西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐爽

西北工业大学

数学与统计学院 应用概率统计系

第二节 事件的关系和运算

- 一、随机事件间的运算
- 二、随机事件间的关系
- 三、运算定律

随机事件：$A=\{\omega_1,\omega_2\cdots\}\subset\Omega$

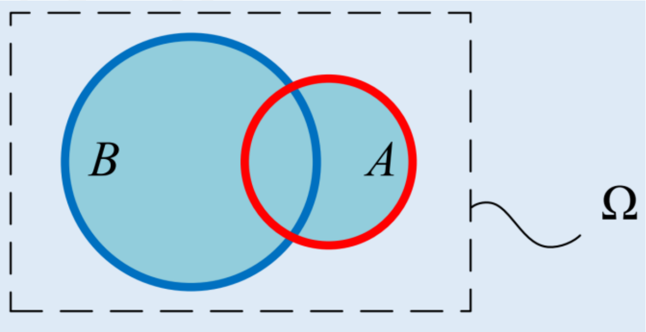
复杂随机事件

一、随机事件间的运算

1.事件*A*与*B*的并(和事件)

表示:"两事件A, B至少发生一个",记作

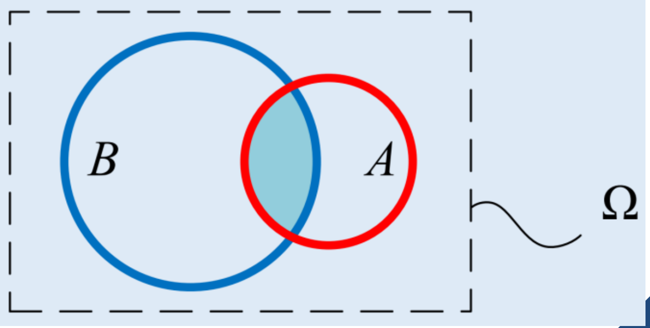
$$A \cup B = \{w \mid w \in A或w \in B\}.$$



2.事件*A*与*B*的交（积事件）

表示为"两事件A, B同时发生"，记作

$$A \cap B = \{w \mid w \in A且w \in B\}.$$



积事件也可记作 $A \cdot B$ 或 AB.

推广： ① $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生.

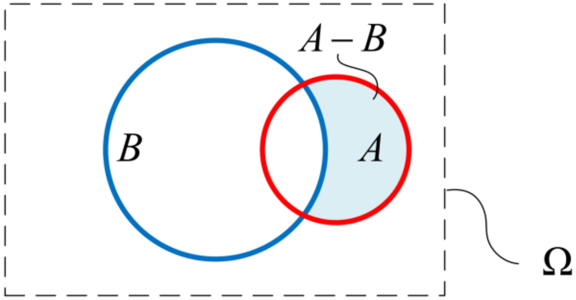
② $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生.

3.事件A与B的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生所组成的事件称为事件 A 与 B 的差。记作

$$A - B = A - AB = A\overline{B}$$



实例1 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的____B____。

实例2 “产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的____A____。

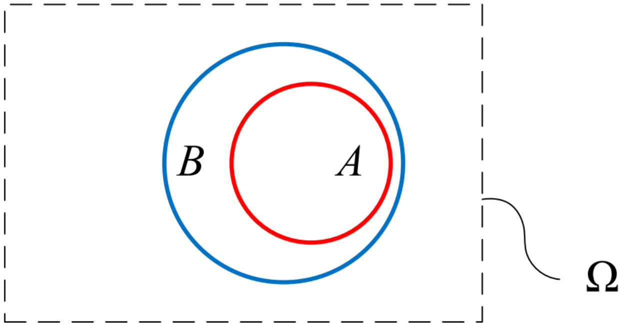
实例3 “点数为2”是“点数为偶数”与“点数大于3”的____C____。

A 和事件　　B 积事件　　C 差事件

二、随机事件间的关系

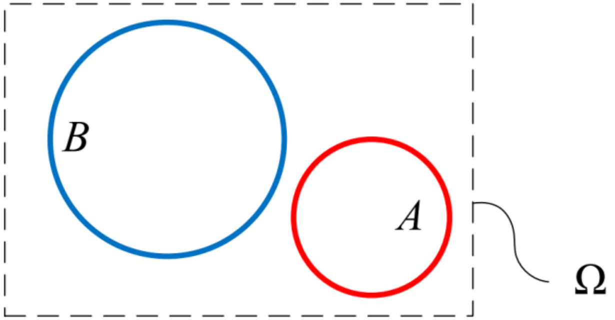
1. 包含关系

若事件 A 发生, 必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A, 记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.
且$A - B = \emptyset$.



