西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学

数学与统计学院 应用概率统计系

第三节 随机事件的概率

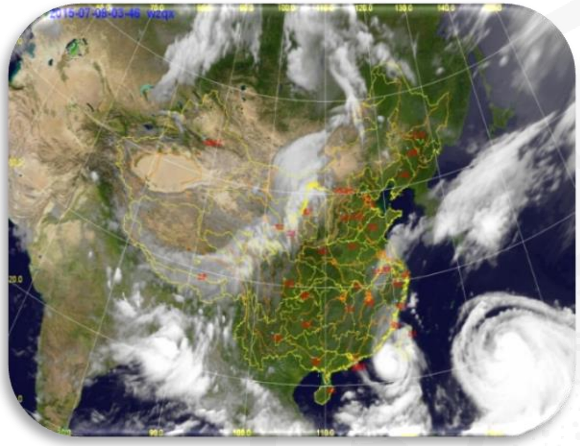
- 一、频率的定义与性质
- 二、概率的统计定义
- 三、古典概型
- 四、几何概型
- 五、概率的公理化定义

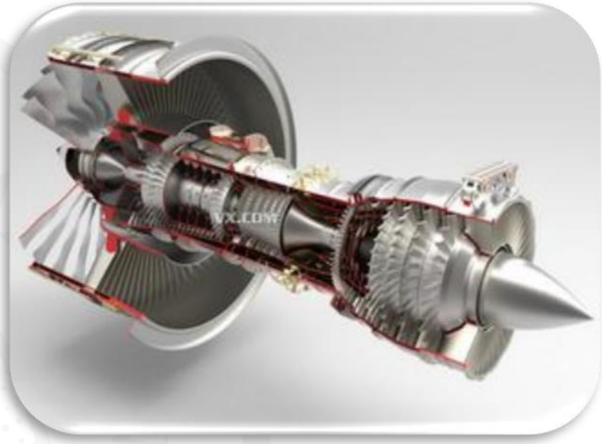
概率论作为数学学科，可以且应该从公理开始建设，和几何、代数的思路一样。

The theory of probability as mathematical discipline can and should be developed from axioms in exactly the same way as Geometry and Algebra.

—— 安德雷·柯尔莫哥洛夫 (Andrey Kolmogorov) | 概率论公理化之父 | 1903 ~ 1987

伊藤清写的《柯尔莫哥洛夫的数学观与业绩》：“…当我得知苏联伟大的数学家，84岁的Kolmogorov教授于1987年10月20日离开人世时，我感到像是失去了支柱那样悲哀与孤寂。在我还是学生时（1937年）读了他的名著《概率论的基本概念》之后，便立志钻研概率论，并持续了50年之久。对于我来说，Kolmogorov就是我的数学基础。





随机现象 → 统计规律性 → 随机事件的**概率**

↑

随机试验

客观存在，如何度量

一、频率的定义与性质

1. 定义

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

演示实验

实例 将一枚硬币抛掷 100\200\300…\800次, 记录观察正面出现的次数.

次数	第1次试验频率	第2次试验频率
100		
200		
300		
400		
500		
600		
700		
800		

实例 将一枚硬币抛掷 100\200\300…\800次, 记录观察正面出现的次数.

结论:

(1)频率 f 具有随机波动性

(2)随 n 的增大,频率 f 越来越稳定.

试验者	n	μ_n	f
德.摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
杰万斯	20480	10379	0.5068
罗曼.诺夫斯基	80640	39699	0.4932

$$f_n \approx 0.5 = P(\text{正面})$$

频率的稳定性

2. 频率的性质

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

设 A 是随机试验 E 的任一事件, 则

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f(\Omega)=1, \quad f(\varnothing)=0$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两互斥的事件, 则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

二、概率的统计定义

1.定义1.2

在随机试验中,若事件A出现的频率 $\frac{n_A}{n}$ 随着试验次数n的增加,趋于某一常数 p, $0 \le p \le 1$, 则定义事件A的概率为p ,记作$P(A)$。

2. 性质1.1 (概率统计定义的性质)

(1) 对任一事件A ,有 $0 \le P(A) \le 1$; 非负性

(2) $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$; 规范性

(3) 对于两两互斥的有限多个事件$A_1, A_2, \cdots, A_m$,

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m).$$

有限可加性 (证明略)

注 1° 概率的统计定义直观地描述了随机事件发生的可能性大小，反映了概率的本质内容。

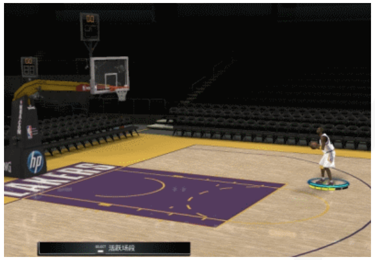
2° $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$与$P(A)$的区别

$f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$是一个随机数, 它与随机试验有关;

而 $P(A)$ 是一个确定的数!

