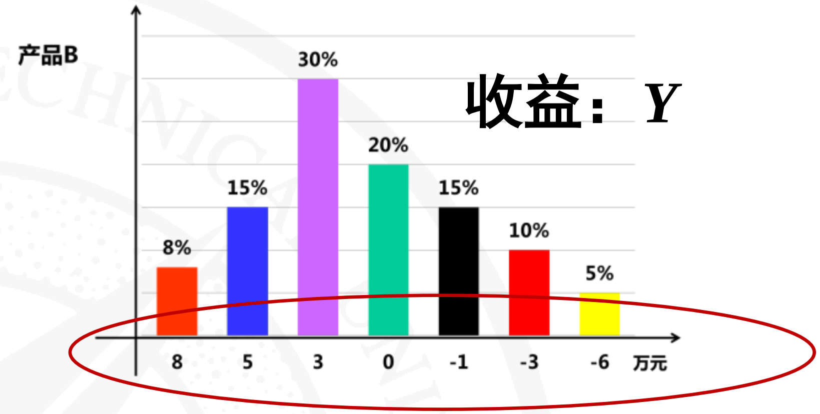
缺点： 复杂、特征不明显

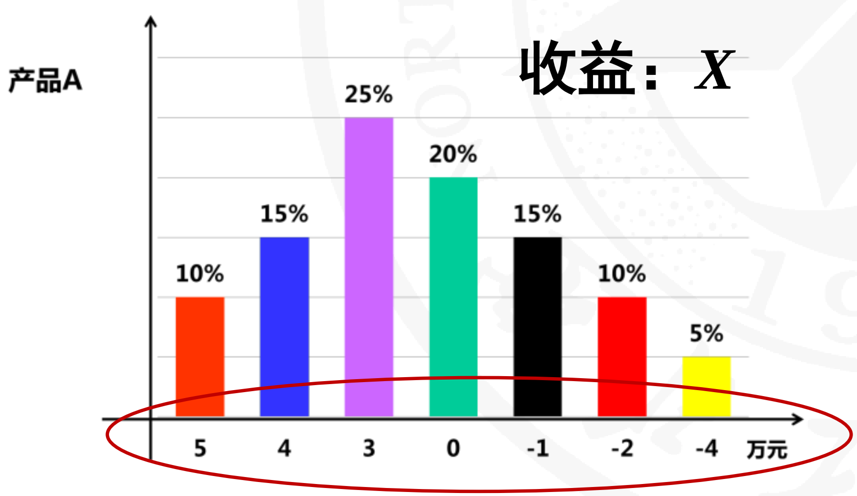
随机变量的数字特征

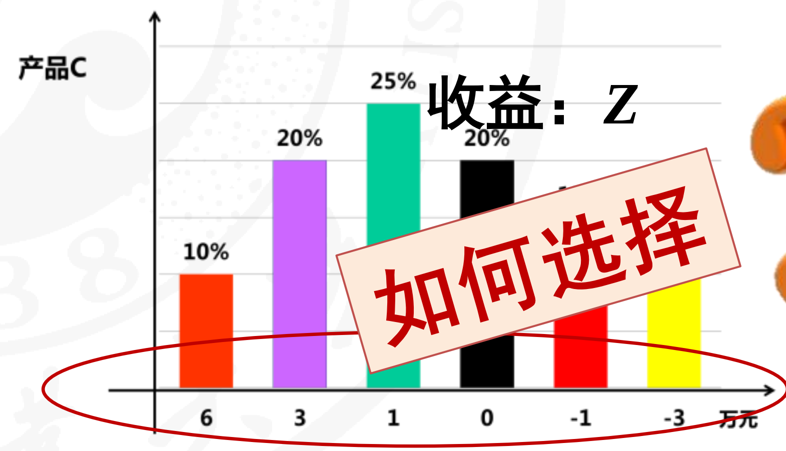
1. 问题的提出

引例

20万元







X: 理财产品*A*的收益

X（万元）	5	4	3	0	-1	-2	-4
概率*P*	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05