2. 相等关系

如果事件B包含事件A, 同时事件A包含事件 B , 则称事件A与事件B相等, 记作$A=B$。



3. 事件 A 与 B 互不相容 (互斥)

若事件 A 的发生必然导致事件 B 不发生，B 发生也必然导致 A不发生， 则称事件 A与B互不相容(或互斥), 即 $A\cap B = AB = \varnothing.$

注

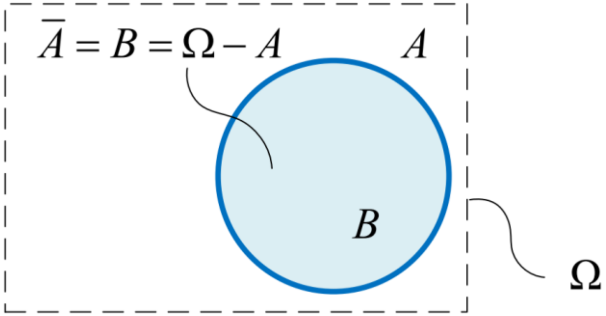
1 当 $A\cap B=\varnothing$时, 可将$A\cup B$记为 “直和” 形式 $A+B$，即

$$A\cup B \overset{\Delta}{=} A+B \quad (\text{当} A\cap B=\varnothing \text{时}).$$

2 任意事件A与不可能事件$\varnothing$为互斥。

3 基本事件是两两互不相容的。

4. 事件 A 的对立（或互逆）事件



设 A 表示“事件 A 发生”，则“事件 A 不发生”称为事件 A 的**对立事件**或**逆事件**，记作 $\overline{A}$.

注　1° **互斥与互逆的关系**

若 A 与 B 互斥，则有 $A \cap B = AB = \varnothing$.

若 A 与 B 互逆，则有 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$

互逆 $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ 互斥

实例4 A、B、C为随机事件，A发生必导致B与C最多有一个发生，则有

A $A \subset BC$

B $BC \subset A$

C $\bar{A} \subset BC$

D $BC \subset \bar{A}$

B与C都发生：BC

逆事件

B与C最多有一个发生：$\overline{BC}$

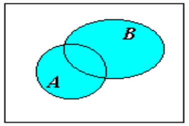
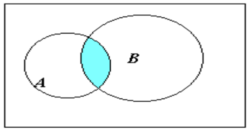
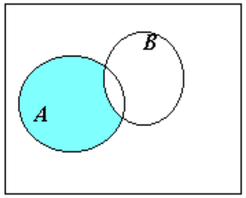
A发生必导致$\overline{BC}$发生

$A \subset \overline{BC} \Rightarrow BC \subset \bar{A}$

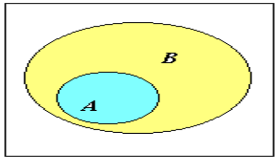
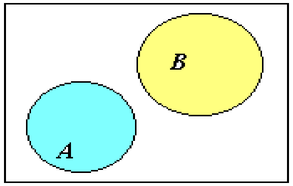
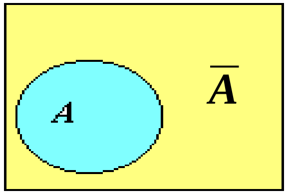
答案 D

2° 必然事件Ω与不可能事件$\emptyset$互逆。

事件的运算(有3种）

运算	符号	概率论	集合论	Venn图
和	$A\cup B$	事件*A*与B至少有一个发生	*A*与*B*的并集	
积	AB 或$A\cap B$	事件*A*与*B*同时发生	*A*与*B*的交集	
差	$A-B$ $=A\overline{B}$	事件*A*发生而*B*不发生	*A*与*B*的差集	

事件的关系(有4种）

关系	符号	概率论	集合论	Venn图
包含	$A\subset B$	A发生则B必发生	A是B的子集	
等价	$A=B$	$A\subset B$ 且$B\subset A$	A与B相等	
互斥 (互不相容)	$AB=\varnothing$	事件A与B不能同时发生	A与B不相交	
对立 (互逆)	$\bar{A}$	A的对立事件	A的余集 ① $A\cup\bar{A}=\Omega$ ② $A\bar{A}=\varnothing$	

三、运算定律

1.交换律：(1) $A \cup B = B \cup A.$

(2) $AB = BA.$

2.结合律：(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$

(2) $(AB)C = A(BC).$

3.分配律：(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

★(2) $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C),$

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C).$

4. 对偶律(De Morgan定理)

$$(1)\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

意义："A, B至少有一个发生"的对立事件

是"A, B均不发生"。

$$(2)\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

意义："A, B均发生"的对立事件是"A, B

至少有一个不发生"。

证明

推广：
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

5. 其它一些性质

若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$AB = A$.

