13 Length of a Module «

طول یک مدول

تعریف: دنبوره‌ای از زیرمدول‌های M به شکل

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

را یک سری به طول n می‌نامیم.

تعریف (تصفیه سری): $\{M_i'\}_{i=1}^{m}$ را تصفیه‌ای از $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ گوییم هرگاه

$$\{M_i\}_{i=1}^{m} \supseteq \{M_i'\}_{i=1}^{n}.$$

تعریف: در سری

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

هر خارج‌قسمت M_{i+1}/M_i یک *عامل سری* گفته می‌شود. حال اگر هر عامل یک Rـ مدول ساده باشد، سری را یک *سری ترکیبی* برای M می‌نامیم.

مثال: اگر $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های ساده باشد، آنگاه

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

یک سری ترکیبی برای $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ است.

مثال:

$$0 \subsetneq \langle 4 \rangle \subsetneq \langle 2 \rangle \subsetneq \mathbb{Z}_8$$

یک سری ترکیبی برای $\mathbb{Z}_8$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول است.

مثال: $\mathbb{Z}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$ـ مدول سری ترکیبی ندارد.

تعریف: فرض کنید M یک Rـ مدول باشد که حداقل یک سری ترکیبی دارد. طول کوتاه‌ترین سری ترکیبی M را با $\ell(M)$ خالص می‌گوییم و آن را *طول مدول* M گوییم.

اگر سری ترکیبی برای M وجود نداشته باشد، $\ell(M) = \infty$ تعریف می‌کنیم. طبیعی است که در غیر این‌صورت M با طول متناهی است.

قضیه: اگر M یک Rـ مدول با طول متناهی باشد، در این صورت برای هر زیرمدول $N \subseteq M$ داریم:

$$\ell(N) \leq \ell(M).$$

اثبات: اگر $\ell(M) = n$، در این صورت

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

وجود دارد که عواملش ساده‌اند. حال فرض کنید N زیرمدولی سره از M باشد. ثابت می‌کنیم $\ell(N) \leq \ell(M)$.

با اشتراک گرفتن داریم:

$$0 = M_0 \cap N \subseteq M_1 \cap N \subseteq \cdots \subseteq M_n \cap N = M \cap N = N.$$

زنجیری از زیرمدول‌های N است که تعداد جملات آن برابر با n است، ولی ممکن است بعضی از جملات برابر باشند.

تعریف می‌کنیم:

$$\varphi : M_i \cap N \longrightarrow \frac{M_i}{M_{i-1}}, \quad \alpha \longmapsto \alpha + M_{i-1}.$$

بنابراین قضیه اول ایزومرفیسم نتیجه می‌دهد.

$$\frac{M_i \cap N}{\ker \varphi} \cong \operatorname{Im} \varphi \subseteq \frac{M_i}{M_{i-1}}$$

که در آن

$$\ker \varphi = M_{i-1} \cap N.$$

چون $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ ساده است، پس $\operatorname{Im} \varphi = 0$ یا $\operatorname{Im} \varphi \cong \frac{M_i}{M_{i-1}}$.

نتیجه می‌گیریم:

$$\forall i \quad \frac{M_i \cap N}{M_{i-1} \cap N} \cong \frac{M_i}{M_{i-1}} \text{ یا } 0.$$

بنابراین $\ell(N) \leq \ell(M)$.

ادعا می‌کنیم که تساوی $\ell(N) = \ell(M)$ تنها در حالتی رخ می‌دهد که $M_i \cap N = M_i$ برای همهٔ i.

اثبات: برای $i = 0$ بدیهی است که $M_0 \cap N = M_0$.

