西北工業大學

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第六章 参数估计

第一节 参数的点估计

- 一、问题的提出
- 二、矩估计法
- 三、最大似然估计

点估计

(1)当总体X分布函数$F(x;\theta)$形式已知，参数θ未知

例如 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X\sim B(n,p), X\sim P(\lambda)$,

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \xrightarrow{\text{估计}} \theta$$

(2)当总体X分布函数$F(x;\theta)$形式未知

$$\bar{X} \xrightarrow{p} EX \qquad S_n^{*2} \xrightarrow{p} DX$$

这类问题称为**参数的点估计。**

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \xrightarrow{\text{估计}} \theta, E(X^k)$$

解决上述参数 θ 的点估计问题的思路是: 设法**构造一个合适的统计量** $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 对 θ 作出合理的估计.

在数理统计中称统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2,\cdots, X_n)$ 为 θ 的**估计量**, $\hat{\theta}$ 的观测值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 θ 的**估计值**.

点估计常用方法：**矩估计**和**最大似然估计**法.

二、矩估计法

英国统计学家皮尔逊(K.Pearson)在1894年提出.

基本思想:

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\text{估计}} E(X^k)$$

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X - \overline{X})^k \xrightarrow{\text{估计}} E[X - E(X)]^k;$$

并由此得到未知参数的估计量 .

理论基础

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{p} E(X^k)$$

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X - \bar{X}\right)^k \xrightarrow{p} E[X - E(X)]^k;$$

特别的

$$A_1 = \overline{X} \xrightarrow{P} EX$$

$$B_2 = S_n^2 \xrightarrow{P} DX$$

例1 设总体X服从泊松分布$P(\lambda)$，求参数λ的矩估计量.

解 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的一个样本，

由于$E(X)=\lambda$，可得

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\hat{E}X=\hat{\lambda}$$

$$\therefore \hat{\lambda}=\overline{X}$$

矩估计法：

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m)$

$(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m)$ 是 m 个待估计的未知参数 。

(1) 计算总体直到*m*阶矩

$$\alpha_k = E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m) = \alpha_k(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m)$$

(2) 用样本矩作为总体矩的估计， 即令

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \hat{\alpha}_k = \alpha_k\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots\hat{\theta}_m\right) \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

这便得到含m个参数$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2, \cdots$，$\hat{\theta}_m$的m个方程组,

(3) 解该方程组得

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

以$\hat{\theta}_k$作为参数θ_k的估计量. 这种求出估计量的方法

称为**矩估计法** .

例2 求总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 的矩估计.

解 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个样本,

(1)求各阶矩 $\begin{cases} E(X) = \mu \\ E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$

(2)用样本矩估计总体矩，故令

$$\begin{cases} \overline{X} = \hat{E}(X) = \hat{\mu} \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \hat{E}(X^2) = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 \end{cases}$$

(3)解方程，得参数的矩估计

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = S_n^2 \end{cases}$$

例3 设总体 X 服从区间上 $[\theta_1,\theta_2]$ 的均匀分布,求参数 θ_1,θ_2 的矩估计量.

解 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个样本,容易求得

(1)求各阶矩

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ D(X) = \dfrac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12} \end{cases}$$

(2)用样本均值/方差估计总体均值方差，故令

$$\begin{cases} \bar{X} = \hat{E}(X) = \dfrac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2} \\ S_n^2 = \hat{D}(X) = \dfrac{\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1\right)^2}{12} \end{cases}$$

(3)解得 θ_1和 θ_2 的矩估计量为

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{3} S_n$$

$$\hat{\theta}_2 = \bar{X} + \sqrt{3} S_n$$

例4 设总体X的分布 密度为

$$p(x;\ \theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}\quad(-\infty<x<+\infty,\ \ \theta>0)$$

$X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$为总体X的一个样本，求参数θ的矩估计量.

解 由于$p(x;\ \theta)$只含有一个未知参数θ,一般只需求出$E(X)$便能得到θ的矩估计量，但是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=0$$

即$E(X)$不含有θ,故不能由此得到θ的矩估计量.

法一：由于

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

令 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\hat{E}\left(X^2\right)=2\hat{\theta}^2$

于是解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

法二：本例 θ 的矩估计量也可以这样求得

$$E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x}{\theta}}=\theta$$

故令

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i| = \hat{E}|X| = \hat{\theta}$$

即 θ 的矩估计量为

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|}$$

该例表明参数的**矩估计量不唯一**.

三、最大似然估计

科比和一位同学一起打篮球，已知投中一球。

谁投中的

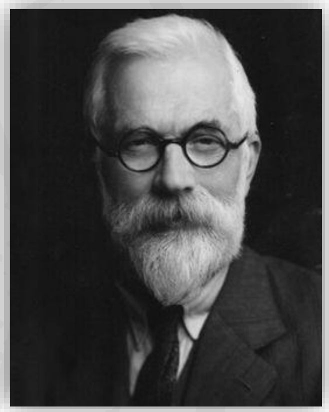
科 比

科比投中的概率最大

最大似然估计

—用看起来最像的去估计

德国数学家、物理学家、
天文学家
Gauss (1777-1855)



英国统计与遗传学家，
R. A. Fisher
(1890～1962)

1. 基本思想

最大似然原理

试验中概率最大的事件最有可能出现

即如有一个试验若干个可能结果*A*, *B*,C… , 若在一次试验中，结果*A*出现，则认为*A*出现的概率最大。

例 5

实际问题

数学问题

100个球：白球和黑球

90:10　10:90

从盒中抽1个球，试根据**抽取的球的颜色**估计黑球的概率 p。

$$p = 1/10, 9/10?$$

分析：

当取白球，要使 $P\{\text{白球}\} = 1 - p$ 最大，$\hat{p} = 1/10$

当取黑球，要使 $P\{\text{黑球}\} = p$ 最大，$\hat{p} = 9/10$

A发生，$\boxed{P\{A;\ \theta\}}$，则由 $P\{A;\ \theta\}_{\max} \Rightarrow \hat{\theta}$

2、似然函数

样本取样本值的概率 $P\{A;\ \theta\}$

设总体$X\sim p(x;\ \theta)$，其中$\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$是未知参数，

则$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$的联合分布为$\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)$。

当给定样本值$(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$后，它只是参数θ的函数，

记为$L(\theta)$，即

似然函数

$$\boxed{L(\theta)=P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)}$$

$L(\theta)_{\max}$?

