KARAR ALMA TEKNİKLERİ

İKTİSAT LİSANS PROGRAMI

PROF. DR. ERCAN SARIDOĞAN

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

İKTİSAT LİSANS PROGRAMI

KARAR ALMA TEKNİKLERİ

Prof. Dr. Ercan Sarıdoğan

Yazar Notu

Elinizdeki bu eser, İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi’nde okutulmak için

hazırlanmış **bir ders notu niteliğindedir**.

ÖNSÖZ

Karar Alam Teknikleri günümüzde kamu ve özel sektörde her kademede karar verme sürecindeki ilgililer için son derece büyük önem arz etmektedir.

Çeşitli karar verme koşullarında sağlıklı ve etkin karar alabilmek için belirsizliği azaltan ve doğru karar vermeye yardımcı olan tekniklerin bilinmesi ve karar alma süreçlerinde doğru şekilde uygulanması kurumların amaçlarına daha etkili bir şekilde ulaşması açısından son derece büyük önem arz etmektedir.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

EKK: En Küçük Kareler

DP: Doğrusal Programlama

YAZAR NOTU

Karar Alam Teknikleri günümüzde kamu ve özel sektörde her kademede karar verme sürecindeki ilgililer için son derece büyük önem arz etmektedir.

Çeşitli karar verme koşullarında sağlıklı ve etkin karar alabilmek için belirsizliği azaltan ve doğru karar vermeye yardımcı olan tekniklerin bilinmesi ve karar alma süreçlerinde doğru şekilde uygulanması kurumların amaçlarına daha etkili bir şekilde ulaşması açısından son derece büyük önem arz etmektedir.

Bu kitap karar alma tekniklerini uzaktan öğretim koşullarına göre sade ve anlaşılır bir şekilde öğretilmesi çerçevesinde hazırlanmıştır. Öğrenciler daha ileri düzeyde teknikleri için kaynakçadaki kitaplardan yararlanabilirler.

1. KARAR VERME SÜRECİ VE MODELLER

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Bir durum hakkında nasıl karar alırsınız?

2. Karar alırken hangi koşullar bizi etkiler?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Karar verme süreci ve modeller	Karar verme süreci ve modellerini kavrama	Soyut düşünme ve somut problem çözümleri ile

Anahtar Kavramlar

- Karar verme süreci
- Karar modelleri

1. Karar Verme Süreci ve Modeller

Karar vericilerin karar vermelerine yardımcı olmaya yönelik olan kantitatif yaklaşımlar, karar ortamının matematik-istatistik modelini kurmak ve model üzerinde işlem yapmayı kapsar. Karar sürecine kantitatif analizlerin de katılmasının nedeni, daha iyi-daha etkin karar vermede yardımcı olmasıdır. Karar almaya yardımcı olmak amacıyla kullanılan kantitatif model kurma-uygulama süreci aşağıdaki aşamalarda özetlenebilir[1]:

1. Karar probleminin belirlenmesi,

2. Problemin formüle edilmesi,

3. Model kurma,

4. Bilgi derleme,

5. Modelin çözümü,

6. Modelin geçerliliğini araştırma ve duyarlılık analizleri,

7. Sonuçların yorumu ve

8. Karar verme, uygulama ve kontroldür.

Verilen model kurma-uygulama sürecinde 2 ve 7. aşamalar arasındakiler bilimsel yaklaşım olarak bilinir.

Kantitatif karar verme süreçlerinde sıklıkla modeller kullanırız. Model, gerçek sistemlerin idealize edilmiş, soyutlanmış bir temsilidir. Diğer bir deyişte model, sistem veya sistemlerin soyutlanmış şeklidir. Sistem bir amaca hizmet etmek için bir bütünlük içinde işleyen yapılardır. Modelden elde edilen, çözümün güvenirliği, gerçek sistemin temsili olan modelin geçerliliğine bağlıdır. O hâlde modelden elde edilen çözüm, modelle temsil edilen hayali sisteme uygulanır ve modelin geçerliliği denenir. Gerçek ve varsayılan sistem modellerinin çözümleri arasındaki fark, doğrudan doğruya orijinal sistemin davranışlarını tanımlayan modelin doğruluğuna bağlıdır.

Modelleri değişik kriterlere göre aşağıdaki gibi ayırma olanağı vardır:

1. Uyuşum modeli (iconic),

2. Kalitatif model,

---

[1] Osman Halaç "Kantitatif Karar Verme Teknikleri, Yöneylem Araştırmasına Giriş" Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2001, s.1-2

3. Kantitatif model,

a) İstatistik model

b) Benzeşim modeli (analog) ve

c) Matematik modeldir.

Diğer bir ayrım incelenen sistemin davranışları açısından yapılmaktadır. Bu ayrımda;

1. Deterministik Model,

2. Probabilistik Model ve

3. Stokastik Model başlıkları vardır.

Bilimsel araştırmalarda ve karar verme süreçlerinde modellerin kullanılmasının ana sebepleri şunlardır:

1. Model zamandan tasarruf sağlar,

2. Model kolayca anlaşılır,

3. Gerekirse hemen düzeltilebilir ve

4. Model somut sonuçlar ortaya koyar.

Kantitatif karar verme tekniklerinin uygulanabilmesi için model kurma konusunda önemli noktalar aşağıdaki gibidir:

1. Problem kantitatif ölçülere göre formüle edilmelidir.

2. İncelenmekte olan sistemin gerçek yapıdan soyutlanması veya bir modelinin kurulması gerçeklenebilmelidir.

3. Bilgi derleme ve model kurma aşamasında sistemin işlerliğini yansıtacak şekilde düzeltme yapılmalıdır.

4. Model sistemin yapısal durumunu yorumlamaya ve değerlemeye olanak vermelidir.[2]

---

[2] Osman Halaç "Kantitatif Karar Verme Teknikleri, Yöneylem Araştırmasına Giriş" Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2001, s.17-20

Karar Problemi ve Elemanları

Karar verme süreçlerinde yer alan bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

1. Karar Veren: Mevcut seçeneklerden bir tercih yapan kişi veya grubu yansıtır.

2. Amaç veya Ulaşılacak Sonuç: Karar verenin faaliyetleri ile elde edeceği amaçlardır.

3. Karar Kriteri: Karar veren veya yöneticinin seçimini oluşturmada kullandığı değer sistemidir. Gelir, kâr ve faydanın maksimizasyonu; maliyet, gider vb. minimizasyonunu kapsayacaktır.

4. Seçenekler (Stratejiler): s_i, (i = 1,2,... n). Karar verenin seçebileceği farklı alternatif faaliyetlerdir. Seçenekler, karar verenin kontrolü altındaki kaynaklara bağlıdır ve kontrol edilebilir değişkenlerdir.

5. Olaylar: N_j, (j = 1,2... m) karar verenin kontrolü altında olmayan faktörlerdir. Karar verenin seçenek tercihini etkileyen çevreyi olaylar yansıtacaktır.

6. Sonuç: (O_{tj}), Her bir seçenek ve olaydan ortaya çıkan değeri yansıtır. Sonuçlar nümerik değerlerle belirlenirse genellikle ödemeler adı verilir, ödemeler matrisinin her bir elemanına sonuç adı verildiğine dikkat edilmelidir. Genellikle TL olarak ifade edilir.

Seçenek (=strateji) olay (=state of nature) se sonuç (=outcome) değerlerini kapsayan bir tabloya karar matrisi adı verilir. Karar problemlerinde seçenek ve olay sayısının sınırlı olma zorunluğu vardır. Böyle bir matris aşağıda verilmektedir.

Tablo-1: Karar Matrisi Yapısı ve Bileşenleri

olasılık	P_1	P_2	...	R_m
olay	N_1	N_2	...	N_m
Seçenek				
S_1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1m}
S_2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2m}
•	• • •	• • •	• • •	• • •
S_n	O_{n1}	O_{n2}	...	O_{nm}

Tablo-2: Karar Matrisi Yapısı ve Bileşenleri Örneği

	1/2	1/4	1/4
	N_1	N_2	N_3
S_1	50	—8	0
S_2	—10	64	12
S_3	—20	12	80

Kaynak: Osman Halaç "Kantitatif Karar Verme Teknikleri, Yöneylem Araştırmasına Giriş" Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2001, s.17-20

Karar Tipleri[3]**:**

Bir karar probleminin matris formu ile belirlenmesi beş farklı karar problemini oluşturur. Ayrım, ortaya çıkması beklenen olaylara göre yapılır ve karar verenin olaylar hakkındaki bilgi derecesini yansıtır. Olaylar ve gerçekleme olasılığı arasındaki ilişkiyi tanımlayan bu ayrım aşağıdaki gibidir:

1. Belirlilik hâlinde karar verme,

2. Risk hâlinde karar verme,

3. Belirsizlik hâlinde karar verme,

4. Kısmi bilgi hâlinde karar verme ve

5. Rekabet hâlinde karar vermedir (Oyunlar).

Olaylar hakkındaki bilgimize göre yapılan karar problemleri ayrımı temel özellikleri belirleme yönünden özetlemekte yarar vardır.

1. Belirlilik hâlinde karar verme: Ortaya çıkacak olay kesinlikle bilinirse karar matrisinde bir tek olay söz konusu olan problemler belirlilik hâlinde karar problemi olarak incelenir.

[3] Osman Halaç "Kantitatif Karar Verme Teknikleri, Yöneylem Araştırmasına Giriş" Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2001, s.26-27

2. Risk hâlinde karar verme: Olay sayısı birden fazla ve olayların olasılıkları bilinirse risk hâlinde karar probleminden söz edilir. Olasılıklar kesikli olarak verilebileceği gibi bir dağılımdan da elde edilebilir.

3. Belirsizlik hâlinde karar verme: Olayların kesinliği olmadığı gibi olasılıkları da bilinemez ise belirsizlik hâlinde karar problemi olarak incelenir.

4. Kısmî bilgi halinde karar verme: Olayların vuku bulma olasılıklarının yalnız dağılımı ve standart ölçülerin bazıları (örneğin ortalama, mod, medyan) bilinirse kısmî bilgi hâlinde karar verme söz konusudur.

5. Oyun teorisi: Rekabete dayanan problemler bu grupta düşünülür. Karar matrisinin sütunları rakip oyuncunun seçeneklerini gösterir ve matrisi elemanlarına ödeme adı verilir.

Karar Matrisi[4]:

Strateji (seçenek) ve olaylar arasındaki ilişkiyi anlamak zorundayız. Karar matrisinin elemanlarına (=sonuç) (O_{ij}) matematikte "bağımlı değişken" denir. Kontrol edilebilen değişken seçenek ve kontrol edilemeyen değişken ise olaylardır. Kontrol edilebilen ve edilemeyen değişkenler birlikte bağımsız değişkendir, i seçenek numarasını, j olay numarasını belirtmek üzere sonuç O_{ij} ile belirlenerek karar matrisinin elemanları bulunur.

O hâlde;

O_{ij} =f (S_j, N_j) fonksiyonel bağıntısı yazılabilir. Diğer bir ifade ile Oij bağımlı değişkeni, S-, ve Nj bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Problem çözümünde bir modele ihtiyacımız vardır.

Seçenek ve olaylar nümerik olarak tanımlanamadığı zaman veya matris elemanlarını (= sonuçlar) tanımlamak için geliştirilen matematik bağıntı çözülemez veya bilinemez olduğu zaman tahmin ve tecrübe yöntemleri ile karar matrisi kurulabilir.

Özetle yönetim amaçlarına erişme derecesini kantitatif verilerle temsil etmek için karar matrisi formüle edilir. Problem çözme modelleri, matematik, lojik, tecrübe, gözlem ve sezgi yollarını kullanır. O hâlde karar matrisi, tahmin, gözlem ve tecrübe sonuçları, matematik bir bağıntı olmak üzere üç yöntemle veya bunların kombine edilmeleri ile elde edilebilir.

---

[4] Osman Halaç "Kantitatif Karar Verme Teknikleri, Yöneylem Araştırmasına Giriş" Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2001, s.27-28

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde karar verme sürecini etkileyen faktörleri, karar verme modellerini, karar tiplerini ve karar matrisinin yapısını inceledik.

Bölüm Soruları

1) Aşağıdakilerden hangisi karar alma modellerinin aşamalarından biri <u>değildir?</u>

a) Karar probleminin belirlenmesi

b) Problemin formüle edilmesi

c) Model kurma

d) Bilgi derleme

e) Belirsizlik

2) Aşağıdakilerden hangisi karar alma modellerinin aşamalarından biri <u>değildir?</u>

a) Modelin çözümü

b) Modelin geçerliliğini araştırma ve duyarlılık analizleri

c) Sonuçların yorumu

d) Riskleri ortadan kaldırma

e) Karar verme, uygulama ve kontrol

3) Aşağıdakilerden hangisi karar alma modellerinin aşamalarından <u>değildir?</u>

a) Karar probleminin belirlenmesi

b) Alternatif olasılıkları düşünmek

c) Problemin formüle edilmesi

d) Sonuçların yorumu

e) Karar verme, uygulama ve kontrol

4) Aşağıdakilerden hangisi karar alma modellerinin aşamalarından biri <u>değildir</u>?

a) Model kurma

b) Bilgi derleme

c) Finansman yaratmak

d) Sonuçların yorumu

e) Karar verme, uygulama ve kontrol

5) Karar süreçlerinde kullanılan modelin tanımı hangisinde doğru verilmiştir?

a) Model, soyut düşüncenin uygulamaya taşınmış hâlidir.

b) Model, gerçeği aynen yansıtan sistemlerdir.

c) Model, gerçeğin idealize edilmiş temsilidir.

d) Model, sistemlerin idealize edilmesidir.

e) Model, karar verme sürecinde bir aşamadır.

6) Aşağıdakilerden hangisi bir model türü değildir?

a) Uyuşum Modeli

b) Kalitatif Model

c) Kantitatif Model

d) Deterministik Model

e) İleri Model

7) Aşağıdakilerden hangisi modellerin bir yararı değildir?

a) Model zamandan tasarruf sağlar.

b) Model kolayca anlaşılır.

c) Düşük maliyetlidir.

d) Gerekirse hemen düzeltilebilir.

e) Model somut sonuçlar ortaya koyar.

8) Aşağıdakilerden hangisi model kurma konusunda önemli noktalardan biri değildir?

a) Problem kantitatif ölçülere göre formüle edilmelidir.

b) Modelin maliyeti düşük belirlenmelidir.

c) İncelenmekte olan sistemin gerçek yapıdan soyutlanması veya bir modelinin kurulması gerçeklenebilmelidir.

d) Bilgi derleme ve model kurma aşamasında sistemin işlerliğini yansıtacak şekilde düzeltme yapılmalıdır.

e) Model sistemin yapısal durumunu yorumlamaya ve değerlemeye olanak vermelidir.

9) Aşağıdakilerden hangisi karar verme sürecinin bileşenlerinden biri değildir?

a) Karar veren

b) Amaç

c) Karar kriteri

d) Seçenekler

e) İş gücü

10) Aşağıdakilerden hangisi karar verme koşullarından biri değildir?

a) Belirlilik hâlinde karar verme

b) Yüksek maliyetler altında karar verme

c) Risk hâlinde karar verme

d) Belirsizlik hâlinde karar verme

e) Kısmi bilgi hâlinde karar verme

Cevaplar

1)e, 2)d, 3)b, 4)c, 5)c, 6)e, 7)c, 8)b, 9)e, 10)b

2. BELİRLİLİK DURUMUNDA KARAR VERME

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Birden fazla seçenek durumunda birisini seçmek zorunda iseniz nasıl karar verirsiniz?

2. Bir yerden bir yere gitmeniz durumunda, toplu taşıma, özel araç, kara yolu, demir yolu, deniz yolu gibi ulaşım seçeneklerinden hangisini neden seçersiniz?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Belirlilik Durumunda Karar Verme	Belirlilik durumunda karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Belirsizlik
- Belirlilik
- Maksimizasyon

2. Belirlilik Durumunda Karar Verme

- Belirlilik ortamında karar vermede, seçeneklerin hangi koşullar altında gerçekleşeceği kesin olarak bilinmektedir. Yani ortaya çıkacağı beklenen olayın olasılığı birdir.

- Örneğin elimizde birkaç yatırım seçeneği var. Söz konusu yatırımların maliyetleri sağlayacak gelirleri kesin olarak bilinmektedir.

- Amaç, gelir en çoklaması (maksimizasyonu) ise en fazla geliri sağlayan yatırım seçilir. Bu tür karar problemleri belirlenimci (deterministik) yapıdadır.

- Karar matrisinde yalnız bir tek olay ve seçeneklere karşılık olarak da belirli sonuçların bulunduğu problemler, belirlilik hâlinde karar problemi olarak vasıflandırılır.

- Bu hâlde, her bir seçime ilişkin olarak tam bilgi vardır, karar veren gelecek ve sonucu konusunda güvenceli bilgiye sahiptir.

- Belirlilik, karar verenin haberdar olma durumunu da yansıtır.

- Ortaya çıkacağı umulan olayın vuku bulma olasılığı "bir" (1) olarak varsayılmak zorundadır.

- Karar veren amacına en uygun olan seçeneği kolayca seçebilir. Dolayısıyla en büyük kazanç değeri amacın en iyi başarılma derecesi olur ve karar kriteri en büyük kazancın seçimidir.

- Gelecekteki doğa durumlarının kesin olarak bilinebildiği veya modellenebildiği durumda her bir seçime ilişkin tam bilgi elde edilebilen durumdur. Bu durumda karar vericinin vereceği karar da bellidir.

- Örneğin; devlet tahviline, kamu ortaklığı fon tahvillerine yapılacak olan bir yatırım sonunda elde edilecek gelir tutarı kesin olarak bilindiği için tahvillere yapılacak olan yatırım kararı belirlilik şartları altında karar vermeyle ilgili olmaktadır.

- Belirlilik ortamında karar vermede, stratejilerin hangi koşullar altında gerçekleşeceği kesin olarak bilinmektedir.

- Bu tip bir karar alma problemi deterministik bir yapıya sahiptir. Bu ortamda, amacın maksimizasyon veya minimizasyon olması durumuna bakarak stratejilerden biri seçilir.

Belirlilik Altında Karar Verme sürecinde aşağıdaki gibi karar verilir:

Tablo 1: Getiri Maksimizasyonu İçin Karar Verme

Seçenekler	Net Getiriler	Kâr Maksimizasyonu İçin Karar Verme
A_1	E_1	
A_2	E_2	
A_m	E_m	Maksimum E_m

Tablo 1: Maliyet Minimizasyonu İçin Karar Verme

Seçenekler	Net Maliyet	Maliyet Minimizasyonu İçin Karar Verme
A_1	C_1	Minimum C1
A_2	C_2	
A_m	C_m	

Örnek 1: Aşağıdaki karar matrisinde verilen bilgiler gelecek yıllar için sermaye yatırım tekliflerini yansıtmaktadır. Yalnız bir tek öneri seçilecek olursa hangisi seçilir?

