西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

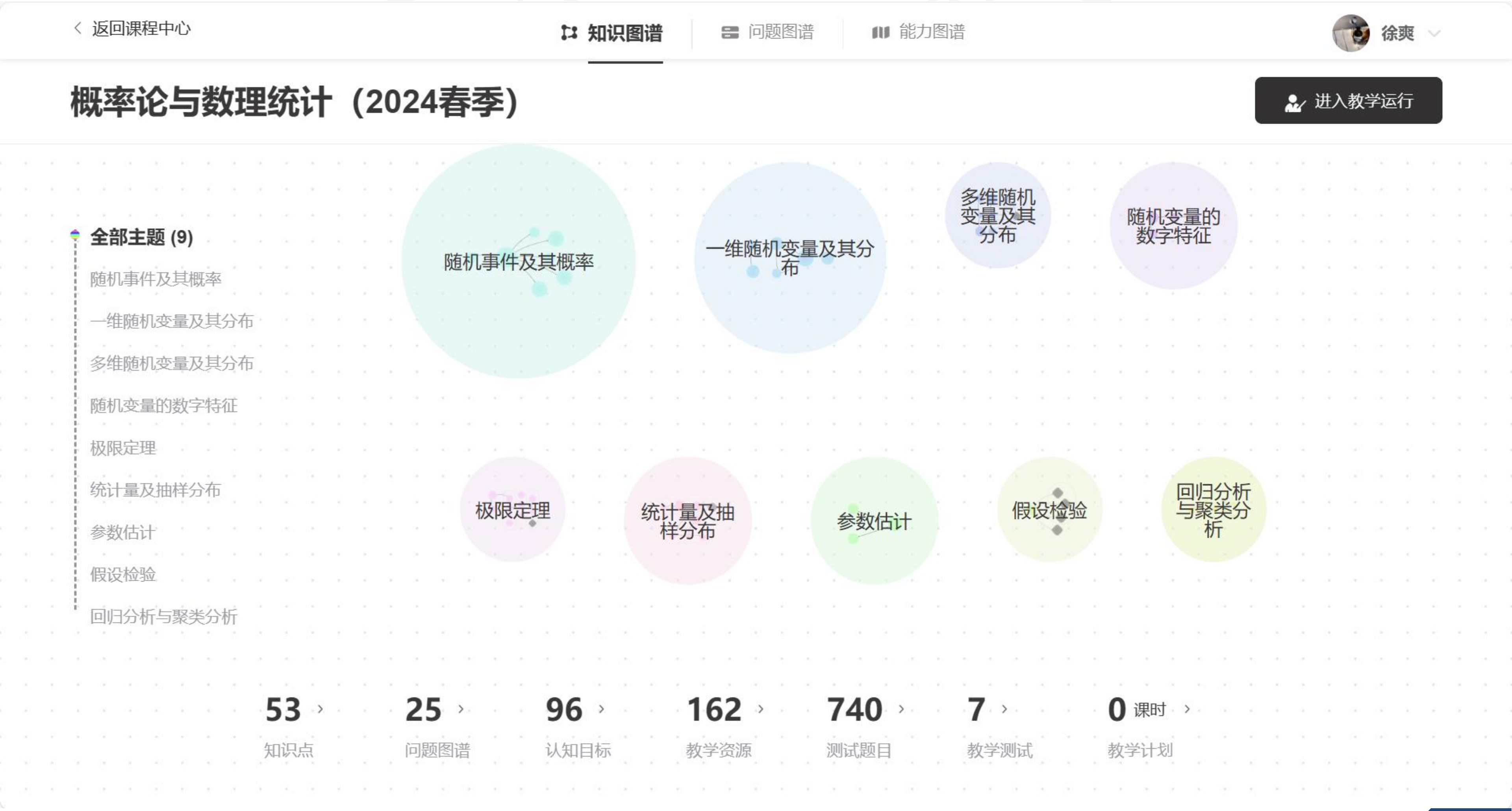
概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

西北工业大学概率统计教研室

智慧树AI课程



第五节 事件的相互独立性

- 一、事件的相互独立性
- 二、独立试验序列概型

一、事件的相互独立性

1. 问题的提出

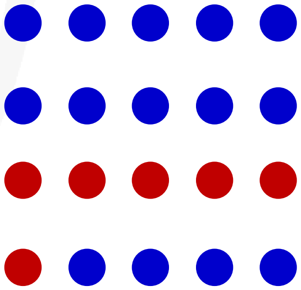
抽签环节

幸运号码：10~15号

A：第1个人抽签，抽中幸运号码

B：第2个人抽签，抽中幸运号码

规则1：无放回抽签



古典概型

$$P(B|A)=\frac{5}{19}<P(B)=\frac{6}{20}$$

规则2：有放回抽签

A:第一人抽中 ⟺ 互不影响 ⟺ B:第二人抽中

古典概型

$$\boxed{P(B|A) = P(B)} = \frac{6}{20}$$

条件概率

相互独立

若 $P(A)>0$，则 $\dfrac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow \boxed{P(AB) = P(A)P(B)}$

2. 两个事件的独立

(1) 定义 设 A, B 是两个事件， 如果满足等式，

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件A, B**相互独立**，简称**独立**。

独立性：事件A的发生不影响事件B发生的概率。

独立 $\Leftrightarrow$ $P(B|A)=P(B)$

$\Leftrightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$

(2) 独立性的判断

甲、乙人同时向目标射击，设 A={ 甲击中目标 }，B={ 乙击中目标 }，问：A, B是否独立？

实际背景 互不影响　　A、B独立

从不含大小王的扑克牌中抽一张，

记 A={ 抽到红色}，B={ 抽到K}，

问：A, B是否独立？

K

52张 $\Rightarrow$ A: 26张 B: $\boxed{K}$ 4张 AB: $\boxed{K}$ 2张

$$\underset{\frac{1}{2}}{P(A)}\ \underset{\frac{1}{13}}{P(B)} = \underset{\frac{1}{26}}{P(AB)} \iff \underset{\frac{1}{13}}{P(B|A)} = \underset{\frac{1}{13}}{P(B)}$$

$\therefore A$、B独立

独立性的判断

实际背景

$$P(AB) = P(A)P(B) \iff P(B|A) = P(B)$$

(3)独立与互斥的关系

互斥是事件间本身的关系;

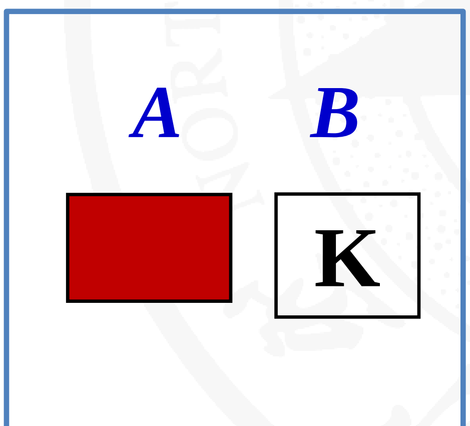
这是两个不同的概念.