Y: 理财产品*A*的收益

Y（万元）	8	5	3	0	-1	-3	-6
概率P	0.08	0.12	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05

Z: 理财产品*A*的收益

Z（万元）	6	3	1	0	-1	-3
概率*P*	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

预期收益

⇓

数学期望

X: 理财产品A的收益

X（万元）	5	4	3	0	-1	-2	-4
概率P	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05

预期收益

$$E(X)=\sum_i x_i p_i = 5\times 0.1+4\times 0.15+3\times 0.25+(-1)\times 0.15+(-2)\times 0.1+(-4)\times 0.05$$

$$=1.3(\text{万元})$$

$$E(Y)=1.39(\text{万元})$$

$$E(Z)=1.0(\text{万元})$$

投资选择标准

高收益　　低风险

风险：收益的不确定性 → 收益的偏差 $\Delta x_k = [x_k - E(X)]^2$

$E(X)$

收益的平均偏差 $E(\Delta X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k = E[X - E(X)]^2$

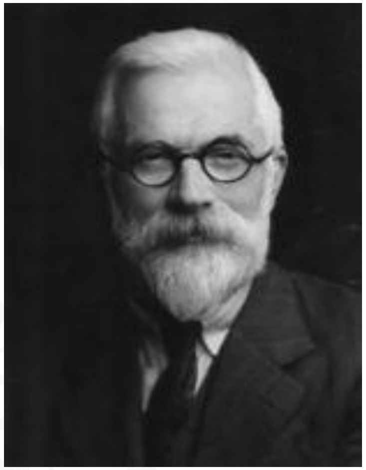
2、方差的定义

定义3.3 设X是一个随机变量，若

$$E[X-E(X)]^2<\infty$$

则称之为X的**方差**，记作 $D(X)$或$\sigma^2(X)$，即

$$\boxed{D(X)=E[X-E(X)]^2} \geq 0$$



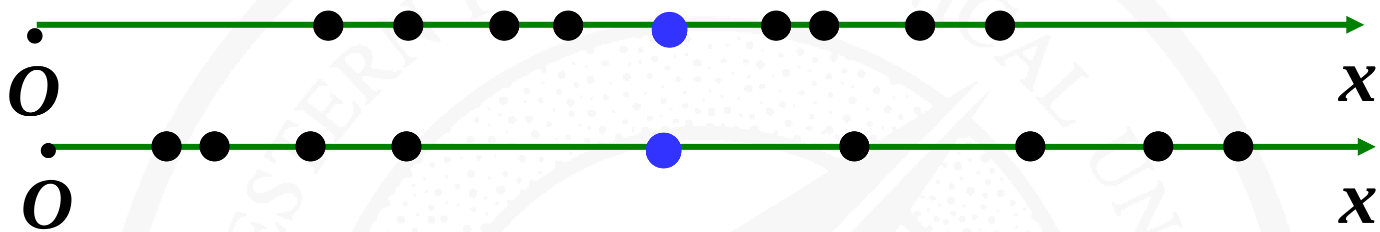
R. A. Fisher
(1890～1962)
英国统计与遗传学家

称 $\sqrt{D(X)}$ 为**标准差**或**均方差**，记为 $\sigma(X)$.