当试验次数n很大时，有

频率$f_n(A) \approx$概率$P(A)$



投篮的命中率?

$$f_n \approx 0.3 \ = P(\text{命中})$$

3° 概率统计定义的缺陷

(1) 无法根据此定义计算某事件的概率..

需要作大量的试验, 才能观察出 $f_n(A)$ 的稳定值。

(2) 在数学上不够严谨.

如何求$P(A)$?

三、古典概型

古典概型随机试验

1.古典概型定义

若随机试验E具有下列两个特征：

1) 有限性

样本空间Ω中，只有有限个样本点

即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}.$

2) 等可能性

$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$发生的可能性相等.

则称E所描述的概率模型为古典概型.

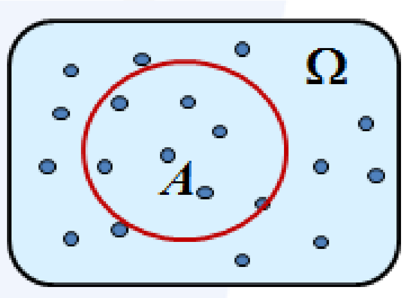
法国数学家
拉普拉斯
P.-S. Laplace
(1749-1827)

2. 古典概型中概率的计算公式

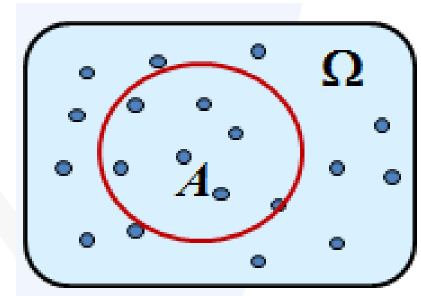
定义1.3 设古典概型随机试验 E 的样本空间Ω由n 个样本点构成，A 为 E 的任意一个事件, 且包含 n_A个样本点，则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\Omega\text{所含样本点的总数}}=\frac{n_A}{n}$$

称此为古典概型的概率.



3.性质1.2(古典概型的概率性质)



设 A 是随机试验 E 的任一事件,则

(1) $0 \le P(A) \le 1$; **非负性**

(2) $P(\Omega) = 1, \quad P(\varnothing) = 0$; **规范性**

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两互不相容的事件,则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m).$$

有限可加性 (证明略)

$$(n=2) \Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

例1：已知5个产品中混有2个次品，现每次一个地逐个随机抽取检验．求

（I）恰好查三次就抽到2个次品的概率；

（II）不超过三次就抽到2个次品的概率.

解：（I）恰好查三次就确定2次品

第1个次品前两次检验已查出，第2个次品在第三次抽检中查到

Step1：计算样本空间的样本数.

5个位置放2个次品：$C_5^2 = 10$种

Step2：计算事件的样本数.

第3次必为次品，前2个位中取一放次品共$C_2^1=2$种。

概率$P=2/10=0.2$。

（II）不超过三次就确定2次品

Step2：计算事件的样本数.

不超过三次的情况是在前三次检查中取放两次品，即$C_3^2=3$ 种。

概率$P=3/10=0.3$。

3. 常见的三种古典概型基本模型

(1) 摸球模型（有/无放回）

同类型的问题还有：

1) 中彩问题；　2) 抽签问题；

3) 分组问题；　4) 产品检验问题；

5) 鞋子配对问题；

6) 扑克牌花色问题；

7) 英文单词、书、报及电话号码等排列、组合问题.