Seçenekler	(iç verim oranı) olay
S_1	% 11
S_2	17
S_3	9
S_4	22 ←

İç verim oranı en büyük olan (S_4 = 22) s, seçeneği probleme cevaptır.

Belirlilik ortamında karar yermede, stratejilerin hangi koşullar altında gerçekleşeceği kesin olarak bilinmektedir. Bu tip bir karar alma problemi deterministik bir yapıya sahiptir. Deterministik yapıya sahip karar alma problemlerine örnek olarak doğrusal programlama verilebilir. Bu ortamda, amaç fonksiyonunun maksimizasyonu ve minimizasyonu olduğu göz önüne alınarak, stratejilerden biri seçilir.

Örnek 2: Tek koşul varsayımı altında bir karar matrisinin şöyle olduğunu varsayalım;

Stratejiler	**Koşullar (Ni)**
Sı	**5000**
S2	**3000**
S3	**2000**
S4	**4000**

Amaç fonksiyonu kâr maksimizasyonu ise, yönetici S1 stratejisini seçer. Amaç fonksiyonu en küçükleme minimizasyonu ise, yönetici S3 stratejisini seçer.

Belirlilik durumunda eğer ki karar problemi bir maksimizasyon veya minimizasyon sürecini gerektiriyorsa bu durumda optimizasyon teknikleri kullanılır. Optimizasyon ise kısıt altında ve kısıtsız optimizasyon koşullarına göre yapılabilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde karar verme sürecinde seçeneklerin net getirileri ve maliyetleri belirli ise nasıl karar verileceğini öğrendik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları aşağıdaki tabloya göre cevaplayınız.

Tablo Farklı Durumlarda Çeşitli İş Seçeneklerinin Kazanç ve Maliyet Sonuçları				
Durumlar	**Durum 1**		**Durum 2**	
Seçenekler	**Kazanç**	**Maliyet**	**Kazanç**	**Maliyet**
Seçenek 1	100	5	200	10
Seçenek 2	90	10	180	20
Seçenek 3	80	15	160	30
Seçenek 4	70	20	140	40
Seçenek 5	60	25	120	50
Seçenek 6	50	30	100	60
Seçenek 7	40	35	80	70
Seçenek 8	30	40	60	80
Seçenek 9	20	45	40	90
Seçenek 10	10	50	20	100

1) Durum 1’de en iyi kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 1

2) Durum 1’de en iyi maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 1

e) Seçenek 8

3) Durum 2'de en iyi kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 1

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 7

4) Durum 2'de en iyi maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 1

d) Seçenek 1

e) Seçenek 7

5) Durum 1'de en iyi ikinci kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 7

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 2

6) Durum 1'de en iyi üçüncü maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 8

d) Seçenek 3

e) Seçenek 1

7) Durum 2'de en iyi beşinci kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 7

8) Durum 2'de en iyi altıncı maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 6

d) Seçenek 1

e) Seçenek 4

9) Durum 1'de en iyi dokuzuncu kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 9

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 7

10) Durum 1'de en iyi sekizinci maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 8

d) Seçenek 1

e) Seçenek 6

Cevaplar

1)e, 2)d, 3)a, 4)c, 5)e, 6)d, 7)a, 8)c, 9)a, 10)c

3. RİSK HÂLİNDE KARAR VERME

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Yarın hava durumunun ne olacağını nasıl biliyorsunuz?

2. Meteorolojinin tahminleri her zaman tutar mı?

3. Gelecekteki belirsizliklerin kararlarınıza etkisi nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Risk Hâlinde Karar Verme	Risk hâlinde karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Belirsizlik
- Risk
- Olasılık

3. Risk Hâlinde Karar Verme

Risk ortamında karar vermede alınacak belirli bir karara ilişkin değişik sayıda koşullar söz konusudur. Her stratejinin her koşul altında elde edilebileceği sonuçlar belirli bir olasılık çerçevesinde oluşur. Diğer bir ifadeyle, bu gibi durumlarda stratejilerin ne gibi sonuçlar doğuracağı önceden bilinmez. Sonuçların gerçekleşmesi belirli olasılıklara dayanmaktadır. Olasılıklar göz önünde tutularak yapılan strateji seçimine risk ortamında karar verme denilir. Bu karar alma problemlerine aynı zamanda Stokastik Karar Problemleri denir. İstatistiksel karar alma teorisi, stokastik karar problemleriyle ilgilenir.

Risk ortamında karar vermede alınacak belirli bir karara ilişkin değişik koşullar söz konusudur. Her seçeneğin her koşul altında varacağı sonuçlar belirli bir olasılıkla oluşur. Karar verme, yani seçeneklerin seçimi belirli olasılıklara dayandırılarak yapılır ki bu duruma risk ortamında karar verme denir. Bu tür karar problemlerine stokastik karar problemleri denir.

Risk hâlinde karar verme sürecinde, belli sayıda olayın söz konusu olduğu bu karar problemlerinde olayların vuku bulma olasılıklarında bilindiği varsayılır. Olayların dağılımı bilinerek uygulanacak karar kriteri, "optimum beklenen değeri" en iyi olduğu seçeneğin bulunması problemidir. Beklenen değer sonuçlara ilişkili olasılıkların çarpımı ve bulunan değerlerin toplanması ile elde edilir. Bu grupta incelenen problemde "beklenen değer" kavramı basitliği sağladığı için karar kriteri olarak verilmesine rağmen bir dağılım söz konusu olduğu zaman dağılımın diğer karakteristikleri (= varyans, çarpıklık vs.) de kullanılabilir.

Örnek: Aşağıda verilen getiri koşulları ve bu koşulların gerçekleşme olasılıklarına göre en uygun strateji olarak hangisi seçilmelidir?

	Koşullar			
Stratejiler	*N_1*	*N_2*	*N_3*	*N_4*
S_1	16	18	14	13
S_2	15	17	13	19
S_3	21	16	13	12
Olasılıklar	*0.10*	*0.20*	*0.50*	*0.20*

Örneğimizdeki karar matrisindeki verileri gözönüne alarak, her stratejiye ilişkin *beklenen parasal değerleri* hesaplayabiliriz.

$S_1 : 16(0.10) + 18(0.20) + 14(0.50) + 13(0.20) = 14.8$
$S_2 : 15(0.10) + 17(0.20) + 13(0.50) + 19(0.20) = 15.2$
$S_3 : 21(0.10) + 16(0.20) + 13(0.50) + 12(0.20) = 14.2$

Beklenen en yüksek parasal değer, S2 stratejisini seçmek koşuluyla elde edilir.

Örnek: Bir işletme, yeni bir mamul üretimi için kurulacak fabrika iriliğini belirleyecektir. Fabrika ölçekleri küçük (S1), büyük (S2) ve çok büyük (S3) olarak düşünülmüştür. En iyi fabrika ölçeğinin mamul talep düzeylerine bağlı olacağı saptanmıştır. Talep düzeyleri dilimlere ayrılarak az (N1), orta (N2), yüksek (N3) muhtemel olaylara ayrılmıştır. Aşağıdaki karar matrisi getiri verileri ve mümkün olayların olasılıkları pazar araştırmasından elde edilmiştir. Buna göre en uygun fabrika ölçeği ne olmalıdır?

olaylar	N_1	N_2	N_3	
Seçenekler	1/2	1/4	1/4	Olasılıklar
S_1	50	—8	0	
S_2	—10	64	12	
S_3	—20	12	80	

Her bir seçenekten bulunacak beklenen değerleri EV (s_i) ile göstererek aşağıdaki hesaplar yapılır.

$$EV(S_1) = 50 \cdot \frac{1}{2} + (-8) \cdot \frac{1}{4} + (0) \cdot \frac{1}{4} = \frac{92}{4}$$

$$EV(S_1) = (-10) \cdot \frac{1}{2} + 64 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4} = \frac{56}{4}$$

$$EV(S_3) = (-20) \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{4} + 80 \cdot \frac{1}{4} = \frac{52}{4}$$

Beklenen değeri en büyük [EV (S_1) = 92/4] olan S_1 seçeneği yani küçük irilikte bir fabrika kurulması gerekir.

Şartlı Kâr Tablosu

Eğer karar verilecek olaylarda seçenekler farklı olasılıklara sahipse bu durumda şartlı kâr tablosu ortaya çıkar.

Bir manav 8 TL'ye aldığı bir malı 10 TL'ye satmaktadır. Daha önceki 200 günlük gözlem ve kayıtlara göre bu malın satış miktarı aşağıdaki gibi saptanmıştır. Manavın 28'den daha fazla ve 25'den daha az stoklamanın bir fayda sağlamayacağı görüşünde olduğuna göre gerekli analizleri yapınız.

Talep Adet/Gün	Gün	Olasılık
25	20	0,10
26	60	0,30
27	100	0,50
28	20	0,10
	200	1,00

Verilere göre aşağıdaki tablodaki olasılıklar hesaplanmıştır. Tabloda bulunmayan değerler için olasılık sıfırdır, örneğin 24 veya 29 satma olasılıkları sıfırdır, zira 24 veya 29 adet satma olasılıkları verilerde örneğin 27 adet/gün stoklamayı alalım.

Bu seçenekle kombine edilecek olan olaylar 25, 26, 27 ve 28 adet/gün talep hâlleridir.

Her biri için kâr, şartlı kâr tablosuna konulmak üzere hesaplanması gerekir. Stok ve satış durumuna göre kârlılık,

27 birim stoklanır ve 25 birim satılırsa kâr 25.2—(27 — 25) .8 = 34 TL

26 birim satılması hâlinde kâr 26.2—(27 — 26) .8 = 44 TL

27 birim satılması hâlinde kâr 27.2 = 54 TL

28 birim talep olması hâlinde kâr yine 45 TL olur.

Bu sonuncu hâlde bir birimlik fırsat kaybı söz konusudur.

Benzer işlemlerle aşağıdaki şartlı kâr tablosu elde edilir.

Talep / Stok	N_1 25	N_2 26	N_3 27	N_4 28
25	50	50	50	50
26	42	52	52	52
27	34	44	54	54
28	26	36	46	56

(Şartlı kâr Tablosu)

27 birim stoklanırsa talep 28 veya daha fazla olsa bile ancak 27 birim satılabilir. 27 birim satmakla maksimum kâr 54 TL. olmaktadır.

Şartlı kâr tablosunda belirlenen olayların olasılıkları daha önce verildiği için probleme ilişkin olarak her bir kâr olasıklarla çarpılır ve olaylar için bu değerler toplanırda beklenen parasal değer elde edilir. Bu işlemler aşağıdaki gibidir.

$$E_1 (25) = (0.10)\,50 + (0\ 30)\,50 + (0\ 50)\,50 + (0{,}10)\,50 = 50 \text{ TL.}$$
$$E_2 (26) = (0.10)\,(42) + (0\ 30)\,52 + (0.50)\,52 + (0{,}10)52 = 51$$
$$E_3 (27) = (0{,}10)\,34 + (0{,}30)\,44 + (0{,}50)\,54 + (0{,}10)\,54 = 49$$
$$E_4 (28) = (0{,}10)\,26 + (0{,}30)\,36 + (0{,}50)\,46 + (0{,}10)\,56 = 42$$

Beklenen kârlardan en büyük olanı 51 TL. dır ve 26 adet stoklama seçeneği satıcıya tavsiye edilmelidir.

ŞARTLI KÂR TABLOSU						
	Olasılık	0.1	0.3	0.5	0.1	
Durumlar	TALEP	25	26	27	28	Şartlı Kâr Sonucu
STOK	25	50	50	50	50	50
	26	42	52	52	52	51 *
	27	34	44	54	54	49
	28	26	36	46	56	42
* En doğru seçenek 26 stok bulundurmaktır.						

Şartlı Fırsat Kaybı

Problemi analiz için hazırlanan şartlı kâr tablosu gibi bu kez de şartlı pişmanlık (=fırsat kaybı) tablosu olarak oluşturulabilir. 28 adet stoklandığını düşünelim. Talep 28 adet olursa, kâr 56 TL olur. 28 adet talebe karşılık 27 adet stok yapılırsa 54 TL kâr sağlanır ve bu değer 56 — 54 = 2 TL'lik bir fırsat kaybı veya pişmanlık değeridir. Benzer şekilde 28 adetlik talebe karşılık 25 adet stoklanırsa 6 TL kaybedilir (56—50 TL). Böylece aşağıdaki şartlı fırsat kaybı tablosu ve olasılıkların yüklenmesi ile de beklenen fırsat kaybı hesaplanır. Beklenen pişmanlığın en az olduğu 26 adet stoklama yapılacağı beklenen fırsat kaybı değerlerinin taranmasından sonra bulunur.

ŞARTLI FIRSAT KAYBI TABLOSU						
	Olasılık	0.1	0.3	0.5	0.1	
Durumlar	TALEP	25	26	27	28	Şartlı Kâr Sonucu
STOK	25	0	2	4	6	3.2
	26	8	0	2	4	2.2 *
	27	16	8	0	2	4.2
	28	24	16	8	0	11.2

* En doğru seçenek 26 stok bulundurmaktır.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde seçeneklerin net getirileri ve maliyetlerinin belirli olasılıkları altında cereyan etmesi durumunda nasıl karar verileceğini öğrendik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları aşağıdaki tabloya göre cevaplayınız.

Farklı Durumlarda Çeşitli İş Seçeneklerinin Olası Kazanç ve Maliyet Sonuçları				
Durumlar	**Durum 1**		**Durum 2**	
Seçenekler	**Kazanç**	**Olasılık**	**Maliyet**	**Olasılık**
Seçenek 1	100	1	20	0.1
Seçenek 2	90	0.9	40	0.2
Seçenek 3	80	0.8	60	0.3
Seçenek 4	70	0.7	80	0.4
Seçenek 5	60	0.6	100	0.5
Seçenek 6	50	0.5	120	0.6
Seçenek 7	40	0.4	140	0.7
Seçenek 8	30	0.3	160	0.8
Seçenek 9	20	0.2	180	0.9
Seçenek 10	10	0.1	200	1

1) Durum 1'de en iyi kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 1

2) Durum 1'de en iyi maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 1

e) Seçenek 8

3) Durum 2'de en iyi kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 1

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 7

4) Durum 2'de en iyi maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 1

d) Seçenek 1

e) Seçenek 7

5) Durum 1'de en iyi ikinci kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 7

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 2

6) Durum 1'de en iyi üçüncü maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 8

d) Seçenek 3

e) Seçenek 1

7) Durum 2'de en iyi beşinci kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 7

8) Durum 2'de en iyi altıncı maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 6

d) Seçenek 1

e) Seçenek 4

9) Durum 1'de en iyi dokuzuncu kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 9

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 7

10) Durum 1'de en iyi sekizinci maliyet seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 8

d) Seçenek 1

e) Seçenek 6

Cevaplar

1)e, 2)d, 3)a, 4)c, 5)e, 6)d, 7)a, 8)c, 9)a, 10)c

4. BELİRSİZLİK HÂLİNDE KARAR VERME

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Hakkında hiç bilgiye sahip olmadığınız durumlarda karar vermek zorunda kalırsanız nasıl karar verirsiniz?

2. Gözlerinizi kapatıp yürümeye çalıştığınızda nasıl yol alırsınız?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Belirsizlik Hâlinde Karar Verme	Belirsizlik hâlinde karar verme	Teorik Ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Belirsizlik
- Risk

4. Belirsizlik Hâlinde Karar Verme

Ortaya çıkacağı umulan olaylar gerçeklenme olasılıkları veya olayların belirlenemediği karar problemleri "belirsizlik altında karar verme" kriterleri ile incelenebilir. Olayın kendisi bilinmezse problemi incelemeye başlamadan önce ek araştırma yapılmalıdır. Muhtemel olaylara ilişkin olasılıklar bilinmezse karar verme için mecbur olduğumuz bir seçeneği benimsememizе yardımcı olacak olan kriter sayısı çok fazladır. Dolayısıyla kriterler arasından birinin seçimi de karar verene bağlı olduğundan bir seçeneğin benimsenilmesine yardımcı olan en iyi kriter de yoktur.

Günümüzde belirsizlik şartlarını taşıyan karar problemlerinde bir seçeneğin belirlenmesi için karar teorisi henüz en iyi kriteri belirlemiş değildir. Bunun yerine, onu doğrulayacak rasyonel bir yönünün bulunduğu birçok kriter vardır. Bu kriterler arasından seçim yapma, yönetici davranışı ve organizasyon politikasıyla tayin edilir.

Objektif ve Subjektif Olasılıklar

- **Kötümserlik (= Maximin) (= Wald) Kriteri:** Bu yaklaşım muhtemel olaylara, kişilerin veya daha geniş kapsamı ile yöneticinin olasılıklar vermesini gerektirir. Olayların olasılıkları belirlenirse de problem risk hâlinde karar vermeye dönüşür. Olay sayısı fazlaysa olasılıkların küçük olacağı ve olay sayısı az ise olasılıkların büyük olacağını söyleyebiliriz. [Bu son hâldeki olasılıklar objektif (veya nesnel) olasılıklardır, kişisel olasılıkları da subjektif olasılık anlamında kullanıyoruz]. Bir olayın objektif (veya öncelik = priori) olasılığı sonlu, fakat fazla sayıda gözlem ile vuku bulacak bir olayın izafi frekansı olarak tanımlanır. Yöneticinin tecrübeleri ise olasılık dağılımı verir.

Objektif öncelik olasılık dağılımları: Karar analizi başlangıcında kullanılan olasılık dağılımı veya ağırlık sistemleri genel olarak öncelik dağılımı olarak adlandırılır, öncelik dağılımı tecrübi bilgilerden veya verilerden bulunur.

Olaylara öncelik olasılıkları bağlanırken objektif görüş bulunduğu zaman bu öncelik dağılımına nesnel öncelik dağılımı adı verilir.

Subjektif öncelik olasılık dağılımları: Olaylar hakkında tecrübi bilgi olmadığı zaman "öncelik dağılımı" kişisel olarak belirlenmelidir. Öncelik dağılımlarına öncülük eden kişisel tahminler basitçe kestirilemez. Durumun dikkatli analizi ve olasılıklara göre karar verenin değerlemesi veya belirli bir olayın hâkim olduğu yapısal durum olasılıkları ortaya çıkarır. Kişisel olasılığın elde edilişi, karar verenin kendisine özgüdür veya karar probleminden onun uzmanlığı ağırlık taşır. O hâlde bu durum, elde edilen bilginin değersiz olduğunu göstermez, ama bu çalışma dışında olasılıkları elde etmek için başka yol da yoktur.

Belirsizlik hâlinde karar problemlerinde, herhangi bir tecrübe veya olaylar hakkında ek bilgiler elde etmek için düzenlenen araştırma olmaksızın kararın verileceği problemler için aşağıdaki kriterler uygulanabilir. Ayrıca örnekleme yapılmadığını da varsayıyoruz.