意义 度量了随机变量取值对其数学期望的**平均偏离程度**

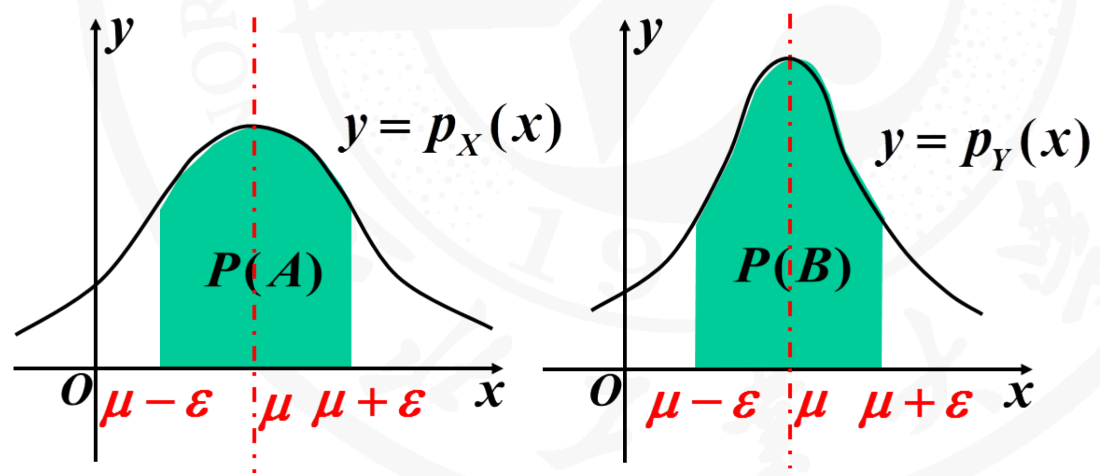
注

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$



$D(X)$越**小**, 偏离程度越**低**，X 取值越**集中**在期望附近。

（**大** ） （**高**） （**分散**）



$$P(A)<P(B)$$

$$D(X)>D(Y)$$

3、随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

$f(X)$

$$E(X) \Rightarrow D(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = E\left[f(X)\right]$$

离散型 $$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型 $$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 p(x) \mathrm{d}x,$$

其中 $p(x)$ 为 X 的概率密度函数.

例1 (正态分布) 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求$D(X)$.

解 因为X的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \sigma>0, -\infty<x<+\infty.$$

且$E(X)=\mu$,

所以 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$

$$\underline{\underline{\qquad}}\ \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,d e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right\}$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$= \sigma^2.$$

因而正态分布的方差为 σ^2.

三、方差的计算

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

$f(X)$

证明：

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

期望的性质

$$=E(X^2)-E[2XE(X)]+E\{[E(X)]^2\}$$

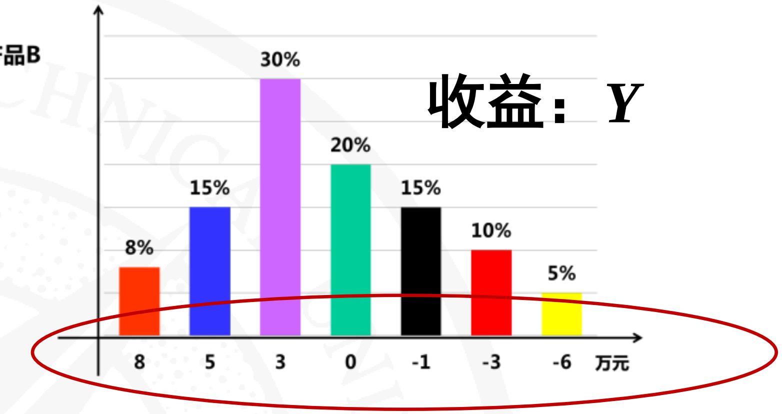
$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

