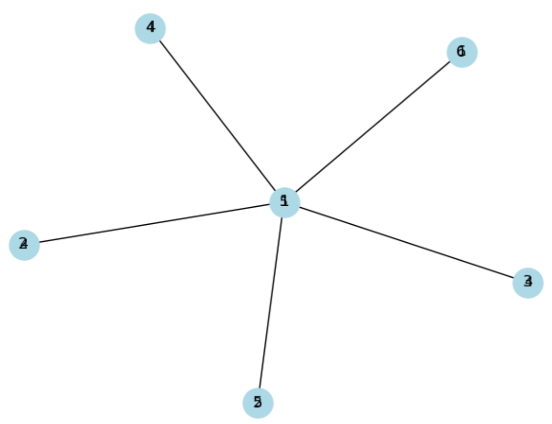
Lista de Exercícios 1 - ECOM02A - Teoria dos Grafos

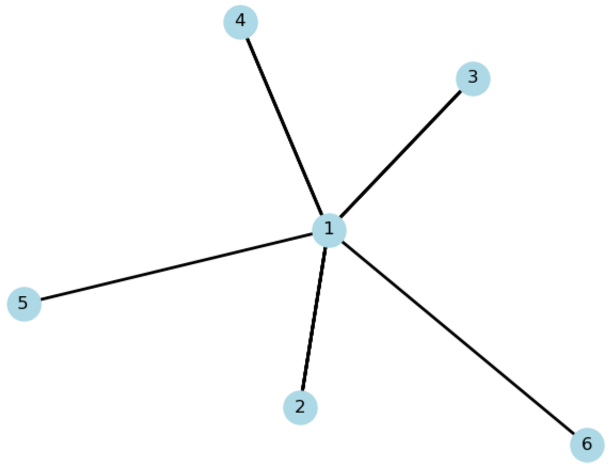
Pedro Henrique Oliveira Francisco 2022003245

1.
   1.1. Redes de transporte público: Estações como nós e rotas de transporte como conexões;
   1.2. Redes de transações financeiras: Contas bancárias como nós e transações financeiras como conexões;
   1.3. Redes de interações entre proteínas: Proteínas como nós e interações físicas ou químicas como conexões;
   1.4. Modelagem de redes neurais: Neurônios como nós e conexões sinápticas como conexões;
   1.5. Redes de computadores: Dispositivos como nós e conexões de rede como arestas, aplicado em algoritmos de roteamento.
2.
   2.1. Grafo simples com aresta não dirigida:
      2.1.1. Nós: V1, V2, V3
      2.1.2. Arestas: (V1, V2), (V2, V3), (V3, V1)
   2.2. Multigrafo:
      2.2.1. Nós: V1, V2, V3
      2.2.2. Arestas: (V1, V2), (V2, V3), (V3, V1), (V1, V2)
   2.3. Pseudografo:
      2.3.1. Nós: V1, V2, V3
      2.3.2. Arestas: (V1, V2), (V2, V3), (V3, V1), (V1, V1)
   2.4. Grafo dirigido:
      2.4.1. Nós: V1, V2, V3
      2.4.2. Arestas dirigidas: (V1 → V2), (V2 → V3), (V3 → V1)
   2.5. Multigrafo dirigido:
      2.5.1. Nós: V1, V2, V3
      2.5.2. Arestas dirigidas: (V1 → V2), (V2 → V3), (V3 → V1), (V1 → V2)

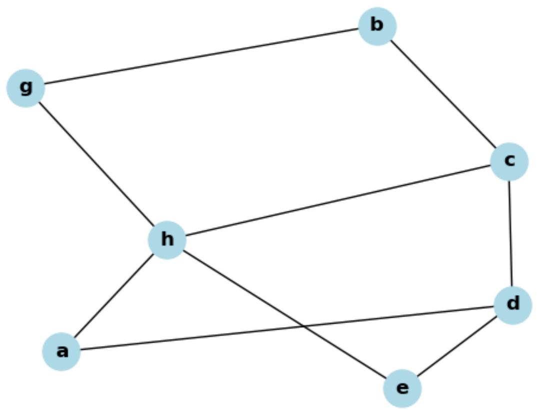
3.



4.



5.



6.

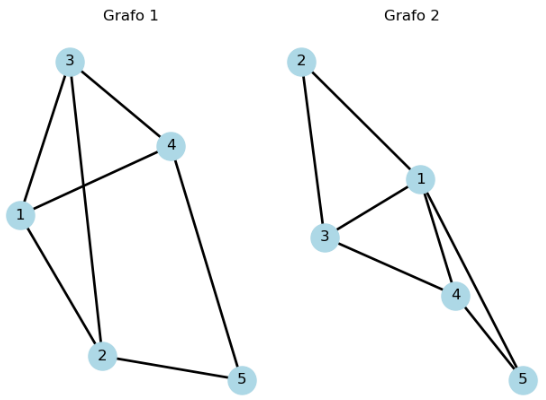
O grafo G' é o complemento de G, tendo os mesmos vértices, mas com as arestas invertidas. 'n arestas' em G' pode ser calculado pela fórmula:

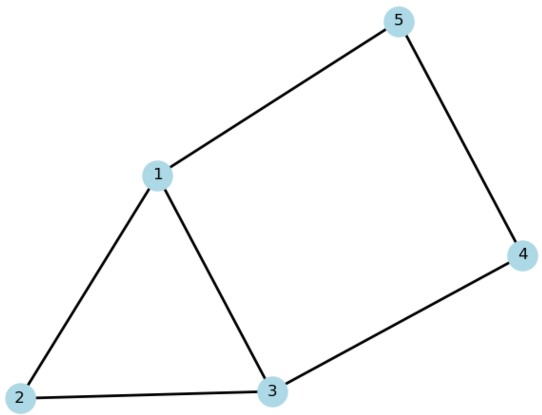
(v * (v - 1)) / 2 - a

Onde:

- v é o número de vértices em G;
- a é o número de arestas em G.