特别地，$A \cup \varnothing = A$，$A \cup \Omega = \Omega$

$$A\varnothing = \varnothing \qquad A\Omega = A$$

例1: 设 A, B, C 为随机事件，则：

A 当 $AB = AC$ 时，必有 $B = C$;

B 当 $AC \subset AB$ 时，必有 $C \subset B$;

C 当 $AB = \emptyset$，且 $A = B$ 时，必有 $A = \emptyset$;

D 当 $AB = A$，必有 $A = B$;

解 因为 $A = B$，所以 $AA = AB$；
又知 $AB = \emptyset$，所以 $\emptyset = AB = AA = A$；

C

例2:设随机事件A,B满足$A\cup B=\bar{A}\cup\bar{B}$，则:

A $A-B=\emptyset$　　B $AB=\emptyset$

C $AB\cup\bar{A}\bar{B}=\Omega$　　D $A\cup\bar{B}=\Omega$

解

$$A\cup B=\bar{A}\cup\bar{B}$$

B

法1：同时与A做交运算；

$A(A\cup B)=A(\bar{A}\cup\bar{B})\Rightarrow A\cup AB=\emptyset\cup A\bar{B}$,

即$A=A\bar{B}=A-AB$，故$AB=\emptyset$

法2：同时做逆运算：$\overline{A\cup B}=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}\Rightarrow AB=\bar{A}\bar{B}$

同时与A做交运算: $AAB=A\bar{A}\bar{B}\Rightarrow\emptyset=AB$

例3: 设 A, B, C 为随机事件，则：

(A) 当 $A \cup C = B \cup C$ 时，就有 $A = B$.

(B) 当 $A - C = B - C$ 时，就有 $A = B$.

(C) 当 $A - B = C$ 时，就有 $A = B \cup C$.

(D) 当 $\overline{A} \cup \overline{B} \supset C$ 时，就有 $ABC = \emptyset$.

D

解 (A)和(B)考虑事件 C 为 Ω 的情况。

(C): $A - B = A\overline{B} = C \Rightarrow (A\overline{B}) \cup B = B \cup C$,

而 $(A\overline{B}) \cup B = A \cup B$，所以 $A \cup B = B \cup C$。

(D): $\emptyset = C - \overline{A} \cup \overline{B} = C - \overline{A \cap B} = ABC$.

课后预习

概率的定义

频率与概率的区别和联系

概率的计算方法及其性质

内容小结

关键词：

和事件、积事件、差事件、包含、互斥（互不相容）、互逆（对立）

1、概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	空间(全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	单点集
A	随机事件	

$A\cup B$	事件A与事件B的和	A集合与B集合的并集
AB	事件A与B的积事件	A集合与B集合的交集
$A-B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$A\subset B$	A发生必然导致B发生	A是B的子集
$A=B$	事件A与事件B相等	A集合与B集合相等
$AB=\varnothing$	事件A与B互不相容(互斥)	A与B 两集合中没有相同的元素
$\bar{A}$	A的互逆事件(对立)	A的补集

2、 随机事件的关系和运算

事件的运算： 和、差、积

$$A \cup B \quad A - B \quad A \cap B$$

事件的关系： 包含，相等，互斥，互逆

$$A \subset B \quad A = B \quad AB =$$

① $A \cup B = \Omega$

② $AB =$

运算律： 交换律、结合律、分配率、对偶律

常用结论：

$$(1)\ \phi \subset A \subset \Omega \quad (2)\ A-B=A\overline{B}=A-AB$$

$$(3)\ \overline{A}=\Omega-A$$

$$(4)\ A\cup B=A\cup B\overline{A}=A+(B-A)$$

$$\Rightarrow A\cup B=A+B(AB=\varnothing)$$

$$(5)\ \overline{\overline{A}}=A$$

学会从概率论角度解释事件的关系和运算！

1-2 事件的关系和运算

Thank You !