فرض استقرا: اگر $M_{i-1} \cap N = M_{i-1}$، آنگاه

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i-1} \cap N} \cong \frac{M_i \cap N}{M_{i-1}} \cong \frac{M_i}{M_{i-1}}.$$

پس $M_i \cap N \subseteq M_i$ و هر $x \in M_i$ داریم:

$$x + M_{i-1} = t + M_{i-1} \quad \text{برای بعضی} \, t \in M_i \cap N$$

که به این معنی است:

$$x - t \in M_{i-1} \subseteq M_{i-1} \cap N \subseteq N,$$

و چون $t \in N$، نتیجه می‌شود $x \in N$ و لذا $x \in M_i \cap N$.

پس $M_i \cap N = M_i$ و حکم استقرا کامل است.

ولذا $M_i \subseteq M_i \cap N$ پس

$$M_i = M_i \cap N.$$

در این صورت

$$M_n = M_n \cap N = M \cap N = N$$

و نتیجه می‌شود $N = M$.

قضیه وجود هولدر. اگر M یک Rـمدول با طول n باشد، در این صورت هر سری ترکیبی M دارای طول n است. بعلاوه هر سری از زیرمدول‌های M تصفیه‌ای دارد که یک سری ترکیبی M است.

اثبات: داریم $\ell(M) = n$. ادعا می‌کنیم طول هر سری از زیرمدول‌های M حداکثر $\ell(M)$ است.

فرض کنید

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M$$

یک سری ترکیبی M باشد. با قضیهٔ قبلی:

$$\ell(M_1) < \ell(M_2) < \cdots < \ell(M_k) = \ell(M) = n$$

که هر بار حداقل $1+$ اضافه می‌شود. پس $k \leq n$.

اما طبق تعریف طول سری، طول کوتاه‌ترین سری ترکیبی n است، پس $k \geq n$. نتیجه: $n \leq k \leq n$ و لذا $k = n$.

نتیجهٔ آخر: ساده‌نبودن $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ یعنی

$$0 \neq \frac{N}{M_{i-1}} \subsetneq \frac{M_i}{M_{i-1}}$$

و این با $M_{i-1} \subsetneq N \subsetneq M_i$ باعث می‌شود طول سری یکی افزایش یابد و این خلاف تعریف یک سری ترکیبی است.

نتیجه: اگر M و N دو Rـمدول ساده باشند و

$$M^m \cong_R N^n$$

آنگاه $m = n$ و $M \cong N$.

اثبات: سری ترکیبی:

$$0 \subsetneq M \subsetneq M \oplus M \subsetneq \cdots \subsetneq M^m$$

با توجه به یکریختی $\varphi : M^m \to N^n$ به‌عنوان Rـمدول، داریم:

$$0 \subsetneq \varphi(M) \subsetneq \varphi(M \oplus M) \subsetneq \cdots \subsetneq \varphi(M^m) = N^n$$

یک سری برای N^n است و هر عامل آن ساده است، زیرا مثلاً برای بعضی T داریم:

$$\varphi^{-1}(T) = M \quad \text{یا} \quad \varphi^{-1}(T) = M \oplus M$$

(عامل‌ها ایزومرف هستند).

پس یک سری ترکیبی برای N^n است. با توجه به:

$$0 \subsetneq N \subsetneq N \oplus N \subsetneq \cdots \subsetneq N^n$$

نتیجه می‌شود $m = n$.

$$\mathrm{Hom}_R(M^m, N) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

اگر $M \ncong N$، آنگاه $\mathrm{Hom}_R(M,N)=0$ که تناقض است.

قضیه. M یک Rـمدول است. آنگاه

$$M \text{ نوتری و آرتینی } \iff \ell(M)<\infty.$$

اثبات: ($\Rightarrow$) اگر $\ell(M)<\infty$، طول هر سری متناهی است. ✓

($\Leftarrow$) اگر M نوتری و آرتینی باشد، M دارای زیرمدول مینیمال است (دلیل ساده: مینیمال بودن در حالت آرتینی) مانند M_1. اگر $M=M_1$ که تمام شد، وگرنه $\frac{M}{M_1}$ آرتینی و نوتری است، پس مینیمال دارد مانند M_2/M_1 و الی آخر.