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如



$$P(A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{1}{13};\quad P(AB)=\frac{1}{26}$$

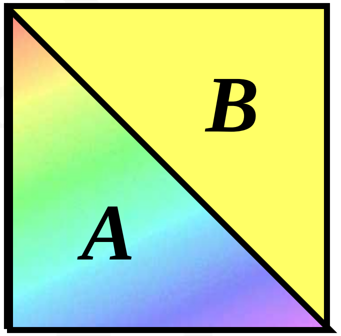
$$\therefore P(AB)=P(A)P(B)$$

但 $AB\neq\Phi$

两事件相互独立 $\not\longrightarrow$ 两事件互斥.

又如:

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$，$AB=\Phi$ (如图)



则 $P(AB)=0,$

$P(A)P(B)=\frac{1}{4},$

故 $P(AB)\neq P(A)P(B).$

两事件互斥 $\not\longrightarrow$ 两事件相互独立.

可以证明： 特殊地，

当 $P(A)>0, P(B)>0$时，有

A与B 独立 $\Rightarrow$ A与B不互斥 (相容),

或 A与B 互斥 $\Rightarrow$ A与B 不独立.

证 (1) 若A与B 独立, 则 $P(AB)=P(A)P(B).$

$\because\ P(A)>0,\ P(B)>0,$

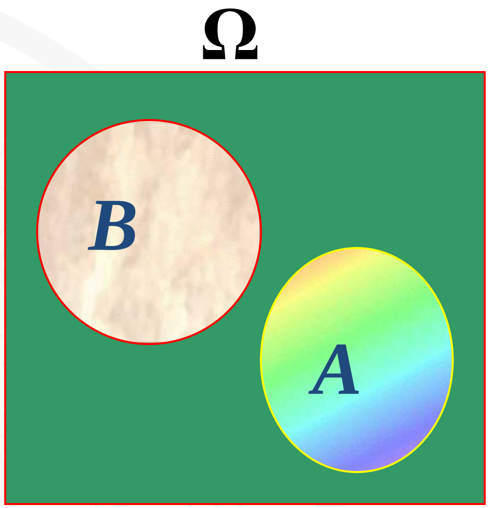
$\therefore\ \ P(AB)=P(A)P(B)>0,$

故 $AB \neq \varnothing,$

即 A与B 不互斥(相容).

(2) 若A与B互斥，则 $AB=\Phi$,

$$P(AB)=0 \neq P(A)P(B)$$



理解：若A与B互斥， B发生时

A一定不发生，即

$$P(A|B)=0 \neq P(A)$$

两事件独立但不互斥，互斥但不独立.

(4) 性质1.5

分析： $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$.

1) 若事件 A 与 B 相互独立, 则以下三对事件也相互独立。

① A 与 $\bar{B}$; ② $\bar{A}$ 与 B; ③ $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$.

证明: ① $\because A\bar{B} = A - AB$, 且 $AB \subset A$

概率性质

$\therefore \quad P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$

$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$.

$\therefore A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立

（2）证明类似。

两事件的独立性关于逆运算封闭

③ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$. $\because \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B}$, (对偶律)

$$\therefore \quad P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]$$

$$= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$$

$$= [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)] \qquad = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

2) 必然事件Ω 及不可能事件Φ与任何事件A相互独立.

证 $\because \quad \Omega A=A, \ P(\Omega)=1,$

$\therefore \ P(\Omega A) = P(A)=1\cdot P(A)= P(\Omega)\, P(A).$

即 Ω与A独立.

$\because \quad \Phi A=\Phi, \ P(\Phi)=0,$

$\therefore \ P(\Phi A) = P(\Phi)=0= P(\Phi)\, P(A).$

即 Φ与A独立.

例1：甲乙**同时**对敌方射击，已知乙击毁敌方的概率为0.5，甲击毁敌方且乙未击毁敌方的概率为0.3。求乙击毁敌方且甲未击毁敌方的概率。

解： $A=\{\text{甲击毁敌方}\}, B=\{\text{乙击毁敌方}\}$

根据题意：$P(B)=0.5$，　　$P(A-B)=0.3$

根据减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$

根据独立性：$P(A)-P(A)P(B)=0.3$　　$\Rightarrow P(A)=0.6$

乙击毁敌方但甲未击毁敌方的概率：

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$
$$=P(B)-P(A)P(B)=0.2$$

例2：小明犹豫是否购买若干个手机，要么选择苹果，要么选择安卓。已知VIVO、OPPO、苹果被选中的概率都为1/3，且选择VIVO、OPPO是独立的。已知小明确实购买若干手机，求手机是VIVO或OPPO的概率。

解： $A = \{\text{买苹果}\}$，$B = \{\text{买VIVO}\}$，$C = \{\text{买OPPO}\}$。

根据题意：

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$，

B、C独立

要么选择苹果，要么选择安卓 $\Rightarrow$ A与B互斥，A与C互斥

已知确实购买手机，手机是VIVO或OPPO的概率：

$$\underbrace{\text{已知确实购买手机}}_{A \cup B \cup C} \qquad \underbrace{\text{手机是VIVO或OPPO}}_{B \cup C}$$

求的概率为$P(B \cup C \mid A \cup B \cup C)$

$$P(B\cup C\,|A\cup B\cup C)=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$$

分子 $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)$

$$=P(B)+P(C)-P(B)P(C)\quad \text{(BC独立)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

分母 $P(A\cup B\cup C)$

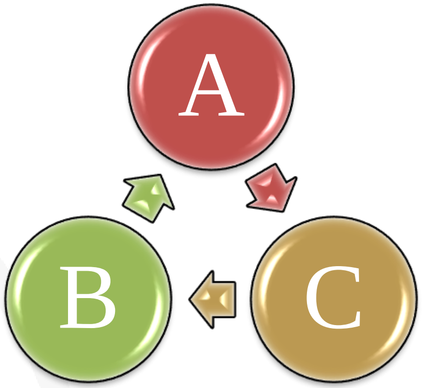
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)=3\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$$

(BC独立,AC互斥,AB互斥)

$$P(B\cup C\,|A\cup B\cup C)=\frac{5}{8}$$

3. 多个事件的独立性



(1) 三个事件的独立性

设A, B, C是三个事件，如果满足等式

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{两两相互独立}\left\{\begin{array}{l}
P(AB)=P(A)P(B) \\
P(BC)=P(B)P(C) \\
P(AC)=P(A)P(C)
\end{array}\right. \\
P(ABC)=P(A)P(B)P(C)
\end{array}\right\}\text{相互独立}
$$

则称事件A, B, C 相互独立。

简单 → 复杂 | 特殊 → 一般

(2) n个事件的独立性

若对于任意 n ($n\geq 2$) 个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$满足等式

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) & \text{两两相互独立} \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases}$$

共C_n^2式子.

共$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$
$=(1+1)^n-C_n^0-C_n^1$
$=2^n-1-n$个式子.

则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立。

$$A_1,A_2,\cdots,A_n\text{相互独立} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} A_1,A_2,\cdots,A_n\text{两两相互独立.}$$

例3（两两独立但整体不独立）：口袋中包含4个球，编号为1、2、3、4，每个球被抽到的概率相同。令$E=\{1,2\}$(表示1或2被抽到), $F=\{1,3\}$, $G=\{1,4\}$. 验证事件E、F、G的独立性。

解：

$$P(EF)=P(E)P(F)=\frac{1}{4},$$

$$P(EG)=P(E)P(G)=\frac{1}{4},$$ 两两独立√

$$P(FG)=P(F)P(G)=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}=P(EFG)\neq P(E)P(F)P(G)$$ 整体不独立

（4）两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n\ (n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 $k\ (2 \leq k \leq n)$ 个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立 .