3. 常见的三种古典概型基本模型

(1) 摸球模型（有/无放回）

(2) 分配模型（有/无序）

同类型的问题有：

1) 球在杯中的分配问题；(球→杯)

2) 生日问题；（人→日，N=365天)

3) 旅客下站问题；(旅客→站)

4) 印刷错误问题；(印刷错误→页)

5) 性别问题 （人→性别)

3. 常见的三种古典概型基本模型

(1) 摸球模型（有/无放回）

(2) 分配模型（有/无序）

(3) 随机取数模型（取后还原/不还原）

备用题

小结

假设条件 → 数学模型 → 随机事件的概率

① Ω的有限性

② ω的等可能性

古典概型

$$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

四、几何概型

实例 P(特等奖) ？

古典概型 $\begin{cases} \text{有限性} & ✗ \\ \text{等可能性} & ✓ \end{cases}$

θ: 指针起止位置转过的绝对角度

$$\Omega = \{\theta \in R \mid 0 \le \theta \le 360\}$$

数学模型 ？

四、几何概型

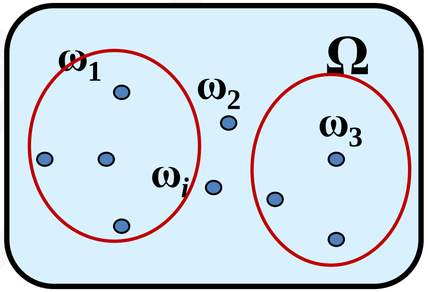
几何概型随机试验

1. 定义1.4 若试验E具有下列两个特征：

1)无限性： 样本空间Ω是几何空间中的一个区域，包含无穷多个样本点，每个样本点由区域 Ω 内的点的随机位置所确定，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n \cdots\}.$

2)等可能性： 每个样本点落在Ω内几何度量相同的子区域内等可能的，

则称E所描述的概率模型为几何概型。



注 1°：

几何空间	一维	二维	三维	…
几何度量	长度	面积	体积	…

注 2°：

记录子弹落点位置(x,θ)

观察乘客到达车站的时刻t

记录长度$(x, y, a-x-y)$

无限性

等可能性

几何概型随机试验

2.定义1.5(几何概率的定义)

对于随机试验E，以$\mu(A)$表示事件A的几何度量，Ω为样本空间. 若 $0<\mu(\Omega)<+\infty$, 则对于任一事件A，其概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

一维　　二维　　三维

$$P(A)=\frac{A\text{的长度}}{\Omega\text{的长度}};\quad P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}};\quad P(A)=\frac{A\text{的体积}}{\Omega\text{的体积}}.$$

3.性质1.3(几何概型的概率性质)

(1) 对任一事件A,有 $0 \le p(A) \le 1$; 非负性

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$; 规范性

(3) 对于可列多个两两互斥的事件$A_1, A_2, \cdots,$

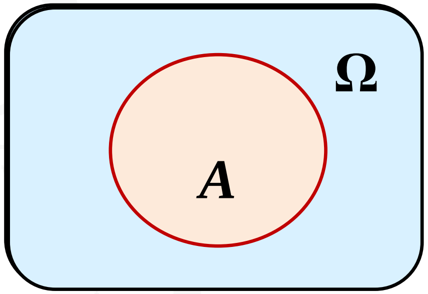
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \cdots)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) + \cdots.$$

可列/完全可加性 （证明略）

注

区别与联系

$$A \to P(A)$$



古典概型

有限性、等可能性

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

离 散

几何概型

无限性、等可能性

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

连 续

例2：判断下列说法是否正确。

- 若$P(A)=P(B)$，则$A=B$。

  不正确。反例：A=“硬币正面朝上”，B=“反面朝上”。

- 若$P(A)=0$，则$A=\emptyset$。

  不正确。反例：向区间[0, 1]中随机投掷一个质点，A=“点落在0.1”，则$P(A)\neq 0$.

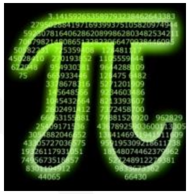
- 若$P(AB)=0$，则A,B互斥。

  不正确。反例：A=“点落在0.1”，B=“点落在0.1或0.2”.

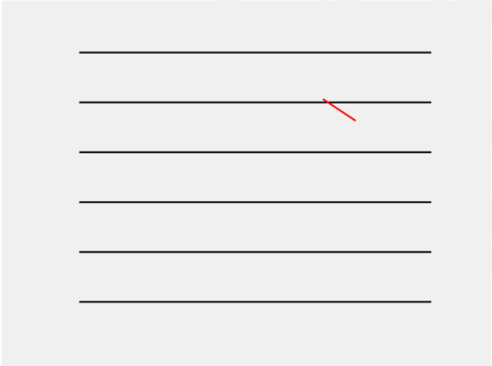
- 若$P(A)=P(AB)$，则$A\subset B$。

  不正确。反例：B=“点落在0.2”.

