مرور جبر کارشناسی

تعریف ۱ - نیم‌گروه

فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی باشد و یک عمل دوتایی $\cdot$ روی S را در نظر بگیرید. اگر این عمل شرکت‌پذیر باشد یعنی:

$$\forall a, b, c \in S \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

آنگاه S را همراه با عمل $\cdot$ یک **نیم‌گروه** [a] می‌نامیم.

[a] Semigroup

تعریف ۲- گروه

فرض کنید مجموعه ناتهی G همراه با عمل دوتایی $\cdot$ در شرایط زیر صدق کند:

$$\forall a, b, c \in G \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$\exists e \in G \ \forall a \in G \quad a \cdot e = e \cdot a = a \quad (\text{وجود عنصر همانی})$$

$$\forall a \in G \ \exists b \in G \quad a \cdot b = b \cdot a = e \quad (\text{وجود عنصر وارون})$$

در این صورت $(G, \cdot)$ را یک **گروه** می‌نامیم.

ملاحظه

غالبا بجای $a \cdot b$ می‌نویسیم ab.

تعریف ۳ - گروه آبلی

اگر به ازای هر $a, b \in G$ داشته باشیم:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

گروه را **آبلی یا جابجایی** می‌نامیم.

تعریف ۴ - زیرگروه

اگر $(G, \cdot)$ یک گروه باشد و $H \subseteq G$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد که خودش نیز تحت عمل $\cdot$ یک گروه باشد، آنگاه H را یک **زیرگروه** G می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$H \leq G$$

قضیه ۱ - محک فشرده

زیرمجموعه ناتهی $H \subseteq G$ زیرگروه G است اگر و تنها اگر:

$$\forall a, b \in H \quad a \cdot b^{-1} \in H$$

مثال ۱

$(\mathbb{Z},+)$، گروه اعداد صحیح با عمل جمع را در نظر بگیرید. زیرمجموعه‌ی $2\mathbb{Z}=\{2k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ یعنی اعداد زوج، با همان عمل جمع، یک زیرگروه از $\mathbb{Z}$ است، بنابراین:

$$(2\mathbb{Z},+)\leq(\mathbb{Z},+)$$

اثبات. برای اثبات اینکه $(2\mathbb{Z},+)$ زیرگروه است، از محک فشرده استفاده می‌کنیم: باید نشان دهیم اگر $a,b\in 2\mathbb{Z}$ باشند، آنگاه $a-b\in 2\mathbb{Z}$.

ازآنجا که $a=2m$ و $b=2n$ به ازای $m,n\in\mathbb{Z}$، آنگاه:

$$a-b=2m-2n=2(m-n)$$

که چون $m-n\in\mathbb{Z}$، پس $a-b\in 2\mathbb{Z}$.

بنابراین، $a+(-b)\in 2\mathbb{Z}$ و با استفاده از محک فشرده نتیجه می‌گیریم که $(2\mathbb{Z},+)$ زیرگروه $(\mathbb{Z},+)$ است. □

مثال ۲

$(\mathbb{Z},+)$، گروه اعداد صحیح با عمل جمع را در نظر بگیرید. برای هر $n\in\mathbb{N}$، مجموعه $n\mathbb{Z}=\{nk \mid k\in\mathbb{Z}\}$ با همان عمل جمع، زیرگروه $\mathbb{Z}$ است:

$$(n\mathbb{Z},+)\leq(\mathbb{Z},+)$$

اثبات. برای $a,b\in n\mathbb{Z}$، داریم $a=nk$، $b=nl$ به ازای $k,l\in\mathbb{Z}$، پس:

$$a-b=nk-nl=n(k-l)\in n\mathbb{Z}$$

بنابراین، $n\mathbb{Z}$ تحت تفاضل بسته است و زیرگروه $\mathbb{Z}$ می‌باشد. □

مثال ۳

$(\mathbb{N},\times)$ گروه نیست.
زیرا برای مثال عدد $2\in\mathbb{N}$ هیچ عضو معکوسی نسبت به ضرب در $\mathbb{N}$ ندارد. یعنی عدد طبیعی‌ای وجود ندارد که $2\times x=1$ را برآورده کند.
بنابراین، شرط وجود عنصر معکوس برای همه اعضا برقرار نیست و $(\mathbb{N},\times)$ گروه نیست.

تعریف ۵

برای هر میدان F، مجموعه‌ی F^* به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^* = F \setminus \{0\}$$

یعنی مجموعه‌ی تمام اعضای ناصفر F. این مجموعه تحت عمل ضرب، یک گروه تشکیل می‌دهد.
به طور خاص:

- $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: اعداد گویا ناصفر
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$: اعداد حقیقی ناصفر
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$: اعداد مختلط ناصفر

هر یک از این مجموعه‌ها با عمل ضرب، یک گروه ضربی می‌سازند.