3、 最大似然估计

$$p\{A;\ \theta\} \Rightarrow L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)\quad L(\theta)_{\max}?$$

定义6.2

如果$L(\theta)$在$\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$处达到最大，则称

$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$分别为$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的最大似然估计值。

若将$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$中的样本值换成样本，

则$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$为$\hat{\theta}_i$的最大似然估计量。

4、似然方程

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\ \theta)$

对数似然函数 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\ \theta)$

由于 $\ln L(\theta)$ 与 $L(\theta)$ 有相同的最大值点.因此 $\hat{\theta}$ 为最大似然估计的必要条件为

$$\boxed{\left.\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0} \quad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

称为**似然方程**，其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$.

5、一般步骤

1° 求似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\ \theta)$$

2° 求出 $\ln L(\theta)$ 及似然方程

$$\boxed{\left.\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0}$$

$$(i=1,2,\cdots,\ m)$$

3° 解似然方程得到最大似然估计值

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m)$$

$$(i=1,2,\cdots,\ m)$$

4° 最后得到最大似然估计量

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_m)$$

$$(i=1,2,\cdots,\ m)$$

例6 假设某机场每天的乘客人数X服从泊松分布$P(\lambda)$，其中λ为未知参数。现统计一年数据，试估计参数λ的最大似然估计值。

55	55	56	57	44	56	54	60	53	57	64	55	50	52	53	55	43	52	54	53	57	33	56	52
61	51	58	65	69	69	58	59	47	66	62	59	45	57	68	51	68	59	55	73	63	56	65	61
54	66	55	62	62	60	53	53	59	58	50	55	59	68	59	58	62	47	64	56	73	35	62	66
55	60	63	55	38	52	54	48	48	52	59	53	53	56	60	48	57	54	62	45	55	51	79	61
61	48	69	62	57	55	53	52	63	61	53	47	55	54	61	48	64	56	48	73	60	54	63	58
59	55	66	50	56	55	63	52	60	55	51	54	40	55	55	65	45	62	51	64	57	52	74	55
46	58	56	61	40	57	49	65	60	69	66	58	67	45	58	58	47	43	57	53	68	66	64	50
61	63	73	55	41	65	52	62	59	63	55	75	50	60	47	37	49	72	60	44	53	53	61	64
60	52	44	60	67	60	40	52	69	54	47	59	63	62	54	57	44	66	60	59	54	59	80	67
64	57	47	44	56	51	48	62	46	64	56	57	52	55	58	71	68	55	70	57	60	41	50	52
49	61	55	54	66	61	44	45	49	55	51	64	56	50	55	50	67	51	58	61	52	60	54	57
69	64	64	69	50	51	60	65	69	61	46	52	48	54	53	60	58	54	64	52	70	69	67	48
54	46	47	51	58	53	61	63	47	67	57	60	53	54	66	50	60	61	42	42	65	58	54	53
61	62	55	57	52	48	54	61	71	66	55	54	54	52	49	55	51	62	57	41	50	65	53	61
64	66	71	58	57	58	69	48	55	56	51	48	64	60	60	57	59	54	52	56	44	44	55	55

解 由于总体 $X \sim P(\lambda)$，故有

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

1、似然函数：

$$L(\lambda)=P\{X_1=x_1,\ X_2=x_2,\cdots,\ X_n=x_n\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{-n\lambda}\Big/\prod_{i=1}^{n}x_i!$$

2、对数似然函数：

$$\ln L(\lambda)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\ln\prod_{i=1}^{n}\boxed{x_i!}-\boxed{n\lambda}$$

似然方程 $$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0$$

3、求解似然方程

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$$

即 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ 为**最大似然估计值**

4、由已知数据计算

$$\hat{\lambda}=\bar{x}\quad=\frac{20380}{360}\approx 56.61\qquad\therefore X\sim P(56.61)$$

例7 设总体

$$X \sim p(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases},\quad \theta>0未知,$$

试求参数θ**矩估计量**和**最大似然估计量**.

解 (1)设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体X的样本,

其观测值为$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p(x;\theta)dx$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\cdot e^{-\frac{\theta}{x}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\cdot e^{-\frac{\theta}{x}}dx$$

$$=\theta\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}}d\left(-\frac{\theta}{x}\right) \quad =-\theta$$

故 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=-\hat{\theta}$$

即 θ的**矩估计量**为 $$\hat{\theta}=-\bar{X}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(2)

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}}\right), & x_i>0(i=1,2,\cdots n)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $x_i>0(i=1,2,\cdots n)$ 时

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\left[2\ln\theta-\ln x_i^3-\frac{\theta}{x_i}\right]$$

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[2\ln\theta-\ln x_i^3-\frac{\theta}{x_i}]$$

令 $$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{\theta}-\frac{1}{x_i})=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$$

解得 $$\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

则最大似然计量 $$\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$$

$$X \sim p(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0, \\ 0, & \text{其它}\end{cases}\quad \theta>0\text{未知},$$

矩估计量 $\hat{\theta}=-\bar{X}$

最大似然估计量 $\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$

哪个估计量好?