例3　蒲丰投针试验



在平面上画有等距离的一些平行线，向平面随机投掷长为平行线间距一半的的小针，记录投针次数和针与平行线相交的次数。



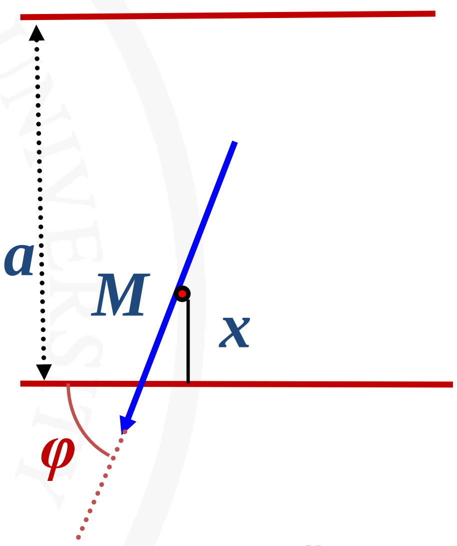
$$\frac{2212}{704} \approx 3.142$$

理论依据？

法国数学家、自然科学家
Georges Louis Leclere de Buffon (1707-1788)

《算术试验》

蒲丰投针试验 在平面上画有等距离a ($a>0$)的一些平行线，向平面**随机**投一长为l ($l<a$)的针，试求**针与平行线相交的概率?**



解：

假设

M: 针的中心位置

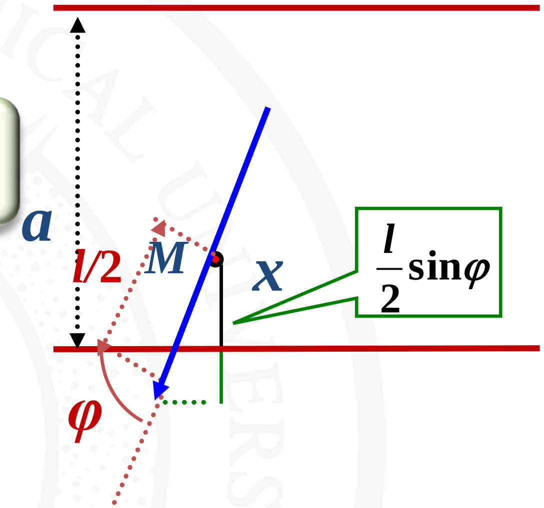
x: M与最近一平行线的距离

φ :针与平行线的夹角

位置：(x, φ)

则样本空间Ω： $0 \le x \le \dfrac{a}{2}, \quad 0 \le \varphi \le \pi,$

样本空间Ω： $0 \le x \le \dfrac{a}{2},\quad 0 \le \varphi \le \pi,$



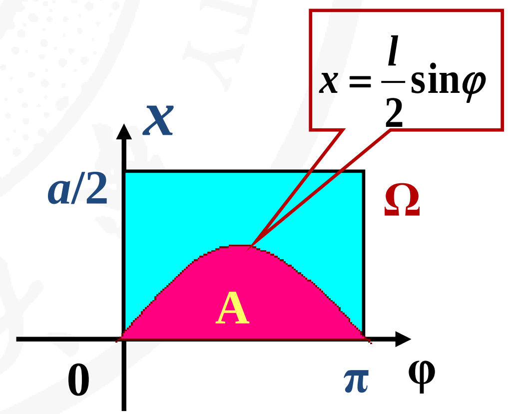
无限性 → 等可能性 → 几何概型

设 A=“针与一平行线相交”，则

$$A:\quad 0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

$$\therefore P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$= \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi\, d\varphi}{\frac{a}{2}\pi} = \frac{2l}{\pi a}.$$



蒲丰投针试验的意义

m: 针和平行线相交次数

n: 投针试验次数

$$f_n = \frac{m}{n} \overset{n >> N}{\approx} P(A) = \frac{2l}{a\pi} \Rightarrow \pi \approx \frac{2ln}{am}$$

历史上一些学者的计算结果(直线距离a=1)

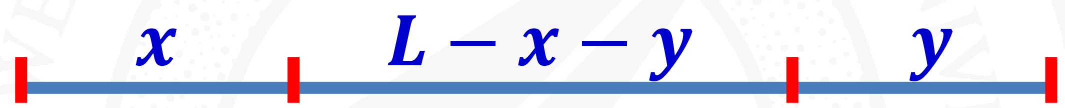
试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De M					
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

用几何概型 性数学问题！

蒙特卡罗方法

例4：有一根长为L的木棒，将其任意折成三段，记事件A为“中间一段为三段中的最长者”，求 $P(A)$.

解： Step1：确定样本空间.