独立性关于逆运算封闭

4. 独立性的应用

(1)若事件A, B相互独立，则 $P(A\cup B)$

可加性

法1：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\boxed{P(AB)}$

$=P(A)+P(B)-\boxed{P(A)P(B)}$

对偶律

法 2：$P(A\cup B)=1-\boxed{P(\overline{A\cup B})}=1-\boxed{P(\overline{A}\,\overline{B})}$

独立性关于逆运算封闭

$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$

AB 互斥：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(2)设事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，则

对偶律

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

独立性

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n).$$

——n 个独立事件和的概率公式

n个独立事件至少有一个发生的概率等于1减其各自对立事件概率的乘积。

例4 若血清中含肝炎病毒的概率为0.4%，假设每个人血清中是否含肝炎病毒相互独立，求混合3个人血清的血清制品中含肝炎病毒的概率？ $P(B)$ ？

生物制药

解 设A_i={第i个人的血清中含肝炎病毒}，$i=1, 2, 3$

B={血清制品中含肝炎病毒}

$$\because P(A_i)=0.004,\quad A_1, A_2, A_3 \text{ 相互独立},$$

$$A_i (i=1,2,3) \Rightarrow B \quad \Longrightarrow \quad B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

法1 $P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

可加性

$$\boxed{-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3)}$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

独立性

$$\boxed{\begin{array}{l}-P(A_1)P(A_2)-P(A_2)P(A_3)-P(A_3)P(A_1)\\+P(A_1)P(A_2)P(A_3)\end{array}}$$

$$=0.004\times 3-0.004^2\times 3+0.004^3$$

$P(A_i)=0.004$

$$\approx 0.012$$

例4 若血清中含肝炎病毒的概率为**0.4%**,假设每个人血清中是否含肝炎病毒**相互独立**，求混合3个人血清的血清制品中含肝炎病毒的概率？ $P(B)$?

法 2 独立事件和的概率公式

$$P(A_i)=0.004 \Rightarrow P(\overline{A_i})=0.996$$

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) \quad =1-0.996^3 \quad \approx 0.012.$$

B={混合1000个人血清的血清制品中含肝炎病毒}

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1000})$$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_{1000}) \approx 0.9818 \quad >> 0.0004.$$

$$\therefore P(B) >> P(A_i)$$

严格控制血清制品的来源至关重要！

二、独立试验序列概型

1. 定义1.12 (独立试验序列)

在相同条件下，进行一列随机试验$\{E_i\}(i=1,2,\ldots)$，E_i的样本空间为Ω_i，设A_k是E_k中的任一事件，A_k包含于Ω_k，若A_k出现的概率都不依赖于其它各次试验E_i (i不等于k)的结果，则称$\{E_i\}$是**相互独立**的随机试验序列，简称**独立试验序列**.

$$\{E_1, E_2, E_3\ldots E_k,\ldots\}$$

$$\Downarrow$$

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\ldots \Omega_k,\ldots$$

$$\Downarrow$$

$A_1, A_2, A_3\ldots A_k,\ldots$相互独立

2. n重伯努利试验（伯努利概型）

n 次独立、重复的伯努利试验

伯努利试验E：试验的可能结果 $C=A$ 或 $\overline{A}$

1. 重复性： $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p;$

2. 独立性：各次试验的结果C_i相互独立

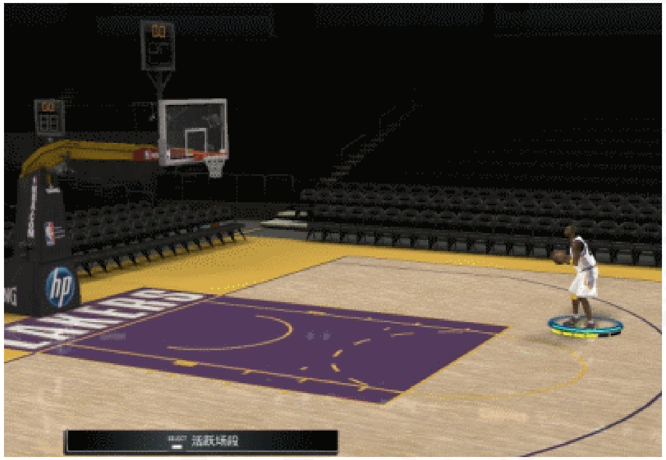
$$P(C_1C_2\cdots C_n) = P(C_1)P(C_2)\cdots P(C_n)$$

瑞士数学家 伯努利
Jakob Bernoulli
(1654-1705)

概率模型

$$\Omega_i = A \cup \overline{A} \quad \mathrm{F} = \{\Omega_i, A, \overline{A}, \Phi\}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \Omega_n = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n) : \omega_n = A\text{或}\overline{A}\}$$



- 投篮游戏，某人命中率为0.3，投篮100次；
- 产品抽样，产品的次品率为0.02，抽取200件；
- 医学检验，某疾病的发病率为0.01，检验1000人。

***n*重伯努利试验**

3. 二项概率公式

定理 如果在伯努利试验中，事件A出现的概率为p $(0 < p < 1)$, 则在n次试验中，A恰好出现 k 次的概率为：

$$P_n(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n;\ q = 1 - p.)$$

且 $$\sum_{k=0}^{n} P_n(B_k) = 1.$$

4.几何公式

C_k：伯努利试验中事件 A 首次发生在第k次，

$$k=1,2,\cdots$$

$A_i(i=1,2,\cdots,k)$：A在第i次试验中发生，则

$$C_k=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k,$$

几何公式

$$P(C_k)=P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_{k-1})P(A_k)=(1-p)^{k-1}p,$$

应用【排队问题】设一个西工大有n个人，翱翔菜鸟驿站设有c个取件设备。但是在设计数量的时候遇到了难题：c太小，经常排长队；c太大又驿站的维护成本太高。如何确定c的大小呢？

分析：让每个人都100%不排队是不可能的。

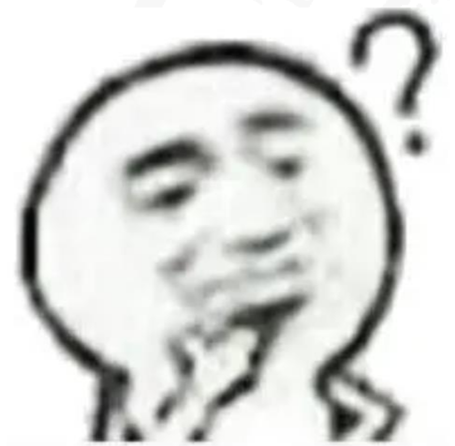
所以，只需要大概率不排特别长的队即可！

应用【排队问题】

- 设一个西工大有n个人，翱翔菜鸟驿站设有c个取件设备。现设在每一时刻，这n个人中每一个是否在取件是独立的，每人在取件的概率都是p。
- 设计要求:“在每一时刻每仪器排队人数不超过m (包括正在取件的那个人)”这个事件的概率小于a (例a=0.80,0.90或0.95).
- 此时c至少为多少？