课后思考

某地区抽样调查表明成年男性的红细胞数（RBC）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。现对150个人的抽血化验结果进行分析，测得红细胞数分别为（单位10^{12}个/L），**试估计红细胞数的均值和方差，并思考估计的误差和精度？**

```
[ 5.19, 4.89, 5.15, 4.74, 4.79, 5.15,  4.3, 4.47, 4.13, 5.14, 4.54,  4.1, 5.82,  4.5, 4.87]
[ 4.02, 5.23, 5.01, 3.89, 4.33, 4.69, 4.54, 4.22, 4.64, 4.89,  4.7, 4.83, 5.17, 4.61, 4.97]
[ 4.49, 5.19,  4.9,  5.2, 4.93, 4.69, 4.81, 4.64, 4.82,  4.4,  5.4, 4.39, 4.61,  4.5,  4.1]
[ 4.63, 4.46,  5.3, 5.13, 5.05, 5.19, 4.62, 4.12, 5.08, 3.96, 4.37, 4.71, 4.94,  4.3,  4.3]
[ 4.94, 4.86, 5.16, 4.75, 5.13, 3.82, 4.88, 4.74, 4.63, 5.57,  5.1,  4.9, 4.29, 4.35, 4.55]
[ 4.02, 4.33, 4.86, 4.72, 4.45, 4.53, 4.93,  4.5, 5.44, 4.48, 4.89, 4.35, 5.58, 4.66,  4.8]
[ 4.96, 4.17, 4.45, 3.66, 4.95, 4.19, 4.34, 5.71, 4.54,  4.8, 4.65, 4.62, 5.16,  4.0, 5.25]
[ 4.22, 5.16, 4.46, 5.01, 4.79, 4.58, 4.67, 5.25, 4.89,  5.0, 4.28,  4.9,  5.1, 5.02, 4.62]
[ 4.78, 4.75, 5.27, 3.79, 5.11, 5.04, 3.81, 3.65, 5.04,  4.8, 4.62, 3.94, 4.36,  4.7, 5.31]
[ 5.04, 4.73, 4.04, 3.73, 4.99, 5.11, 5.25, 4.94, 4.79, 4.35, 4.71, 5.21, 4.89, 5.06, 4.96]
```

内容小结

$$X \sim F(x;\theta)$$

估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 随机变量

估计值 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 常量

两种求点估计的方法: $\begin{cases} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{cases}$

矩估计

(1) 计算总体矩。

$$E\left(X^k\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k dF\left(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m\right)=\alpha_k\left(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_m\right)$$

(2) 用样本矩作为总体矩的估计，即令

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k=\alpha_k\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots\hat{\theta}_m\right)\qquad\left(k=1,2,\cdots,m\right)$$

(3) 解该方程组得估计量

$$\hat{\theta}_k=\hat{\theta}_k\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\quad\left(k=1,2,\cdots,m\right)$$

估计值 $\hat{\theta}_k=\hat{\theta}_k\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$

最大似然估计

1° 求似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)$；

2° 求出 $\ln L(\theta)$ 及似然方程

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0 \quad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

3° 解似然方程得到**最大似然估计值**

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m) \quad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

4° 最后得到**最大似然估计量**

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_m) \quad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

在统计问题中往往先使用最大似然估计法,

在最大似然估计法使用不方便时，再用矩估计法.

结论：$X \sim P(\lambda) \Rightarrow$

$\lambda = \overline{X}$为矩估计，最大似然估计

$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow$

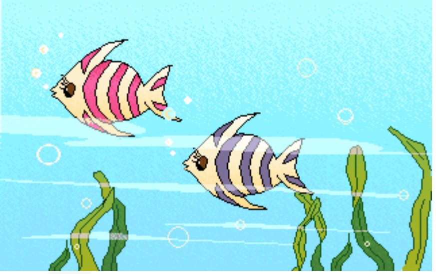
$\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = S_n^2$为矩估计，最大似然估计

思考题 试用最大似然法估计湖中的鱼数.

为了估计湖中的鱼数N，第一次捕上r条鱼，做上记号后放回. 隔一段时间后，再捕出 S 条鱼，结果发现这S条鱼中有k条标有记号. 根据这个信息, 如何估计湖中的鱼数呢?

第二次捕出的有记号的鱼数X是$r.v$, X具有超几何分布:

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{S-k}}{\binom{N}{S}},$$



$$0 \le k \le \min(S, r)$$

$$P\{X=k\}=\binom{r}{k}\binom{N-r}{S-k}\Big/\binom{N}{S}$$

把上式右端看作N的函数，记作$L(N;k)$.

应取使$L(N;k)$达到最大的N, 作为N的最大似然估计.

但用对N求导的方法相当困难, 我们考虑比值:

$$\frac{P(X=k;N)}{P(X=k;N-1)}=\frac{(N-S)(N-r)}{N(N-r-S+k)}$$

经过简单的计算知，这个比值大于或小于1,

由 $N<\dfrac{Sr}{k}$ 或 $N>\dfrac{Sr}{k}$ 而定 .

$$\frac{P(X=k;N)}{P(X=k;N-1)}=\frac{(N-S)(N-r)}{N(N-r-S+k)}$$

经过简单的计算知，这个比值大于或小于1，

由 $N<\dfrac{Sr}{k}$ 或 $N>\dfrac{Sr}{k}$ 而定.

这就是说，当N增大时，序列$P(X=k;N)$先是上升而后下降；当N为小于 $\dfrac{Sr}{k}$ 的最大整数时，达到最大值．故N的最大似然估计为$\hat{N}=[\dfrac{Sr}{k}]$.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6-1 参数的点估计

Thank You !

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第二节 估计量的评价标准

- 一、问题的提出
- 二、无偏性
- 三、有效性
- 四、相合性(一致估计)
- 五*、最小方差无偏估计
- 六*、有效估计

一、问题的提出

设总体 X 服从区间 $[0,\ \theta]$ 上的均匀分布,

θ 的**矩估计量** $\hat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 2\bar{X}$

θ 的**最大似然估计量** $\theta = \max_{1\le i\le n} X_i = X_{(n)}$

哪一个估计量更好?

如何评价与比较估计量的好坏?

二、无偏性

定义6.3 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2,\cdots, X_n)$是参数 θ的一个估计量，如果 $E(\hat{\theta})=\theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计(量)**.

如果 θ 的一列估计 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1, X_2,\cdots, X_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，满足关系式

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)=\theta$$

则称 $\hat{\theta}_n$是 θ 的**渐近无偏估计量**.