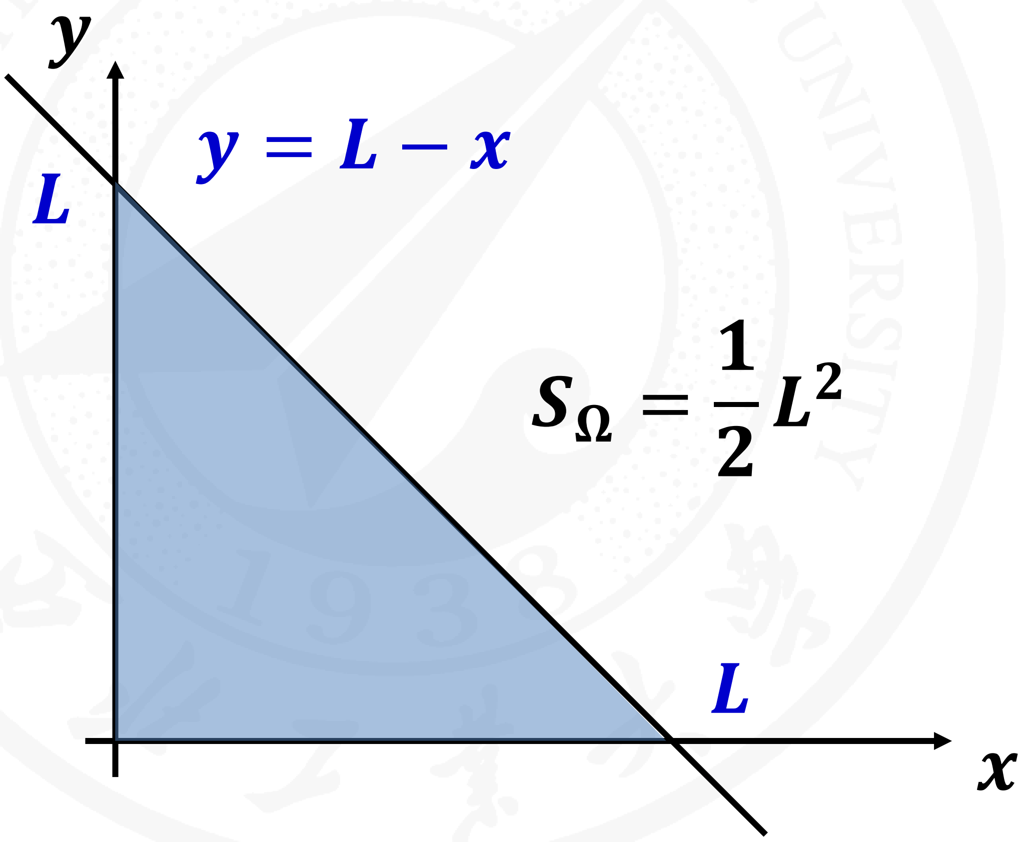
任意折成三段需满足的条件
$$\begin{cases} 0 \le x \le L \\ 0 \le L-x-y \le L \\ 0 \le y \le L \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \le x \le L, 0 \le x + y \le L, 0 \le y \le L\}$$

样本空间

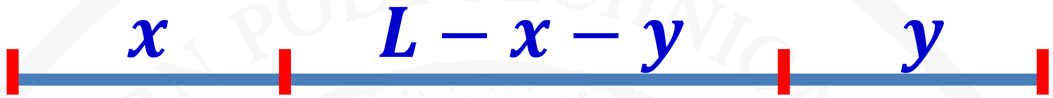
$$\Omega=\{(x,y)|0\le x\le L,0\le x+y\le L,0\le y\le L\}$$

样本空间



$$S_\Omega=\frac{1}{2}L^2$$

Step2：确定事件A对应的子区域.



事件A还需满足的条件

$$\begin{cases} x \le L - x - y \\ y \le L - x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le L - 2x \\ y \le \dfrac{L-x}{2} \end{cases}$$

事件A对应的子区域

$$\Omega_A = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le y \le L - 2x\,, 0 \le y \le \frac{L-x}{2} \right\}$$

样本空间

$$\Omega=\{(x,y)|0\le x\le L,0\le x+y\le L,0\le y\le L\}$$

事件A对应的子区域

$$\Omega_A=\left\{(x,y)|0\le y\le L-2x\,,0\le y\le \frac{L-x}{2}\right\}$$

$$S_{\Omega_A}=\frac{1}{6}L^2$$

$$P(A)=\frac{1}{3}$$