7.





8.

Um grafo roda não é regular na maioria dos casos. A exceção ocorre quando a roda tem apenas 3 vértices, nesse caso específico, todos os vértices têm o mesmo grau e o grafo é considerado regular. No entanto, para rodas com mais de 3 vértices, o vértice central possui um grau menor em relação aos vértices periféricos, o que torna o grafo não regular.

9.

a.
   Grau de entrada:
      A: 1, B: 1, C: 2, D: 1, E: 1
   Grau de saída:
      A: 2, B: 1, C: 0, D: 2, E: 1
b. Lista de adjacentes:
      A: ['C', 'B'], B: ['E'], C: [], D: ['C', 'A'], E: ['D']
c. Fontes: [],
   Sumidouros: ['C']

10.

Para provar que se G possui nk vértices de grau k e nk+1 vértices de grau k+1, então nk = n(k+1) - 2a, onde n é o número total de vértices e a é o número total de arestas em G, é necessário usar o Teorema do Aperto de Mãos.

Argumento em .py:
edges = [(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5)] n = max(max(edge) for edge in edges) a = len(edges) k = 2 print("Válida" if sum(1 for edge in edges if k in edge) == n * (k + 1) - 2 * a else "Inválida")

11.

a.

Matriz de Adjacência:

```
   | 1 2 3 4 5
---|------------
 1 | 0 1 1 0 0
 2 | 1 0 0 0 0
 3 | 1 0 0 1 0
 4 | 0 0 1 0 0
 5 | 0 0 0 0 0
```

Lista de Adjacência:

1: [2, 3], 2: [1], 3: [1, 4], 4: [3], 5: []

b.

Matriz de Adjacência:

```
    | v1 v2 v3 v4
 ---|----------------
v1 | 0   1   0   1
v2 | 1   0   1   0
v3 | 0   1   0   1
v4 | 1   0   1   0
```

Lista de Adjacência:

v1: [v2, v4], v2: [v1, v3], v3: [v2, v4], v4: [v1, v3]

c.

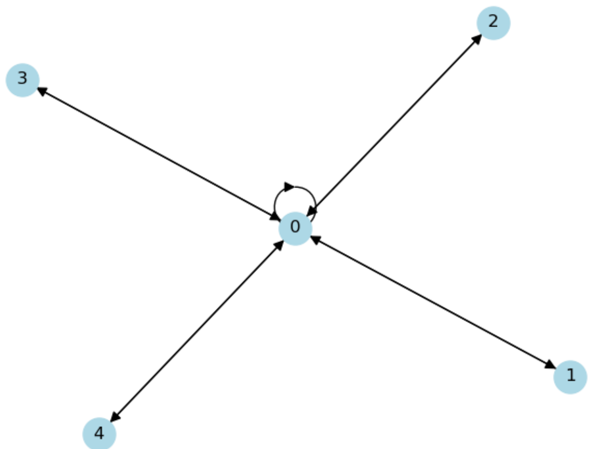
Matriz de Adjacência:

```
   | 1 2 3 4 5 6
---|--------------
 1 | 0 1 1 0 1 0
 2 | 1 0 0 1 0 0
 3 | 1 0 0 1 1 0
 4 | 0 1 1 0 0 1
 5 | 1 0 1 0 0 1
 6 | 0 0 0 1 1 0
```

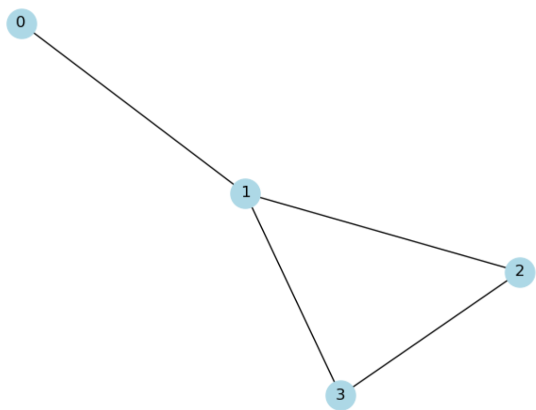
Lista de Adjacência:

1: [2, 3, 5], 2: [1, 4], 3: [1, 4, 5], 4: [2, 3, 6], 5: [1, 3, 6], 6: [4, 5]

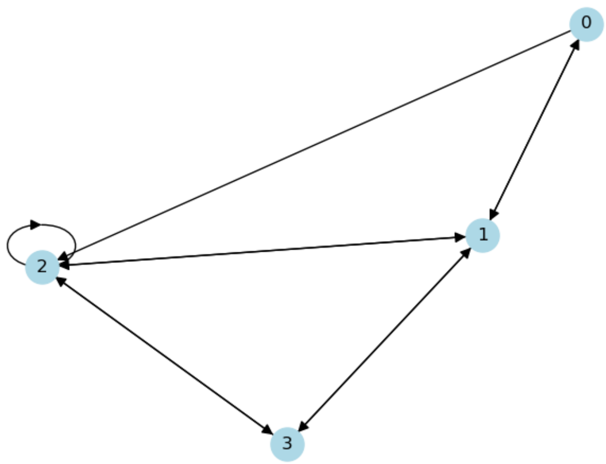
12.