解： $E_i=\{$第i个人在驿站取件$\}$

c个取件设备的排队人数都低于m人代表什么呢？



驿站里最多有cm个人在取件

记事件$B_k=\{$恰好有k个人在驿站取件$\}$

$$P\{B_0\}+P\{B_1\}+\cdots+P\{B_{cm}\}$$

当$k<cm$， $P\{B_k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

所以，

$$P\{\text{每个设备排队人数不超过m}\} = \sum_{k=0}^{cm} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

只要找到最小的自然数c满足下式即可

$$\sum_{k=0}^{cm} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} > a$$

计算十分复杂，
第2章会讨论如何
进行计算

应用【无穷事件的概率问题】 设甲乙两人下棋。事件E表示甲在一局中获胜，概率为a；事件F表示乙在一局中获胜，概率为b。假设不存在和局的情况，即$a+b=1$。

甲的棋艺高于乙，即$a>b$。考虑到这一点，他们商定最终胜负的规则如下：

甲连胜了三局且乙从未连胜二局，则甲胜；

乙连胜了二局且甲从未连胜三局，则乙胜。

那么，事件A=“甲最终取胜”的概率P(A)为多少？

分析：

在第一局中，要么甲胜（事件E发生，概率a），要么乙胜（事件F发生，概率b）

情况1：首局甲胜。

又可以分成n(=0,1,…)个阶段，每个阶段甲没有连胜3局！

即每个阶段EF或EEF，最后EEE发生。

比如：$\underbrace{\text{EEF EF EEF}}_{n}$ EEE　　　EF和EEF互斥

EF和EEF互斥，所以EF或EEF发生的概率为

$$ab + aab = ab(1 + a)$$

根据独立性，可知经过n个阶段甲最终获胜的概率为

$$[ab(1 + a)]^n a^3$$

所以，考虑$n = 0, 1, \ldots$（无穷种情况），甲最终获胜的概率为

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}|\text{首局甲胜}) = \sum_{n=0}^{\infty} [ab(1 + a)]^n a^3 \quad \Rightarrow \quad \text{几何级数}$$

$$= \frac{a^3}{1 - ab(1 + a)}$$

情况2：首局乙胜。

首局乙胜时甲最终获胜，则第二局必定甲胜，因为乙此时不能连胜2局。

从第2局开始看，情况2又转化成了情况1！

比如： $\text{F}\ \underbrace{\text{EEF}\ \ \text{EF}\ \ \text{EEF}}_{n}\ \text{EEE}$

$$\text{P}(\mathbf{A}|\text{首局乙胜}) = \boldsymbol{b}\cdot\text{P}(\mathbf{A}|\text{首局甲胜})$$

综上所述，$\text{P}(\mathbf{A}) = \dfrac{a^3}{1-ab(1+a)} + \dfrac{a^3b}{1-ab(1+a)} = \dfrac{a^3(1+b)}{1-ab(1+a)}$

课后思考

根据我国民间流传的谚语

VS

三个臭皮匠胜过一个诸葛亮

设计一个概率问题？

课后预习

随机变量的概念

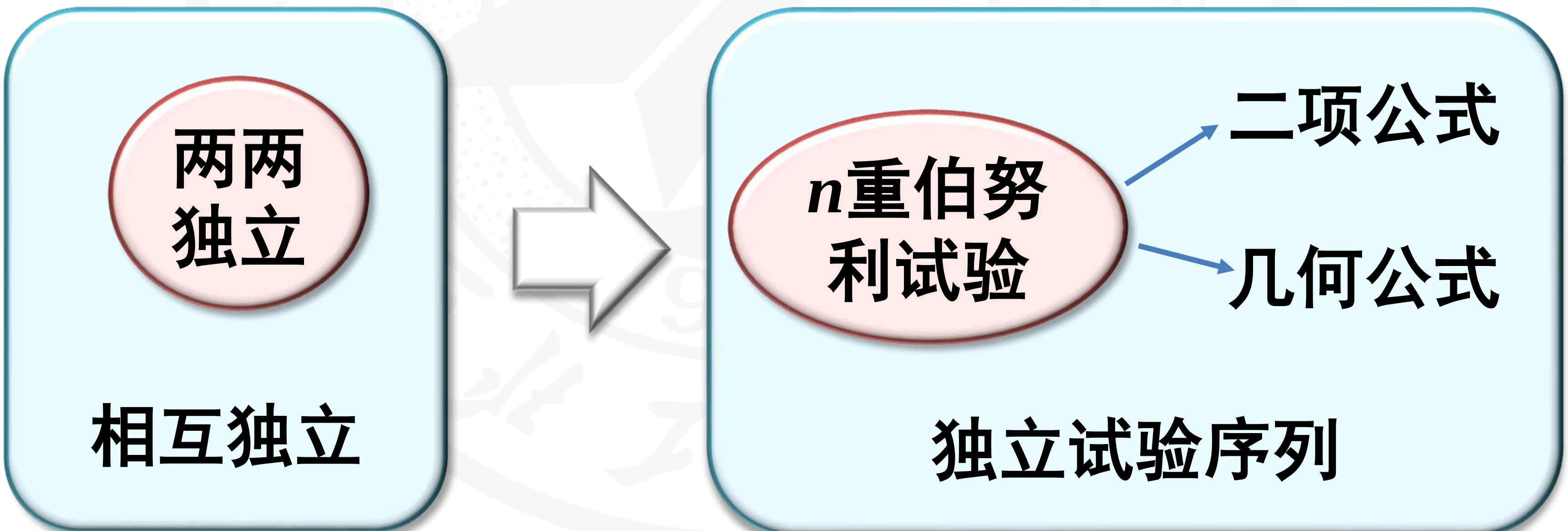
分布函数的定义和性质

随机变量的分类

内容小结

关键词： 两两独立、相互独立、独立事件和的概率公式、n重伯努利试验、二项公式、几何公式

思维导图： 事件的独立性—>试验的独立性



内容小结

1. 两个事件的独立性

$$P(AB)=P(A)\,P(B) \Leftrightarrow P(A/B)=P(A)$$

A, B 两事件互斥 $\Leftrightarrow AB=\Phi$

独立 $\rightarrow$ 不互斥； 互斥 $\rightarrow$ 不独立

➢ **结论：**

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$相互独立.

2. 多个事件的独立性 $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \Leftrightarrow \text{两两相互独立}.$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

$$\Leftrightarrow \text{相互独立}.$$

相互独立 $\Rightarrow$ 两两相互独立

➢ **结论：** 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

3. 独立试验序列

n重独立试验序列 → n重伯努利试验(伯努利概型)

➢ 二项概率公式

n重伯努利试验中，A发生k次的概率

$$p_n(k) = C_n^k \ p^k q^{n-k}$$

其中$P(A) = p, P(\overline{A}) = q,$
$k = 0,1\cdots n$

➢ 几何公式

n重伯努利试验中，A首次在第k次发生的概率

$$P_n(k) = (1-p)^{k-1} p$$

其中$P(A) = p, k = 1\cdots n$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

1-5 事件的独立性

Thank You !