- **Eş Olasılık (= Laplace) Kriteri:** Bu yaklaşım muhtemel olayların eş olasılıklar ile vuku bulacağını varsayar. Olasılıkları belirli olan olaylar ile karar matrisi verilen işletme problemi, "risk" hâlinde karar verme problemine dönüşür. Dolayısıyla beklenen değeri en büyük olan seçeneğin seçimi kararı oluşturacaktır.

Kritere bu ismin verilişi Laplace'a (1749-1827) ithaf edilişindendir ve olayların vuku bulmaları hakkında olasılıklarını bilmediğimiz nedeni ile eş olasılıkla gerçeklenecekleri varsayılmaktadır.

Bu kritere, Thomas Bayes'in hipotezine göre ihtimallerin eşit alınması gereğini kullanması nedeniyle Bayes - Laplace kriteri de denilmektedir. Yani bir olayın meydana gelme ihtimalinin diğerlerinden farklı olduğuna dair bir sebep ortada yoksa ihtimaller eşit kabul edilmektedir ve yetersiz sebep ilkesi denilmektedir. Paranın yazı veya tura geleceğine dair belli bir sebep olmadığına göre, ihtimaller eşit ölmelidir.

Örnek: Aşağıdaki kazanç matrisinde eş olasılık kriterini kullanarak optimal seçeneği belirleyiniz.

	N_1	N_2
S_1	—8	10
S_2	3	15
S_3	24	—800

İki mümkün olay olduğundan eşit ihtimalle (1/2) olacağı düşünülerek her bir seçeneğin beklenen değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$E(S_1) = (-8) \,.\, (1/2) + 10.\,(1/2 = -4 + 5 = 1$

$E(S2) = 3 \,.\, (1/2) + 15 \,.\, (1/2) = 1{,}5 + 7{,}5 = 9$ → **En iyi kâr**

$E(S_3) = 24 \,.\, (1/2) + (-800) \,.\, (1/2) = 12 - 400 = -388$

S_2 stratejisi en fazla beklenen değeri verdiğinden seçilecektir.

Örnek: Aşağıda verilen maliyet tipli karar matrisi için Laplace kriterini kullanarak optimal seçeneği bulunuz.

	N_1	N_2	N_3	N_4
S_1	15	—2	25	3
S_2	8	3	12	2
S_3	22	25	10	—15

Dört mümkün olay olduğundan, her birinin 1/4 ihtimalle gerçekleneceği düşünülmelidir. Her strateji için beklenen değer kolaylıkla hesaplanabilir.

$E(S_1) = 15 \cdot (1/4) + (—2) \cdot (1/4) + 25 \cdot (1/4) + (3) \cdot (1/4) = 41/4$

$E(S_2) = (8 + 3 + 12 + 2) /4 = 25/4$ → **En iyi maliyet**

$E(S_3) = (22 + 25 + 10 — 15) /4 = 42/4$

S_2 stratejisi en düşük beklenen maliyeti vermektedir ve optimal stratejidir.

- **Kötümserlik (= Maximin) (= Wald) Kriteri:** Wald tarafından önerilen kötümserlik karar kriterinde her bir seçenek için en kötü olayın gerçekleşeceği ve en kötü sonuçlar (= outcomes) arasından en iyi kazancın benimsenilmesi salık verilir. Yönetici hangi seçeneği seçerse seçsin mücadele ettiği çevre (veya tabii olaylar) kazancını minumuma indirecektir. Dolayısı ile en büyük kazancı verecek olan seçenek Wald'a göre tercih edilmelidir. O hâlde karar matrisinin satırları arasından en küçük elemanlar seçilir ve bu elemanlar arasından da en büyüğü maximin kazancı sağlayacaktır. Maximin kazancı veren seçenekte işletme yöneticisinin benimseyeceği davranış olmaktadır.

Örnek: En büyük iç verim oranını kendine amaç edinen bir yatırımcı spekülatif hisse senetleri, yüksek değerli hisse senetleri, tahviller olmak üzere üç seçenek hâlden; savaş, barış, enflasyon şartlarına göre (mümkün olaylar) seçim yapmak veya yatırım yapmayı düşünmektedir. Karar matrisinde bulunan değerler yatırım üzerinden iç verim oranı (%) olarak ifade edilmiştir.

		Savaş N_1	Barış N_2	Enflasyon N_2
Yüksek değerli H. S :	S_1	20	1	—6
Tahvil :	S_2	9	8	0
Spekülâtir H. S :	S_3	4	4	4

Yatırımcı S_1'i seçerse enflasyon hâlinde en kötü kazancı, yani (—6) sağlayacaktır. S_2 için yine enflasyon hâlinde kazancı (0) değeri ile en kötü olacaktır. S_3 için her olayda aynı kazancı (4) sağlayacaktır. Bu durumu yeni bir tabloda gösterilsin:

strateji	En kötü (veya min.) kazanç
S_1	—6
S_2	0
S_3	4 ← MAXIMIN

En az (veya en kötü) kazançlar arasından en büyüğünü veren S_3 seçeneğine yatırım yapılması gerektiğini söylemek kötümserlik kriterini uygulamış olduğumuzu gösterir. Gerçeklenme hâlinde ise mutlaka %4 iç verim oranı olacaktır diye kesin bir karar verilemeyeceği açıktır. Kriterde maximin sözü minimum faydanın maximuma ulaştırılması veya azamileştirilmesi amacının benimsenildiğini gösterir ve minimax kayıp ise maliyet tipli karar matrisinde geçerli olacaktır. Aşağıdaki maliyet tipli karar matrisinde minimax seçeneğini belirleyelim.

	N_1	N_2	N_3	N_4
S_1	15	—2	25	3
S_2	8	3	12	2
S_3	22	35	10	—15

Verilen değerler maliyeti gösterdiğinden her bir stratejinin seçiminden doğan en büyük (mümkün) maliyetleri ayırmak gerekir.

S1 = 25

S2 = 12 → **Maximin (Minimax)**

S3 = 35

12 en küçük kötü kaybı verir. Dolayısıyla maximin strateji S_2 dir.

Bu örnek için diğer bir yol verilen maliyet matrisini —1 ile çarparak kazanç matrisine dönüştürmektir (5). Maliyet tipli olması nedeni ile S_2 seçeneğine karşılık olan (12) değerine minimax denilmesi daha doğrudur. Zira maximum kaybın minimuma indirgenmesi yapılmaktadır.

• **Pişmanlık [=Minimax (= Savage)] Kriteri:** Minimax pişmanlık kriteri J. Savage (1951) tarafından önerilmiştir. Kriter önce bir fırsat maliyeti karar matrisinin (= pişmanlık matrisi) kurulmasını gerektirir. Pişmanlık, yöneticinin hangi olayın gerçekleneceğini bilmesi hâlinde sağlayacağı gerçek ve muhtemel sonuç değerleri arasındaki fark ile ölçülür. Daha açık bir ifade ile olayların her biri ayrı ayrı gerçekleneceği düşünülür ve daha sonra bir olayın en iyi elemanı bulunduğu sütunun her bir elemanından çıkartılır. Bu işlem bütün sütunlara uygulanarak pişmanlık matrisi elde edilir. Pişmanlık matrisi elemanlarına fırsat kaybı veya kaçan fırsat denilir. Kriter, maximum pişmanlığın minimize edilmesi için pişmanlık matrisinin minimax değerinin bulunması ile optimum seçeneği verir. Minimax değeri ise seçeneklerin taranarak önce maximum elemanların seçimini ve daha sonra da bu elemanlar arasından en küçük olanının belirlenmesi ile elde edilir.

Örnek: Basitlik için yatırım kararı için mümkün olaylardan savaş olduğunu (meydana geldiğini) farz edelim. Eğer yatırımcı ilk stratejisini seçseydi, en büyük kazancı sağlayacağından hiç bir fırsatı kaçırmayacaktı. Fakat ikinci stratejiyi seçseydi, 20 — 9 = 11 kaybedecekti. Üçüncü strateji için 20 —4 = 16 olur. Bu değerler kaçabilecek fırsat olarak görülür. Kazanç matrisindeki her sütun için benzer muhakeme uygulanarak, kaçan fırsat matrisinde bu bilgiler toplanır.

	N_1	N_2	N_3	N_1	N_2	N_3
S_1	20	1	—6	0	7	10
S_2	9	8	0	11	0	4
S_3	4	4	4	16	4	0

Pişmanlık matrisinin karar kriteri olarak Wald kriteri kullanılması teklif edilmiştir. Maliyet tipli durumlarda küçük değerler, kâr tipli durumlarda ise büyük değerler gerçeklensin arzu edilir.

Karar veren için her bir kez meydana gelecek en kötü olan şey nedir? Wald kriteri kâr tipli kazanç matrisine uygulandığında her strateji için minimum kazanç seçilir (kötümserlik kriteridir). Burada ise her satırda maksimum fırsat göze çarpmalıdır.

Kriterin bu farklı durumu maliyet matrisine uygulandığında Wald kriterine özdeştir ve aşağıdaki durum elde edilir.

Strateji	En kötü, (veya max.), fırsat
1	10 ← minimax
2	11
3	16

Yönetici, minimax stratejiyi seçerek, üç fırsat kayıplarına karşı kendini sigorta edebilir. Bu durumda minimax kaçan fırsat veya fırsat kaybı 10 dur ve en büyük fırsat kaybının 10 olacağını gösterir. Bunun yanında daha az fırsat kaybının tecrübe edilebileceği aşikârdır.

Pişmanlık matrisine minimaxtan başka bir kriter uygulanabilir HURWICZ veya LAPLACE kriterlerinden herhangi biri WALD kriterinin yerine uygulanabilecektir.

Minimax pişmanlık kriterinin uygulanmasını bazı örneklerle gösterelim. Minimax seçeneğin belirlenmesinde ilk adım, pişmanlık matrisini tayin etmektir. Verilen karar matrisi, aşağıdaki kademelerle pişmanlık matrisine dönüştürülür.

1. İlk olayı temsil eden sütun için maksimum kazanç seçilir. Pişmanlık matrisinde bu elemanın yerine o (sıfır) değeri konulur.

2. Bu olayı temsil eden sütunda bulunan diğer elemanlar, sütundaki maksimum elemana göre cebrik farkları alınarak her eleman yerine bulunan farklar yazılır.

3. Aynı işlemler diğer sütunlara uygulanır.

Yeni karar matrisinin her sütununda bir sıfır bulunacaktır ve sütunun diğer elemanları sıfırdan büyük veya ona eşit olacaktır. Maksimum kaybı minimize edecek strateji seçilerek, minimax belirlenebilir. Dolayısıyla, her satırdaki en büyük eleman bulunarak, bunlar arasından en küçüğü seçilmelidir.

Örnek: Aşağıdaki karar matrisinde minimax stratejiyi bulunuz. (Eş olasılık kriterinde örnek—1. olarak verilmiştir).

	N_1	N_2
S_1	-8	10
S_2	3	15
S_3	24	-800

Verilen kurallar uygulanarak pişmanlık matrisi yazılır.

	N_1	N_2
S_1	32	5
S_2	21	0
S_3	0	815

Her seçenek için en büyük kayıp

$S_1 = 32$

$S_2 = 21$ → Minimax

$S_3 = 815$ olur.

S_2 stratejisi seçilerek maksimum kayıp minimize edilir.

Örnek: Aşağıdaki maliyet tipli karar matrisinde minimax seçeneği bulunuz.

	N_1	N_2	N_3	N_4
S_1	15	—2	25	3
S_2	8	3	12	2
S_3	22	35	10	—15

Bu örneği, (1) bütün elemanları —1 ile çarparak bir önceki örnekteki işlemler uygulanır veya (2) bir sütundaki en küçük eleman seçilerek pişmanlık matrisinde yerine sıfır (0) yazılır ve bu eleman, sütunun diğer elemanlarından çıkartılır. Bu son yöntemi uygulandığında, her olay için en küçük eleman (sıfır kayıp)

$N_1 = 8$, $N_2 = 2$, $N_3 = 10$, $N_4 = 15$ bulunur.

Pişmanlık matrisi aşağıdaki gibi bulunacaktır,

	N_1	N_2	N_3	N_4
S_1	7	0	15	18
S_2	0	5	2	17
S_3	14	37	0	0

Her bir seçenek için en büyük kayıp

$S_1 = 18$

$S_2 = 17$ → Minimax

$S_3 = 37$ bulunur.

S_2 stratejisi seçilerek maksimum kayıp minimize edilmiş olacaktır.

- **İyimserlik Kriteri (= Plunger) (Maximax):** Bu kriterin değişik hâlleri teklif edilmiştir. Önce PLUNGER'e atfedilen ve bazen tam iyimserlik kriteri denileni verelim. WALD'in kötümserlik kriterine karşı yöneticinin tamamen iyimser olduğunu düşünelim. Bu durumda yönetici tabiatın şansını desteklediğini ve seçtiği strateji için mümkün olayların en fazla kazancı sağlayacağını bekler. Diğer bir ifade ile yönetici, maximum ihtimali faydanın azamileştirilmesine çalışacaktır.

Örnek: Daha önce verilen örneğimizi alalım.

Her satırda (strateji) bulunan en büyük eleman (kazanç değeri) seçilir. Bu işlem aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Seçenek	N_1	N_2	N_3	En iyi veya maximum kazanç
S_1	20	1	−6	20 ← MAXIMAX
S_2	9	8	0	9
S_3	4	4	4	4

Yatırımcı en büyük kazancı verecek bir ortam düşündüğünden, maksimum elemanlar arasından maksimum olanını veya kısaca MAXIMAX stratejiyi seçer. Bu durumda maximax 20 kazancını sağlar ve yatırımcının birinci (S,) stratejiyi seçmesi hâlinde harp olacağı bir ortamda bu kazancı alacaktır.

Örnek: Aşağıda verilen maliyet tipi karar matrisine iyimserlik kriterini uygulayınız.

İyimserlik maliyet elemanları arasından en küçük elemanının seçimini gerektirir; zira en küçük maliyet bizim iyimserliğimiz olacaktır. Seçenekler taranarak en küçük maliyet elemanları bulunur ve daha sonra bunlar arasından en büyüğü seçilirse maximax veya maliyet tipindeki karar problemlerinde minimin iyimserlik kriteri uygulanmış olacaktır. Tablodan çözümün S, seçeneği ile belirlendiği kolayca bulunur.

	N_1	N_2	N_3	N_4	(En kötü kazanç)
S_1	15	–2	25	3	–2
S_2	8	3	12	2	2
S_3	22	35	10	–15	–15 ← Minimin

- **Hurwicz Kriteri:** Hurwicz'e göre kişi kendini şanslı hissederse veya iyimser olduğu nisbette rasyonel hareket edecektir. İyimserlik katsayısı, yöneticinin, karar matrisinde en büyük ve en küçük değerlerin düşünmesi gerektiğini ve ayrıca bu değerlere birer ağırlık faktörü ile önem derecesi vermesini yansıtır. Dolayısıyla en büyük ve en küçük sonuç elemanlarına olasılıklar verilmektedir; bu iki olasılık toplamı (probabilité toplam kuralına göre) bir'dir. Yöneticinin 3/5 iyimserlik katsayısını benimsediğini düşünelim, a = 3/5 iyimserlik katsayısı en büyük kazancın (3/5) olasılıkla ve en küçük kazancın (1—3/5 = 2/5) olasılıkla sağlanacağını ifade eder.

Karar matrisinde her bir seçenek için en büyük ve en küçük elemanlar sıra ile (a) ve (1—a) ile çarpılarak bulunan değerler toplanırsa seçeneklerin beklenen değerleri bulunur. Bu işlemle ise problem risk hâlinde karar problemi olarak incelenir. Beklenen değeri en büyük olan seçeneğin benimsenilmesi öğütlenir.

Örnek: Basitlik için daha önce verilen örneğimizi inceleyelim ve a = 3/5 olsun.

	N_1	N_2	N_3	Max. Kazanç	Min Kazanç
S_1	20	1	–6	20	–6
S_2	9	8	0	9	0
S_3	4	4	4	4	4

Her bir seçeneğin beklenen değerleri:

E (S_1) = 20 (3/5) + (—6) (2/5) = 9.6 *

E (S_2) = 9 (3/5) + (0) (2/5) = 5,4

E (S_3) = 4 (3/5) + (4) (2/5) = 4

Hurwicz kriterine göre yatırımcı S_1 seçeneğini benimsemelidir.

Tam iyimserlik veya Plunger kriterine göre iyimserlik katsayısı (1)'dir. Kötümserlik veya Wald kriterine göre ise (0)'dır. iki değer arasında optimal bir değer bulmayı amaçlayan Hurwicz kriterine realistik kriter adı verilir. Kullanılan katsayıya optimallik katsayısı da denilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde belirsizlik altında karar verme yaklaşım ve uygulamalarını gördük.

