03 Introduction «

تمرین

فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است. ثابت کنید موارد زیر معادلند:

۱. R فقط یک ایده‌آل اول دارد.
۲. هر عنصر R یا یکه است یا عنصری پوچتوان است.
۳. $\dfrac{R}{\operatorname{nil}(R)}$ یک میدان است.

تعریف ۱

حلقه‌ای را که دقیقا یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد را یک **حلقهٔ موضعی** نامند.

قضیه

اگر R حلقه‌ای موضعی باشد، آنگاه ایده‌آل ماکسیمال یکتایی $\mathfrak{m}$ دارد که شامل تمام اعضای غیرواحد است:

$$\mathfrak{m} = R \setminus R^{\times}$$

مثال

$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ یک حلقه موضعی است با $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

مثال

حلقه توان‌های سری:

$\mathbb{C}[[x]]$ موضعی است با ایده‌آل ماکسیمال (x)

چراکه:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

مثال

حلقه زیر:

$$R = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid \gcd(m,n) = 1,\ 2 \nmid n \right\}$$

حلقه‌ای موضعی است با:

$$\mathfrak{m} = \left\{ \frac{m}{n} \in R \mid 2 \mid m \right\}$$

$P \in \operatorname{Spec}(S)$ آنگاه که $P^c \in \operatorname{Spec}(R)$

اثبات. اگر $ab \in P^c$، اما $a \notin P^c$، آنگاه $b \in P^c$. $\square$

فرض کنید $P_1, \dots, P_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه جابجایی و واحددار R باشند به‌طوری‌که حداقل $n-2$ تا از آن‌ها اول باشند. فرض کنید I زیرمجموعه‌ای از R باشد، تحت جمع و ضرب بسته باشد، و

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

در این صورت:

$$\exists 1 \le t \le n \quad I \subseteq P_t$$

اثبات. اثبات با استقرا بر n انجام می‌شود.

مورد پایه: $n = 2$. فرض کنیم $I \subseteq P_1 \cup P_2$ و $I \nsubseteq P_1, I \nsubseteq P_2$. آنگاه $\exists x \in I \setminus P_1$ و $\exists y \in I \setminus P_2$. بنابراین $x + y \in I$ ولی $x + y \notin P_1 \cup P_2$، تناقض.

حالت استقرا: **فرض کنیم حکم برای** $n = k$ **ثابت باشد و اکنون** $n = k+1$. فرض کنید

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} P_i \quad \text{و} \quad I \nsubseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} P_i \quad \forall j$$

در نتیجه $\forall j,\ \exists a_j \in I \setminus P_j$.

حال بگذارید:

$$b = a_1 a_2 \cdots a_k + a_{k+1}$$

در این صورت:

$$b \notin P_{k+1} \quad \text{و} \quad b \notin P_j \quad (1 \le j \le k)$$

در نتیجه:

$$b \notin \bigcup_{i=1}^{k+1} P_i \quad \Rightarrow \quad b \in I \quad \text{تناقض.}$$

$\square$

رادیکال نیل حلقه R:

$$\text{nil}(R) = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$$

رادیکال جاکوبسون حلقه R:

$$J(R) = \bigcap_{M \in \text{Max}(R)} M$$

تذکر

اگر R جابجایی و واحددار باشد، آنگاه

$$\mathrm{nil}(R) \subseteq J(R)$$

$$\mathrm{nil}(R) = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ that such } x^n = 0\}$$

اثبات. فرض کنیم $x^n = 0 \in P$ برای هر $P \in \mathrm{Spec}(R)$ ⍰ $x \in P$ برای هر $P \in \mathrm{Spec}(R)$ ⍰ $x \in \mathrm{nil}(R)$. در نتیجه:

$$\text{مجموعهٔ عناصر توانی‌پذیر} \subseteq \mathrm{nil}(R)$$

عکس: اگر $x \in \mathrm{nil}(R) \Rightarrow \forall P \in \mathrm{Spec}(R), x \in P$

فرض کنیم $\forall n, x^n \neq 0$، مجموعه را تعریف می‌کنیم:

$$S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

مجموعه S بسته است، و $0 \notin S$، پس $\{0\} \cap S = \emptyset$.

از قضیه جدایی ایده‌آل اول، ایده‌آل اول Q موجود است به‌طوری‌که $\{0\} \subseteq Q$ و $Q \cap S = \emptyset$، یعنی $\forall n, x^n \notin Q$ ⍰ $x \notin Q$ تناقض. □

$$x \in J(R) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - xy \text{ در } R \text{ یکه است برای هر } y \in R$$

$\mathrm{nil}(R)$ هیچ عنصر توانی‌پذیر ناصفر ندارد.