备用题

例1-1 设A,B相互独立，且两个事件仅A发生的概率或仅B发生的概率都是1/4，求$P(A)$与$P(B)$.

解 由A,B独立，知$A,\bar{B}$独立，$\bar{A},B$独立.

$$\therefore \quad P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 1/4,$$

$$P(\bar{A}B) = P(B)P(\bar{A}) = 1/4,$$

$$P(A) = P(A)P(\bar{B}) + P(A)P(B),$$

$$P(B) = P(B)P(\bar{A}) + P(B)P(A)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B),$$

由$P(A) - P(A)P(B) = P(A) - (P(A))^2 = 1/4$

$$\Rightarrow P(A) = P(B) = 1/2.$$

例2 事件A与B相互独立，且$P(A)=0.6$, $P(A\cup B)=0.9$, 则$P(B)=$ _____, $P(A\bar{B})$ ______.

例3 事件A与B互斥（互不相容），且$P(A)=0.6$, $P(A\cup B)=0.9$, 则$P(B)=$ _____, $P(A\bar{B})=$ ______.

例2 事件A与B相互独立，且$P(A)=0.6$, $P(A\cup B)=0.9$, 则$P(B)=$ ____, $P(A\bar{B})$ ______.

解：$\because A, B$相互独立，$P(AB)=P(A)P(B)$

由$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\therefore 0.9=0.6+P(B)-0.6\times P(B)$

$\therefore P(B)=0.75$

$\therefore P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.6\times 0.25=0.15$

例3 事件A与B互斥，且$P(A)=0.6$, $P(A\cup B)=0.9$, 则$P(B)=$ ____, $P(A\bar{B})=$ ______ .

解:

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)$$

$$=0.9-0.6=0.3$$

$$P(A\bar{B})=P(A)=0.6$$

例1 甲, 乙两人同时向敌人炮击,已知甲击中敌机的概率为0.6, 乙击中敌机的概率为0.5, 求 敌机不被击中的概率.

解 设 A={ 甲击中敌机 }, B={ 乙击中敌机 },

C={敌机不被击中 },

则 $C = \bar{A}\bar{B}$.

由于 甲，乙同时射击，甲击中敌机并不影响乙击中敌机的可能性，所以 A与B独立,

因而 $\bar{A}$与$\bar{B}$也独立.

依题设, $P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5$

$$P(C)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$$

$$=(1-0.6)(1-0.5)$$

$$=0.4\times 0.5=0.2.$$

例1 甲, 乙两人**同时**向敌人炮击,已知甲击中敌机的概率为0.6, 乙击中敌机的概率为0.5, 求 敌机不被击中的概率.

解 设 A={ 甲击中敌机 }, B={ 乙击中敌机 },

C={敌机不被击中 },

例1-2 假设$P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$,在以下情况下求$P(B)$:

(1) A,B不相容; (2) A,B相互独立; (3) $A\subset B$.

解 (1) 因为A, B不相容, 所以

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3.$$

(2) A,B相互独立,所以由

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A)P(B)$$

$$=0.7-0.4+0.4\times P(B),\quad 得P(B)=0.5.$$

(3)因为$A\subset B$, 所以$B=A\cup B$,由此得

$$P(B)=P(A\cup B)=0.7.$$

例2-1 设一个口袋里装有四张形状相同的卡片.在这四张卡片上依次标有下列各组数字：110，101，011，000. 从袋中任取一张卡片，记

$A_i = \{$取到的卡片第i位上的数字为1$\}$,

$i = 1, 2, 3.$

证明 (1) A_1, A_2, A_3两两相互独立;

(2) A_1, A_2, A_3不相互独立.

证

$$(1)\quad P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=P(A_2)=P(A_3)$$

$$\because\quad P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2)$$

110， 101，
011， 000

$$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)P(A_3)$$

$\therefore\quad A_1,A_2,A_3$两两相互独立;

$$(2)\because P(A_1A_2A_3)=\frac{0}{4}=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8},$$

$\therefore\quad A_1,A_2,A_3$不相互独立

例2-2 若有一个均匀正八面体，其1, 2, 3, 4面染红色，1, 2, 3, 5面染白色，1, 6, 7, 8面染上黑色, 以A，B，C表示投掷一次正八面体出现红, 白, 黑色的事件，则

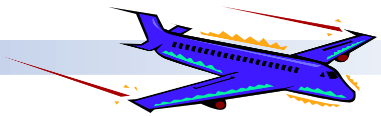
$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C),$$

但

$$P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A)P(B).$$

两两独立 $\not\Longrightarrow$ 相互独立



射击问题

例3-1 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2,若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

解 设事件 A_i 为"第 i 名射手击落飞机",

事件 B 为“击落飞机”, $i=1,2,\cdots,10.$

则 $B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}$,

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - (0.8)^{10} = 0.893.$$

例3-2(小概率事件)

若某种博彩获头奖这一事件A的概率为$\varepsilon=10^{-8}$，试证当购买次数$n\to\infty$时，A迟早会出现的概率为1.

证 以A_k表示A在第k次中出现，$P(A_k)=\varepsilon$，

则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

$$=1-(1-\varepsilon)^n\to 1. \qquad (n\to\infty)$$

例3-3 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解 设 A_i 表示有 i 个人击中敌机,

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中敌机 ,

则 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.7,$

由于 $A_1 = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C,$

故得

$$P(A_1) = P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7$$

$$= 0.36.$$

因为 $A_2 = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC,$

得 $P(A_2) = P(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC)$

$$= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$= 0.41.$$

由 $A_3 = ABC$， 得 $P(A_3) = P(ABC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$P = 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.458.$$

例3-4 要验收一批(100件)乐器.验收方案如下:自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的),如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收.设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的.试问这批乐器被接收的概率是多少?

解 设以 $H_i\ (i=0,1,2,3)$ 表示事件"随机地取出3件乐器,其中恰有 i 件音色不纯",

H_0, H_1, H_2, H_3 是 S 的一个划分,

以A表示事件"这批乐器被接收". 已知一件音色纯的乐器，经测试被认为音色纯的概率为 0.99，而一件音色不纯的乐器,经测试被认为音色纯的概率为0.05，并且三件乐器的测试是相互独立的,于是有

$$P(A|H_0) = (0.99)^3, \quad P(A|H_1) = (0.99)^2 \times 0.05,$$

$$P(A|H_2) = 0.99 \times (0.05)^2, \quad P(A|H_3) = (0.05)^3,$$

而 $P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3}$,

$$P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3},$$

$$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}.$$

故 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A|H_i)$

$$=0.8574+0.0055+0+0=0.8629.$$

事件的独立性在可靠性理论中的应用：

一个元件的可靠性：该元件正常工作的概率.