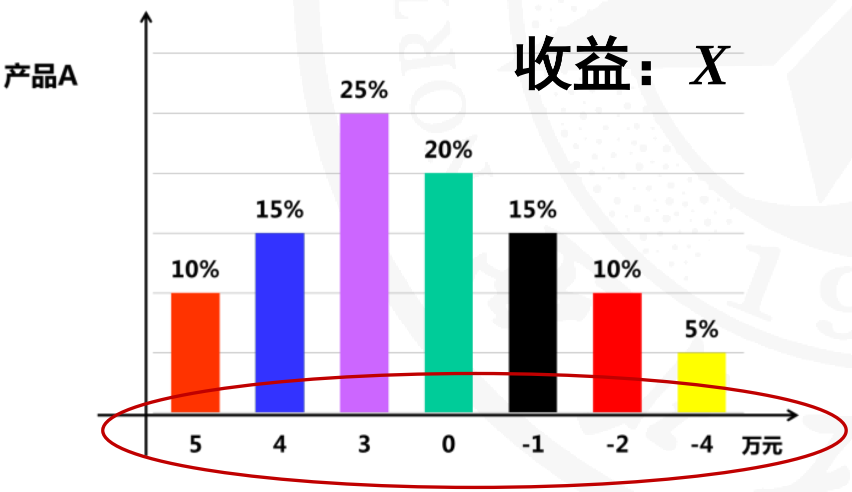
方差的本质是随机变量函数的期望

引例

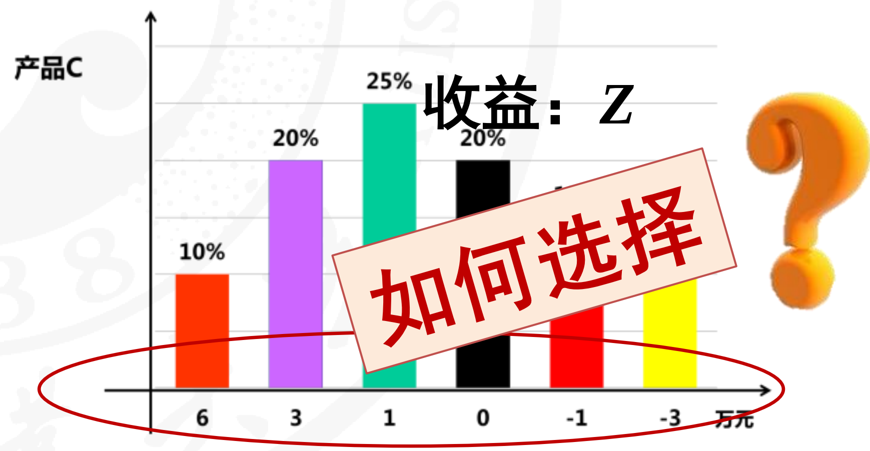
20万元



收益：Y



收益：X



收益：Z

X: 理财产品A的收益

X（万元）	5	4	3	0	-1	-2	-4
概率P	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05

法一

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\sum_i[x_i-E(X)]^2 p_i \Leftarrow E(X)=1.3$$

$$=(5-1.3)^2\times 0.1+(4-1.3)^2\times 0.15+\cdots+(-4-1.3)^2\times 0.05$$

$$=6.81$$

法二

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i=5^2\times 0.1+4^2\times 0.15+\cdots+(-4)^2\times 0.05=8.5$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=8.5-1.3^2=6.81$$

产品	预期收益（万元）	预期风险（万元）	收益增幅/风险增幅
A	$E(X)=1.30$ 30%↑	$\sigma(X)=2.61$ 9.2%↑	3.26
B	$E(Y)=1.39$ 39%↑	$\sigma(Y)=3.43$ 43.5%↑	0.9
C	$E(Z)=1.00$ 0	$\sigma(Z)=2.39$ 0	1.0

选择标准

高收益 → 选B

低风险 → 选C

综合标准 → 选A ✓

产品A　产品B　产品C

$a\%$　$b\%$　$c\%$

组合收益

$$M = a\% \times X + b\% \times Y + c\% \times Z \quad (a\% + b\% + c\% = 1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \max & E(M) \\ \min & D(M) \end{array}\right\} a_0, b_0, c_0$$

最优投资方案

资产组合选择理论

例2 设随机变量X具有概率密度

$$p(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0\\ 1-x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}，\quad \text{求}E(X),D(X).$$

解

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}$$

4. 常见概率分布的方差

例3 (二项分布) 设随机变量 $X \sim B(n,p)$, 求$D(X)$.

解 设随机变量X服从参数为n, p二项分布, 其

分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

$$0 < p < 1.$$

则有 $E(X) = np.$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=E[X(X-1)+X]\\&=E[X(X-1)]+E(X)\\&=E[X(X-1)]+E(X)\\&=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}+np\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+np\end{aligned}$$

$$= n(n-1)p^2 \boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}}$$

$$+ np$$

$\sim B(n-2, p)$

$$= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (n^2 - n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

例4 (泊松分布) 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

解 设$X \sim P(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

则有 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$. 又因为 $E(X)=\lambda$,

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=2}^{\infty}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$$

$$=\lambda.$$

因而, 泊松分布的数学期望与方差都等于参数λ.