Bölüm Soruları

1) Aşağıdaki Kazanç Matrisindeki bilgilere göre eş-olasılık kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 3

b) Seçenek 2

c) Seçenek 4

d) Seçenek 1

e) Seçenek 5

Kazanç Matrisi		
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**
Seçenek 1	-8	10
Seçenek 2	3	15
Seçenek 3	24	-800
Seçenek 4	5	-5
Seçenek 5	10	-10

2) Aşağıdaki Maliyet Matrisindeki bilgilere göre eş-olasılık kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 3

b) Seçenek 4

c) Seçenek 2

d) Seçenek 1

e) Seçenek 5

Maliyet Matrisi				
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**	**Durum 4**
Seçenek 1	15	-2	25	3
Seçenek 2	8	3	12	2
Seçenek 3	22	25	10	-15
Seçenek 4	20	30	20	30
Seçenek 5	10	20	30	40

3) Aşağıdaki Kazanç Matrisindeki bilgilere göre kötümserlik kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 2

b) Seçenek 4

c) Seçenek 3

d) Seçenek 1

e) Seçenek 5

Kazanç Matrisi			
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**
Seçenek 1	20	1	-6
Seçenek 2	9	8	0
Seçenek 3	4	4	4
Seçenek 4	-5	-5	-5
Seçenek 5	-10	-10	-10

4) Aşağıdaki Maliyet Matrisindeki bilgilere göre Minimax kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 3

b) Seçenek 4

c) Seçenek 2

d) Seçenek 1

e) Seçenek 5

Maliyet Matrisi				
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**	**Durum 4**
Seçenek 1	15	-2	25	3
Seçenek 2	8	3	12	2
Seçenek 3	22	35	10	-15
Seçenek 4	40	40	40	40
Seçenek 5	50	50	50	50

5) Aşağıdaki Kazanç Matrisindeki bilgilere göre iyimserlik kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 2

b) Seçenek 4

c) Seçenek 1

d) Seçenek 3

e) Seçenek 5

Kazanç Matrisi			
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**
Seçenek 1	20	1	-6
Seçenek 2	9	8	0
Seçenek 3	4	4	4
Seçenek 4	-5	-5	-5
Seçenek 5	-10	-10	-10

6) Aşağıdaki Kazanç Matrisindeki bilgilere göre eş-olasılık kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 2

b) Seçenek 4

c) Seçenek 5

d) Seçenek 3

e) Seçenek 1

	Kazanç Tablosu			
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**	**Durum 4**
Seçenek 1	5	20	30	40
Seçenek 2	10	40	-50	60
Seçenek 3	30	40	-60	70
Seçenek 4	50	50	-80	80
Seçenek 5	60	70	-90	100

7) Aşağıdaki Kazanç Matrisindeki bilgilere göre kötümserlik kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 2

b) Seçenek 4

c) Seçenek 1

d) Seçenek 3

e) Seçenek 5

	Kazanç Tablosu			
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**	**Durum 4**
Seçenek 1	5	20	30	40
Seçenek 2	10	40	-50	60
Seçenek 3	30	40	-60	70
Seçenek 4	50	50	-80	80
Seçenek 5	60	70	-90	100

8) Aşağıdaki Kazanç Matrisindeki bilgilere göre iyimserlik kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 2

b) Seçenek 4

c) Seçenek 5

d) Seçenek 3

e) Seçenek 1

	Kazanç Tablosu			
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**	**Durum 4**
Seçenek 1	5	20	30	40
Seçenek 2	10	40	-50	60
Seçenek 3	30	40	-60	70
Seçenek 4	50	50	-80	80
Seçenek 5	60	70	-90	100

9) Aşağıdaki Maliyet Matrisindeki bilgilere göre eş-olasılık kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 2

b) Seçenek 4

c) Seçenek 1

d) Seçenek 3

e) Seçenek 5

	Maliyet Tablosu			
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**	**Durum 4**
Seçenek 1	5	20	20	40
Seçenek 2	10	40	20	60
Seçenek 3	30	40	20	70
Seçenek 4	50	50	20	80
Seçenek 5	60	70	30	100

10) Aşağıdaki Maliyet Matrisindeki bilgilere göre kötümserlik kriterine göre optimal seçenek hangisidir?

a) Seçenek 2

b) Seçenek 4

c) Seçenek 1

d) Seçenek 3

e) Seçenek 5

	Maliyet Tablosu			
Seçenekler	**Durum 1**	**Durum 2**	**Durum 3**	**Durum 4**
Seçenek 1	5	20	20	40
Seçenek 2	10	40	20	60
Seçenek 3	30	40	20	70
Seçenek 4	50	50	20	80
Seçenek 5	60	70	30	100

Cevaplar

1)e, 2)c, 3)a, 4)c, 5)e, 6)b, 7)b, 8)e, 9)d, 10)e

5. KISMİ BİLGİ HÂLİNDE KARAR VERME

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Arkadaşınıza borç vermeniz gerekirse ne kadar borç vereceğinize nasıl karar verirsiniz?

2. İnsan kaynakları müdürü işe personel alırken nasıl karar veriyordur?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Kısmi Bilgi Halinde Karar Verme	Kısmi bilgi halinde karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Kısmi bilgi
- Karar verme

5. Kısmi Bilgi Hâlinde Karar Verme

Olasılık dağılımının şekli (Normal, Poisson, Binomial vb.) bilindiği zaman ve dağılımın parametreleri ile karakteristikleri (örneğin ortalama, mod, medyan veya simetrik ölçüleri çarpıklık ve basıklık) hakkında bilgi varsa karar problemi yalnız kısmi bilgiler ile karar vermeyi gerektirir. Risk hâlinde karar problemlerinde karar veren, en iyi tahminin bulunduğu ön olasılıklara sahiptir.

En iyi karar için olaylar hakkında ek bilgiler istenebilir. Bu yeni bilgiler düzeltilebilir veya olaylar hakkında daha geçerli olasılık tahminlerine dayalı son kararlar verilebilmesi için ön olasılıklar güncelleştirilir. Olaylar hakkında en son bilgi, yani ek bilgiler denemelerin tasarımı yolu ile sağlanır.

Ham maddelerin örneklemesi, mamul testleri, pazar araştırmaları olayların olasılıklarını güncelleştirme veya düzeltmeye olanak sağlayan deneme örnekleridir. Olasılıkların düzeltilmesi işleminin aşamaları aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Ön Olasılıklar → **Denemelerle Sağlanan Yeni Bilgiler** → **Bayes Analiz** → **Son Olasılıklar**

Örnek: Bir işletme bir bilgisayar edinimi için aşağıdaki ödemeler tablosunu ve fırsat kaybı tablosunu hazırlamıştır. İşletmenin bilgisayara iş bulma açısından düzenlediği tabloda S1 fazla müşteri bulma olasılığı 0,3; S2 az müşteri bulma olasılığı ise 0,7’dir. Karar seçenekleri büyük bilgisayar edinimi (d1), orta büyüklükte bilgisayar edinimi (d_3) ve küçük bilgisayar edinimi (d3)’tür.

olaylar / Seçenekler	S_1	S_2
d_1	200	—20
d_2	150	20
d_3	100	60

(Tablodaki değerler 100.000 TL. ile çarpılacaktır.)

Olaylar / Seçenekler	S_1	S_2
d_1	0	80
d_2	50	40
d_3	100	0

(Tablodaki değerler 100.000 TL. ile çarpılır).

Bu verilere göre P (S_1) = 0,3 P (S_2) = 0,7 ön olasılıkları verilmiştir. Yalnız ön olasılıklara göre karar istenirse d3 kararı 7.200.000 TL gerektirir. Fırsat kaybı tablosuna göre de d_3 seçeneği 3.000.000 TL fırsat kaybı olacağı bulunur. Örnek işletmenin bir pazar araştırması sonunda bulduğu olasılıklar ise aşağıdaki gibidir. Tabloda I_1 olumlu raporu, I_2 ise olumsuz raporu göstermektedir.

Rapor olaylar	I_1	I_2
S_1	$P(I_I \mid S_1) = 0.8$	$P(I_1 \mid S_2) = 0,2$
S_2	$P(I_1 \mid S_2) = 0,1$	$P(I_2 \mid S_2) = 0,9$

Tabloda I_1 olumlu raporunun S_1 seçeneğine 0,80 olasılığı, gelecekte 0,80 gerçekleşecektir anlamı vardır.

Bu açıklamalardan sonra olayların son olasılıklarını hesaplayabiliriz. Bu hesaplar aşağıdaki tabloda yapılmıştır.

olay	Ön Olasılık P (S_j)	Şartlı Olasılık P ($I_1 \mid S_j$)	Birleşik Olasılık P ($I_1 \cap S_j$)	Son Olasılık P (S_j/I_1)
S_1	0,3	0,8	0,24	0,24/0,31 = 0,7742
S_2	0,7	0,1	0,07	0,07/0,31 = 0,2258
			P (I_1) = 0,31	1.0000

Tablodan da anlaşılacağı üzere ön olasılık $P(S_j)$ ile şartlı olasılık $P(I_1 | S_j)$ çarpılarak birleşik olasılık bulunmuştur. Daha sonra ise son olasılıklar

$$P(S_j | I_1) = \frac{P(I_1 \cap S_j)}{P(I_1)}$$

ifadesinden hesaplanmıştır. Bu ise

$$P(S_1 | I_1) = \frac{0,24}{0,31} = 0,7742$$

$$P(S_2 | I_1) = \frac{0,07}{0,31} = 0,2258$$

o halde fazla müşteri olma olasılığı 0,7742 dir.

Olumsuz rapora göre yukarıdaki benzer hesaplar aşağıda verilmiştir.

olay	Ön Olasılıklar $P(S_j)$	Şartlı Olasılıklar $P(I_2 \| S_j)$	Birleşik Olasılık $P(I_2 \cap S_j)$	Son Olasılıklar $P(S_j \| I_2)$
S_1	0,3	0,2	0,06	0,0870
S_2	0,7	0,9	0,63	0,9130
			$P(I_2) = 0,69$	1,000

Gelecekteki doğa durumları hakkında tam bilgiye sahip olmak mümkün olmasa da doğa durumlarının gerçekleşme olasılıklarını rafine etmek için ek kaynaklardan yararlanılabilir. Bu ek kaynaklar, pazar araştırmaları, anketler, ürün testleri, uzman görüşleri, örneklemeler, simülasyon çalışmaları olabilir. Örneğin bir şirket yeni ürün geliştirmeden önce potansiyel kullanıcılar üzerinde anket düzenleyebilir ve gelecekteki tüketici eğilimleri hakkında daha detaylı bilgiye sahip olabilir. Böylece doğa durumlarının gerçekleşme olasılıklarını iyileştirebilir. Bu da vereceği kararı iyileştirecektir. Çoğu zaman bu ek bilginin bir maliyeti vardır. Karar verici de bu maliyete katlanmasının uygun olup olmayacağını bilmek isteyecektir. Farklı kaynaklardan sağlanan ek bilginin doğa durumlarının olasılıklarında yapacağı değişiklikleri hesaplamak için Bayes istatistiklerinden yararlanılmaktadır.

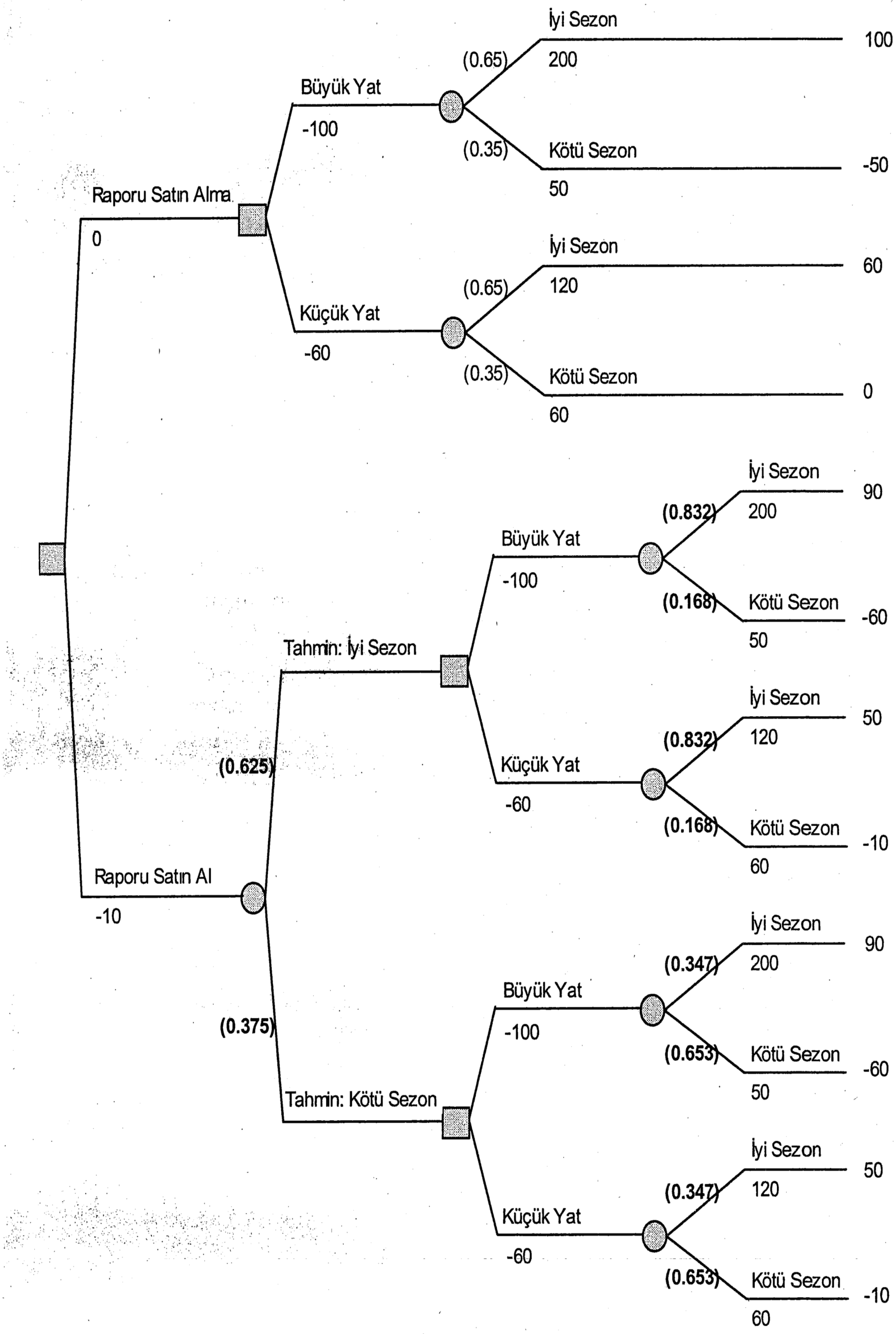
Örnek: Patara Turizm AŞ sezonluk kiraladığı yatlarla Ege bölgesi kıyılarında mavi yolculuk turları organize etmektedir. Şirket önümüzdeki sezon için bir yat daha kiralamayı düşünmektedir. 10 kamaralı ve 5 kamaralı olmak üzere kiralayabileceği iki yat bulunmaktadır. Bunlardan büyük olanı için sezonluk kira bedeli 100 bin YTL, küçük olanı için ise 60 bin YTL'dir. Şirket önümüzdeki turizm sezonunun %65 olasılıkla iyi, %35 olasılıkla kötü geçeceğini düşünmektedir. Sezon iyi geçerse ve şirket büyük yatı kiralarsa sezonluk geliri 200 bin YTL olacaktır. Öte yandan sezon kötü geçerse ve şirket büyük yatı kiralarsa sezonluk geliri 50 bin YTL'de kalacaktır. Aynı şekilde şirket küçük yatı kiralar ve sezon iyi geçerse 120 bin YTL, sezon kötü geçerse 60 bin YTL gelir elde edecektir.

Öte yandan Patara AŞ 10 bin YTL harcayarak/bu alanda profesyonel bir uzmana sezonla ilgili tahmin raporu hazırlatabilmektedir. Bu uzman geçmişte iyi geçen sezonları %80, kötü geçen sezonları da %70 başarıyla tahmin etmiştir.

Şirket yönetimi iki kararla karşı karşıyadır: 1. Kiralayacağı yatın hangisi olacağı ve 2. Tahmin raporunu satın alıp almayacağı. Bu kararlardan tahmin raporu satın alınması daha önce verilecektir. Çünkü şirket hangi yatı kiralayacağına karar verdikten sonra, tahmin raporu satın alıp almamasının önemi kalmamaktadır. Öncelikle bu kararı verip ardından yatı seçmelidir. Ek bilgi altında karar verme problemlerinde her zaman ek bilgiyi alıp almama kararı diğer karar(lar)dan önce verilecektir. Dolayısıyla karar ağacı hazırlanırken ilk karar düğümü, ek bilgi kararı olacaktır.

Şekil 9.10'da Patara AŞ karar ağacının hazırlanışı görülmektedir. İlk karar belirttiğimiz gibi tahminin satın alınması kararıdır ve karar düğümünden çıkan iki dalla gösterilmiştir.

Tahminin satın alınmasını gösteren dalın üzerinde -10 bin YTL maliyet belirtilmiştir. Şirket tahmini satın almama kararı vermesini gösteren daldan sonra ikinci karar düğümü çizilmiştir. Bu noktada şirket büyük yatı ya da küçük yatı kiralayabilir. Bu dallar üzerinde sırasıyla -100 ve -60 bin YTL'lik maliyetler gösterilmiştir. Yat kararından sonra olasılık düğümleri gelmektedir. Burada her yat seçimi kararından sonra ikişer doğa durumu söz konusudur: sezonun iyi geçmesi ve sezonun kötü geçmesi. Bu doğa durumlarını gösteren dallar üzerine şirketin doğa durumlarının gerçekleşme olasılıkları tahmini olan %65 ve %35 yazılmıştır. Ayrıca dalların üzerinde, şirketin o durumdaki potansiyel gelirine karşılık gelen 200, 50, 120 ve 60 bin YTL değerleri belirtilmiştir. Dalların sonunda ise o dalın net getirisi hesaplanmıştır. Bu hesaplama yapılırken bir önceki kısımda da belirtildiği gibi karar ağacının en başında o daim sonuna kadar olan hat üzerindeki değerler birbirleriyle toplanmıştır. Örneğin en üstteki dalın 100 bin YTL'lik getirisi ilk numaralı karar düğümünden başlayarak, 0- 100 + 200 değerlerinin toplamıyla elde edilmiştir. Şirket tahmin raporunu satın almaz, büyük yatı kiralar ve sezon da iyi geçerse 100 bin YTL kâr elde edecektir. Tüm dallar için getiri değerleri dalların sonunda görülmektedir.



Şekil-1: Patara Turizm Karar Ağacı

İlk karar düğümünden çıkan ikinci dal tahmin raporunun satın alınmasını gösteren ve -10 bin YTL maliyet taşıyan daldır. Bu daldan sonra olasılık düğümü gelmektedir.

Raporun sezonu iyi tahmin etmesi ve raporun sezonu kötü tahmin etmesi olarak iki dal bu olasılık düğümünden çıkmıştır. Bu iki dal üzerindeki 0.625 ve 0.375 olasılık değerleri marjinal olasılıklardır. Nasıl hesaplandıkları ise karar ağacının çizilmesini bitirdikten sonra anlatılacaktır. Raporun sezon hakkındaki tahmininin ardından ikinci karar olan yatın seçimini gösteren karar düğümleri çizilmiştir. Bu dallardan sonra olasılık düğümleri çizilerek sezonun iyi ve kötü geçmesi dalları gösterilmiştir. Rapor tahmini iyi sezon olduğunda, iyi sezon ve kötü sezon geçirme olasılıkları 0.832 ve 0.168 olarak belirtilmiştir. Rapor tahmini kötü sezon olduğunda, iyi sezon ve kötü sezon geçirme olasılıkları da 0.347 ve 0.653 olarak belirtilmiştir. Bu olasılıklar posterior olasılıklardır. Hesaplanma yöntemleri ise aşağıda Bayes istatistikleri anlatılırken gösterilecektir.

Bayes İstatistikleri:

Yukarıdaki karar ağacında kullandığımız posterior ve marjinal olasılıkları hesaplarken Bayes istatistiklerini kullanacağız. Öncelikle bazı olasılık tanımlarını ve ilgili notasyonu belirtelim.

- Ön Olasılıklar **$P(D_j)$**: Ek bilgi olmaması durumunda D_j doğa durumunun gerçekleşme olasılığı. Bizim örneğimizde Patara A.Ş.'nin sezonla ilgili tahminleri ön olasılıklardır.