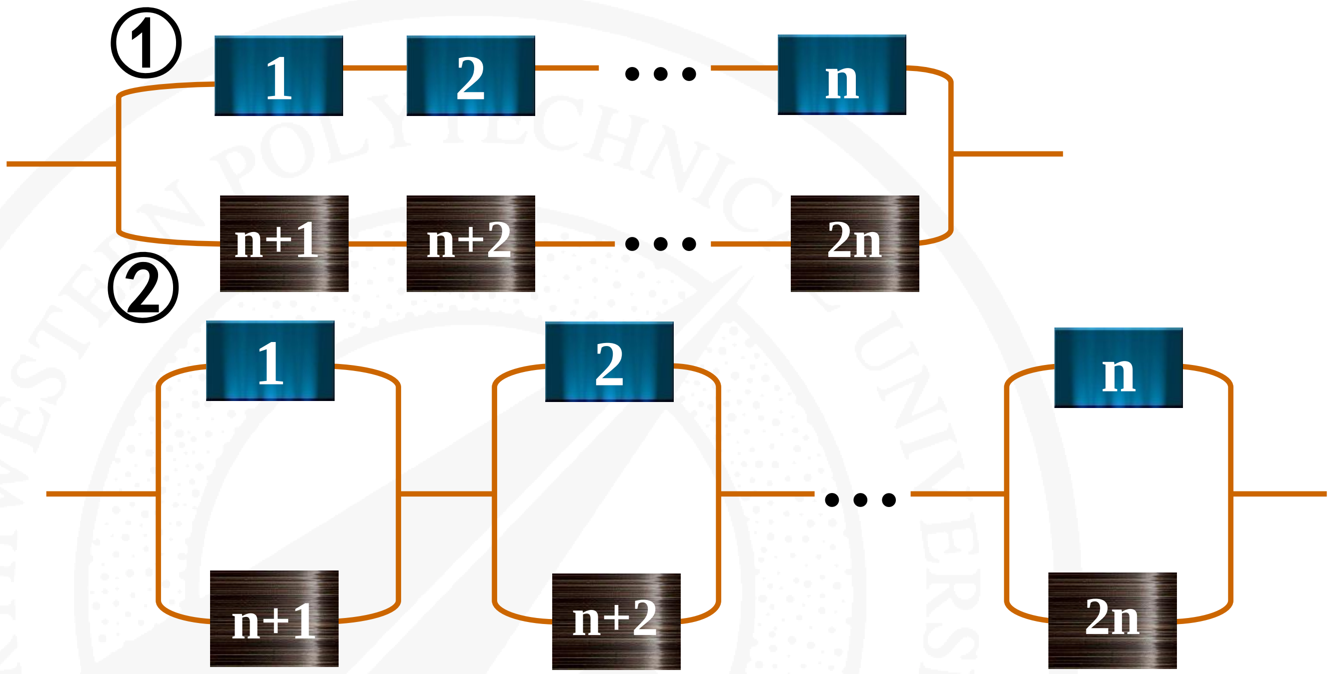
一个系统的可靠性：由元件组成的系统正常工作的概率.

例4 设一个元件的可靠性为r. 如果一个系统由$2n$个元件组成，每个元件能否正常工作是相互独立的.

(1) 求下列两个系统I和II的可靠性；

(2) 问：哪个系统的可靠性更大？

系统I.



系统II.

解

设 $A_i=\{$第i个元件正常工作$\}$,则 $P(A_i)=r$,

$i=1,2,\cdots,n.$

设 B_1={ 系统I正常工作},

考察系统I: B_2={ 系统II正常工作}

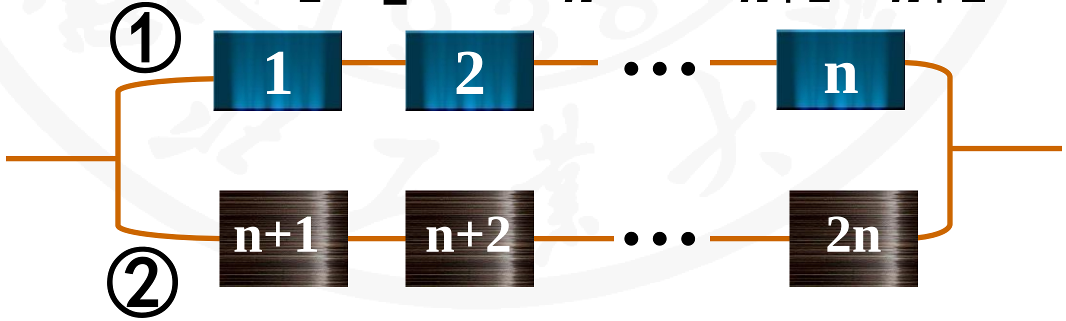
设 C ={ 通路①正常工作 }, D={ 通路②正常工作 }

∵ 每条通路正常工作 ⟺ 通路上各元件都正常工作,

而 系统I正常工作 ⟺ 两条通路中**至少**有一条正常工作.

$$\therefore B_1 = C \cup D = A_1 A_2 \cdots A_n \cup A_{n+1} A_{n+2} \cdots A_{2n}$$

系统I.



$\because \quad P(C) = P(A_1 A_2 \cdots A_n)$

$$= P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) = r^n,$$

$$P(D) = P(A_{n+1}A_{n+2}\cdots A_{2n})$$

$$= P(A_{n+1})P(A_{n+2})\cdots P(A_{2n}) = r^n.$$

$\therefore$ 系统I正常工作的概率:

$$P(B_1) = P(C \cup D)$$

$$= P(C) + P(D) - P(CD)$$

$$= P(C) + P(D) - P(C)P(D)$$

$$= r^n + r^n - r^n \cdot r^n$$

$$= r^n(2 - r^n).$$

考察系统II:

系统II正常工作 $\Leftrightarrow$ 通路上的每对并联元件正常工作.

B_2= { 系统II正常工作}

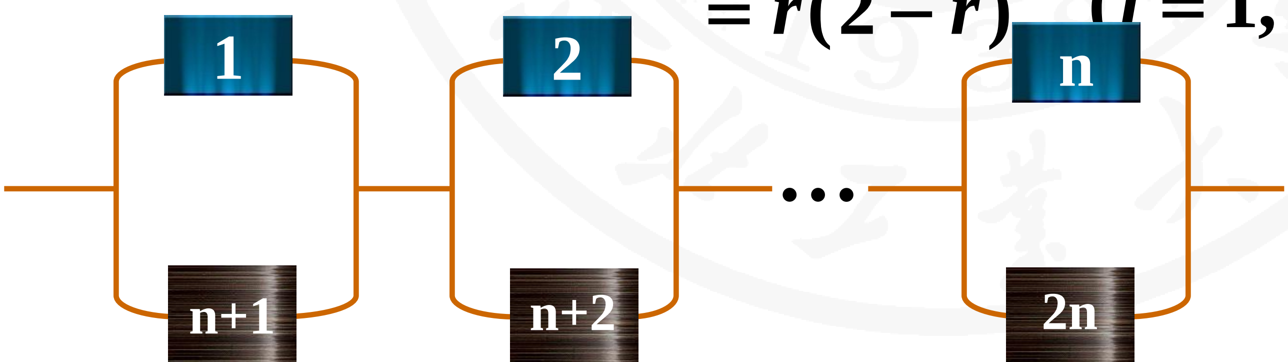
$$= (A_1 \cup A_{n+1})(A_2 \cup A_{n+2})\cdots(A_n \cup A_{2n})$$