تعریف ۶

اگر F یک میدان [a] باشد، آنگاه $M_n(F)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌هایی از F است:

$$M_n(F) = \{A = (a_{ij}) \mid 1 \leq i, j \leq n,\ a_{ij} \in F\}$$

روی $M_n(F)$ می‌توان اعمال مختلفی تعریف کرد، مانند جمع ماتریسی و ضرب ماتریسی.
معمولاً $(M_n(F), +)$ یک گروه آبلی است (نسبت به جمع ماتریسی) و $(M_n(F), \cdot)$ یک نیم‌گروه است (نسبت به ضرب ماتریسی، ولی بسته به F و n ممکن است گروه نباشد زیرا ماتریس‌های ناتبدیل وارون ندارند).

[a] Field

مثال ۴

در ادامه چند مثال از زیرگروه‌ها آورده شده است:

$$(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +)$$
$$(\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$$
$$(\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot)$$
$$(M_n(\mathbb{Q}), +) \leq (M_n(\mathbb{R}), +)$$

$(\mathbb{C}, +)$ (گروه جمعی اعداد مختلط)

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ (گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر)

$(M_n(\mathbb{C}), +)$ (گروه ماتریس‌های $n \times n$ مختلط با جمع)

تعریف ۷

برای عدد صحیح $n \geq 2$، مجموعه‌ی باقیمانده‌های صحیح پیمانه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

که در آن $\overline{a}$ نمایانگر کلاس پیمانه‌ای a نسبت به n است، یعنی:

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\}$$

عمل جمع روی $\mathbb{Z}_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{i} + \overline{j} := \overline{i+j}$$

به این ترتیب، $(\mathbb{Z}_n, +)$ یک گروه آبلی متناهی است.

اثبات خوش‌تعریف بودن عمل جمع. فرض کنید $\overline{i} = \overline{i'}$ و $\overline{j} = \overline{j'}$. آنگاه به ازای $k, \ell \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$i = i' + kn \quad \text{و} \quad j = j' + \ell n$$

بنابراین:

$$i + j = i' + j' + (k + \ell)n \Rightarrow i + j \equiv i' + j' \pmod{n}$$

یعنی:

$$\overline{i+j} = \overline{i' + j'}$$

پس:

$$\overline{i} + \overline{j} = \overline{i+j} = \overline{i' + j'} = \overline{i'} + \overline{j'}$$

بنابراین، عمل جمع خوش‌تعریف است. □

تعریف ۸زیرگروه نرمال

زیرگروه N از گروه G را **نرمال** گویند اگر:

$$\forall g \in G \quad gNg^{-1} \subseteq N$$

که معادل است با:

$$gNg^{-1} = \{gng^{-1} \mid n \in N\} \subseteq N$$

در این صورت می‌نویسیم $N \trianglelefteq G$.

مثال ۵

تمام زیرگروه‌های آبلی نرمال هستند.

مثال ۶

گروه دیهدرال $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ را در نظر بگیرید.
اعضای این گروه عبارت‌اند از:

$$\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1},\ b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$$

زیرگروه مولد a که برابر است با:

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$$

یک زیرگروه نرمال در D_n است، یعنی:

$$\langle a \rangle \trianglelefteq D_n$$

اثبات. کافی است نشان دهیم که $b\langle a \rangle b^{-1} \subseteq \langle a \rangle$. برای هر $a^k \in \langle a \rangle$ داریم:

$$ba^kb^{-1} = (bab^{-1})^k = (a^{-1})^k = a^{-k} \in \langle a \rangle$$

پس $b\langle a \rangle b^{-1} \subseteq \langle a \rangle$ و از آنجا که D_n توسط a و b تولید شده، برای همه عناصر $g \in D_n$ داریم $g\langle a \rangle g^{-1} \subseteq \langle a \rangle$. بنابراین، $\langle a \rangle$ زیرگروه نرمال در D_n است. □

قضیه ۲

اگر $H \leq G$ و $[G : H] = 2$ آنگاه $H \trianglelefteq G$.

اثبات. چون اندیس برابر ۲ است، G دقیقاً دو هم‌دسته‌ی راست دارد: H و $G \setminus H$. حال اگر $g \in H$ باشد، آنگاه $gH = H = Hg$. و اگر $g \in G \setminus H$ باشد، آنگاه $gH = G \setminus H = Hg$. پس برای همه $g \in G$ داریم $gH = Hg$، یعنی همه‌ی هم‌دسته‌های چپ و راست با هم برابرند و H نرمال است. □

تعریف ۹ هم‌دستهٔ راست

اگر $H \leq G$ و $g \in G$، هم‌دستهٔ راست H نسبت به g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$