例5 (几何分布) 设随机变量X服从几何分布，求$D(X)$.

解 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, q=1-p; k=1,2,\cdots, 0<p<1$$

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$

又因为 $E(X)=\dfrac{1}{p},$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\cdot q^{k-1}p+E(X)$$

$$=pq\boxed{\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\cdot q^{k-2}}+E(X)$$

$$=pq\sum_{k=2}^{\infty}(q^{k})''+E(X)=pq\left(\frac{q^{2}}{1-q}\right)''+\frac{1}{p}=\frac{2q}{p^{2}}+\frac{1}{p}.$$

所以 $D(X)=\frac{2q}{p^{2}}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{2}}=\frac{q}{p^{2}}.$

例6 (均匀分布) 设随机变量X服从均匀分布，求$D(X)$.

解 设$X \sim U(a,b)$, 其分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\dfrac{1}{2}(a+b)$,

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

例 7 (指数分布) 设随机变量$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,求$D(X)$.

解 设随机变量$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 则

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\lambda>0$,

因为$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$,因而

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=\int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\boxed{\int_0^{+\infty}(\lambda x)^2 e^{-\lambda x}d(\lambda x)}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$(\because \Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}dx=\alpha\Gamma(\alpha),\Gamma(n+1)=n!)$$

$$=\frac{\Gamma(3)}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

常见离散型分布对应的数学期望与方差

分布	分布律	$E(X)$	$D(X)$
0-1分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$	λ	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

常见分布的数学期望与方差

分布	密度函数	$E(X)$	$D(X)$
均匀分布 $X\sim U(a,b)$	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$	$\dfrac{(a+b)}{2}$	$\dfrac{(a-b)^2}{12}$
正态分布 $X\sim N(u,\sigma^2)$	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $\sigma>0,-\infty<x<+\infty.$	u	σ^2
指数分布 $X\sim Exp(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

例8 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，

则$P\left\{X>\sqrt{D(X)}\right\}=$ ___e^{-1}___ (考研试题)

解

$$\therefore P\left\{X>\sqrt{D(X)}\right\}$$

$$=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}$$

$$=\int_{1/\lambda}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=e^{-\lambda x}\Big|_{1/\lambda}^{+\infty}=e^{-1}$$

二、方差的性质

1. 方差的性质

性质(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$

性质(2) 设 X 是一个随机变量, k是常数, 则有

$$D(kX)=k^2D(X).$$

证 $D(kX)=E[kX-E(kX)]^2$

$$=k^2E[X-E(X)]^2=k^2D(X).$$

性质(3) 设随机变量 X, Y **相互独立**, 且 $D(X), D(Y)$ 存在, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

证 $D(X \pm Y) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$

$$= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2$$

$$= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2$$

$$\pm 2E[X - E(X)] \cdot E[Y - E(Y)]$$

$$= D(X) + D(Y).$$

推广 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,则有

$$D(a_1X_1 \pm a_2X_2 \pm \cdots \pm a_nX_n)$$

$$= a_1^2 D(X_1) + a_2^2 D(X_2) + \cdots + a_n^2 D(X_n).$$

性质(4) (切比谢夫不等式)

