روابط فیلتر کالمن

توجه: بردارها با حروف کوچک و ماتریس ها با حروف بزرگ نمایش داده شده اند. اندیس‌های k و t نشان دهنده زمان هستند. دقت شود که بردارها طبق معمول ستونی هستند. علامت ^ نشان دهنده تخمین است. در Notation اول و دوم، عبارات دارای Superscript منفی، نشان دهنده Prediction هستند.

در Notation سوم، عباراتی که در آن ها Prior و Posterior یکی نیستند (مثل t|t-1) نشان‌دهنده Prediction و عبارت هایی که در آن ها این دو مورد یکسان هستند (مثل t|t یا t-1|t-1)، بیانگر تخمین نهایی در آن استپ زمانی (رابطه مربوط به Update) هستند.

First Notation

State-Space Model:

$$x_k = F_k x_{k-1} + w_k$$
$$y_k = H_k x_k + v_k$$

Definition of Q_k and R_k:

$$Q_k = E[w_k w_k^T]$$
$$R_k = E[v_k v_k^T]$$

Prediction:

$$\hat{x}_k^- = F_k \hat{x}_{k-1}$$
$$P_k^- = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k$$

Update:

$$G_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$$
$$P_k = P_k^- - G_k H_k P_k^-$$
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + G_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

Second Notation

State-Space Model:

$$x_t = Ax_{t-1} + w_t$$

$$y_t = Cx_t + v_t$$

Definition of W and V:

$$W = E[w_t w_t^T]$$

$$V = E[v_t v_t^T]$$

Prediction:

$$\hat{x}_t^- = A\hat{x}_{t-1}$$

$$\Sigma_t^- = A\Sigma_{t-1}A^T + W$$

Update:

$$G_t = \Sigma_t^- C^T (C\Sigma_t^- C^T + V)^{-1}$$

$$\Sigma_t = \Sigma_t^- - G_t C\Sigma_t^-$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + G_t(y_t - C\hat{x}_t^-)$$

Third Notation

State-Space Model:

$$x_t = Ax_{t-1} + w_t$$

$$y_t = Cx_t + v_t$$

Definition of W and V:

$$W = E[w_t w_t^T]$$

$$V = E[v_t v_t^T]$$

Prediction:

$$\hat{x}_{t|t-1} = A\hat{x}_{t-1|t-1}$$

$$\Sigma_{t|t-1} = A\Sigma_{t-1|t-1}A^T + W$$

Update:

$$G = \Sigma_{t|t-1}C^T(C\Sigma_{t|t-1}C^T + V)^{-1}$$

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - GC\Sigma_{t|t-1}$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + G(y_t - C\hat{x}_{t|t-1})$$

کمیت‌های مورد نیاز برای پیاده‌سازی فیلتر کالمن

۱- ماتریس A (یا همان F_k)
۲- ماتریس C (یا همان H_k)
۳- ماتریس W (یا همان Q_k)
۴- ماتریس V (یا همان R_k)
۵- مشاهدات y_t (یا همان y_k)
۶- تخمینی از x_0 (بردار حالت در گام اول)
۷- تخمینی از Σ_0 (یا همان P_0، ماتریس کوواریانس در گام اول)

روابط پیاده سازی فیلتر در مقاله

مدل فضای حالت

$$w(t+1) = w(t) + v(t)$$
$$r(t) = x(t).w(t) + \eta(t)$$

بنابراین بردار حالت همان بردار w(t) بوده و نویز فرآیند v(t) است. با توجه به این روابط، واضح است که A همان ماتریس همانی است. بعد این بردار بستگی به تعداد Stimulus های موجود در مسئله دارد. برای مثال اگر فقط از نور استفاده کنیم، بعد بردار یک خواهد بود اما اگر هم از نور و هم از صدا استفاده کنیم، بعد دو خواهد شد.

در معادله Measurement، x(t) همان ماتریس C است. توجه شود که r اسکالر است. به همین دلیل نویز اندازه گیری (همان $\eta(t)$) را یک گوسی اسکالر با میانگین صفر و واریانس دلخواه τ^2 می‌گیریم.

ماتریس های W و V

توجه شود که این ماتریس ها نباید با بردارهای w(t) و v(t) مقاله اشتباه گرفته شوند.

$$W = E[v(t)v(t)^T]$$
$$V = E[\eta(t)\eta(t)^T] = \tau^2$$

روابط Prediction

$$\widehat{w}(t+1)^- = A\widehat{w}(t) = \widehat{w}(t)$$
$$\Sigma(t+1)^- = A\Sigma(t)A^T + W = \Sigma(t) + W$$

روابط Update

$$G = \Sigma(t+1)^- C^T (C\Sigma(t+1)^- C^T + \tau^2)^{-1}$$
$$\Sigma(t+1) = \Sigma(t+1)^- - GC\Sigma(t+1)^-$$
$$\widehat{w}(t+1) = \widehat{w}(t) + G(r(t) - C\widehat{w}(t))$$

توجه:

۱- برای آن که روابط بالا مشابه روابط مقاله شوند، باید فرض کنیم که عناصر ماتریس W کوچک هستند.
۲- ترتیب روابط در پیاده‌سازی فیلتر کالمن، مشابه با ترتیب نوشته شده در این فایل است (از بالا به پایین).
۳- دقت شود که ماتریس G (گین فیلتر کالمن) با زمان تغییر می‌کند. ماتریس C هم با توجه به شرایط مسئله ممکن است با زمان تغییر کند یا آن که ثابت بماند.