$$\because P(A_i \cup A_{n+i}) = P(A_i) + P(A_{n+i}) - P(A_i A_{n+i})$$

$$= P(A_i) + P(A_{n+i}) - P(A_i)P(A_{n+i})$$

$$= r + r - r \cdot r$$

$$= r(2-r) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n.)$$



所以，系统II正常工作的概率：

$$P(B_2)=P(A_1\cup A_{n+1})P(A_2\cup A_{n+2})\cdots P(A_n\cup A_{2n})$$

$$=[r(2-r)]^n=r^n(2-r)^n.$$

(2) 问：哪个系统的可靠性更大？

$\because\quad 0<r<1,$

$(2-r)^n>2-r^n,$

$\therefore\quad P(B_2)>P(B_1).$

令 $f(x)=x^n\quad(n\geq 2)$，则

$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0\quad(x>0)$

故曲线 $y=f(x)$ 是凹的，从而

$$\frac{f(2-r)+f(r)}{2}>f\left(\frac{(2-r)+r}{2}\right)=f(1)=1$$

即 $\dfrac{(2-r)^n+r^n}{2}>1$，亦即 $(2-r)^n>2-r^n$

即系统II的可靠性比系统I的大.

例4-1 设电路由A, B, C三个元件组成，若元件A, B, C发生故障的概率分别为0.3, 0.2, 0.2，且各元件独立工作，是在以下情况下，求此电路发生故障的概率：

(1) A, B, C三个元件串联；

(2) A, B, C三个元件并联；

(3) 元件A与两个并联的元件B及C串联而成.

解 设事件A, B, C分别表示元件A, B, C发生故障.

(1) 因为串联电路中任一元件发生故障，则电路发生故障，于是所求概率为

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$$

$$= 1 - 0.7 \times 0.8 \times 0.8 = 0.552.$$

(2) 因为并联电路中所有元件发生故障，则电路发生故障，于是所求概率为

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

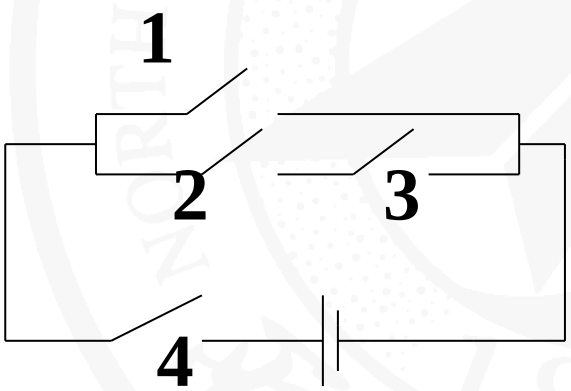
$$= 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.012.$$

(3) 由题意知，所求概率为

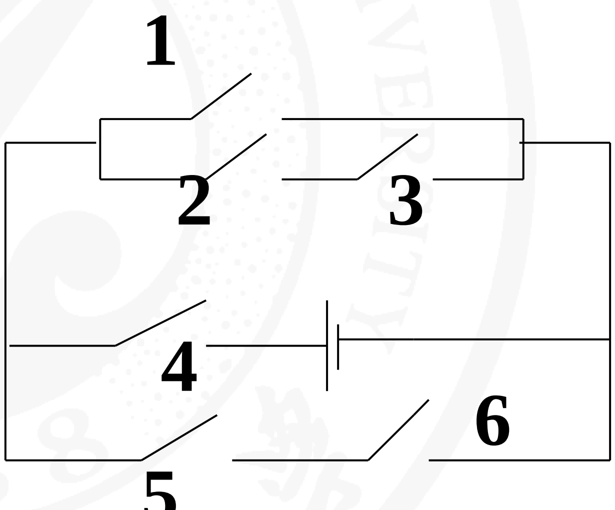
$$P(A \cup BC) = P(A) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.3 + 0.2 \times 0.2 - 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.328.$$

例4-2 某系统如图所示,各继电器接点闭合的概率均为p，且各继电器接点的闭合式相互独立得的，求各系统是通路的概率.



（a）



（b）

解 将系统分为子系统，子系统又分为并联与串联，实行分步骤方法来求系统是通路的概率.

(1)第一个子系统中2与3是串联，线路接通是交事件，由独立性，接通的概率为p^2;而1与2，3是并联

接通的概率用逆概率求，为

$$1-(1-p)(1-p^2)=p+p^2-p^3,$$

第二个子系统接通的概率为p，与第一个子系统串联是交事件，故通路的概率为

$$P=p(p+p^2-p^3)=p^2+p^3-p^4.$$

(2)系统由三个大的系统并联而成，逐个求出是通路的概率再合成求系统的概率.

第一个子系统中1, 2是并联，1, 2与3是串联，所以是通路的概率为

$$[1-(1-p)(1-p)]p = p^2(2-p),$$

第二个子系统是通路的概率是 p,

第三个子系统由5, 6串联而成，是通路的概率为p^2.

于是，系统是通路的概率为

$$P = 1-[1-p^2(2-p)](1-p)(1-p^2)$$

$$= p+3p^2-4p^3-p^4+3p^5-p^6.$$

例5 从1, 2, ..., 10个数字中任取一个，取后还原，连取k次，独立进行试验，试求此k个数字中最大者是$m(m\leq 10)$这一事件B_m的概率.

解 令 A_m表示此k个数字中最大者不大于m这一事件，则

$$P(A_m)=P(C_1C_2\cdots C_n)=\left(\frac{m}{10}\right)^k.$$

显然，$A_m \supset A_{m-1}$，令 $B_m = A_m - A_{m-1}$，则

$$P(B_m)=P(A_m)-P(A_{m-1})$$

$$=\left(\frac{m}{10}\right)^k-\left(\frac{m-1}{10}\right)^k.$$

例5-1 在一批N个产品中有M个次品，每次任取一件，观察后放回，求：

(1) n次都取得正品的概率；

(2) n次中至少有一次取得正品的概率.

解 因为是放回抽样，可以认为各次抽取相互独立，

记A_i记第i次取得合格品事件，

则$P(A_i)=1-M/N$.

$$(1)P_1=P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$=(1-M/N)^n.$$

$$(2)P_2=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

$$=1-(M/N)^n.$$

例5-2 设4次独立试验中事件A出现的概率相等，若已知A至少出现一次的概率为0.59，则A在一次试验中出现的概率为多少?

解 令 $A_n = \{$第n次试验中A发生$\}, n = 1, 2, 3, 4,$

$$P(A) = p,$$

则 $P_2 = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)$$

$$= 1 - (1 - p)^4 = 0.59,$$

解之得

$$P(A) = 0.1998.$$

例6 设某考卷上有10道选择题，每道选择题有4个可供选择的答案，其中一个为正确答案，今有一考生仅会做6道题，有4道题不会做. 于是随意填写，试问能碰对$m(m = 0, 1, 2, 3, 4)$道题的概率.

