西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

概率论与数理统计

徐 爽

西北工业大学理学院概率统计教研室

第二节 估计量的评价标准

- 一、问题的提出
- 二、无偏性
- 三、有效性
- 四、相合性(一致估计)
- 五*、最小方差无偏估计
- 六*、有效估计

一、问题的提出

设总体 X 服从区间 $[0, \ \theta]$ 上的均匀分布,

θ 的**矩估计量** $$\hat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 2\bar{X}$$

θ 的**最大似然估计量** $$\theta = \max_{1\le i\le n} X_i = X_{(n)}$$

哪一个估计量更好?

如何评价与比较估计量的好坏?

二、无偏性

定义6.3 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2,\cdots, X_n)$是参数 θ的一个估计量，如果 $E(\hat{\theta})=\theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计(量)**.

如果 θ 的一列估计 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1, X_2,\cdots, X_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，满足关系式

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)=\theta$$

则称 $\hat{\theta}_n$是 θ 的**渐近无偏估计量**.

估计量 $\hat{\theta}$如果不是无偏估计量, 就称这个估计量是**有偏的**，称$E(\hat{\theta})-\theta$为估计量 $\hat{\theta}$的**偏差**.

例1 设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是任意的，记 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$ 则样本均值 $\bar{X}$ 是μ的**无偏估计**，样本方差S_n^2是σ^2的**渐近无偏估计**，修正样本方差S_n^{*2}是σ^2**无偏估计**.

证 $E(\bar{X})=\mu$, $E(S_n^2)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$, $E(S_n^{*2})=\sigma^2$

所以, $\bar{X}$和 S_n^{*2}均为**无偏估计量**，而

$$\lim_{n\to\infty} E(S_n^2)=\lim \frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

故 S_n^2是 σ^2的**渐近无偏估计**.

例2 设总体 X 服从区间 $[0,\ \theta]$ 上的均匀分布，$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$ 是总体 X 的一个样本．

试证：参数 θ 的**矩估计量** $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ 是 θ 的**无偏估计**；θ 的**最大似然估计** $\hat{\theta}_L = \max\limits_{1\le i\le n} X_i = X_{(n)}$ 是 θ 的**渐近无偏估计.**

证

$$E\left(\hat{\theta}_1\right) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E(X) = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$$

故 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 是**无偏估计量.**

$$E\left(\hat{\theta}_L\right) = E\left(X_{(n)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{X(n)}(x)\,dx$$

$$\because p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0\le x\le\theta\\ 0,\quad 其它\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\theta}dx=\frac{x}{\theta},0\le x\le\theta\\ 0,\quad 其它\end{cases}$$

$$\boxed{\therefore p_{X(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}p(x)}=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$E\left(\hat{\theta}_L\right)=E\left(X_{(n)}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{X(n)}(x)dx$$

$$=\int_0^{\theta}\frac{n}{\theta^n}x^n dx=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

但是,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_L\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\theta = \theta$$

即 $\hat{\theta}_L$是θ 的**渐近无偏估计量**.

但只要修正为

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

那么 $\hat{\theta}_2$也是 θ 的**无偏估计量**.

$\therefore \hat{\theta}_1 = 2\overline{X}, \hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$均为$\theta$的无偏估计

注：

$1°$ 无偏性是对估计量的一个常见而重要的要求.

无偏估计的实际意义： 无系统误差

$2°$ 一个未知参数可能有不止一个无偏估计量 .

设α_1和α_2为满足$\alpha_1+\alpha_2=1$的任意常数, 则

$\alpha_1\hat{\theta}_1+\alpha_2\hat{\theta}_2$ 都是无偏估计量.

$3°$ 有时一个参数的无偏估计可能不存在,

有时无偏估计可能明显不合理。

三、有效性

定义6.4 设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$均为θ的无偏估计量,若对任意样本容量n有$D\left(\hat{\theta}_1\right) < D\left(\hat{\theta}_2\right)$,则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

例3 设总体 X 服从区间 $[0,\ \theta]$ 上的均匀分布，$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$ 是总体 X 的一个样本．

矩估计 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 和**修正的最大似然估计** $\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$