13.



14.



15.

```
def is_grafo_completo(matriz_adjacencia):
    n = len(matriz_adjacencia)
    return all(matriz_adjacencia[i][j] == 1 for i in range(n) for j in range(n) if i != j)
```

16.

```
def calcular_grau_vertices(matriz_adjacencia):
    return [sum(row) for row in matriz_adjacencia]
```

17.

1) Produto booleano A x A:
    a) A x A =
    [[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [0, 1, 1, 1], [0, 1, 1, 0]] x [[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [0, 1, 1, 1], [0, 1, 1, 0]]
    = [[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0]]
    =
    [[1 1 0 1]
     [1 0 1 1]
     [1 1 1 1]
     [1 1 1 0]]

2) Produto booleano A x A x A:
   a) A x A x A =
      [[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0]] x [[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0]]
      = [[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0]]
      =
      [[1 1 0 1]
      [1 0 1 1]
      [1 1 1 1]
      [1 1 1 0]]

18.

Matriz de alcançabilidade:

i. A =
   [[0, 1, 0, 1],
   [1, 0, 1, 1],
   [0, 1, 0, 1],
   [0, 1, 1, 0]]

ii. A^1 = A

iii. A^2 = A x A =
   [[1, 1, 1, 2],
   [2, 2, 1, 2],
   [1, 1, 1, 2],
   [1, 2, 2, 2]]

iv. A^3 = A^2 x A =
   [[2, 3, 3, 5],
   [4, 5, 4, 6],
   [2, 3, 3, 5],
   [3, 4, 4, 5]]

v. A^4 = A^3 x A =
   [[9, 13, 13, 21],
   [13, 17, 15, 23],
   [9, 13, 13, 21],
   [10, 15, 15, 23]]

19.

A matriz A para o grafo completo de 4 vértices é:

A =

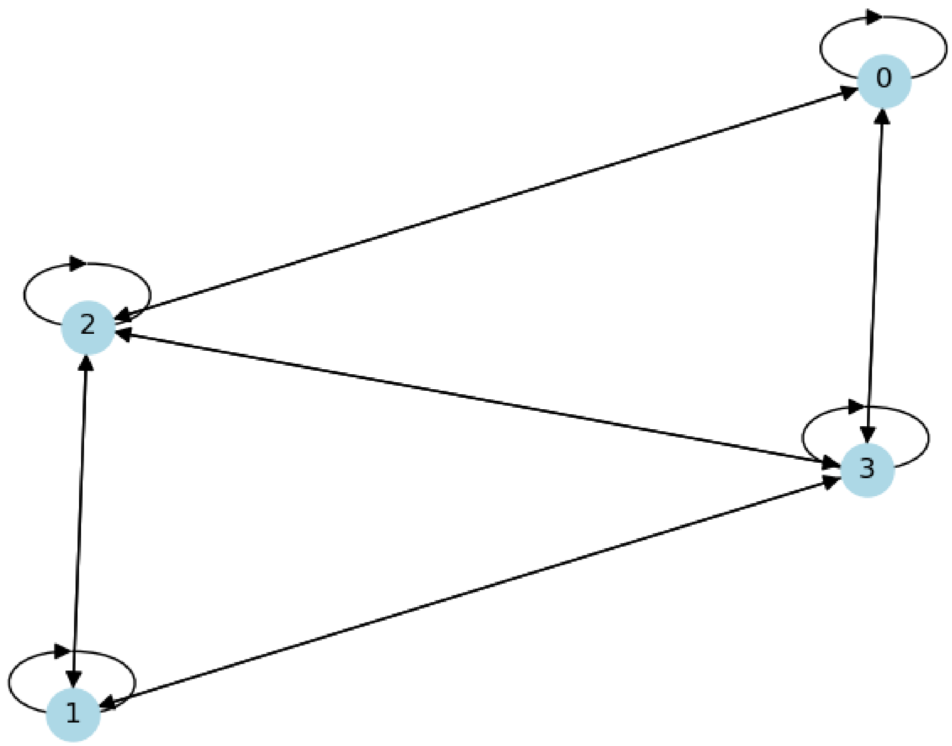
[[0, 1, 1, 1],
[1, 0, 1, 1],
[1, 1, 0, 1],
[1, 1, 1, 0]]

Ao calcular A^2, obtemos a matriz resultante:

A^2 =
[[3, 2, 2, 2],
[2, 3, 2, 2],
[2, 2, 3, 2],
[2, 2, 2, 3]]