切比谢夫

设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$,

方差$D(X)=\sigma^2$,则对于任意正整数ε,

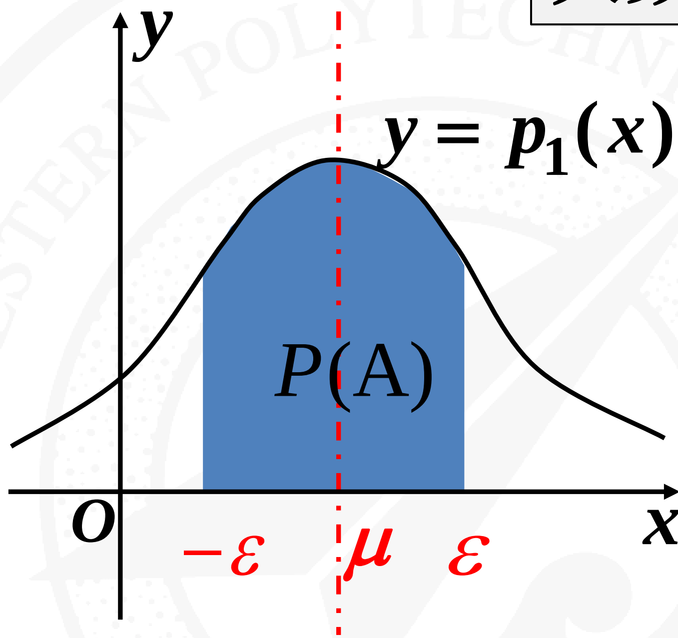
不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$ 或 $$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比谢夫不等式

大数定理的理论基础



$$P\left\{\left|X-EX\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$D(X)$ 越小, X偏离$E(X)$程度越小, $P(A)$ 越大.

例 9 已知正常男性成人血液中，每一毫升所含白细胞数的平均数是7300，均方差是700，试利用切比谢夫不等式估计每毫升含白细胞数在5200~9400之间的概率p.

解 设X为每毫升血液中含白细胞数.

依题意，有

$$E(X)=7300,\quad D(X)=\sigma^2=700^2.$$

$$\therefore\quad P\{5200<X<9400\}$$

$$=P\{5200-7300<X-E(X)<9400-7300\}$$

$$= P\{5200 - 7300 < X - E(X) < 9400 - 7300\}$$

$$= P\{-2100 < X - E(X) < 2100\}$$

$$= P\{|X - E(X)| < 2100\}$$

$$\geq 1 - \frac{D(X)}{2100^2}$$

$$= 1 - \frac{700^2}{2100^2} = \frac{8}{9} \approx 0.8889.$$

即 $P\{5200 < X < 9400\} \approx 0.8889.$

性质(5) 随机变量X的方差$D(X)=0$的充要条件是 $P\{X=C\}=1$, C为常数.

证 必要性: 由于

$$0 \le P\{|X-E(X)| \ge \varepsilon\} \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 0,$$

$$\therefore P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} = 1$$

而由ε的任意性可知:

$$P\{X=E(X)\}=1.$$

而充分性可由性质1直接得到.

三、矩的概念

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

1. 矩的概念

定义3.4 设X是一随机变量,若$E\left(X^k\right)(k=1,\cdots n)$存在,则称它为$X$的**$k$阶原点矩** a_k,即

$$a_k=E(X^k)\quad (k=1,2,\cdots n)$$

特例: $a_1=E(X)$是X的数学期望.

定义3.5 设X是一随机变量,且$a_1=E(X)$,若$E[X-E(X)]^k(k=1,2,\cdots n)$存在,则称它为$X$的**$k$阶中心矩**,记为 μ_k, $\mu_k=E[X-E(X)]^k$.

特例: $\mu_2=E[X-E(X)]^2$是X的方差.

2. 原点矩与中心矩的关系

定理3.4 设随机变量X的k阶中心矩为μ_k，k阶原点矩为a_k

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i E(X^i)[-E(X)]^{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i a_i (-a_1)^{k-i}$$

$$a_k = E(X)^k = E[(X - a_1) + a_1]^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i {a_1}^i E(X - a_1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i {a_1}^i \mu_{k-i}$$

例10 设随机变量X与Y相互独立, $X \sim N(0,1)$,

$Y \sim N\left(0,\frac{3}{4}\right)$,若$Z = X - 2Y$, $E(|Z|)$及$D(|Z|)$.