估计量 $\hat{\theta}$如果不是无偏估计量, 就称这个估计量是**有偏的**，称$E(\hat{\theta})-\theta$为估计量 $\hat{\theta}$的**偏差**.

例1 设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是任意的，记 $E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2$ 则样本均值 $\bar{X}$ 是μ的**无偏估计**，样本方差S_n^2是σ^2的**渐近无偏估计**，**修正样本方差**S_n^{*2}是σ^2**无偏估计**.

证 $E(\bar{X})=\mu,\ E(S_n^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2,\ E(S_n^{*2})=\sigma^2$

所以，$\bar{X}$和S_n^{*2}均为**无偏估计量**，而

$$\lim_{n\to\infty} E(S_n^2)=\lim \frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

故S_n^2是σ^2的**渐近无偏估计**.

例2 设总体 X 服从区间 $[0,\ \theta]$ 上的均匀分布，$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$ 是总体 X 的一个样本．

试证：参数 θ 的**矩估计量** $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 是 θ 的**无偏估计**；θ 的**最大似然估计** $\hat{\theta}_L = \max\limits_{1\le i\le n} X_i = X_{(n)}$ 是 θ 的**渐近无偏估计.**

证

$$E\left(\hat{\theta}_1\right) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E(X) = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$$

故 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 是**无偏估计量**.

$$E\left(\hat{\theta}_L\right) = E\left(X_{(n)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{X(n)}(x)\,dx$$

$$\because p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0\le x\le\theta\\ 0,\quad 其它\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\theta}dx=\dfrac{x}{\theta},0\le x\le\theta\\ 0,\quad 其它\end{cases}$$

$$\boxed{\therefore p_{X(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}p(x)}=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$E\left(\hat{\theta}_L\right)=E\left(X_{(n)}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{X(n)}(x)dx$$

$$=\int_0^{\theta}\frac{n}{\theta^n}x^n dx=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

但是,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_L\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\theta = \theta$$

即 $\hat{\theta}_L$是θ 的**渐近无偏估计量**.

但只要修正为

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$$

那么 $\hat{\theta}_2$也是 θ 的**无偏估计量**.

$\therefore \hat{\theta}_1 = 2\overline{X}, \hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$均为$\theta$的无偏估计

注：

1° 无偏性是对估计量的一个常见而重要的要求.

无偏估计的实际意义： 无系统误差

2° 一个未知参数可能有不止一个无偏估计量.

设α_1和α_2为满足$\alpha_1+\alpha_2=1$的任意常数, 则

$\alpha_1\hat{\theta}_1+\alpha_2\hat{\theta}_2$ 都是无偏估计量.

3° 有时一个参数的无偏估计可能不存在,

有时无偏估计可能明显不合理。

三、有效性

定义6.4 设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$均为θ的无偏估计量,若对任意样本容量n有$D\left(\hat{\theta}_1\right) < D\left(\hat{\theta}_2\right)$,则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

例3 设总体 X 服从区间 $[0, \theta]$ 上的均匀分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本.

矩估计 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 和**修正的最大似然估计** $\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$

均为 θ 的无偏估计，$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效?

解

$$D\left(\hat{\theta}_1\right) = D\left(2\overline{X}\right) = 4D\left(\overline{X}\right) = 4\frac{D(X)}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$D\left(\hat{\theta}_2\right) = D\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} D\left(X_{(n)}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left[E\left(X_{(n)}^2\right) - (EX_{(n)})^2\right]$$

$$\because p_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\therefore E\left(X_{(n)}\right)=\frac{n}{n+1}\theta$$

$$E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 p_{X_{(n)}}(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{n}{\theta^n}x^{n+1}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$D\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left[\frac{n}{n+2}\theta^2-\frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right]=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

显然当 $n\ge 2$ 时

$$D\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{\theta^2}{3n}>\frac{\theta^2}{n(n+2)}=D\left(\hat{\theta}_2\right)$$

即 $\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 比 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$ 有效.

四、相合性 (一致估计)

有时我们不仅要求估计量有较小的方差，还希望当样本容量n充分大时，估计量能在某种意义下收敛于被估计参数，这就是所谓**相合性**（或**一致性**）概念。

定义6.6 设$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\hat{\theta}$的估计序列，如果$\hat{\theta}_n$**依概率收敛于**$\theta$，即对任意$\varepsilon>0$，有：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1}$$

或 $$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \ge \varepsilon\} = 0$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计(或一致估计).

定理6.2 设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一个估计量, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0$, 则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计(或一致估计).

证明 由广义切比雪夫不等式

$$0 \le P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} E(\hat{\theta}_n - \theta)^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n + E\hat{\theta}_n - \theta\right]^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E[\left(\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n\right)^2+2\left(\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n\right)\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}[D\hat{\theta}_n+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[D\hat{\theta}_n+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}_n\right)=\theta,$$

$$\lim_{n\to\infty}D(\hat{\theta}_n)=0$$

令 $n\to\infty$, 由定理的假设得

$$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\}=0$$

即 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计.

例 4 若总体 X 的 EX 和 DX 都存在，则 $\bar{X}$ 是总体均值 EX 的相合估计.

证 因为 $E\bar{X}=EX$

$$D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}\to 0 \qquad n\to\infty$$

故 $\bar{X}$ 是总体均值 EX 的相合估计.

一般样本的 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是总体 k 阶原点矩的相合估计. **矩估计往往是相合估计.**

例5 设总体 X 的二阶矩存在, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$n=1,2,\cdots$.

试证 $\hat{\mu}_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$ 是总体均值 μ 的**相合估计**.

证 因为

$$E(\hat{\mu}_n) = E\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iEX_i$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\cdot\mu = \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2}\mu$$

$$\hat{\mu}_n \xrightarrow{p} \mu$$

$$D(\hat{\mu}_n) = D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X_i)$$

$$= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X)$$

$$= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} D(X)$$

$$= \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} D(X) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

故 $\hat{\mu}$ 是 μ 总体均值的相合估计.