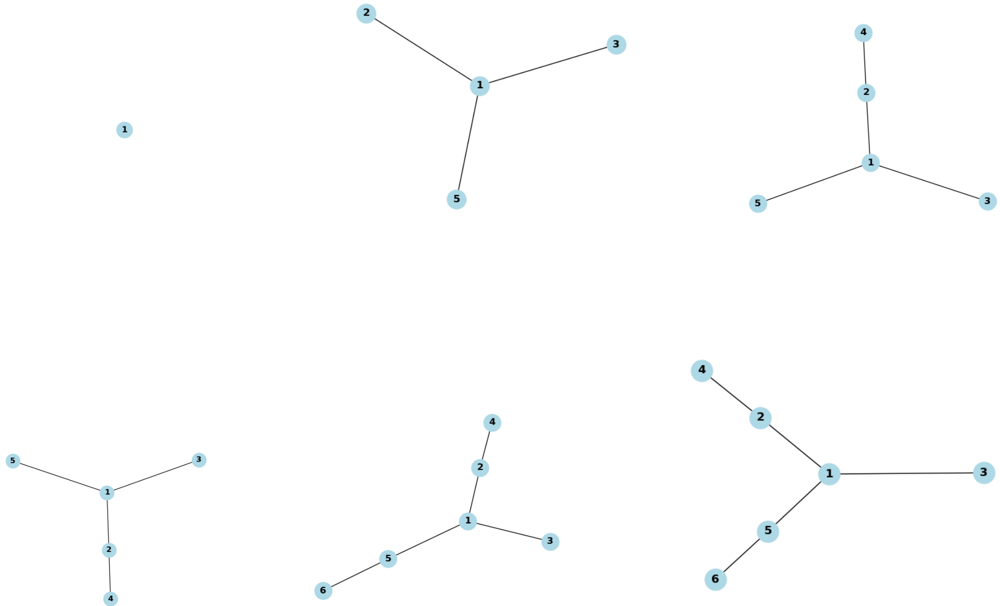
A matriz A^2 representa os caminhos de comprimento 2 entre os vértices do grafo completo de 4 vértices. É uma medida da conectividade e estrutura de caminhos do grafo.

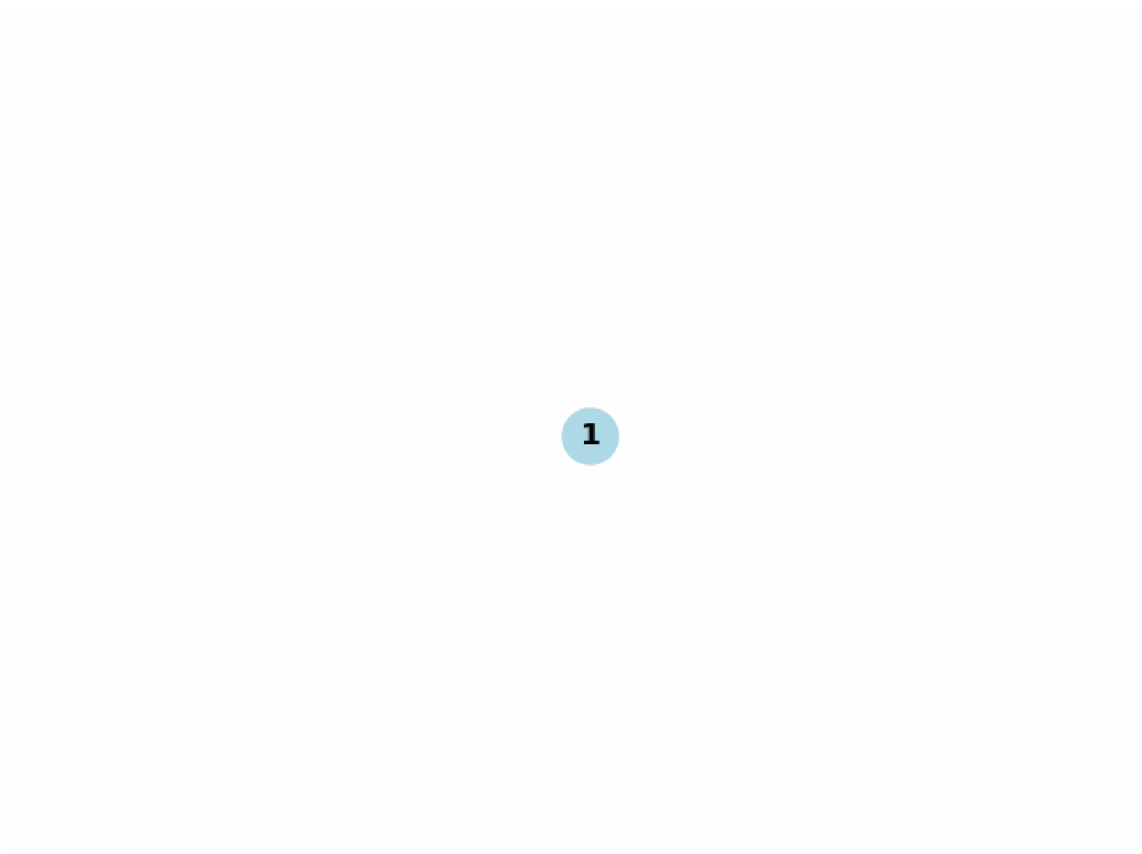
20.