  D_1: sezonun iyi geçmesi,
  D_2: sezonun kötü geçmesi,

  $P(D_1) = 0.65$
  $P(D_2) = 0.35$

- Şartlı Olasılıklar **P(B_i | D_j)**: D_j doğa durumu gerçekleştikten sonra, B_i bilgisinin verilmesi olasılığı. Bizim örneğimizde araştırma şirketinin geçmişteki tahminleri şartlı olasılıklardır. İyi geçen sezonlarda şirketin tahminleri %80 olasılıkla sezonun iyi geçeceği olmuştur. Dolayısıyla iyi geçen sezonlarda şirket %20 olasılıkla sezonun kötü geçeceğini tahmin etmiştir. Kötü geçen sezonlarda şirketin tahminleri %70 olasılıkla sezonun kötü geçeceği olmuştur. Dolayısıyla kötü geçen sezonlarda da şirket %30 olasılıkla sezonun iyi geçeceğini tahmin etmiştir.

B_1: sezon tahmininin iyi olması
B_2: sezon tahminin kötü olması

$$P(B_1 \mid D_1) = 0.80$$
$$P(B_1 \mid D_2) = 0.30$$
$$P(B_2 \mid D_1) = 0.20$$
$$P(B_2 \mid D_2) = 0.70$$

Birleşik olasılıklar P(Bi & Dj): Bi bilgisinin Dj doğa durumunun birlikte gerçekleşme olasılığı.

$$P(B_i \,\&\, D_j) = P(B_i \mid D_j) * P(D_j)$$

$$P(B_1 \,\&\, D_1) = P(B_1 \mid D_1) * P(D_1) = 0.80 * 0.65 = 0.520$$
$$P(B_1 \,\&\, D_2) = P(B_1 \mid D_2) * P(D_2) = 0.30 * 0.35 = 0.105$$
$$P(B_2 \,\&\, D_1) = P(B_2 \mid D_1) * P(D_1) = 0.20 * 0.65 = .0130$$
$$P(B_2 \,\&\, D_2) = P(B_2 \mid D_2) * P(D_2) = 0.70 * 0.35 = 0.245$$

- Marjinal Olasılıklar **P(B_i)**: B_i bilgisine ait birleşik olasılıklar toplamı.

$$P(B_i) = \sum_{j=1}^{n} P(B_i \,\&\, D_j)$$

Sezonu iyi tahmin etmenin marjinal olasılığı,

$$P(B_1) = P(B_1 \,\&\, D_1) + P(B_1 \,\&\, D_2) = 0.520 + 0.105 = 0.625$$

Sezonu kötü tahmin etmenin marjinal olasılığı,

$$P(B_2) = P(B_2 \,\&\, D_1) + P(B_2 \,\&\, D_2) = 0.130 + 0.245 = 0.375$$

Marjinal olasılıklar toplamı 1'dir.

$$\sum_{i=1}^{m} P(B_i) = 1$$

$$P(B_1) + P(B_2) = 0.625 + 0.375 = 1$$

Posreior olasılıklar $P(D_j \mid B_i)$: Ek bilgi, B_i tahminini gösterdiğinde, D_j doğa durumunda bulunma olasılığı.

$$P(D_j \mid B_i) = \frac{P(B_i \mid D_j) * P(D_j)}{P(B_i)}$$

İyi sezon tahmininde posterior olasılıklar,

$$P(D_1 \mid B_1) = \frac{0.520}{0.625} = 0.832 \qquad P(D_2 \mid B_1) = \frac{0.105}{0.625} = 0.168$$

Kötü sezon tahmininde posterior olasılıklar,

$$P(D_1 \mid B_2) = \frac{0.130}{0.375} = 0.347 \qquad P(D_2 \mid B_2) = \frac{0.245}{0.375} = 0.653$$

İyi Sezon Tahmininde Olasılık Hesaplar

Doğa Durumları	Ön Olasılıklar	Şartlı Olasılıklar	Birleşik Olasılıklar	Posterior Olasılıklar
İyi Sezon	0.65	0.80	0.520	**0.832**
Kötü Sezon	0.35	0.30	0.105	**0.168**
		Mariinal Olasılık	**0.625**	

Kötü Sezon Tahmininde Olasılık Hesaplar

Doğa Durumları	Ön Olasılıklar	Şartlı Olasılıklar	Birleşik Olasılıklar	Posterior Olasılıklar
İyi Sezon	0.65	0.20	0.130	**0.347**
Kötü Sezon	0.35	0.70	0.245	**0.653**
		Marjinal Olasılık	**0.375**	

Karar ağacı şekli üzerinden beklenen değerler hesaplanarak karar vericilerin izleyebileceği stratejiler aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

Raporu satın alma – Büyük yat kirala, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = (100)*(0.65) + (-50)*(0.35) = 47.5 olarak bulunmuştur.

Raporu satın alma – Küçük yat kirala, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = (60)*(0.65) + (0)*(0.35) = 39 olarak bulunmuştur.

Raporu satın alma, kararının beklenen değeri,
BD = Maks {47.5; 39} = 47.5 olarak bulunmuştur.

Raporu satın al – Tahmin: iyi sezon – Büyük yat kirala, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = (90)*(0.832) + (-60)*(0.168) = 64.8 olarak bulunmuştur.

Raporu satın al – Tahmin: iyi sezon – Küçük yat kirala, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = (50)*(0.832) + (-10)*(0.168) = 39.92 olarak bulunmuştur.

Raporu satın al – Tahmin: iyi sezon, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = Maks {64.8; 39.92} = 64.8 olarak bulunmuştur.

Raporu satın al – Tahmin: kötü sezon – Büyük yat kirala, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = (90)*(0.347) + (-60)*(0.653) = -7.95 olarak bulunmuştur.

Raporu satın al – Tahmin: kötü sezon – Küçük yat kirala, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = (50)*(0.347) + (-10)*(0.653) = 10.82 olarak bulunmuştur.

Raporu satın al – Tahmin: kötü sezon, karar zincirinin beklenen değeri,
BD = Maks {-7.95; 10.82} = 10.82 olarak bulunmuştur.

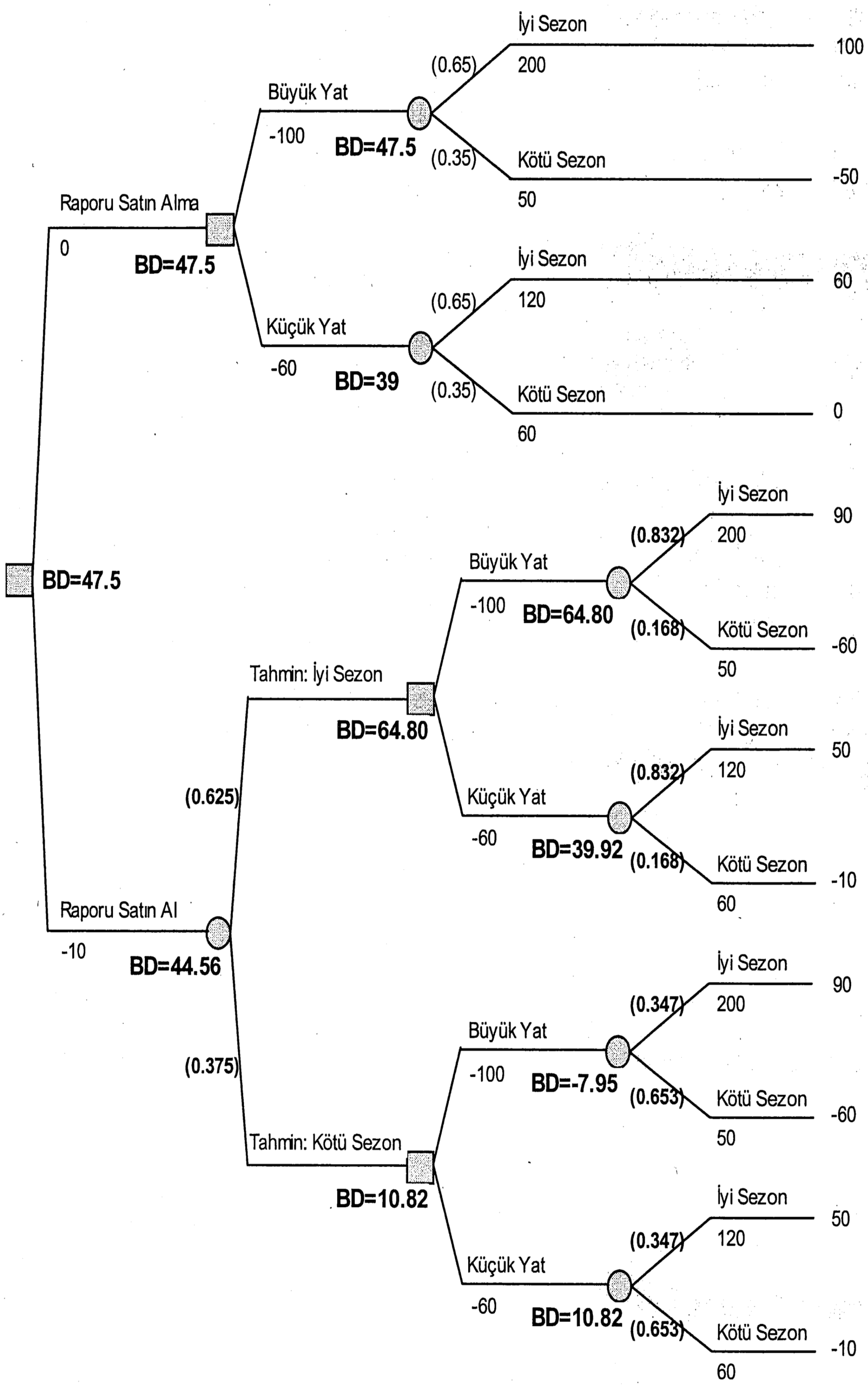
Raporu satın al kararının beklenen değeri,
BD = (64.8)*(0.625) + (10.82)*(0.375) = 44.56 olarak bulunmuştur.

Tüm problemin beklenen değeri,
BD = Maks {47.5; 44.56} = 47.5 olarak bulunmuştur.

Bu sonuca göre Patara A.Ş. Tahmin raporunu satın almamalı ve büyük yatı kiralamalıdır. Patara A.Ş. ek bilgi sağlayan ve almama kararı verdiği rapora en fazla ne kadar ödeyebilir? Ek bilgiye ödenebilecek en büyük miktar, Eksik Bilginin Beklenen Değeri (EBBD) olarak adlandırılır ve şu şekilde hesaplanır.

EBBD = Ek Bilgi ile Beklenen Değer – Ek Bilgi Olmadan Beklenen Değer
Ek Bilgi ile Beklenen Değer hesaplanırken ek bilgi için ödenen değer eklenmelidir. Çünkü zaten ek bilgiye ödeyebileceğimiz en yüksek miktarı bulmaya çalışıyoruz.

EBBD = (44.56 + 10) – 47.50 = 7075
Patara A.Ş.'nin ek bilgiye ödeyebileceği en yüksek miktar 7075 YTL.'dir.



Şekil-1: Patara Turizm Karar Ağacı

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde kısmı bilgi hâlinde karar verme yaklaşım ve uygulamalarını inceledik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları Tablo-1'deki verilere göre cevaplayınız.

Tablo -1 Durumlar Karşısında Seçeneklerin Kazanç Tablosu				
		Durumlar		Beklenen Kazanç
		D1	D2	
	Olasılıklar	0.3	0.7	
Seçenekler	S1	200	-20	?
	S2	150	20	?
	S3	100	60	?
	S4	50	40	?
	S5	100	0	?

1) Tablo-1'e göre en iyi kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 3

2) Tablo-1'e göre en kötü kazanç seçeneği hangisidir?

a) Seçenek 5

b) Seçenek 2

c) Seçenek 3

d) Seçenek 4

e) Seçenek 5

3) Tablo-1'e göre Durum-1'in olasılığı kaçtır?

a) 1.0

b) 0.5

c) 0.6

d) 0.7

e) 0.4

4) Tablo-1'e göre Seçenek-1'in beklenen kaçtır?

a) 46

b) 59

c) 42

d) 49

e) 72

5) Tablo-1'e göre Seçenek-2'nin beklenen kaçtır?

a) 46

b) 59

c) 42

d) 49

e) 72

6) Tablo-1'e göre Seçenek-3'ün beklenen kaçtır?

a) 46

b) 59

c) 42

d) 49

e) 72

7) Tablo-1'e göre Seçenek-4'ün beklenen kaçtır?

a) 46

b) 59

c) 43

d) 49

e) 72

8) Tablo-1'e göre Seçenek-5'in beklenen kaçtır?

a) 46

b) 59

c) 30

d) 49

e) 72

9) Durum-1'de Seçenek-5'in beklenen değeri kaçtır?

a) 46

b) 59

c) 30

d) 49

e) 72

10) Durum-2'de Seçenek-3'ün beklenen değeri kaçtır?

a) 46

b) 59

c) 42

d) 49

e) 72

Cevaplar

1)e, 2)e, 3)d, 4)a, 5)b, 6)e, 7)c, 8)c, 9)c, 10)c

6. KARAR AĞAÇLARI VE KARAR VERME

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Bir ilden diğerine gitmeye karar verdiğinizde kara yolu, demir yolu ve hava yolu seçenekleri varsa her bir seçeneğin sizin için artı ve eksisini çizimle gösteriniz. Nasıl bir tablo önünüze çıkıyor? Bu tablo karar vermenize yardımcı oluyor mu?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Karar Ağaçları Ve Karar Verme	Karar ağaçları ve karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

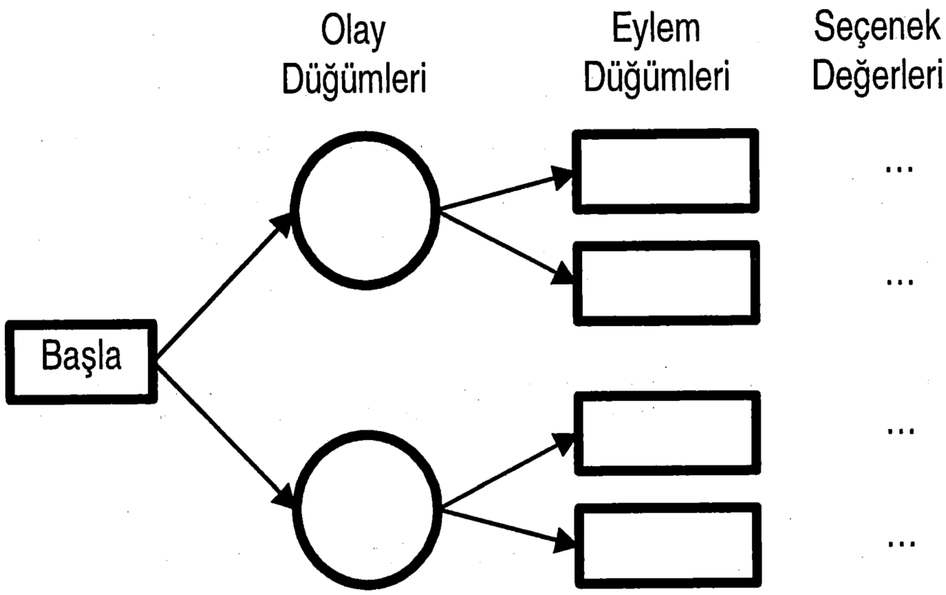
- Karar ağaçları
- Olasılık ve karar verme

6. Karar Ağaçları ve Karar Verme

Karar verici; türlü seçeneklerin gerçekleşmesinin belirli ya da belirsiz olduğu bir problemle ilgili en iyi karara ulaşmak amacıyla bazı işlemlerin yerine getirilmesi için birtakım yöntemlere veya araçlara gereksinim duyar. Seçenek sayısının fazla olduğu ve/veya ardışık aşamalarda karar almanın söz konusu olduğu problemlerin analizi, modellerin kurulması ve çözümlenmesi işlemlerinde karar vericiler; bu araçlardan birisi olan Karar Ağacı analizini kullanabilirler.

Karar ağacı, "olası tüm eylemlerin yönlerini, eylemlerin yönlerine etkisi olabilecek tüm olası faktörleri ve tüm bu faktörlere dayanan her bir olası sonucu, verilere bağlı olarak değerlendiren, çizgi, kare, daire gibi geometrik semboller kullanımı yoluyla karar vericiye sorunu anlamada kolaylık sağlayan düzenleme" biçiminde tanımlanabilir. Bu tanımlamaya göre karar ağacının; türlü eylem seçeneklerini, farklı olası etkenlerin ve eylemlerin sonuçların içerdiğini söyleyebiliriz. Karar ağaçları seçimler ile ilgili tüm seçenekleri göz önüne alarak kararlardaki farklılıkların ortaya konulmasına yardım ederler. Ayrıca karar ağaçları karar vericilerin ilgilendiği problemin bütünlük içinde incelenmesini de olanaklı kılarlar.

Karar Ağacı analizi için bir tanım "birden çok olayı ve birden çok karar alma aşamasını kapsayan karar alma problemlerinde kullanılan ve bu problemleri oluşturan ögeleri Karar Ağacı yardımıyla ifade eden şematik bir analiz yöntemi" biçiminde verilebilir. Diğer bir tanım da Karar Ağacı, karar vericinin herhangi bir sorunla ilgili seçeneklerin kesikli kümesini sistemlice yorumlamasında yararlanabileceği matematiksel bir araç biçiminde yapılabilir.



Karar Ağacı analizi karar vericiye problemin ayrı ayrı her bir kısmını incelemesinde yardımcı olur. Başka bir deyişle Karar Ağacı, ayrıntılı bir problemin alt kümelerinin aşama aşama analizini yaparak bu problemin çözümüne ulaşmada karar vericiye kolaylık sağlar.

Karar Ağacının en önemli özelliklerinden birisi de karar vericiye eldeki yöntemlerden yararlanarak gelecekteki karar seçenekleri ve etkenlerin etkilerini açık bir betimleme olanağı vermesidir. Karar verici Karar Ağacını kullanarak açıklık ve kolaylıkla eylem seçeneklerini belirleyebilir ve inceleyebilir. Bununla birlikte Karar Ağacı kullanılarak var olan seçenekler ile gelecekte ortaya çıkması olası seçenekler ve onların sonuçları üzerindeki rassallığın etkisi daha açık gözlenebilir duruma getirilebilir. Uzun dönemli planlama şu anda verilen kararların geleceği ile ilgilenir. Bu günün kararları tahmin edilen etkilerin ışığında belirsiz durumların gelecekte alacakları değerler düşünülerek verilmelidir. Bu nedenle bugünün kararlarının yarının kararlarına ortam hazırladığı söylenebilir. Şu anda verilen kararlara bağlı olarak gelecekte ortaya çıkan yeni karar durumları ve eylem seçenekleri Karar Ağacı ile açık olarak betimlenebilir. Çünkü Karar Ağacı analizi ileride ortaya çıkabilecek gelişmelere bağlı olarak, gelecekteki olası kararları ve belirsizliğin bu kararlar üzerindeki etkisini açıkça ortaya koyabilir.