با تکرار این فرایند، سری

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k \subsetneq \cdots$$

خواهیم داشت که چون نوتری است متوقف می‌شود و لذا $M_t=M$ که به طول t است و در نتیجه $\ell(M)<\infty$.

نتیجه: اگر M یک Rـمدول با طول متناهی باشد، آیا $\frac{M}{N}$ با طول متناهی است؟

$$\ell(M)<\infty \;\Rightarrow\; M \text{ نوتری و آرتینی } \;\Rightarrow\; N \text{ و } \frac{M}{N} \text{ نوتری و آرتینی } \;\Rightarrow\; \ell(N)<\infty \text{ و } \ell\left(\frac{M}{N}\right)<\infty.$$

حقیقت: فرض کنید M یک Rـمدول و $f:M\to M$ یک Rـهمریختی باشد.

(الف) اگر M آرتینی باشد، آنگاه $\exists n$ که $\mathrm{Im}\, f^n+\ker f^n=M$.

(ب) اگر M نوتری باشد، آنگاه $\exists n$ که $\mathrm{Im}\, f^n\cap\ker f^n=0$.

اثبات:

(الف) چون M آرتینی است:

$$\mathrm{Im}\, f \supseteq \mathrm{Im}\, f^2 \supseteq \mathrm{Im}\, f^3 \supseteq \cdots$$

ایستا می‌شود. پس $\exists n$ که:

$$\mathrm{Im}\, f^n=\mathrm{Im}\, f^{n+i} \quad (\forall i\geq 0).$$

در نتیجه:

$$\mathrm{Im}\, f^n=\mathrm{Im}\, f^{n+1}.$$

حال برای هر $x\in M$، چون $f^n(x)\in \mathrm{Im}\, f^n=\mathrm{Im}\, f^{n+1}$، $\exists y\in M$ که $f^n(x)=f^{n+1}(y)=f(f^n(y))$. پس:

$$x-f^n(y)\in\ker f^n,$$

و لذا:

$$x=f^n(y)+\big(x-f^n(y)\big)\in \mathrm{Im}\, f^n+\ker f^n.$$

بنابراین:

$$M = \operatorname{Im} f^n + \ker f^n.$$

(ب) به‌طور مشابه چون M نوتری است:

$$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \cdots$$

ایستا می‌شود. پس $\exists n$ که:

$$\ker f^n = \ker f^{n+i} \quad (\forall i \geq 0),$$

و در نتیجه:

$$\ker f^n = \ker f^{2n}.$$

حال اگر $x \in \ker f^n \cap \operatorname{Im} f^n$، $\exists y$ که $x = f^n(y)$ و $f^n(x) = 0$. از $x = f^n(y)$ و $f^n(x) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$f^{2n}(y) = 0 \ \Rightarrow \ y \in \ker f^{2n} = \ker f^n,$$

پس $f^n(y) = 0$ و بنابراین $x = 0$.

قضیه (لم فیتینگ). اگر M یک Rـ مدول با طول n باشد و $f : M \to M$ یک Rـ همریختی، آنگاه:

$$M = \operatorname{Im} f^n \ \oplus \ \ker f^n.$$

اثبات: از $M \Leftarrow \ell(M) < \infty$ نوتری و آرتینی نتیجه می‌شود که:

$\exists n_1$:

$$\operatorname{Im} f^{n_1} + \ker f^{n_1} = M.$$

$\exists n_2$:

$$\operatorname{Im} f^{n_2} \cap \ker f^{n_2} = 0.$$

اگر $m \geq \max\{n_1, n_2\}$ بگیریم، آنگاه:

$$\operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^{n_1}, \quad \ker f^m = \ker f^{n_2}.$$

پس:

$$M = \operatorname{Im} f^m \ \oplus \ \ker f^m.$$