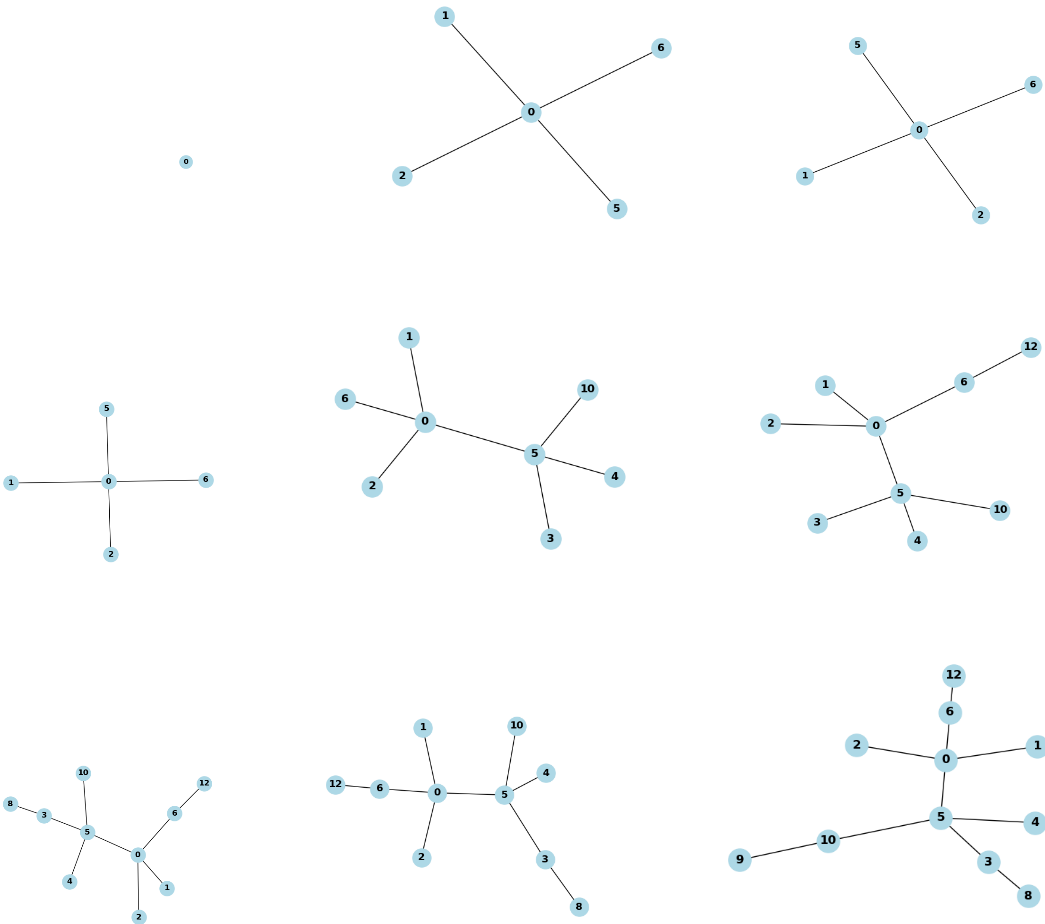
21.

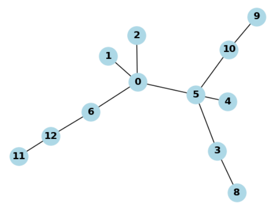
a.

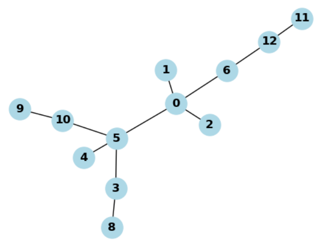


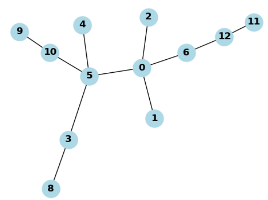


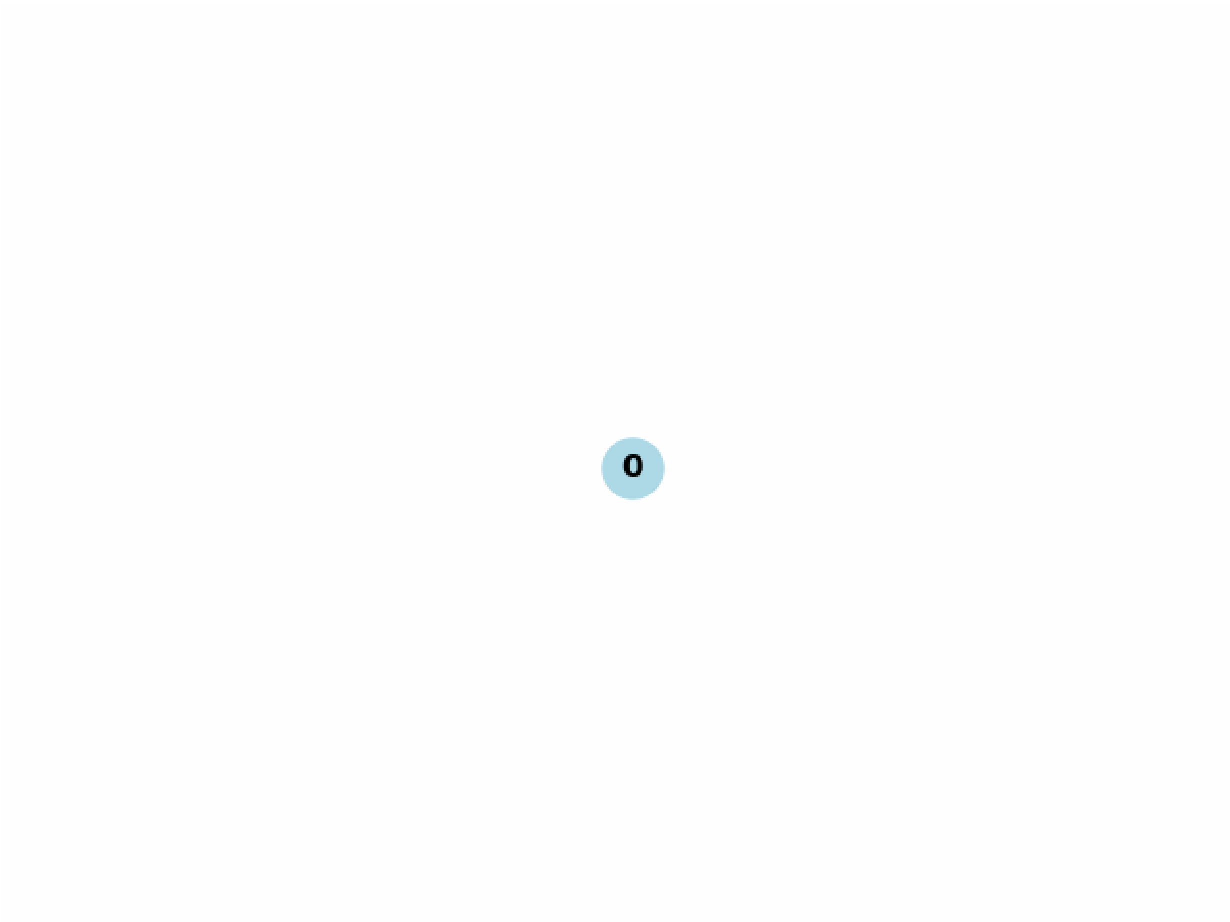
b.