内容小结

估计量的评选的三个标准 $\hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots X_n)$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{无偏性} \\ \text{有效性} \Rightarrow \text{最小方差无偏估计} \\ \text{相合性}\end{array}\right.$$

无偏性 $\quad E\left(\hat{\theta}\right)=\theta \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right)=\theta$

有效性 $\quad E\left(\hat{\theta}\right)=\theta, \quad e\left(\hat{\theta}\right)=1 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e(\hat{\theta})=1$

其中$e\left(\hat{\theta}\right)=\left(\dfrac{1}{nI(\theta)}\right)/D\left(\hat{\theta}\right)$

$$I(\theta)=E\left(\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2=-E\left(\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

相合性 $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1$

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right)=\theta,$ $\lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n)=0$

总结 $EX=\mu,\ DX=\sigma^2$

(1) $\bar{X}$是μ的矩估计，无偏估计，最小方差无偏估计，相合估计；

(2) S_n^2是σ^2的矩估计，渐近无偏估计；

(3) S_n^{*2}是σ^2的无偏估计，最小方差无偏估计，渐进有效估计；

$$若X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow$$

$\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = S_n^2$为矩估计，最大似然估计

西北工業大學

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6-2 估计量的评价标准

Thank You !

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第三节 参数的区间估计

- 一、基本概念
- 二、单个正态总体均值的区间估计
- 三、单个正态总体方差的区间估计
- 四、两个正态总体均值差的区间估计
- 五、两个正态总体方差比的区间估计

一、基本概念

定义6.7 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，θ为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体 X 的样本. 如果存在**两个统计量** $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，**对于给定的** $\alpha\ (0<\alpha<1)$, 使得

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha.$$

置信下限　　置信上限　　置信度

则称区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$为参数 θ 的**置信度**为 $1-\alpha$ 的**置信区间.**

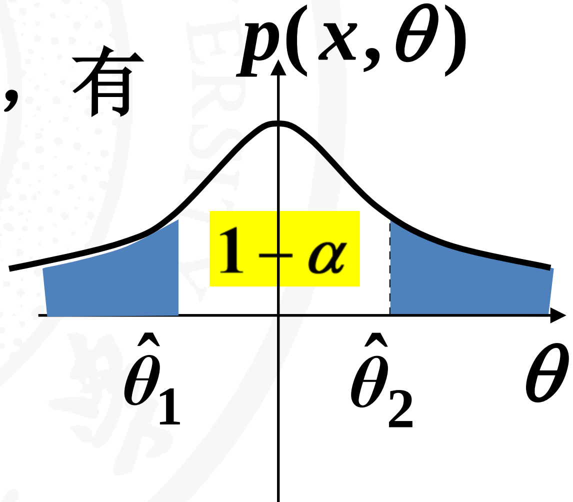
$$P\{\underline{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)}\le\theta\le\underline{\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)}\}=1-\alpha.$$

注

1、置信区间是一个随机区间

它以预先给定的高概率（置信度）覆盖未知参数，即对于任意的 $\theta\in\Theta$ ，有

$$P(\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2)=1-\alpha\,.$$



$$\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$$

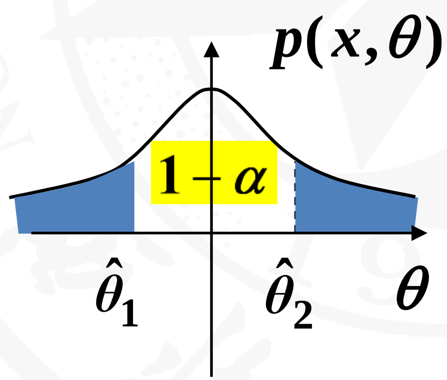
2、置信度 1-α： 反映了区间估计的**可靠度**.

给定置信度 $1-\alpha$，尽量寻找最短的置信区间.

3、置信区间的长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ ：反映了区间估计的**精确度**.

置信区间 ⟺ 可靠度 ⟺ 精确度

长（短） 高（低） 低（高）



$$P\left\{\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2\right\}=1-\alpha\Rightarrow\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$$

美国统计学家
Neyman

回顾：统计量及其分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

(1)均值μ、方差σ^2已知:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(2)均值μ已知, 方差σ^2未知:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

(3)均值μ未知, 方差σ^2已知:

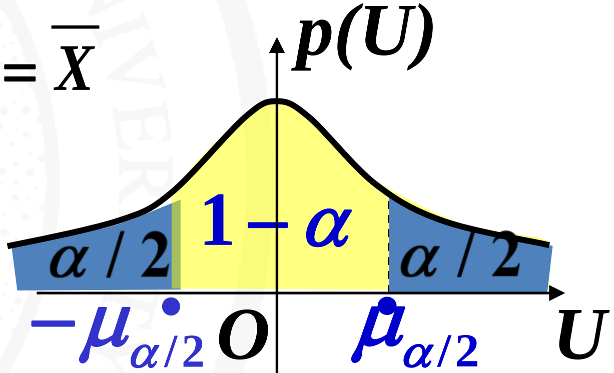
$$\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

二、单个正态总体均值的区间估计

1、正态总体X的方差σ^2已知，求μ的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

是来自总体X 的一个样本，则有：$\hat{\mu}=\overline{X}$



$$\boxed{P\{\hat{\mu}_1 \le \mu \le \hat{\mu}_2\}=1-\alpha \quad \Rightarrow [\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2]?}$$

$$\because U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

则 $P\{|U| \le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$

其中 $u_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $\alpha/2$ 上侧分位数 .

