Analisis y Diseño de Algoritmos

Juan Gutiérrez

August 21, 2023

Resumen

Información útil

Algoritmos

Información útil

El profesor

- Juan Gutiérrez

El profesor

- Juan Gutiérrez
- Dr. Ciencia de la Computación, Instituto de Matemática y Estadística (IME), Universidad de Sao Paulo (USP)

El profesor

- Juan Gutiérrez
- Dr. Ciencia de la Computación, Instituto de Matemática y Estadística (IME), Universidad de Sao Paulo (USP)
- Área: Computación teórica. Grupo: Teoria da Computação, Combinatória e Otimização

El profesor

- Juan Gutiérrez
- Dr. Ciencia de la Computación, Instituto de Matemática y Estadística (IME), Universidad de Sao Paulo (USP)
- Área: Computación teórica. Grupo: Teoria da Computação, Combinatória e Otimização
- Subáreas: Teoría de grafos, Matemática discreta, Análisis de algoritmos, Optimización combinatoria.

El profesor

- Juan Gutiérrez
- Dr. Ciencia de la Computación, Instituto de Matemática y Estadística (IME), Universidad de Sao Paulo (USP)
- Área: Computación teórica. Grupo: Teoria da Computação, Combinatória e Otimização
- Subáreas: Teoría de grafos, Matemática discreta, Análisis de algoritmos, Optimización combinatoria.
- Tesis: Transversals of graphs

Sistema de evaluación

- $N_F = 0.25 * E_1 + 0.25 * E_2 + 0.25 * E_3 + 0.25 * C$
- E_i: Exámenes (3)
- C: Continua (3)
- Para aprobar el curso hay que obtener 11 o más en la nota final N_F.
- Para aprobar el curso es necesario aprobar tanto el promedio de exámenes como el promedio de continuas

Bibliografía

- **Cormen**: Introduction to Algorithms
- **Kleinberg, Tardos**: Algorithm Design

Algoritmos

¿Qué es un algoritmo?

Técnicas a estudiar en el curso

Introducción al análisis de eficiencia

Tenemos dos computadores A y B con las siguientes características y algoritmos a ejecutar.

- Computador A:
  - Velocidad: 10^{10} instrucciones/s,
  - Algoritmo a ejecutar: InsertionSort, cuya complejidad es $2n^2$. Es decir, con entrada de tamaño n, ejecuta $2n^2$ instrucciones.
- Computador B:
  - Velocidad: 10^7 instrucciones/s,
  - Algoritmo a ejecutar: MergeSort, cuya complejidad es $50n \lg n$.

¿Qué sucede si ordenamos $n = 10^7$ números? ¿Qué sucede si ordenamos $n = 10^8$ números?

Suponga que en una misma computadora se corre INSERTIONSORT y MERGESORT, donde

- INSERTIONSORT tiene complejidad $8n^2$
- MERGESORT tiene complejidad $64n \lg n$.

¿Para qué valores de n es más eficiente el INSERTIONSORT?

¿Cual es el menor valor de n tal que un algoritmo con tiempo de ejecucion $100n^2$ es más rapido que uno con tiempo de ejecucion 2^n en la misma máquina?

Ejercicio 3. *Para cada función $f(n)$ y tiempo t en la siguiente tabla, determine el mayor tamaño de n de un problema que puede ser resuelto en tiempo t, suponiendo que el algoritmo para resolver el problema toma $f(n)$ μs*

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$							
$\sqrt{n}$							
n							
$n \lg n$							
n^2							
n^3							
2^n							
$n!$							

Propiedades de logaritmos

- $\log_a b = x$ si y solo si $b = a^x$.

Propiedades de logaritmos

- $\log_a b = x$ si y solo si $b = a^x$.
- $\log_a x^y = y \log_a x$

Propiedades de logaritmos

- $\log_a b = x$ si y solo si $b = a^x$.
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Inducción

Propiedad

Para todo número natural n, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Inducción

Propiedad
Para todo número natural n, $1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Inducción

Propiedad
Para todo número natural n, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$..

Inducción

Propiedad
Para todo número natural n, $\lg n \leq n$.

Propiedad
Para todo número natural $n \geq 44$, $8 \lg n \leq n$.

Definición
Dada una secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de números, donde* n *es un entero no negativo, podemos escribir la suma finita* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *como*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Si $n = 0$ *entonces el valor de la sumatoria es definida como 0.*

Sumatorias

Para cada número real c y cualesquier secuencias $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}(c a_k + b_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Sumatorias

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sumatorias

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Sumatorias

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

Sumatorias

Para cada número real $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Corolario:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Sumatorias

Cuando $0 < |x| < 1$, se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Sumatorias

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(Ejercicio)

Sumatorias

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Se sabe que $\mathrm{H}_n \approx \ln n$.

Acotando sumatorias por inducción

Propiedad
Para todo número natural $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \leq \frac{1}{2}(n+1)^2.$$

Acotando sumatorias por inducción

Propiedad
Para todo número natural $n \geq 0$*, existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c3^n.$$

Acotando sumatorias por términos

$$\sum_{k=1}^{n} k \leq \sum_{k=1}^{n} n = n^2.$$

Acotando sumatorias por términos

Supongamos que $a_{k+1}/a_k \leq r$ para todo $k \geq 0$, con $0 < r < 1$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= a_0 \cdot \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

Acotando sumatorias por división

Acotaremos inferiormente $\sum_{k=1}^{n} k$ (asuma que n es par).

Acotando sumatorias por división

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k \\
&\geq \sum_{k=1}^{n/2} 0 + \sum_{k=n/2+1}^{n} (n/2) \\
&= (n/2)^2.
\end{aligned}
$$

Acotando sumatorias por división

Acotaremos

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k$$

.

Acotando sumatorias por división

Note que cuando $k \geq 3$, $\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \leq \frac{8}{9}$. Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k &= \sum_{k=0}^{2} k^2/2^k + \sum_{k=3}^{\infty} k^2/2^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + 9/8 \sum_{k=0}^{\infty} (8/9)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + 9/8 \cdot (1/(1-8/9)) \\
&= c
\end{aligned}$$

para alguna constante c.

Acotando sumatorias por división

Acotaremos

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Acotando sumatorias por división

Acotaremos $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i + j} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 1 \\
&\leq \lg n + 1.
\end{aligned}$$

Árboles binarios

Un *árbol binario* T es definido recursivamente de la siguiente manera.

- Si T no tiene nodos entonces es un árbol binario.
- Si T tiene nodos, está compuesto por un nodo *raíz*, un árbol binario llamado *subárbol izquierdo* y un árbol binario llamado *subárbol derecho*.

Árboles binarios

Si cada nodo interno tiene exactamente dos hijos, un árbol binario es denominado *lleno*. Si además todas las hojas tienen la misma profundidad, dicho árbol es denominado *completo*.

Árboles binarios

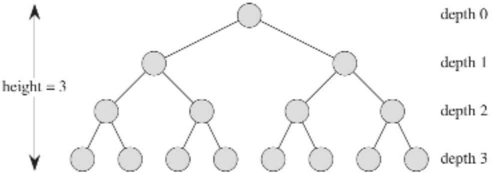

Figure B.8 A complete binary tree of height 3 with 8 leaves and 7 internal nodes.

Figure 1: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms

Árboles binarios

- ¿Cuantas hojas a profundidad i tiene un árbol binario completo? Demostrar por inducción.
- ¿Cuál es la altura de un árbol binario completo con n nodos? Demostrar usando el ítem anterior
- Responder la pregunta anterior directamente usando inducción

Gracias