0
1 6 0 2 5
5 6 0 1 2
5 1 0 6 2
1 10 6 0 5 2 4 3
12 1 6 2 0 5 3 10 4
10 12 8 3 5 6 0 4 1 2
1 10 12 6 0 5 4 2 3 8
12 6 2 0 1 5 4 10 9 3 8

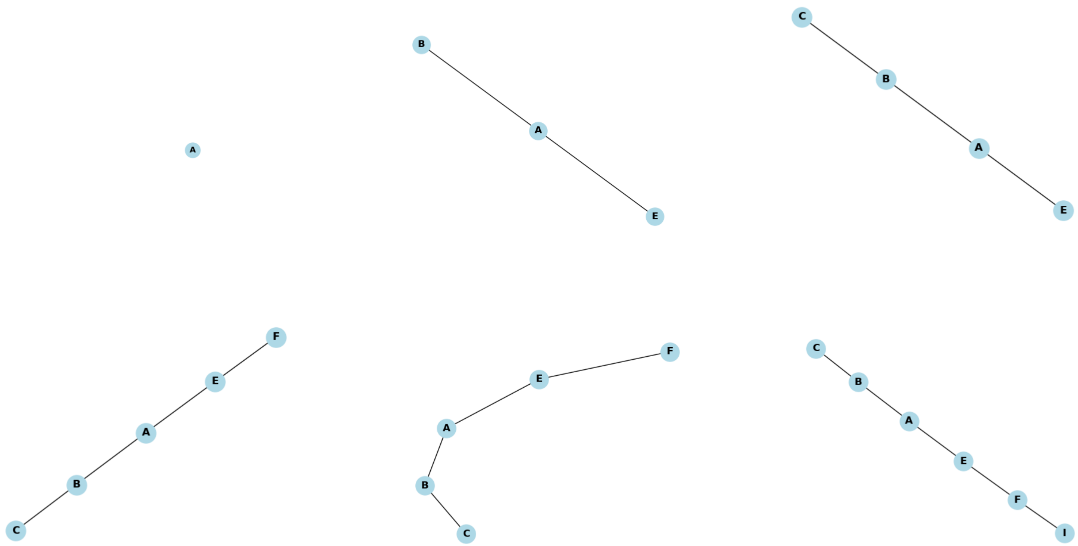

0
1
2
3
4
5
6
8
9
10
11
12


0
1
2
3
4
5
6
8
9
10
11
12


0
1
2
3
4
5
6
8
9
10
11
12

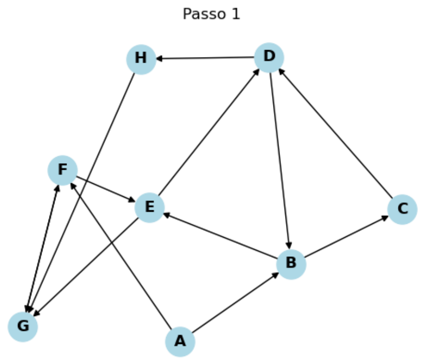

0

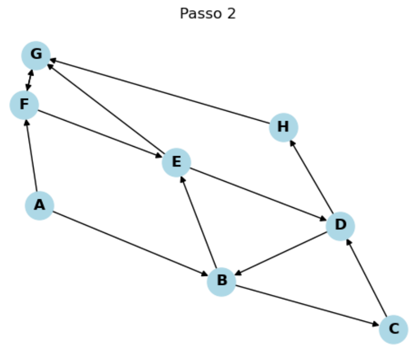
c.

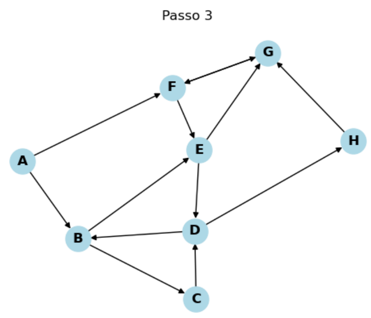


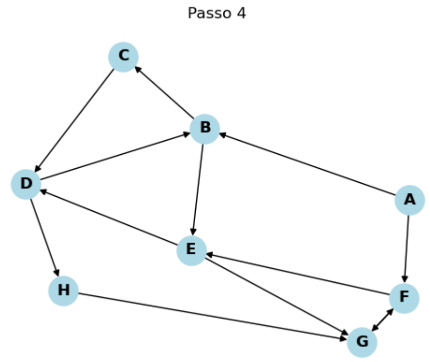
22.

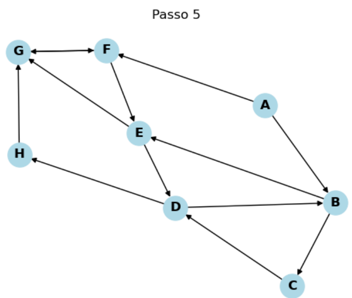
a.