备用题1：设随机事件A和B满足条件$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则

$AB=$ __________, $A\cup B=$ __________。

法1：<u>同时与A做交运算</u>。

$A(AB)=A(\overline{A}\,\overline{B})\Rightarrow AB=\emptyset,$

而$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，故$\overline{A}\,\overline{B}=\emptyset$. 做逆运算，则$A\cup B=\Omega$

法2：<u>同时与$A\overline{B}$做并运算</u>。

$AB\cup A\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}\cup A\overline{B}$，故$A(B\cup\overline{B})=\overline{B}(A\cup\overline{A}),$

即$A=\overline{B}$，则A和B为对立事件。

备用题

例 1 **证明: 对偶律** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证 在集合关系证明中, 要证明$A \subset B$, 需且只

需证明对A中的任意一元素ω,ω亦为B中的元素

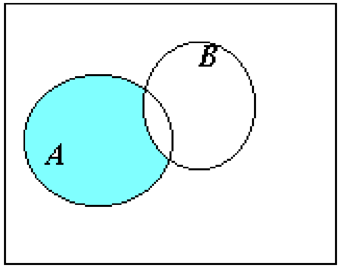
即可. 用符号可表示为$\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$. 这里符号

"$\forall$" 读作 "对任意的","$\in$" 读作 "属于","$\Rightarrow$"

读作 "推出"。 现在给出证明:

$$\forall \omega \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \omega\text{不属于}A\text{同时}\omega\text{不属于}B$$

$$\Rightarrow \omega\text{不属于}A \cup B \Rightarrow \omega \in \overline{A \cup B},$$



从而知 $$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

另一方面

$$\forall \omega \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \omega\text{不属于}A \cup B,$$

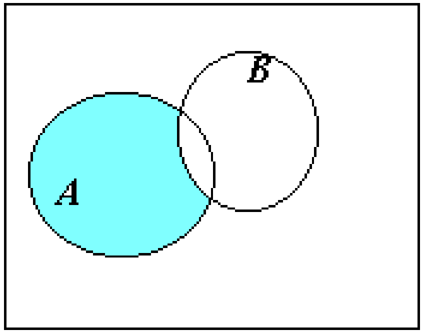
$\Rightarrow$ ω不属于A，同时ω不属于B,

$$\Rightarrow \omega\text{属于}\overline{A},\text{同时}\omega\text{属于}\overline{B},$$

$$\Rightarrow \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

从而得知

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$



因而

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

例1-1 设A, B, C 表示三个随机事件, 试将下列事件用A, B, C 表示出来.

(1) A, B都发生, C 不发生; $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$;

(2) 三个事件都不发生; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(3) 不多于一个事件发生;

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C;$$

(4) 三个事件至少有两个发生;

$$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC;$$

(5) 不多于两个事件发生;

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}$$

$$+A\bar{B}C+\bar{A}BC,$$

或 $\overline{ABC}$;

(6) A, B 至少有一个发生, C 不发生;

$$(A\cup B)\bar{C};$$

例 3-1　运用事件运算公式证明等式

$$AB \cup (A-B) \cup \overline{A} = \Omega.$$

证明:　$A - B = A\overline{B},$

于是　$AB \cup (A-B) \cup \overline{A}$

$= AB \cup A\overline{B} \cup \overline{A}$

$= A \cup \overline{A}$

$= \Omega.$

例 3-3 在计算机系学生中任选一名学生，设事件

A="选出的学生是男生"；

B="选出的学生是三年级学生"；

C="选出的学生是运动员".

(1)叙述事件$AB\overline{C}$的含义.

(2)在什么条件下, $ABC=C$成立?

(3)什么时候关系$C\subset B$成立?

解　(1) $AB\overline{C}$ 的含义是“选出的学生是三年级的男生，但他不是运动员”。

(2) $\because ABC \subset C,$

$\therefore ABC = C$的充要条件是：

$$C \subset ABC.$$

又$\because ABC \subset AB,$

$\therefore ABC = C$的充要条件是：

$$C \subset AB.$$

$C \subset AB$ 即“计算系学生中的运动员都是三年级的男生”.

(3) 什么时候关系$C \subset B$成立?

解 当运动员都是三年级的学生时，C是B的子事件，即 $C \subset B$成立.