Karar ağaçlarından; sorunları etkileyen değişkenlerin belirlenmesi, seçeneklerin, risklerin, kazançların ve hedeflerin saptanması, bunlarla ilgili bilgilerin belirlenmesi ve değerlendirilmesinde yararlanılabilir. Bunun yanı sıra karar ve analiz arasında geri dönme, tekrar tanımlama ve yer değiştirme gibi esnekliklere gereksinim duyulduğunda kullanılabilen Karar Ağacı, sonradan ortaya çıkan durumların duyarlılığının analiz edilmesinde de oldukça yararlıdır. Problemin çözümlenmesinden sonra seçenekler ve parametrelerde değişmeler olduğu zaman bunların çözüme etkisinin yeniden kontrolü Karar Ağacı ile sağlanabilir. Bunun yanında Karar Ağacı herhangi bir problemle ilgili olarak şu durumları da doğrudan göz önünde bulundurmayı olanaklı kılar:

- Olası kararların gelecekteki etkisi,
- Belirsizliğin karar alma üzerindeki etkisi,
- Şimdiki ve gelecekteki seçenek sonuçlarının göreli karşılaştırılması (Karşılaştırmalar parasal değerler ya da fayda indeksi gibi ölçütler kullanılarak yapılabilir.) ve
- Seçenek sonuçları ile risklerin karşılaştırılmasıdır.

Karar Ağacı grafik teorisine şematik bir analiz yöntemidir. Uygulamada problemle ilgili olarak oluşturulan ağaçlar kararın kendisi kadar karmaşıklığı gerektirir. Eğer karar; seçenekler arasında basit bir seçimi gerektiriyorsa o zaman Karar Ağacı basit tek bir adım analizi hâlindedir. Karar sorununun çok karmaşık olması durumunda ise, ağaç üzerinde çok sayıda adım ve seçeneklerin oluşturulması Karar Ağacını karmaşık bir şekle sokacaktır.

Dallar ve noktalar serisinden oluşturulan Karar Ağacı çizilirken soldan sağa doğru hareket edilir. Dallar, eylem seçeneklerini, noktalar ise olayları veya karar adımlarını gösterirler. Dalların bitim noktaları, ilgili seçenek ya da seçenek bileşimlerinin sonuçlarının gösterilmesinde kullanılır. Karar Ağacı düzenlenirken kare, daire, tek ya da çift çizgi kollar, özel harfler, renkler vb. kullanılabilir. Bazı olaylar, kontrol edilemeyen türden olabildikleri gibi, bazıları da rassallıktan kısmen etkilenir. Bu tür olayları kontrol edilebilen eylemlerle birleştiren karar ağaçları da vardır. Karar ağaçlarının rassalıktan etkilenip etkilenmemelerine bağlı olarak iki tür dal ortaya çıkar:

1. Eylem Dalları: Bu tip dallar kontrol edilebilir değişkenlerin etkisini göstermede kullanılır. Bu durumda ağaçta hangi yolun izleneceği karar verici tarafından belirlenir. Eylem dalları ile ilgili karar noktaları genellikle "kare"(□) ile gösterilir.

2. Olay Dalları: İzlenecek dal karar vericinin kontrolü dışında olup olayın gerçekleşme biçimine bağlıdır. Gerçekleşme biçimi belli olmayan eylemlerin ise beklenen değerleri hesaplanır. Belirlenen bu değer, analiz aşamasında sonucu bilinmeyen seçenek için çözüm değeri olarak kullanılır. Olay dalları ile ilgili karar noktaları genellikle "daire"(O) ile gösterilir.

Uygulamada herhangi bir problemin çözümünde karar ağacının kullanılabilmesi için çözüm algoritması olarak da adlandırılan aşağıdaki adımlar izlenebilir:

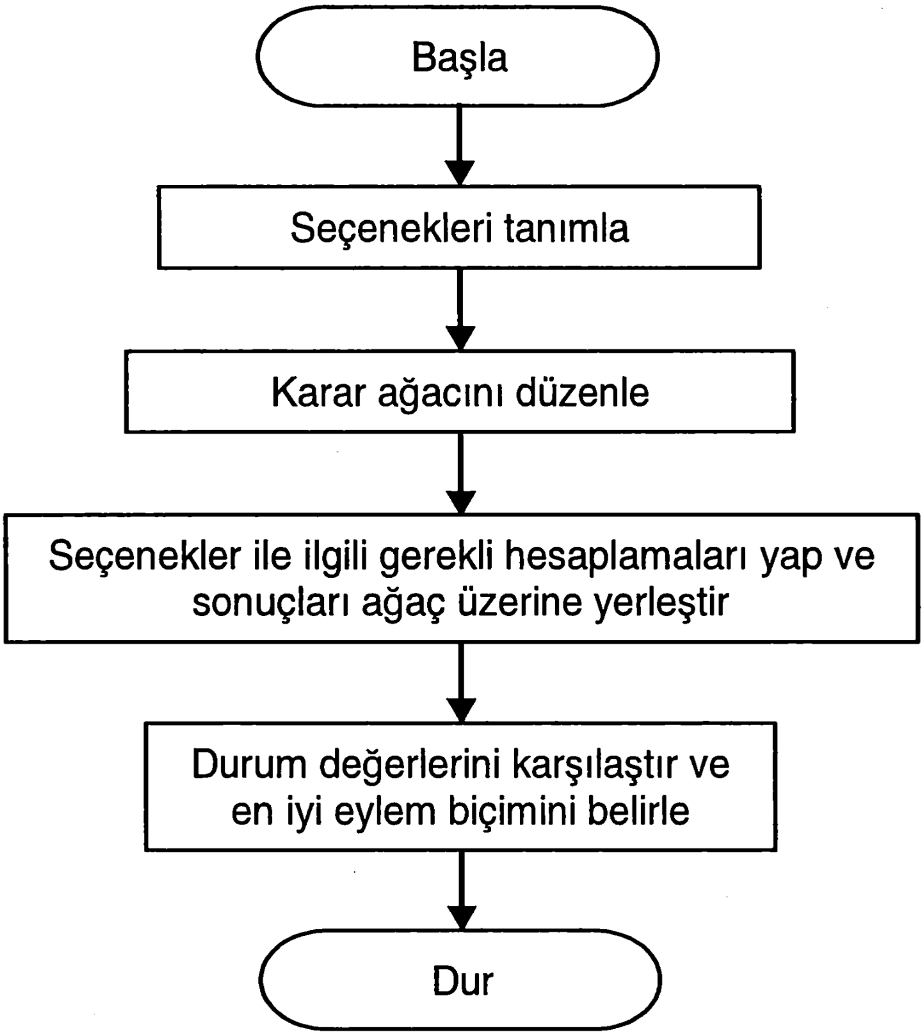
Adım 1: Soruna ilişkin her bir karar noktası ile ortaya çıkan eylem seçeneklerinin tanımlanması: Bu adımda herhangi bir problemin çözümü aşamasında değişik zamanlarda (şimdi veya gelecekte) hangi seçeneklerin ve hangi olayların ortaya çıkacağı belirlenir.

Adım 2: Karar Ağacının düzenlenmesi: Bu adımda mevcut seçeneklere bağlı olarak hangi olayların ortaya çıktığı şekille gösterilir. Diğer bir yol da herhangi bir olay temel alınarak işleme başlanması hâlinde, ileride ortaya çıkacak seçenekler şekil üzerinde gösterilir. Ağaçların düzenlenmesi, genel olarak bütün seçeneklerin ve bunların hangi durumlarda ortaya çıktığının açık olarak gösterilmesi biçiminde olmaktadır.

Adım 3: Verilerin elde edilmesi ve gerekli hesaplamaların yapılması: Önce problemin çözümü için gerekli veriler toplanır. Veriler; farklı olayların ve eylem seçeneklerinin sonuçları ile ilgili olasılıklar, maliyetler, kazanç ve kayıp değerleri olabilir. Daha sonra problemin amacı ve niteliğine bağlı olarak çözüm için gerekli hesaplamalar yapılır. Bu hesaplamalar her bir karar noktasındaki tüm eylem seçeneklerinin değerlerinin belirlenmesi ile ilgilidir. Hesaplamalar ağaç üzerinde soldan sağa doğru gidilerek yapılabildiği gibi, ağacın sonundan başına doğru gidilerek de yapılabilir.

Adım 4: En iyi çözümün bulunması: Problemle ilgili tüm seçeneklerin analiz edilmesi ve bu seçenekler içerisinde en iyi olanının belirlenmesi sürecini içerir.

Algoritmanın daha açık hâle gelmesi ve konu ile ilgili olarak hazırlanmak istenilecek bilgisayar programlarına bir temel oluşturma amacı ile Karar Ağacı analizi çözüm akış çizgesi şekilde sunulmuştur.



Örnek 1: Tekstil sektöründe, yünlü kumaş üretim ve satışı yapan bir firma, kumaş üretimi için temel olarak; yapağı, iş gücü, elektrik, boya gibi ham madde ve ara girdiler kullanmaktadır. Asıl üretim girdisi olan yapağı; yurt dışından veya yurt içinden sağlanmaktadır.

İşletme gelecek yıl ham madde olarak yurt içinden sağlamayı planladığı yapağı için A ve yurt dışından sağlamayı planladığı yapağı için K şirketinden teklif almıştır. Dört dönem ile ilgili satın alınmak istenilen yapağı miktarı sırasıyla 250, 400, 150 ve 350 tondur. A şirketi kg başına sabit olmak üzere birinci dönem için 15.000 TL, ikinci dönem için 20.000 TL, üçüncü dönem için 24.000 TL, dördüncü dönem için de 28.000 TL fiyat teklif etmiştir.

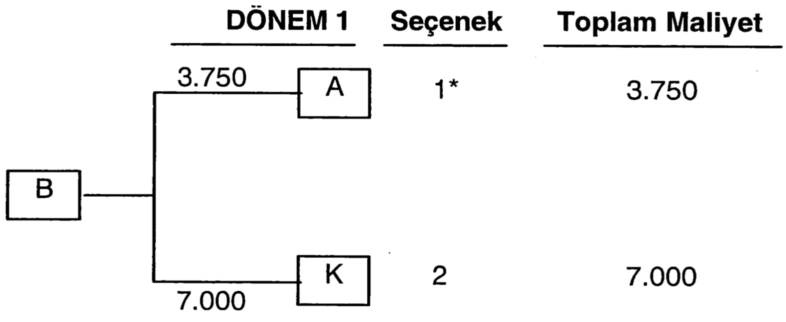
K şirketi ise teklifinde, eğer sözleşmesiz olarak satın alınmak istenirse her dönem için 7.000.000.000 TL karşılığında tüm talebin karşılanacağını, satın almanın yapılacağı dönem ile ilgili olarak bir önceki dönemde sözleşme yapılır ise, satın alma bedelinde, bir önceki döneminkinden 1.000.000.000 TL indirim olanağı sağlanacağını bildirmiştir. Satın alma maliyetini etkileyen veriler tabloda toplu olarak sunulmuştur. İşletme; maliyeti en az kılan satın alma programını belirlemek istemektedir. Diğer bir deyişle yapağının hangi dönemlerde A şirketinden, hangi dönemlerde de K şirketinden satın alınmasının en az maliyeti sağlayacağını bilmek istemektedir.

Satın alma için fiyat teklifleri

DÖNEMLER	DÖNEM 1	DÖNEM 2	DÖNEM 3	DÖNEM 4
Aylar	Ocak, Şubat, Mart	Nisan, Mayıs, Haziran	Temmuz, Ağustos, Eylül	Ekim, Kasım, Aralık
Dönemlik Yapağı Talebi (Ton)	250	400	150	350
A şirketinden satın alım yapıldığında dönem boyunca toplam maliyet (Milyon TL)	3.750	8.000	3.600	9.800
K şirketinden anlaşma yapılıp yapılmamasına bağlı olarak satın alım yapıldığında dönem başına toplam maliyet (Milyon TL)	7.000 7.000 7.000 7.000	7.000 6.000 6.000 6.000	7.000 6.000 6.000 5.000	7.000 6.000 5.000 4.000

Çözüm:

Satın alma problemi Karar Ağacı analizi kullanılarak aşağıdaki gibi çözümlenebilir. Birinci dönem ile ilgili olarak çizilen Karar Ağacı şekildedir. Şekilde yer alan B simgesi ağaç başlangıcını göstermektedir.

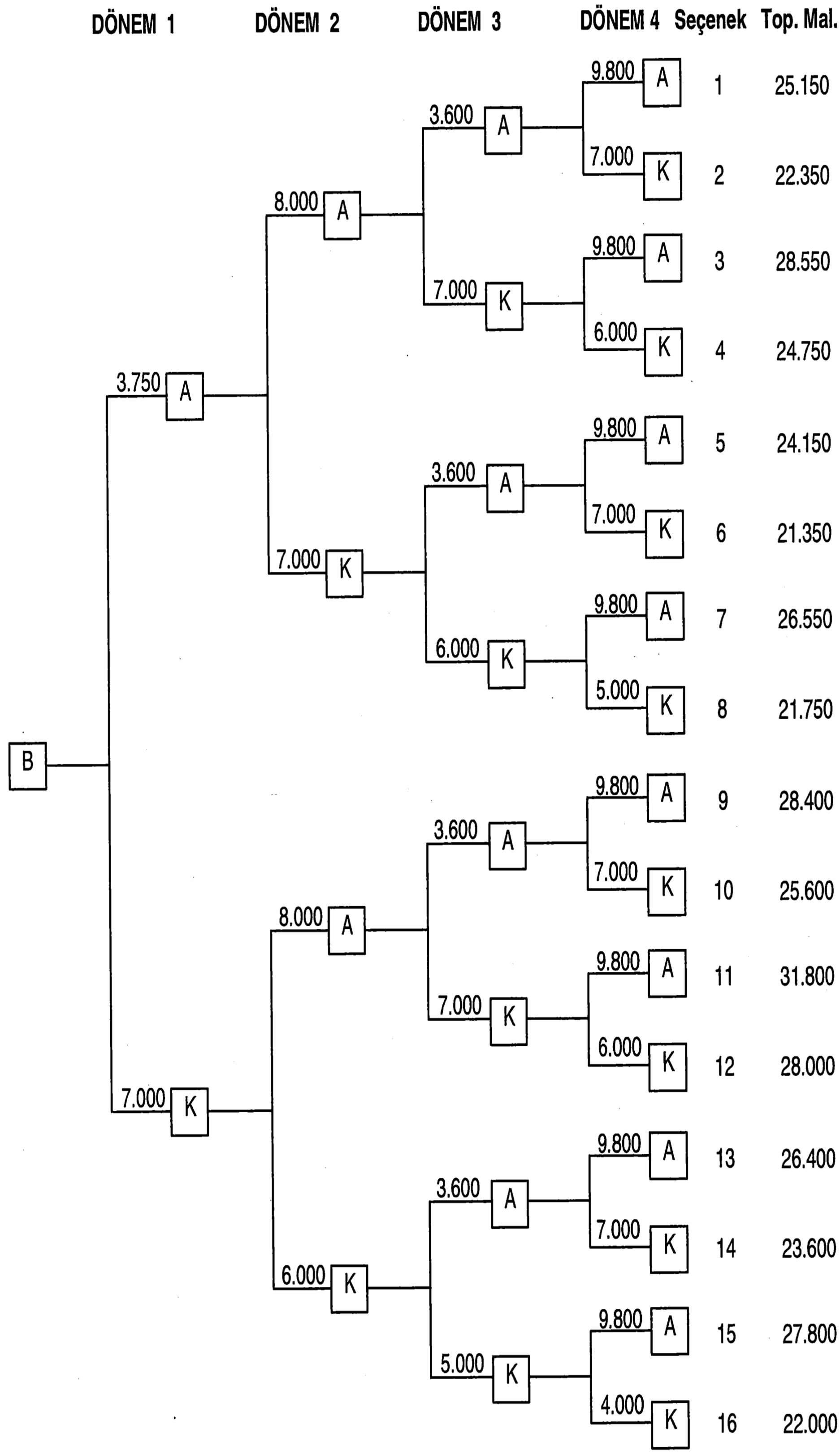


Şekil 1.3:
Birinci Düzey Sayımlaması

Şekilde iki seçenek vardır. Birinci seçenek işletmenin yapağı satın alımını K şirketinden yapmayıp 3.750 TL toplam maliyet ile A şirketinden yapması, ikinci seçenek ise A şirketinden satın almayıp K şirketinden 7.000 TL toplam maliyet ile satın almasıdır. Eğer süreç bu dönemle sınırlı kalmış olsaydı birinci seçeneğin toplam maliyetinin ikinci seçeneğin toplam maliyetinden daha küçük olması nedeniyle birinci seçeneğin seçileceği, diğer bir deyişle A şirketinden satın alım yapılmasının en düşük maliyetli çözümü sağlayacağı söylenebilirdi. Fakat diğer dönemler için dallanmaya tüm dönemler ile ilgili işlemler gerçekleşinceye kadar devam edilmelidir.

İkinci düzey sayımlamasında dört, üçüncü düzey sayımlamasında sekiz seçenek ortaya çıkmaktadır. Dördüncü dönem ile ilgili Karar Ağacı Şekil 1.4'de görülmektedir. Dört dönem ile ilgili Karar Ağacının çizilmesi sonucu $(2^4) = 16$ adet seçenek elde edilmiştir. 16 kararın sayımlanması da ağaç üzerinde $(2 + 4 + 8 + 16) = 30$ düğümün yaratılmasını gerekli kılmıştır.

Ağaç üzerindeki seçenekler içinde en iyi olanı toplam 21.350 milyon TL maliyet ile akıncısıdır. İlgili seçenek yapağının birinci ve üçüncü dönemde A şirketinden, ikinci ve dördüncü dönemde ise K şirketinden satın alınması gerektiğini göstermektedir. Dolayısıyla satın alım; bir ve üçüncü dönemde yurt içinden, iki ve dördüncü dönemlerde ise yurt dışından yapılacaktır.