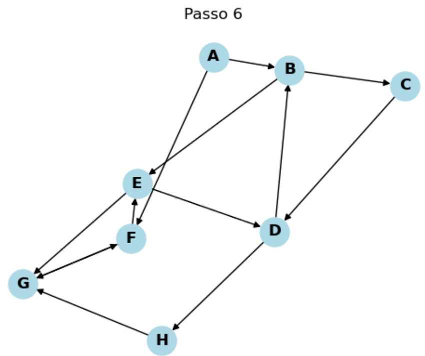

Passo 1
H
D
F
E
C
B
G
A

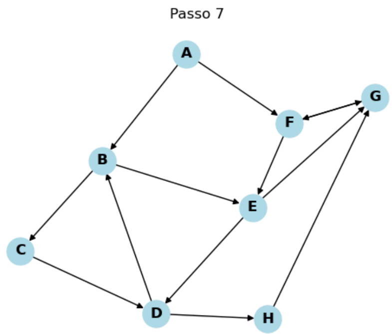

Passo 2
G
F
H
E
A
D
B
C

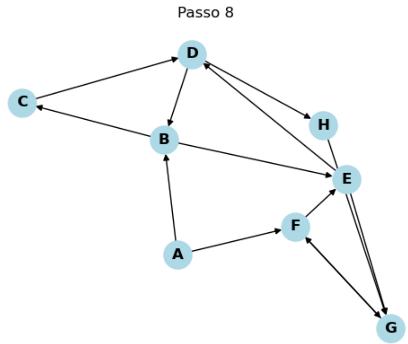

Passo 3
G
F
H
A
E
B
D
C

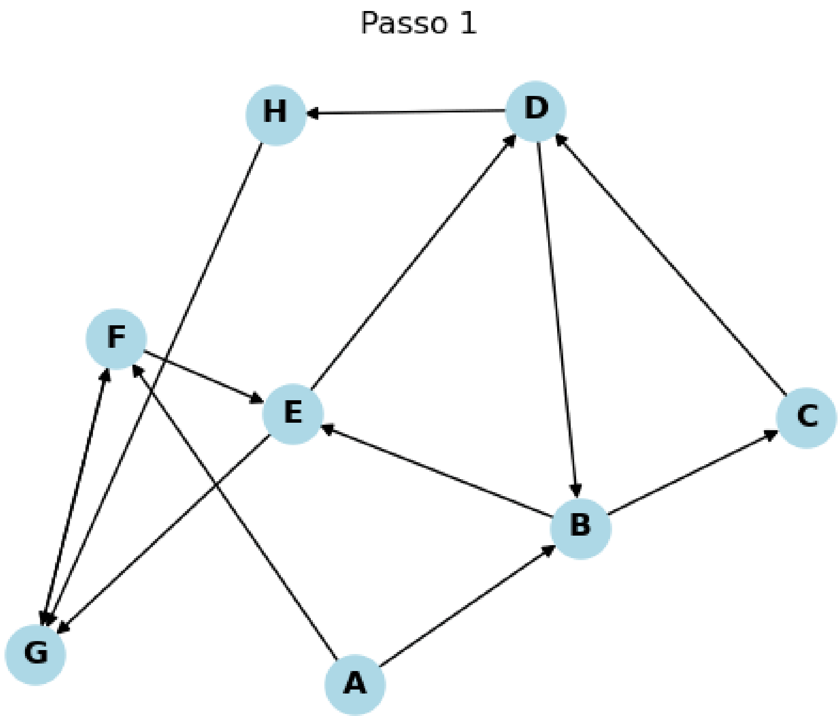

Passo 4
C
B
D
A
E
H
F
G


Passo 5
G
F
A
E
H
B
D
C


Passo 6
A
B
C
E
D
F
G
H







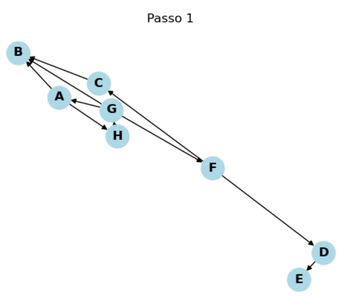
1. Grafo 'a':
    a. Classificação das arestas:
        i. AB: Aresta de Árvore
        ii. AF: Aresta de Árvore
        iii. BC: Aresta de Árvore
        iv. BE: Aresta de Árvore
        v. CD: Aresta de Árvore
        vi. DB: Aresta de Retorno
        vii. DH: Aresta de Árvore
        viii. ED: Aresta de Árvore
        ix. EG: Aresta de Árvore

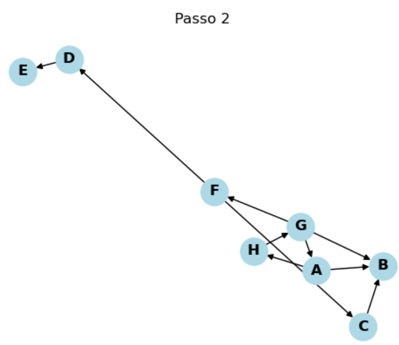
x. FE: Aresta de Retorno
xi. FG: Aresta de Árvore
xii. GF: Aresta de Retorno
xiii. HG: Aresta de Árvore