即 $$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

反解

$$P\left\{\boxed{\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\}=1-\alpha$$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

即 $P\left(\mu\in\left[\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)=1-\alpha$

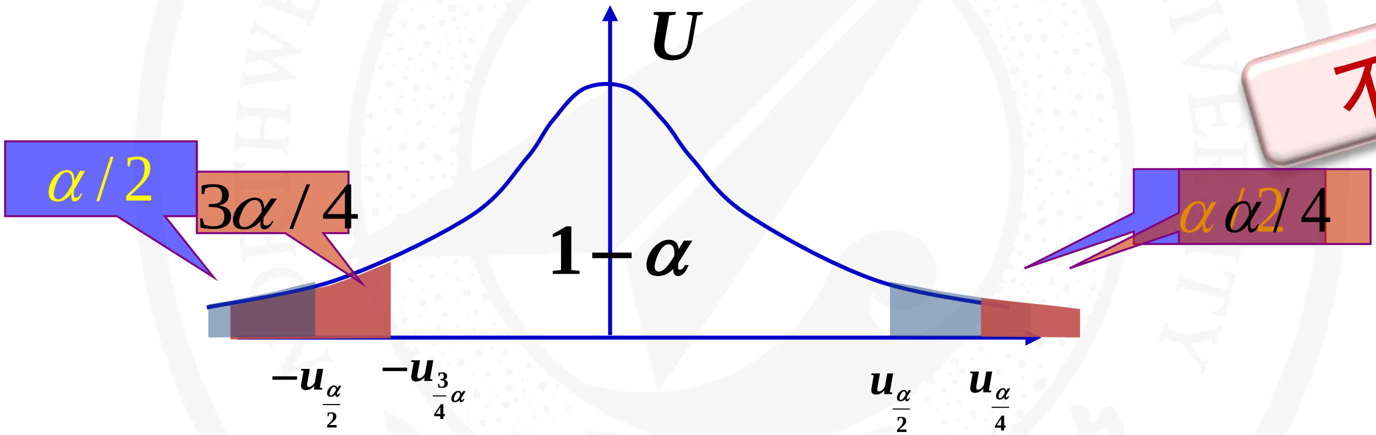
若给定 $\alpha=0.05$，查正态分布表得

$u_{0.025}=1.96$，于是得 μ 的**置信度为95%的置信区间为**：

$$\left[\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间:

$$\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

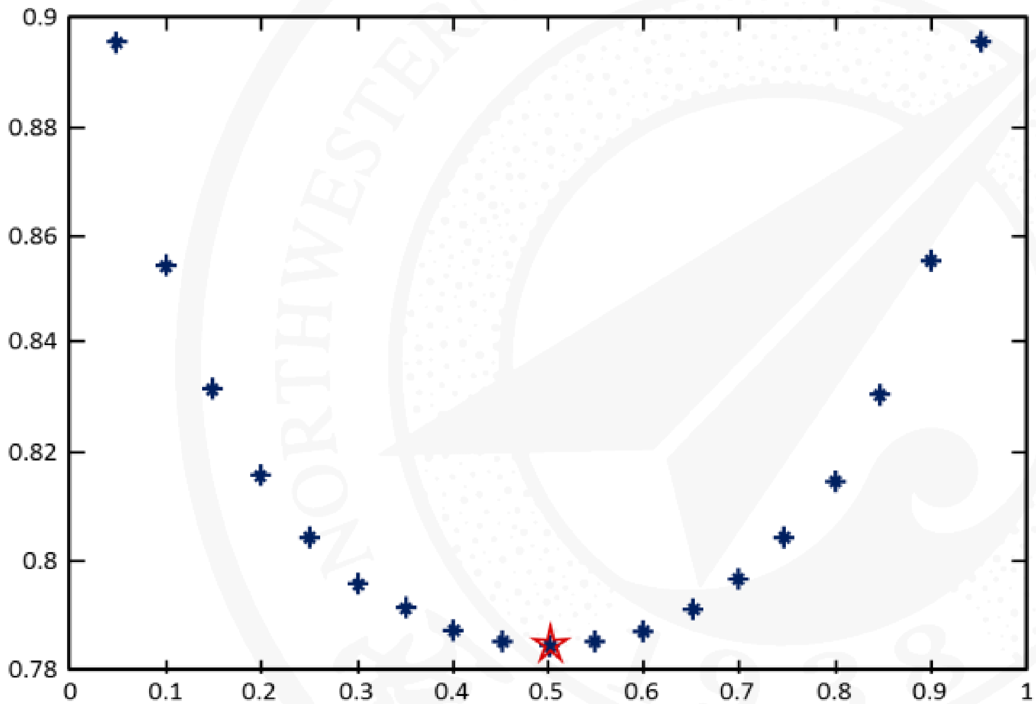


不唯一

$$\bar{X}-u_{\frac{3}{4}\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

置信区间:$\bar{X} - u_{b\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_{(1-b)\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad 0 < b < 1$

l



b

$\sigma^2 = 4, n = 100,$

$\alpha = 0.05$

∴置信区间为对称区间

b=0.5时，区间长度l最短，精确度最高

例 1 某车间生产的滚珠直径 X 服从正态分布 $N(\mu,0.06)$，现从某天生产的产品中抽取6个，测得直径分别为(单位:mm).

$$14.6,\ 15.1,\ 14.9,\ 14.8,\ 15.2,\ 15.1$$

试求**平均直径**置信度为95%的置信区间.

解： 由 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

置信度为 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$ $\quad \therefore u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$

由样本值得 $\quad \bar{x}=14.95, n=6, \sigma=\sqrt{0.06}$

置信下限 $\bar{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.75$

置信上限 $\bar{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=15.15$

所以平均直径 μ 的**置信度为95%**的置信区间为

$$[14.75, 15.15].$$

若取 $\alpha=0.01$，可算出 μ 的**置信度为 99%**

的置信区间为 $[14.69, 15.21]$.