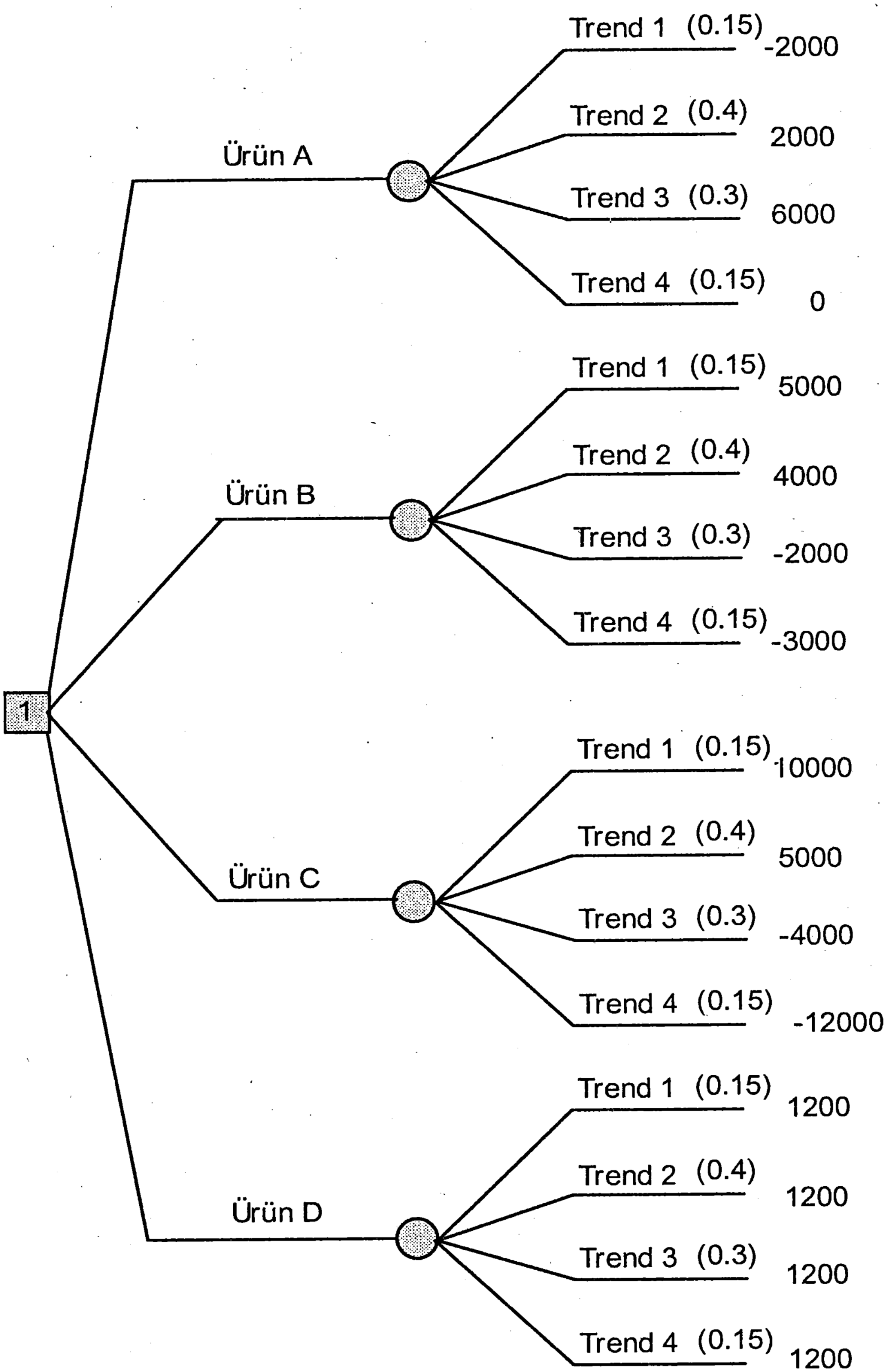
Şu ana kadar kazanç-kayıp tablolarını kullanarak çözümlediğimiz modeller şebeke yapısı altında görsel olarak da ifade edilip çözülebilir. Karar analizinde bu yaklaşım karar ağaçları olarak adlandırılmaktadır. Karar ağacı şebekelerinde iki tipte düğüm bulunmaktadır. Bunlar;

• Karar Düğümleri (kare şeklinde gösterilir),

• Olasılık (doğa durumu) düğümleridir, (yuvarlak şekilde gösterilir)

Karar ağacının hazırlanırken başlangıç noktası (kök), vereceğimiz karara karşılık gelir. Ağaç hazırlanırken her karar düğümünden çıkan dallar karar alternatiflerine karşılık gelmektedir. Bu dallar bir maliyet ya da getiri değeri taşırlar. Ağaç hazırlanırken olasılık düğümlerinden çıkan dallar da doğa durumlarına karşılık gelmektedir. Bu dallar doğa durumunun gerçekleşme olasılığı değerini taşırlar.

Zeugma AŞ problemi için karar ağacı oluşturulmuştur. Kare şeklindeki 1 numaralı düğüm bir karar düğümüdür. Problemde verilebilecek dört karar alternatifi bulunduğundan dolayı, bu karar düğümünden dört adet dal çıkarılmıştır. Bu dallar sırasıyla ürün A, B, C, D üretilmesi kararlarına karşılık gelmektedir. Bir önceki paragrafta karar düğümlerinden çıkan dalların maliyet ya da getiri değeri taşıdıklarından bahsedilmişti. Şu anda bu dallar üzerinde bir getiri değeri yoktur. Karar ağacının hazırlanması tamamlandıktan sonra bu değerler hesaplanacaktır. Karar verici karar alternatiflerinden birisini seçtikten sonra doğa durumlarının gerçekleşmesini bekleyecektir. Her karardan sonra dört doğa durumundan herhangi birisi gerçekleşebilir. Şekilde görüldüğü gibi karar alternatifleri dallarının ardından yuvarlak olasılık düğümleri çizilmiştir. Yine daha önce değindiğimiz gibi bu düğümlerden sonra doğa durumlarını simgeleyen dallar çizilmelidir. Bu dallar üzerinde olasılık değeri taşırlar. Her bir olasılık düğümünden sonra dört dal çıkarılmıştır. Bu dallar üzerinde, doğa durumlarının gerçekleşme olasılıkları yazılıdır. Son olarak her daldan sonra, karar alternatifi-doğa durumu ikilileri için getiri değerleri yazılmıştır. Örneğin, karar verici A ürününü üretmeyi seçerse ve 1. trend moda olursa, şirketin kârı -2000 birim TL olacaktır. Şu anda karar ağacının hazırlanması bitmiştir.


1
Ürün A
Trend 1 (0.15) -2000
Trend 2 (0.4) 2000
Trend 3 (0.3) 6000
Trend 4 (0.15) 0
Ürün B
Trend 1 (0.15) 5000
Trend 2 (0.4) 4000
Trend 3 (0.3) -2000
Trend 4 (0.15) -3000
Ürün C
Trend 1 (0.15) 10000
Trend 2 (0.4) 5000
Trend 3 (0.3) -4000
Trend 4 (0.15) -12000
Ürün D
Trend 1 (0.15) 1200
Trend 2 (0.4) 1200
Trend 3 (0.3) 1200
Trend 4 (0.15) 1200

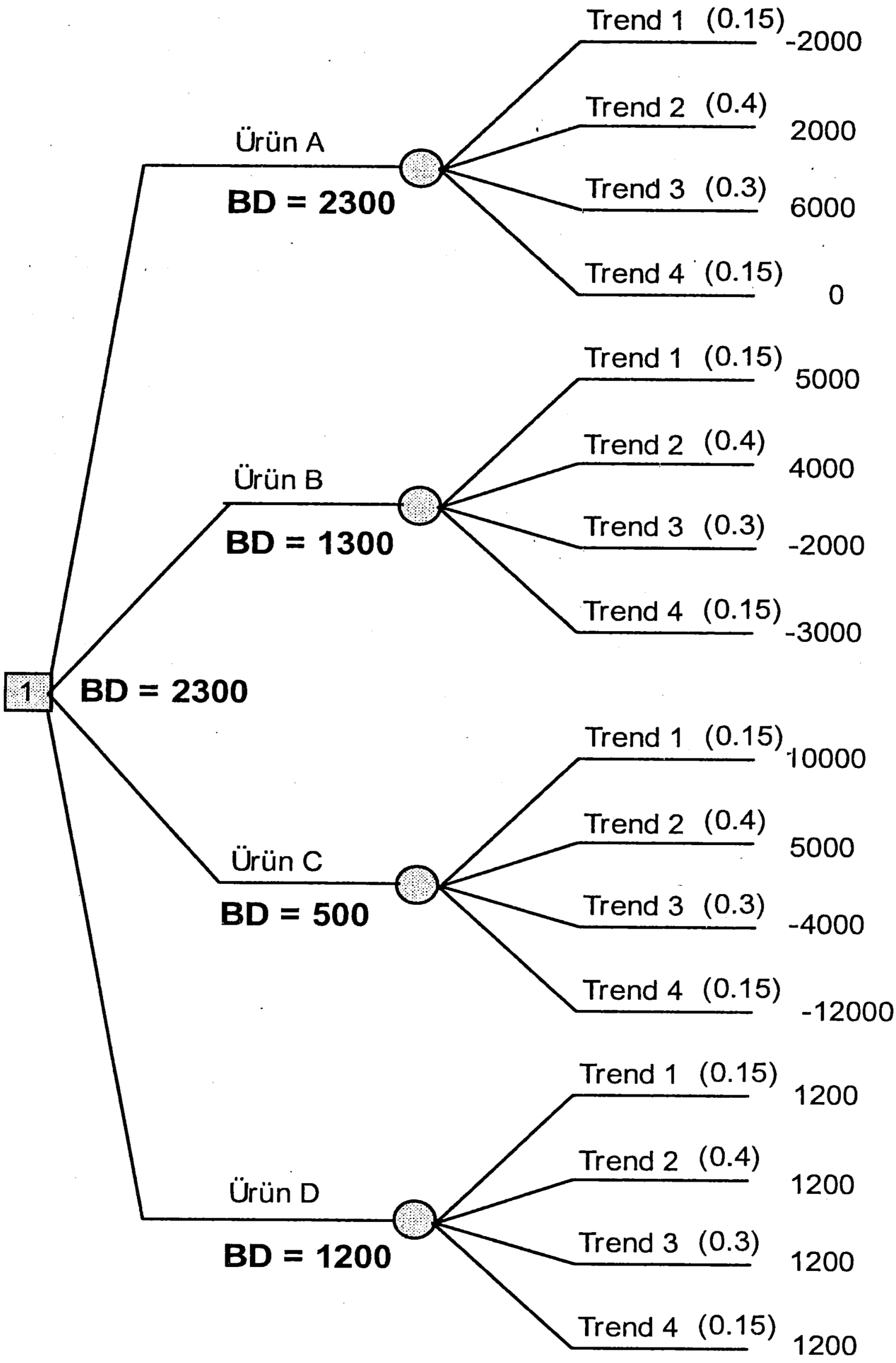
Şekilde karar ağacının üzerinde değerlerin hesaplanmış hâli görülmektedir. A ürününün beklenen değeri, beklenen değer karar kriterinde olduğu gibi, ancak kazanç-kayıp tablosuna gerek kalmadan, olasılık dalları kullanılarak;

$$(0.15).(-2000) + (0.4).(2000) + (0.3).(6000) + (0.15).(0) = 2300$$

olarak hesaplanmıştır. Bu değer, Ürün A'nın karar alternatifi, dalı üzerinde gösterilmiştir. Ürün B, C ve D'nin beklenen değerleri de aynı şekilde hesaplanarak, 1300, 500 ve 1200 olarak karar dalları üzerine yazılmıştır. Bu dört değerden en büyük olan 2300 değeri problemin çözümü olup, 1 nolu karar düğümüne aktarılmıştır.

Aynı sonuca kazanç-kayıp tablosu ve beklenen değer karar kriterini kullanarak da ulaşmıştık. Bu nedenle Zeugma AŞ örneği için karar ağacı yaklaşımı görsel katkıdan başka bir ek fayda sağlamamaktadır.

Zeugma AŞ örneğinde verilmesi gereken bir tek karar vardır: “Hangi ürün grubunun üretileceği” Oysa gerçek hayatta çoğu zaman, karar vericiler birbirini izleyen karar dizileri vermek zorundadırlar. Örneğin Zeugma AŞ yönetimi hangi ürünün üretileceği kararını verdikten sonra, hangi medyada tanıtım kampanyasını yapacağı kararını da vermek zorunda kalabilir. Bu şekilde birbirini izleyen kararlarda önceki kısımlarda öğrendiğimiz kazanç-kayıp tabloları kullanılamaz. Ancak, bu tipte çok aşamalı karar problemleri karar ağaçları ile modellenip çözülebilir. Bir sonraki kısımda çok aşamalı karar problemleri için bir örnek sunulup karar ağacı yaklaşımı ile modellenip çözülecektir.



Trend 1 (0.15) -2000
Trend 2 (0.4) 2000
Ürün A
BD = 2300
Trend 3 (0.3) 6000
Trend 4 (0.15) 0
Trend 1 (0.15) 5000
Trend 2 (0.4) 4000
Ürün B
BD = 1300
Trend 3 (0.3) -2000
Trend 4 (0.15) -3000
1
BD = 2300
Trend 1 (0.15) 10000
Trend 2 (0.4) 5000
Ürün C
BD = 500
Trend 3 (0.3) -4000
Trend 4 (0.15) -12000
Trend 1 (0.15) 1200
Trend 2 (0.4) 1200
Ürün D
BD = 1200
Trend 3 (0.3) 1200
Trend 4 (0.15) 1200

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde Karar Ağaçları ve Karar Verme yaklaşım ve uygulamalarını analiz ettik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları Tablo-1'deki bilgilere göre cevaplayınız.

Tablo-1 Pazara Sürülecek Ürünler ve Durumlar İçin Getiri durumları ve olasılıkları								
	Durum 1		**Durum 2**		**Durum 3**		**Durum 4**	
Ürün	Getiri	Olasılık	Getiri	Olasılık	Getiri	Olasılık	Getiri	Olasılık
A	-2000	0.15	2000	0.4	6000	0.3	0	0.15
B	5000	0.15	4000	0.4	-2000	0.3	-3000	0.15
C	10000	0.15	5000	0.4	-4000	0.3	-12000	0.15
D	1200	0.15	1200	0.4	1200	0.3	1200	0.15

1) Tablo-1'e göre A ürününün tüm durumlar karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 2300

b) 3500

c) 1300

d) 1500

e) 1200

2) Tablo-1'e göre B ürününün tüm durumlar karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 2300

b) 3500

c) 1300

d) 1500

e) 1200

3) Tablo-1'e göre C ürününün tüm durumlar karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 2300

b) 3500

c) 1300

d) 500

e) 1200

4) Tablo-1'e göre D ürününün tüm durumlar karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 2300

b) 3500

c) 1300

d) 500

e) 1200

5) A ürününün Durum-1 karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 2300

b) 3500

c) 1300

d) -500

e) -300

6) A ürününün Durum-2 karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 2300

b) 800

c) 1300

d) -500

e) -300

7) A ürününün Durum-3 karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 2300

b) 1800

c) 1300

d) -500

e) -900

8) A ürününün Durum-4 karşısında beklenen getirisi nedir?

a) 0

b) 1800

c) 1300

d) -500

e) -900

9) B ürününün Durum-4 karşısında beklenen getirisi nedir?

a) -450

b) 1800

c) 1300

d) -500

e) -900

10) C ürününün Durum-4 karşısında beklenen getirisi nedir?

a) -1800

b) 1800

c) 1300

d) -500

e) -900

Cevaplar

1)a, 2)c, 3)d, 4)e, 5)e, 6)b, 7)b, 8)a, 9)a, 10)a

7. OYUN TEORİSİ VE KARAR VERME

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Futbol maçında teknik direktörler maç esnasında takımı nasıl yönetirler?

2. Yan yana ticaret yapan bakkallardan birisi ekmek fiyatlarını düşürürse diğer bakkal nasıl davaranır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Oyun Teorisi Ve Karar Verme	Oyun teorisi ve karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Rekabet ve iş birliği
- Oyun teorisi

7. Oyun Teorisi ve Karar Verme

Oyun kuramı karmaşık yararların mücadelesini açıklayan matematik bir yaklaşımdır. Yararların çatışması ekonomide (sendika yönetici arasındaki ücret görüşmeleri, oligopol piyasasındaki durumlar vb.) olağan olduğundan, son yıllarda oyun kuramına ilgi oldukça artmıştır. Hatta bazı iktisatçılar belirlenemeyen oligopolcü çözümler için başvurulabilecek en son aracın oyun kuramı modelinin olduğunu öne sürerler.

Bilindiği üzere, oyunların şans kuramı 17. yüzyılda ortaya atılmış ve olasılık kuramı adı verilen matematik dalının gelişmesinde kaynak olmuştur. Oyun kuramına ilk değinen matematikçi Emile Barev'dir. Stratejik oyunlar kuramının bulucusu olan J. Von Neumann bu konu üzerinde ilk çalışmasını 1928 yılında yayınlamıştır. Sonra O. Morgenstem ile birlikte *Theory of Games and Economic Behavior* adlı yapıtı 1944 yılında yayınlamışlardır. Bu çalışmadan sonra matematikçiler ve sosyal bilimciler, oyun kuramı ile ilgili pek çok çalışma sunmalarına karşın alanın hâlâ araştırmaya oldukça gereksinimi olduğunu söyleyebiliriz.

Herhangi bir stratejik oyun, davranışa dayanan oyunun sonucudur. Oyun, oyuncunun stratejisine ve faaliyeti esnasındaki şansına bağlıdır. Stratejik oyunlara örnek olarak, satranç, savaş oyunları, briç ve pek çok kâğıt oyunları gösterilebilir. Oyun basit bir ifade ile iki veya daha çok oyuncuyu içeren yarışımcı bir durumdur. Yani bir anlamda oyun iki veya daha çok kişi arasında herhangi bir çekişme durumunu gösterir. Çekişmenin sonucu üzerinde oyunculardan hiçbirinin tam bir kontrolü yoktur. Ayrıca tüm oyuncular faaliyetleri veya kendileri için elverişli olan seçenekleri (stratejileri) ve verilen herhangi bir faaliyetin seçimi ile ilgili mücadele sonuçlarını biliyor sayılır. Öte yandan oyuna katılan her oyuncunun kendi kazancını en yüksek veya kaybını en az kılmak için akılcı hareket ettiği kabul edilir.

Yarışım, çatışma veya mücadele ile eş anlamlı düşünülebilir. Aslında yarışım kontrol altına alınmış bir savaşımdan başka bir şey değildir. Çatışmanın üç temel türü şu şekilde sıralanabilir:

a) Kavga-amaç rakibi saf dışı etmek,

b) Oyunlar-amaç zekice rakibe karşı üstün gelmek ve

c) Görüşme-amaç rakibi inandırmaktır.

Bununla birlikte, yarışım kuramı görüşme ile yerine getirilmez. Yarışım oyunlar ve mücadele ile yürütülür. Ayrıca, oyuncuların seçilen oyun kuralı için akılcı olan ölçüleri geliştirdikleri gibi rakiplerine karşı ölçülü hareket ettikleri varsayılır.