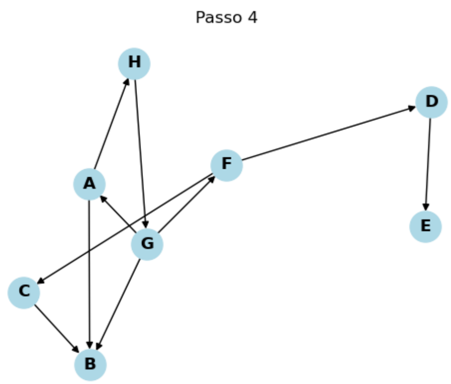
b. Números pré e pós de cada vértice:

i. Vértice A: Pré = 1, Pós = 26
ii. Vértice B: Pré = 2, Pós = 19
iii. Vértice C: Pré = 3, Pós = 8
iv. Vértice D: Pré = 4, Pós = 17
v. Vértice E: Pré = 9, Pós = 14
vi. Vértice F: Pré = 5, Pós = 12
vii. Vértice G: Pré = 6, Pós = 11
viii. Vértice H: Pré = 18, Pós = 25

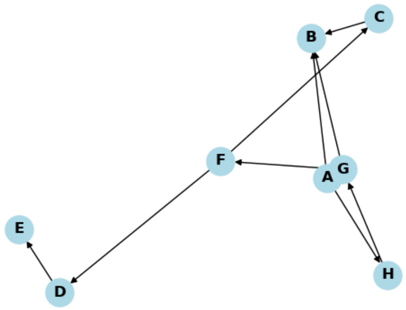
b.



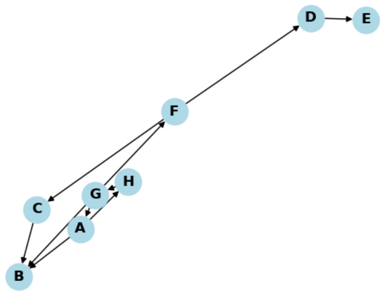




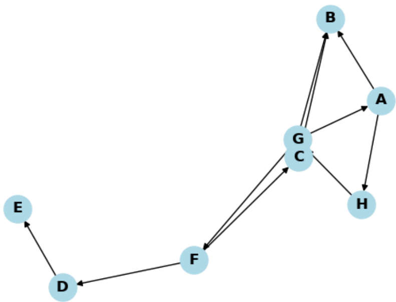
Passo 5



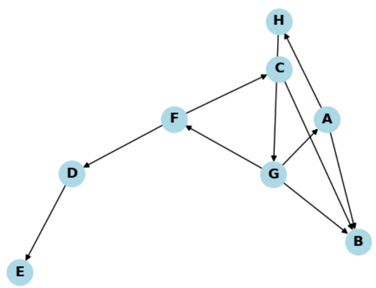
Passo 6



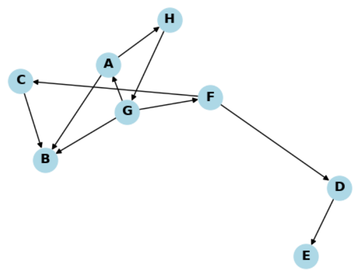
Passo 7



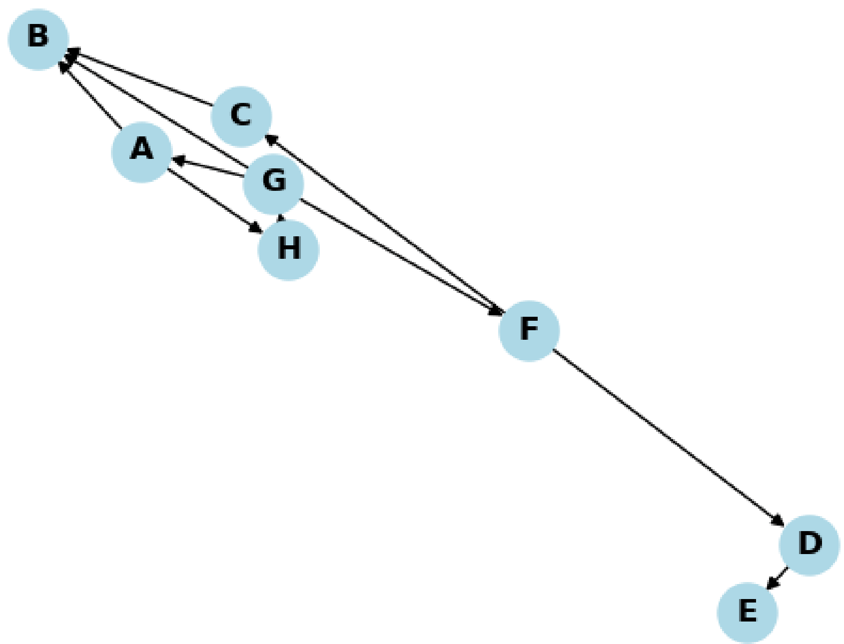
Passo 9



Passo 10



Passo 1



2. Grafo 'b':

   a. Classificação das arestas:
      i. AB: Aresta de Árvore
      ii. AH: Aresta de Árvore
      iii. CB: Aresta de Árvore
      iv. DE: Aresta de Árvore
      v. FD: Aresta de Retorno
      vi. FC: Aresta de Retorno
      vii. GF: Aresta de Árvore
      viii. GB: Aresta de Avanço
      ix. GA: Aresta de Avanço

x. HG: Aresta de Árvore

b. Números pré e pós de cada vértice:
   i. Vértice A: Pré = 1, Pós = 10
   ii. Vértice B: Pré = 2, Pós = 9
   iii. Vértice C: Pré = 3, Pós = 4
   iv. Vértice D: Pré = 5, Pós = 6
   v. Vértice E: Pré = 7, Pós = 8
   vi. Vértice F: Pré = 11, Pós = 12
   vii. Vértice G: Pré = 13, Pós = 16
   viii. Vértice H: Pré = 17, Pós = 20