均为 θ 的无偏估计，$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效？

解

$$D\left(\hat{\theta}_1\right) = D\left(2\overline{X}\right) = 4D\left(\overline{X}\right) = 4\frac{D(X)}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$D\left(\hat{\theta}_2\right) = D\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}D\left(X_{(n)}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left[E\left(X_{(n)}^2\right) - (EX_{(n)})^2\right]$$

$$\because p_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad \boxed{\therefore E\left(X_{(n)}\right)=\frac{n}{n+1}\theta}$$

$$\boxed{E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 p_{X_{(n)}}(x)dx}=\int_0^{\theta}\frac{n}{\theta^n}x^{n+1}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$D\left(\hat\theta_2\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left[\frac{n}{n+2}\theta^2-\frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right]=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

显然当$n\ge 2$时

$$D\left(\hat\theta_1\right)=\frac{\theta^2}{3n}>\frac{\theta^2}{n(n+2)}=D\left(\hat\theta_2\right)$$

即 $\hat\theta_2=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 比 $\hat\theta_1=2\overline{X}$ 有效.

四、相合性 (一致估计)

有时我们不仅要求估计量有较小的方差，还希望当样本容量n充分大时，估计量能在某种意义下收敛于被估计参数，这就是所谓**相合性**（或**一致性**）概念。

定义6.6 设$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是未知参数$\hat{\theta}$ 的估计序列，如果 $\hat{\theta}_n$**依概率收敛于**θ，即对任意$\varepsilon > 0$，有：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1}$$

或 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的**相合估计(或一致估计)**.

定理6.2 设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一个估计量, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0$, 则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计(或一致估计).

证明 由广义切比雪夫不等式

$$0 \leq P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(\hat{\theta}_n - \theta)^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n + E\hat{\theta}_n - \theta\right]^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E[\left(\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n\right)^2+2\left(\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n\right)\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}[D\hat{\theta}_n+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[D\hat{\theta}_n+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}_n\right)=\theta,$$

$$\lim_{n\to\infty}D(\hat{\theta}_n)=0$$

令 $n\to\infty$, 由定理的假设得

$$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\}=0$$

即 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计.

例 4 若总体 X 的 EX 和 DX 都存在，则 $\bar{X}$ 是总体均值 EX 的相合估计.

证 因为 $E\bar{X}=EX$

$$D\left(\bar{X}\right)=\frac{D\left(X\right)}{n}\to 0 \qquad n\to\infty$$

故 $\bar{X}$ 是总体均值 EX 的相合估计.

一般样本的 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是总体 k 阶原点矩的相合估计. **矩估计往往是相合估计**.

例5 设总体 X 的二阶矩存在，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$n=1,2,\cdots$.

试证 $\hat{\mu}_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$ 是总体均值 μ 的**相合估计**.

证 因为

$$\hat{\mu}_n \xrightarrow{p} \mu$$

$$E(\hat{\mu}_n) = E\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iEX_i$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\cdot\mu = \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2}\mu$$

$$D(\hat{\mu}_n) = D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X_i)$$

$$= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X)$$

$$= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}D(X)$$

$$= \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}D(X) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

故 $\hat{\mu}$ 是 μ 总体均值的相合估计.

内容小结

估计量的评选的三个标准 $\hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots X_n)$ $\left\{ \begin{array}{l} 无偏性 \\ 有效性 \\ 相合性 \end{array} \right.$

有效性 ⇒ 最小方差无偏估计

无偏性 $\boxed{E\left(\hat{\theta}\right)=\theta} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right)=\theta$

有效性 $\boxed{E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,}$ $\boxed{e\left(\hat{\theta}\right)=1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e(\hat{\theta})=1$

其中$e\left(\hat{\theta}\right)=\left(\dfrac{1}{nI\left(\theta\right)}\right)/D\left(\hat{\theta}\right)$

$$I\left(\theta\right)=E\left(\frac{\partial \ln p\left(x;\theta\right)}{\partial\theta}\right)^2=-E\left(\frac{\partial^2 \ln p\left(x;\quad\theta\right)}{\partial\theta^2}\right)$$

相合性 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta,$ $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0$

总结 $EX = \mu,\ DX = \sigma^2$

(1) $\bar{X}$ 是 μ 的矩估计，无偏估计，最小方差无偏估计，相合估计；

(2) S_n^2 是 σ^2 的矩估计，渐近无偏估计；

(3) S_n^{*2} 是 σ^2 的无偏估计，最小方差无偏估计，渐进有效估计；

$$\text{若}X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \Rightarrow$$

$\hat{\mu}=\bar{X},\hat{\sigma}^2=S_n^2$为矩估计，最大似然估计

西北工業大學

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6-2 估计量的评价标准

Thank You !