解 设B_m表示4道题中碰对m道题这一事实,则

$$P(B_m) = C_4^m \left(\frac{1}{4}\right)^m \left(\frac{3}{4}\right)^{4-m}, \quad (m = 0,1,2,3,4)$$

经计算得 $$P(B_0) = C_4^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{4-0} = 0.316.$$

$$P(B_3) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^{4-3} = 0.048$$

例6-1(保险问题)

若一年中某类保险者里面每个人死亡的概率等于0.005，现有10000个这类人参加投保，试求在未来一年中在这些保险者里面:

(1)有40个人死亡的概率;

(2)死亡人数不超过70个人的概率.

解 (1)设A表示40个人死亡, 则

$$P(A)=C_{10000}^{40}(0.005)^{40}(0.995)^{9960}\approx 0.0212,$$

(2)设B表示死亡人数不超过70, 则

$$P(B)=\sum_{k=0}^{70}C_{10000}^{k}(0.005)^{k}(0.995)^{10000-k}\approx 0.997.$$

例6-2 一批产品有20%的次品，进行重复抽样检查，共取5件样品，计算这5件样品由(1)恰好有3件次品的概率, (2)至多有3件次品的概率.

解 设A_0, A_1, A_2, A_3分别表示5件样品中恰好有0件, 1件, 2件, 3件次品, A表示至多有3件次品, 则

(1) $$P(A_3) = C_5^3 (0.2)^3 (0.8)^{5-3},$$

(2) $$P(A) = P(A_0 + A_1 + A_2 + A_3)$$
$$= P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$= \sum_{i=0}^{3} C_5^i (0.2)^i (0.8)^{5-i}.$$

例6-3 甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为p, $p\geq 1/2$,问对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利.设各局胜负相互独立.

解 设 $A=\{甲胜\}$,

E：观察1局比赛甲是否获胜,

E_n：可看成将 E 重复了n次, 这是一个n重伯努里试验.

设在n次试验中，A恰好出现 k 次的概率为:

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

(1) 采用三局二胜制,甲最终获胜, 至少需比赛 2 局,

且最后一局必需是甲胜,而前面甲需胜1 局.

胜局情况可能是:

"甲甲", "乙甲甲", "甲乙甲";

∴ 采用三局二胜制,甲最终获胜的概率:

$$p_1 = P_2(2) + P_2(1)\cdot p$$

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= C_2^2 p^2 + C_2^1 p(1-p).p$$

$$= p^2 + 2p^2(1-p).$$

(2) 采用五局三胜制,甲最终获胜,至少需比赛 3 局,

且最后一局必需是甲胜,而前面甲需胜二 局.

如：比赛3局, 甲的胜局情况是：“甲甲甲”;

比赛4局, 甲的胜局情况可能是：“甲甲乙甲”;

“甲乙甲甲”,“乙甲甲甲”,

比赛5局, 甲的胜局情况是：“甲甲乙乙甲”.....;

∴ 在五局三胜制下,甲最终获胜的概率为:

$$p_2 = P_3(3) + P_3(2)\cdot p + P_4(2)\cdot p \qquad \boxed{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= p^3 + C_3^2 p^3 (1-p) + C_4^2 p^3 (1-p)^2$$

$$= p^3[1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2].$$

由于 $p_2 - p_1 = p^2(6p^3 - 15p^2 + 12p - 3)$

$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1).$$

当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$；对甲说采取五局三胜有利

当 $p = \frac{1}{2}$ 时 $p_2 = p_1 = \frac{1}{2}$. 甲乙获胜概率相同。

当 $p = \frac{1}{2}$ 时 ,$p_2 < p_1$ 对甲说采取三局两胜有利。

例7-1 一袋中装有N-1只黑球及一只白球，每次从袋中随机的摸出一球，并换入一只黑球，这样继续下去，问第k次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解 设A表示第k次摸到黑球这一事件，则$\overline{A}$表示第k次摸到白球，现在计算$P(\overline{A})$.

因为袋中只有一只白球，而每次摸出白球总是换入黑球，故为了第k次摸到白球，则前面的$k-1$次一定不能摸到白球，因此$\overline{A}$等价于下列事实：

在前$k-1$次摸球时都摸出黑球第k次摸出白球，这一事件的概率为

$$P(\bar{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\times 1}{N^{k}}=(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N},$$

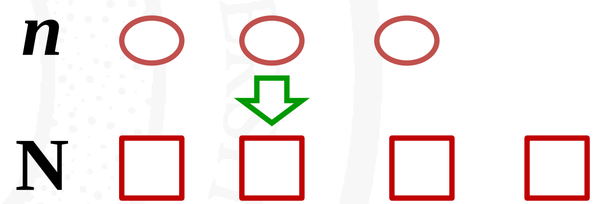
所以

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N}.$$

实例1 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币**抛 n 次**,就是n重伯努利试验.

实例2 **抛**一颗骰子n次,观察是否 “出现 1 点”, 就是 n重伯努利试验.

实例3 (球在盒中的分配问题)

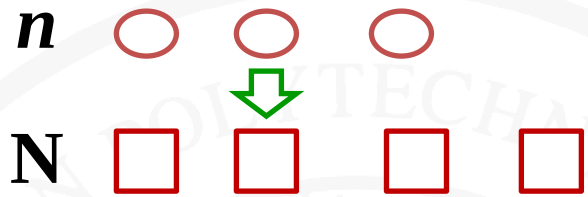


设有n 个球, N个盒子.

试验E: 观察一个球是否投进某一指定的盒中.

A={该球进入指定的盒中},

易知, $P(A)=\dfrac{1}{N}, P(\bar{A})=1-\dfrac{1}{N}.$



***B*={ 某指定的盒中恰有*m*个球 }, 求 *P*(*B*).**

设E_n：观察n个球是否投进某一指定的盒中，

则E_n是将E重复了n次，是n重贝努里试验（贝努里概型）.

$$\therefore \quad P(B) = C_n^m [P(A)]^m [P(\overline{A})]^{n-m}$$

$$= C_n^m \left(\frac{1}{N}\right)^m \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-m}.$$

$$\left(= C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}\right)$$

伯努利简介

伯努利

Jacob Bernoulli

1654-1705

瑞士数学家

父：尼古拉.伯努利

弟：约翰.伯努利

小尼古拉.伯努利

概率论的奠基人

伯努利 (Jacob Bernoulli)简介

伯努利家属祖孙三代出过十多位数学家. 这在世界数学史上绝无仅有.（弟弟: 小尼古拉.伯努利；约翰.伯努利）

伯努利幼年遵从父亲（尼古拉.伯努利）意见学神学,当读了 R 笛卡尔的书后,顿受启发,兴趣转向数学.

1694年,首次给出直角坐标和极坐标下的曲率半径公式,同年关于双纽线性质的论文,使伯努利双纽线应此得名.

1695年提出著名的伯努利方程

$$\frac{dx}{dy} = p(x)y + q(x)y^n$$

此外对对数螺线深有研究, 发现对数螺线经过各种变换后, 结果还是对数螺线,在惊叹此曲线的奇妙之余,遗言把对数螺线刻在自己的墓碑上, 并附以颂词:

纵使变化,依然故我

1713年出版的巨著《推测术》,是组合数学及概率史的一件大事.书中给出的贝努利数、伯努利方程、伯努利分布等, 有很多应用, 还有伯努利定理, 这是大数定律的最早形式.