解 $\because E(Z) = E(X-2Y) = E(X) - 2E(Y) = 0.$

$$D(Z) = D(X-2Y) = D(X) + 4D(Y) = 1 + 4\cdot\frac{3}{4} = 4.$$

$\therefore Z \sim N(0,4)$,

$U = \dfrac{Z}{2} \sim N(0,1).$

$$E(|Z|) = 2E(|U|) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u| \cdot \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}.$$

$\because \ D(|Z|) = E(|Z|^2) - [E(|Z|)]^2$ $Z \sim N(0,4)$,

而 $E(|Z|^2) = E(Z^2) = D(Z) + [E(Z)]^2 = 4 + 0 = 4.$

$$\therefore \ D(|Z|) = 4 - \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

内容小结

1、方差的概念和意义

方差是一个体现随机变量X 取值分散程度的量. $D(X)$值大（小），表示X 取值分散程度大（集中），$E(X)$ 的代表性差（好）

2、方差的计算

$$D(X)=E[X-E(X)]^2 = E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\mathrm{d}x$$

3. 方差的性质

(1) $D(C)=0;$

(2) $D(CX)=C^2D(X);$

(3) X、Y相互独立，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$

(4)切比谢夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

(5). $D(X)=0\Leftrightarrow P\{X=C\}=1.$

*(6). $D(X)\leq E(X-C)^2.$

4、常见分布的数学期望与方差

分布	分布律	$E(X)$	$D(X)$
0-1分布 $X\sim B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots$	λ	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

常见分布的数学期望与方差

分布	密度函数	$E(X)$	$D(X)$
均匀分布 $X \sim U(a,b)$	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$	$\dfrac{(a+b)}{2}$	$\dfrac{(a-b)^2}{12}$
正态分布 $X \sim N(u,\sigma^2)$	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $\sigma>0,-\infty<x<+\infty.$	u	σ^2
指数分布 $X \sim Exp(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

5. 矩是随机变量的数字特征.

原点矩: $a_k = E(X^k) \quad (k = 1, 2, \cdots n)$

中心矩: $\mu_k = E\left[X - E(X)\right]^k$.

$a_1 = E(X)$; $\quad a_2 = E(X^2)$

$\mu_1 = E(X - EX) = 0$; $\mu_2 = D(X) = a_2 - a_1^2$

3-2 随机变量方差与矩

Thank You !

备用题

例1-1 设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)^2},\quad -\infty<x<\infty,$$

求X的数学期望$E(X)$与方差$D(X)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{2}{\pi(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{2}{\pi(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=1,$$

由方差公式得 $D(X)=E\left[X-E\left(X\right)\right]^2=E(X^2)=1.$

例2-1 设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} a+2(1-a)x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $0\le a\le 2$, 求$E(X)$与$D(X)$的最大值与最小值.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x[a+2(1-a)x]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{a}{6}.$$

已知 $0\le a\le 2$, 于是当$a=0$时, 数学期望$E(X)$取最大值 2/3. 当 $a=2$ 时, 数学期望取最小值1/3 .

因为 $E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x^2[a+2(1-a)x]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{a}{6}.$$

由方差公式得

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}+\frac{a}{18}-\frac{a^2}{36}$$

$$=-\frac{1}{36}(a-1)^2+\frac{1}{12}.$$

从而可知, 当 $a=1$ 时, 方差取最大值1/12;

当 $a=0$ 或 $a=2$时, 方差取最小值1/18 .

例4-1 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，且有 $E(X_i)=i, D(X_i)=5-i, i=1,2,3,4.$

设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4$，求 $E(Y), D(Y)$.

解

$$E(Y)=E(2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4)$$

$$=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-\frac{1}{2}E(X_4)$$

$$=2\times1-2+3\times3-\frac{1}{2}\times4=7.$$

因为X_1, X_2, X_3, X_4相互独立，则有

$$D(Y) = D(2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4)$$

$$= 4D(X_1) + D(X_2) + 9D(X_3) + \frac{1}{4}D(X_4)$$

$$= 4\times 4 + 3 + 9\times 2 + \frac{1}{4} = 37.25.$$

例4-2 设X, Y相互独立, 且 $X \sim N(720,30^2)$, $Y \sim N(640,25^2)$, 求$Z_1 = 2X + Y$, $Z_2 = X - Y$ 的分布, 并求概率$P\{X > Y\}$, $P\{X + Y > 1400\}$.