一般步骤

1、构造**统计量**$U(\theta)$，并确定其**抽样分布**；

2、给定**置信度**$1-\alpha$，反解参数的**置信区间**；

$$P\{a<U<b\}=1-\alpha \Rightarrow P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$$

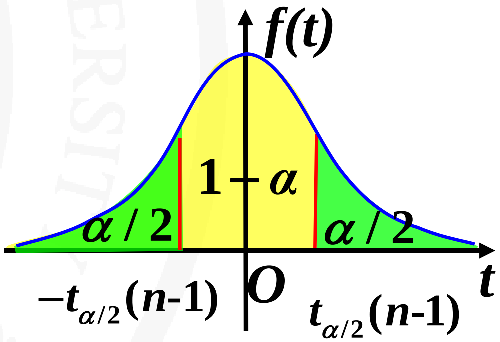
3、给定**样本值**，求置信下限和置信上限的值，并写出置信区间。

$$\theta_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\theta_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad [\theta_1,\theta_2]$$

2. 正态总体X的方差σ^2未知，求μ的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2未知, 求总体均值 μ 的区间估计. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$来自总体 X 的一个样本，则有：

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S_n^* / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



从而对于给定的置信度，$1-\alpha$ 有

$$P\{|T| \le t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

其中 $t_{\alpha/2}(n-1)$是自由度为 $n-1$ 的 t 分布关于 $\alpha/2$ 的上侧分位数

于是有 $$P\left\{\boxed{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}\right| \le t_{\alpha/2}(n-1)}\right\}=1-\alpha$$

反解

$$P\left\{\boxed{\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}}\right\}=1-\alpha$$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right]$$

例2 某地区抽样调查表明成年男性的红细胞数（RBC）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。现对150个人的抽血化验结果进行分析，测得红细胞数分别为（单位10^{12}个/L），**试估计红细胞数均值μ的置信度为95%的置信区间。**

```
[ 5.19,  4.89,  5.15,  4.74,  4.79,  5.15,   4.3,  4.47,  4.13,  5.14,  4.54,   4.1,  5.82,   4.5,  4.87]
[ 4.02,  5.23,  5.01,  3.89,  4.33,  4.69,  4.54,  4.22,  4.64,  4.89,   4.7,  4.83,  5.17,  4.61,  4.97]
[ 4.49,  5.19,   4.9,   5.2,  4.93,  4.69,  4.81,  4.64,  4.82,   4.4,   5.4,  4.39,  4.61,   4.5,   4.1]
[ 4.63,  4.46,   5.3,  5.13,  5.05,  5.19,  4.62,  4.12,  5.08,  3.96,  4.37,  4.71,  4.94,   4.3,   4.3]
[ 4.94,  4.86,  5.16,  4.75,  5.13,  3.82,  4.88,  4.74,  4.63,  5.57,   5.1,   4.9,  4.29,  4.35,  4.55]
[ 4.02,  4.33,  4.86,  4.72,  4.45,  4.53,  4.93,   4.5,  5.44,  4.48,  4.89,  4.35,  5.58,  4.66,   4.8]
[ 4.96,  4.17,  4.45,  3.66,  4.95,  4.19,  4.34,  5.71,  4.54,   4.8,  4.65,  4.62,  5.16,   4.0,  5.25]
[ 4.22,  5.16,  4.46,  5.01,  4.79,  4.58,  4.67,  5.25,  4.89,   5.0,  4.28,   4.9,   5.1,  5.02,  4.62]
[ 4.78,  4.75,  5.27,  3.79,  5.11,  5.04,  3.81,  3.65,  5.04,   4.8,  4.62,  3.94,  4.36,   4.7,  5.31]
[ 5.04,  4.73,  4.04,  3.73,  4.99,  5.11,  5.25,  4.94,  4.79,  4.35,  4.71,  5.21,  4.89,  5.06,  4.96]
```

7142,

置信度 $1-\alpha=0.95$

$$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(149)\ \approx u_{0.025}\ =1.96$$

则红细胞均值μ的置信度为95%的置信区间为

$$\boxed{\left[\ \overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\,S_n^*\Big/\sqrt{n}\,,\,\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\,S_n^*\Big/\sqrt{n}\ \right]}$$

$$=\left[\ 4.7142-1.96\times0.4236/\sqrt{150},\,4.7142+1.96\times0.4236/\sqrt{150}\ \right]$$

$$=\left[4.6464,\,4.7820\right]$$

$$P\left\{\mu\ \in\left[4.6464,\,4.7820\right]\right\}=95\%$$

三、正态总体方差的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知，求总体方差或标准差 σ 的区间估计. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本，则有：

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

从而对于给定的置信度 $1-\alpha$，有

$$P\left\{\boxed{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\chi^2\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right\}=1-\alpha$$

反解σ^2得:

$$P\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

故σ^2的**置信度为**$1-\alpha$**的置信区间**为:

$$\left[\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

而σ的**置信度为**$1-\alpha$**的置信区间**为:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right]$$

例3 从自动机床加工的同类零件中抽取16件，测得长度分别为(单位:cm):

12.15, 12.12, 12.01, 12.08, 12.09, 12.16,

12.06, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.01,

12.03, 12.01, 12.03, 12.06

假设零件长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，分别求零件**长度方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为95%的置信区间.**

解 由题意有

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$n=16, 1-\alpha=0.95, \alpha=0.05$，查 χ^2

分布表得 $\chi^2_{0.025}(15)=27.5, \chi^2_{0.975}(15)=6.26,$ 又

$$\boxed{\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=12.08,} \quad \boxed{(n-1)s_n^{*2}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2=0.037}$$

置信下限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=$

置信上限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$

故σ^2的置信度为95%的置信区间为

$[0.0013, 0.0059]$，σ的置信区间为$[0.036, 0.077]$.

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(1)均值差$\mu_1 - \mu_2$已知，方差σ_1^2, σ_2^2已知

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(2)均值差$\mu_1 - \mu_2$已知，方差$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$未知

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$S_W = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) S_{n1}^{*\ 2} + (n_2 - 1) S_{n2}^{*\ 2}}{n_1 + n_2 - 2}}$$

(3)均值差μ_1, μ_2未知，方差σ_1^2 / σ_2^2已知

$$\frac{S_{n1}^{*\ 2} / S_{n2}^{*\ 2}}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

四、两正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

设 X 与 Y 是两个独立的正态总体，且

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 为总体 X 的样本，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$为总体 Y 的样本，

(1) $\boxed{\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}}$

则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

四、两正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(2) $\boxed{\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{未知，但}\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2}$

则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

$$\text{其中}S_w=\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_1}X_i^2-n_1\overline{X}^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_2}Y_i^2-n_2\overline{Y}^2\right)}{n_1+n_2-2}}$$

五、两正态总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

设 X 与 Y 是两个独立的正态总体，且

$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$未知.

σ_1^2/σ_2^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1),\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right).$$

例4 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径（mm）如下:

甲机床：15.0，14.8，15.2，15.4，14.9，15.1，15.2，14.8

乙机床：15.2，15.0，14.8，15.1，15.6，14.8，15.1，14.5，15.0

若两台机床生产的滚珠直径的标准差分别是$\sigma_1 = 0.18,\ \sigma_2 = 0.24$，求这两台机床生产的滚珠直径均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.90的置信区间.

$$\boxed{n_1 = 8, n_2 = 9}$$

解：当 $\sigma_1=0.18,\ \sigma_2=0.24$ 时，$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为0.90的置信区间为

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

查标准正态分布表得 $u_{0.05}=1.645$，从而

$$\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_1^2}{n_2}}=-0.018$$

$$\bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=0.318$$

故置信区间为 $[-0.018,\ 0.318]$.

例5 机床厂某日从两台机床加工的零件中，分别抽取若干个样品，测得零件的尺寸分别如下（单位：cm）：

A台：6.2， 5.7， 6.5， 6.0，6.3， 5.8，5.7，6.0， 6.0， 5.8， 6.0

B台：5.6， 5.9， 5.6， 5.7， 5.8， 6.0， 5.5 5.7， 5.5

假设两台机器加工的零件尺寸均服从正态分布，且方差相等，取置信度为0.95，试求两台机器加工的零件平均尺寸之差的区间估计.

$$1-\alpha=0.95,\ n_1=11,\ n_2=9$$

解 设A台机器加工的零件尺寸为总体 X， B台机器加工的零件尺寸为总体 Y， 则

$\mu_1 - \mu_2$的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]$$

由题设知置信度 $1-\alpha=0.95,\ n_1=11,\ n_2=9$

查表 t 分布表得 $t_{0.025}(18)=2.1009$

经计算得两台机器加工的零件平均尺寸分别为

$$\bar{x}_A = 6.0,\quad \bar{y}_B = 6.7$$

$$n_1 S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - n_1 \bar{x}_A^2 = 0.64$$

$$n_2 S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 - n_2 \bar{y}_B^2 = 0.24$$

$$S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^{*2} + (n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{0.64+0.24}{11+9-2}} = 0.2211$$

则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信上下限分别为

置信下限: $\overline{X}-\overline{Y}-t_{0.025}(18)S_w\sqrt{\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{9}}=0.0912$

置信上限: $\overline{X}-\overline{Y}+t_{0.025}(18)S_w\sqrt{\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{9}}=0.5088$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为95%的置信区间为

$$[0.0912,\ 0.5088]$$

例6 为了考查温度对某物体断裂强度的影响，在70°C与80°C分别重复做了8次试验，测得断裂强力的数据如下 (单位：MPa)：

70°C：20.5，18.8，19.8，20.9，21.5，19.5，21.0，21.2

80°C：17.7，20.3，20.0，18.8，19.0，20.1，20.2，19.1

假设70°C下的断裂强度用 X 表示，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 80°C下的断裂强度用 Y 表示，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为度为90%的置信区间.

解 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为90%置信区间为

$$\left[\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}, \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\right]$$

由题设知置信度为 $1-\alpha=0.9,\ n_1=n_2=8,$

查 F 分布表得 $F_{0.05}(7,7)=3.79$

$$\Rightarrow \frac{1}{F_{0.25}(n_1-1, n_2-1)}=0.2639$$

由 F 分布分位数的性质得

$$\frac{1}{F_{0.95}(7,7)}=F_{0.25}(7,7)=3.79$$

经计算得两正态总体的样本均值和样本修正方差分别为

$$\bar{x} = 20.4, \quad \bar{y} = 19.4, \qquad s_1^{*2} = 0.8857, \quad s_2^{*2} = 0.8286$$

则 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为90%置信区间为

$$\left[\frac{1}{F_{0.25}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}, F_{0.25}(n_2 - 1, n_1 - 1) \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \right]$$

$$= \left[0.2639 \times \frac{0.8857}{0.8286}, 3.79 \times \frac{0.8857}{0.8286} \right]$$

$$= [0.2821, 4.0515]$$

内容小结

置信区间是一个随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$,它表示未知参数在该区间具有预先给定的置信度1-*a*,

即对于任意的 $\theta \in \Theta$ ，有 $P(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$.

求置信区间的步骤:

(1)构造含有样本和参数的统计量 $W = W(X_1, X_2, \cdots X_n; \theta)$,

并确定其分布;

(2)给定置信度 $1-\alpha$,利用统计量 W 的分布确定其范围,

使得 $P(a \le W \le b) = 1 - \alpha$:

(3)由不等式 $a \le W \le b$，反解出的取值范围 $\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2$,

即为置信区间 $\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right]$。

正态总体均值与方差的区间估计

1. 单个总体均值 μ 的置信区间

$$\begin{cases} (1)\ \sigma^2\text{已知，}\ U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1); & \left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right). \\ (2)\ \sigma^2\text{未知，}\ T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1); & \left(\bar{X}\pm\dfrac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right). \end{cases}$$

2. 单个总体方差 σ^2 的置信区间

$$\chi^2=\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1); \qquad \left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

其中$S_n^{*2}=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$

3. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知，

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但 σ^2 为未知，

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i^2-n_1\overline{X}^2\right)+\left(\sum\limits_{i=1}^{n_2}Y_i^2-n_2\overline{Y}^2\right)}{n_1+n_2-2}}$

4. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为未知，

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1),\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right).$$

6-3 参数的区间估计

Thank You !