解 由X, Y相互独立, 且 $X \sim N(720,30^2)$, $Y \sim N(640,25^2)$, 则$Z_1 = 2X + Y$, $Z_2 = X - Y$ 服从正态分布. 并且

$$E(Z_1) = E(2X + Y) = 2E(X) + E(Y)$$

$$= 2 \times 720 + 640 = 2080,$$

$$D(Z_1) = D(2X + Y) = 4D(X) + D(Y)$$

$$= 4 \times 30^2 + 25^2 = 4225,$$

$$E(Z_2)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)=720-640=80,$$

$$D(Z_2)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

$$=30^2+25^2=1525.$$

故有

$$Z_1\sim N(2080,4225), Z_2\sim N(80,1525).$$

而 $P\{X>Y\}=P\{X-Y>0\}=P\{Z_2>0\}$

$$=1-P\{Z_2\le 0\}=1-\Phi(\frac{0-80}{\sqrt{1525}})$$

$$=\Phi(2.0486)=0.9798,$$

又因为 $X+Y \sim N(E(X)+E(Y), D(X)+D(Y))$,

即 $X+Y \sim N(1360, 1525)$. 故有

$$P\{X+Y>1400\}=1-P\{X+Y\le 1400\}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right)=1-\Phi(1.02)$$

$$=1-0.8461=0.1539.$$

例5-1 设每次试验中，事件A发生的概率为0.5. 共进行了1000次试验，用切比谢夫不等式估计：A发生次数在400到600之间的概率.

解 设事件A发生的次数为随机变量X，则

$$X \sim B(n,\ p),\ n = 1000,\ p = 0.5,$$

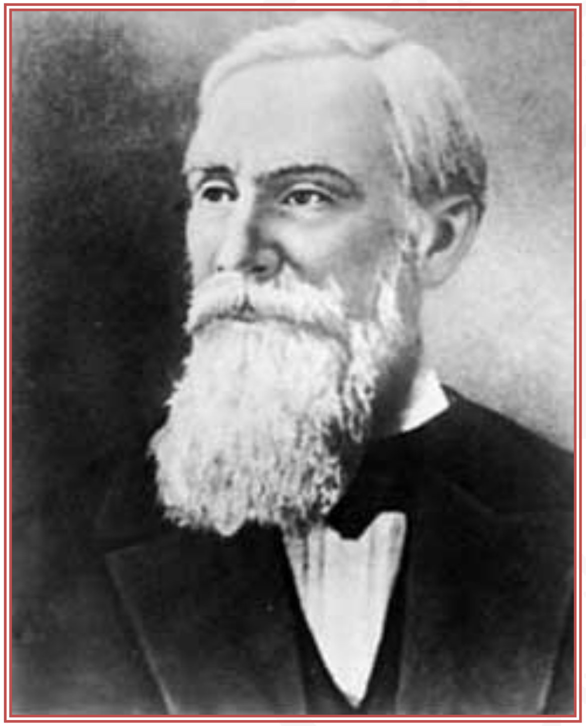
并且 $E(X) = np = 500,\ D(X) = np(1-p) = 250.$

由切比谢夫不等式得

$$P\{400 < X < 600\} = P\{|X - E(X)| < 100\}$$

$$\geq 1 - \frac{250}{100^2} = 0.975.$$

切比谢夫(Pafnuty Chebyshev)



1821-1894

俄国数学家、机械学家. 对数论、积分理论、概率论和力学都有很大贡献.

证明了贝尔特兰公式, 关于自然数列中素数分布的定理, 大数定律的一般公式以及中心极限定理. 创立了切比谢夫多项式.

例6 设X是随机变量, $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$ (μ与σ均为常数),则对任意的常数c,有(D)

(A) $E(X-c)^2 = E(X^2)-c^2$

(B) $E(X-c)^2 = E(X-\mu)^2$

(C) $E(X-c)^2 < E(X-\mu)^2$

(D) $E(X-c)^2 \geq E(X-\mu)^2$

显然答案为D.