Kavramlar Ve Tanımlar

Oyun kuramında yer verilen kavram ve tanımların önce açıklığa kavuşturulması gerekir.

a) Oyuncular: Oyunda en az iki oyuncu veya rakip olmalı ve onların akılcı hareket ettikleri gibi kazanmak için en iyisini yaptıkları varsayılır.

b) Stratejiler: Her oyuncunun deneme seçenekleri vardır. Bir oyuncu için herhangi bir strateji kural olup, çeşitli deneme faaliyetleri arasından oyunun seçimini belirler. Herhangi bir oyuncunun deneme faaliyetleri belirsiz sayıda ise oyun sonlu değil süreklidir. Deneme faaliyetleri belirli ise oyun sonludur. Her oyuncunun seçenek stratejisinin sayısı sonludur.

c) Kazanç veya Ödemeler: Oyunun sonucu kazanma, yitirme veya oyundan çekilme olabilir. Her sonuç veya ödeme, negatif, pozitif ve sıfır olmak üzere her oyuncunun rakibine karşı kazancı veya kaybını belirler.

d) Ödemeler Matrisi: Oyuncuların strateji seçimlerinin türlü bileşiminden sonuçlanan kazanç ve kayıplarını gösteren matrise ödemeler matrisi denir. Ödeme matrisinin elemanları pozitif, negatif veya sıfıra eşit olabilir. Söz konusu matrisin herhangi bir elemanı pozitif ise sütunda yer alan oyuncu, satırda yer alan oyuncuya, bu miktarda ödeme yapar. Matrisin herhangi bir elemanı negatif ise satırdaki oyuncu sütundaki oyuncuya bu negatif elemanın mutlak değerine eşit ödemede bulunur. Matrisin elemanı sıfır ise oyunculardan hiçbiri birbirine ödemede bulunmaz.

m sayıda satırlı ve n sayıda sütunlu bir ödemeler matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots \quad \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots a_{mj} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Satır A oyuncusunun, sütun da B oyuncusunun stratejilerini gösteriyor diyelim. Buna göre A oyuncusunun (1,2, m) sayıda stratejisi var ve bunlardan birini seçebilir. B oyuncusunun da (1,2 n) sayıda stratejisi vardır. Oyunun sonucu, yani sütundaki oyuncu B'nin, satırdaki oyuncu A'ya yaptığı ödeme, A oyuncusunun, ödeme matrisinde seçtiği satır ile oyuncu B'nin seçtiği sütunun kesiştiği yerdeki eleman tarafından belirlenir. Örneğin A oyuncusu, A3 stratejisini seçer ve B oyuncusu da B2 stratejisini seçerse oyunun sonucu a32 veya A oyuncusunun kazancı olur. Eğer a32 negatif olsa idi, bu miktar A oyuncusunun B oyuncusuna yapacağı ödemeyi veya A oyuncusunun kaybını gösterecekti.

e) Oyunlar

Oyunların sınıflandırılması genellikle oyuncuların sayılarına göre yapılır. Böylece, iki kişilik, üç kişilik veya (n) kişilik oyunlar kurulabilir, n = 2 ise oyun iki kişilik, n > 2 ise oyun n kişili oyundur. Ayrıca, sıfır toplamlı, sabit toplamlı, sabit toplamlı olmayan ve sıfır toplamlı olmayan oyunlar olarak da oyunlar sınıflandırılır.

Herhangi bir oyunda, oyuncular tarafından oynanan stratejiler göze alınmadan her oyuncunun kazanç ve kayıplarının matematik toplamı sıfır ise oyuna sıfır toplamlı oyun denir. Sıfır toplamlı oyunlar iki kişilik oyundur. Bir oyuncunun kazancı diğer oyuncunun kaybına eşittir.

Sıfır toplamlı iki kişilik bir oyun için bir örnek ele alalım.

Örnek: A ve B oyuncuları arasında oynanan oyunun ödeme matrisi verilmiştir. İstenen, oyunun değeridir.

Çözüm:

A oyuncusunun A_1, A_2 ve A_3 gibi stratejileri varken, B oyuncusunun da Bı, B_2, B_3, B_4 stratejileri vardır. A ve B oyuncusu rakibinin hangi stratejiyi seçeceğini bilmediği gibi her biri ancak tek bir stratejiyi kullanabilmektedir. Oyunda tam bir belirsizlik söz konusudur.

Ödeme matrisine baktığımızda, A oyuncusu Aı stratejisini seçtiğinde kesin olarak en az toplamı 16'ya eşit değerde, A2'yi seçtiğinde en az 8 ve A3 stratejisini seçtiğinde ise en az 14 değerinde kazanacaktır.

A oyuncusu B oyuncusunun hangi stratejiyi oynayacağını bilemediğinden, kendisi için mümkün olan en az kazançlar yani [16, 8, 14] arasından en büyük olanını, yani (16)'yı garanti etmek ister. A oyuncusu için kazanma kuralı en küçük kazançlar içinden en büyüğünü seçmek olacaktır. Yani oyun matrisinde bu değeri a ile ifade edersek;

$a = Max_i, min_j\ a_{ij}$ olur,

Böylece A oyuncusu Aı stratejisini seçer. Eğer Aı'den farklı stratejiyi seçerse, maxmin kuralının vereceği değerden daha az kazancın riskini yüklenmiş olacaktır. Örneğin A oyuncusu A_2 stratejisini, B oyuncusu da B2 stratejisini seçerse, A'nın kazancı 8 olur. B oyuncusu da Bı stratejisini seçerse 50, B2 stratejisini seçerse 80, B3 stratejisini seçerse 16 ve B4 stratejisini seçerse 90'dan daha fazla kaybetmez. B oyuncusu da en fazla kayıplarından en küçük olanı garanti etmek isteyeceğinden, B3 stratejisini seçer. Buna göre, B oyuncusu için stratejisinin seçimindeki kural, (b) kaybı gösterirse;

$b = Min_i \, , max_j \, a_{ij}$ olur.

Böylece A oyuncusunun maxminimal strateji A_1 ve B oyuncusunun minimaximal strateji B_3 seçimi sonucunda A oyuncusunun kazancı $a_{13} = 16$ elemanına karşılık olur. Demek ki B oyuncusunun kaybı b=16'dır. A oyuncusunun kazancı B oyuncusunun kaybına eşit olduğundan oyun sıfır toplamlı bir özellik gösterir ve değeri (v) = 16'dır.

Sabit toplamlı oyunda her iki oyuncu için kazançların toplamı sabit bir sayıdır. Sabit toplamlı oyunlarda ortaklığın hiçbir üstünlüğü olmaz; yani bir anlamda ortakların yararları doğrudan doğruya çatışmaktadır.

Sabit toplamlı olmayan oyunlarda ise ortaklık bir üstünlük sağlayabilir. Şimdi sabit toplamlı ve sabit toplamlı olmayan oyunlar için birer örnek ele alalım.

Örnek: İki kişilik sabit toplamlı oyun için aşağıda A ve B oyuncuları için ayrı ayrı kazanç matrisi verilmiştir. Bu oyunda kazanç toplamı 120'dir. Eğer A oyuncusu A_1 stratejisini seçerse ve B oyuncusu da stratejisini oynar ise kazanç toplamı (40+80=120)'dir.

A oyuncusunun kazanç matrisi

	B_1	B_2
A_1	40	20
A_2	60	30

B oyuncusunun kazanç matrisi

	B_1	B_2
A_1	80	100
A_2	60	90

Örnek: İki sanık cezalandırılma nedeni ile yargılanmaktadır. İki sanığın da stratejileri sadece suçlarını kabul etmek veya etmemektir. A ve B diye adlandırılan sanıkların ayrı ayrı soruşturmalarında elde edilen oyun matrisleri aşağıdadır.

Matristeki elemanlar cezanın şiddetini yani mahkûm olacakları yılı belirtir.

Şimdi bu örnek ile sabit toplamlı olmayan iki kişilik bir oyunda ortaklığın yararını açıklamaya çalışalım. Her iki sanık suçları kabul ederse her ikisi de ayrı ayrı 25 yıl ceza yiyecekler ve toplam ceza 50 yıl olacaktır. Biri suçunu kabul eder, diğeri ret ederse ayrı ayrı 60 yıl ceza yiyeceklerdir. Eğer A suçunu kabul eder, B reddederse, A ceza yemeyecek fakat B 60 yıl ceza yiyecektir. Bu durum B için suçu kabul etmekten daha kötüdür. A oyuncusu reddeder ve B oyuncusu da suçu kabul ederse A oyuncusu 60 yıl ceza görürken, B oyuncusu cezaya çaptırılmayacaktır. A oyuncusu B'yi inandırır ve her ikisi de suçlarını reddederse ancak 5'er yıl ceza görürler ki bu durum her ikisi için de yararlı olacaktır.

Sıfır toplamlı olmayan oyunlarda bir oyuncunun kazancı diğer oyuncunun kaybına eşit değildir. Bir anlamda oyuncuların kendi yararlarını düşündüğü pek çok iki kişilik oyunlarda, tarafların kazanç ve kayıpları sabit olmadığı gibi kazanç ve kayıp toplamları da sıfıra eşit değildir.

f) Tam Stratejiler

Oyunun her oynanmasında oyuncuların aynı stratejiyi kullandığı söylenir. Bu strateji bazı oyunlar için optimal strateji olabilir. Eğer herhangi bir tam strateji bir oyuncu için optimal ise bu tam strateji diğer oyuncu için de optimaldir. Bu tam stratejiler minimax ve maximin kuralına göre ulaşılan değerleri veren stratejilerdir. Biraz sonra değinileceği üzere tam stratejiler oyunun tepe noktasını belirler. Aynı zamanda tam stratejiler bir vektör olarak ifade edilebilir. Eğer A oyuncusu her zaman A2 stratejisini seçerse strateji vektörü x= [0,1,0,0] yani x2 = 1 olur; diğer elemanlar sıfır olur.

g) Karma Stratejiler

Oyunlarda genellikle daha etkili olan karma strateji kullanılır. Karama strateji, tam stratejiler takımındaki olasılık dağılımı ile tanımlanır. A oyuncusu için herhangi bir karma strateji olasılık vektörü:

$x = [x_1, x_2, ..., x_m]$ dir.

Burada x_i ($i = 1,2,......m$) A_i stratejisinin seçilme olasılığıdır. Oyuncu B için karma strateji ise

$y = [y_1, y_2, ..., y_n]$ dir.

y_j ($j = 1,2,.......,n$) B_j stratejisinin seçilme olasılığıdır.
Olasılık olarak x ve y vektöründeki x_i ve y_j negatif olmamalıdır. Yani

$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,.......m$

$y_j \geq 0 \quad j = 1,2,......n$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \text{ dir.}$$

h) Beklenen Değer

Belirsizlik altında karar verebilmek yani elverişli olan en iyi stratejiyi seçmede beklenen değer kavramı yararlıdır. Beklenen değer olayların olma olasılıkları ile olayın değerinin çarpımlarının toplamıdır.

$$B.D. = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)x_i \quad (i = 1,2,3,....., n)$$

Oyun kuramına beklenen değeri uygular isek A oyuncusunun uzun dönemdeki beklenen kazancı,

$$B.D. = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)x_i \quad (i = 1,2,3,....., n)$$

Burada, x_i ve y_j A ve B oyuncularının i ve j stratejilerini seçme olasılığını

a_{ij} : A oyuncusu (i) stratejisini Xi olasılığı ile ve B oyuncusu da j stratejisini y_j olasılığı ile seçtiğinde, A oyuncusunun kazancını veya B oyuncusuna olan ödemesini gösterir.

Örnek:

Aşağıda A ve B oyuncuları arasında oynanan oyunun kazanç matrisi verilmiştir.

		B oyuncusu	
		B_1	B_2
A oyuncusu	A_1	3	-8
	A_2	-4	2

Düşünelim ki A oyuncusunun strateji vektörü [x] = [0.3, 0.7] ve B oyuncusunun strateji vektörü de [y] = [0.20, 0.80]'dir.

A oyuncusunun beklenen değeri =

[3(0.3) (0.20) + (-8) (0.3) (0.80)+ (-4) (0.20) (0.70) + 2 (0.80) (0.70)]

= -1.18

Eğer oyun birkaç kez oynanırsa, A oyuncusu oyun başına ortalama yaklaşık 1.18 kaybedecektir.

i) Herhangi Bir Çözümün Tanımı

Herhangi bir oyunu çözümlerken, oyunun birkaç kez yinelenerek oynandığı düşünülür. İki kişilik oyunda, A oyuncusu rakibi olan B oyuncusunun hangi stratejiyi oynayacağını düşünmeden kendisi için x gibi optimal strateji vektörünü elde etmeye çalışır, x vektörü A oyuncusuna oyundan maksimum beklenen kazancı sağlar. Buna karşılık B oyuncusu da A oyuncusunun beklenen kazancını en aza indirecek kendi strateji vektörü [y]'yi araştırır.

Eğer x* ve y*, A ve B oyuncularının optimal strateji vektörlerini gösterirse, A oyuncusunun beklenen değeri B.D.(x* ,y*) olur ki, bu da oyunun değeridir. Aslında A ve B oyuncuları optimal şekilde oyunlarını oynarlarsa B.D. (x , y*) değeri yani (v), A oyuncusunun uzun dönem ortalama kazancı olur. Biliyoruz ki v sembolü oyunun değerini gösterir.

Oyun İçin Başlıca Önermeler

Oyunları çözmek için uygun teknikleri geliştirmede kullanılacak iki temel önerme (teorem) vardır.

Önerme 1: m satır ve n sütunu gösterirse (mxn) bir dikdörtgen oyundur. Her dikdörtgenin bir oyun değeri vardır. Dikdörtgen oyununda herhangi bir oyuncunun her zaman optimal stratejisi vardır. Bunu şu şekilde ifade edebiliriz:

B.D.(x^* ,y^*) = v

Burada minimax ve maximin kuralları uygulanır.

Önerme 2: Herhangi bir dikdörtgen oyunda A ve B oyuncuları için oyunun değeri v, optimal strateji vektörleri de x, y olsun.

Sonra,

a) A oyuncusunun her tam strateji vektörü xt için B.D.(x_t, y^*) $\leq$ v'dir. Bu şu demektir. Eğer B oyuncusu optimal stratejisini oynar ise, A oyuncusunun oynayacağı v değerinden daha fazla kazandırabilecek tam bir strateji yoktur.

b) B oyuncusunun her tam strateji vektörü yt için B.D. (x^*, y_t) $\geq$v'dir.

Eğer A oyuncusu optimal stratejisini oynar ise, B oyuncusunun oynayacağı hiçbir tam strateji A oyuncusunun kazancını v'den daha aza indiremeyecektir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde karşılıklı rekabet ve iş birliği durumlarında oyun teorisi ile karar alma yaklaşımlarını inceledik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları Tablo-3'teki bilgilere göre cevaplayınız.

Tablo-3 A ve B'nin Rekabet Stratejileri ve Ödemeler Matrisi (A Firmasına göre düzenlenmiş)							
		B'nin Stratejileri					
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**A'nin Stratejisi**	
A'nın Stratejileri	**A_1**	6	- 1	5	3	- 1	
	A_2	10	4	5	- 3	- 3	
	A_3	6	5	7	4	**4**	**maximin**
	B'nin Stratejisi	10	5	7	**4**		
					minimax		

1) B oyuncusunu stratejileri karşısında A oyuncusunun en iyi A1 stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) -1

d) 3

e) 2

2) B oyuncusunu stratejileri karşısında A oyuncusunun en iyi A2 stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) -3

d) 3

e) 4

3) B oyuncusunu stratejileri karşısında A oyuncusunun en iyi A3 stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

4) B oyuncusunu stratejileri karşısında A oyuncusunun en iyi stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

5) B oyuncusunu stratejileri karşısında A oyuncusunun en iyi stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

6) A oyuncusunu stratejileri karşısında B oyuncusunun en iyi B1 stratejisi nedir?

a) 4

b) 5

c) 10

d) 3

e) 7

7) A oyuncusunu stratejileri karşısında B oyuncusunun en iyi B2 stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) 10

d) 4

e) 7

8) A oyuncusunu stratejileri karşısında B oyuncusunun en iyi B3 stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) 10

d) 4

e) 7

9) A oyuncusunu stratejileri karşısında B oyuncusunun en iyi B4 stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) 10

d) 4

e) 7

10) A oyuncusunu stratejileri karşısında B oyuncusunun en iyi stratejisi nedir?

a) 6

b) 5

c) 10

d) 4

e) 7

Cevaplar

1)c, 2)c, 3)c, 4)c, 5)c, 6)c, 7)b, 8)e, 9)d, 10)d

8. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE KARAR VERME I

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Belediyeler toplu taşıma için belediye otobüslerinin sefer saatlerini nasıl ayarlar?

2. Aylık gelirinizi ve günlük zamanınızı hedefleriniz için dağıtırken sorun yaşıyor musunuz?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Doğrusal Programlama	Doğrusal programlama ile karar alma	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Kısıtlar
- Kısıt altında kaynak planlama

8. Doğrusal Programlama İle Karar Verme I

Yirminci Yüzyılın ortalarında görülen en önemli bilimsel gelişmeler içinde üst sırayı doğrusal programlamadaki gelişmeler almıştır. Dünyadaki çoğu şirketlerin bilgisayar kullanımıyla, 1950'lerden bu yana doğrusal programlamanın şirketlerin iş yaşamına etkisi olağan üstü olmuştur.

Doğrusal programlamanın temel konusu, sınırlı kaynakların yarışan faaliyetler arasında en iyi (optimal) biçimde dağıtımının sağlanması problemi ile ilgilidir. Bu bağlamda, doğrusal programlama optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan matematiksel bir teknik olmaktadır.

Doğrusal programlama ilgilendiği problemi açıklayan, matematik modeli kullanır. Ayrıca doğrusal programlamada yer alan doğrusal ve programlama kelimelerine açıklık getirelim. Doğrusallık özelliği matematik modeldeki tüm fonksiyonların doğrusal fonksiyon olması gerektiğini açıklar. Programlama kelimesi, bilgisayar programlaması anlamını değil, planlama ile eş anlamlı olduğunu ifade eder. Bu açıklamalardan sonra, doğrusal programlama tüm uygun seçenekler arasından optimal sonucun elde edilmesini sağlayan planlama faaliyetlerini içerdiğini söyleyebiliriz.

Günümüzde binlerce değişkenli ve binlerce kısıtlayıcılı problemler, bilgisayar yardımıyla çözülebildiğinden, doğrusal programlamanın uygulama alanı sadece kıt kaynakların dağıtımı ile sınırlı kalmamış, diğer birçok alanda da önemli uygulamalar olmuştur. Bu konuda aşağıdaki listeyi verebiliriz:

- Personel programlaması,
- Beslenme (diyet) problemleri,
- Üretim planlaması ve envanter kontrolü,
- Ulaştırma ve lojistik problemleri,
- Atama problemleri,
- Tarımsal planlama,
- Hava kirliliğinin kontrolü,
- Sermaye bütçeleme problemi,
- Kısa dönemli finansal planlama,

• Dinamik yatırım planlaması,

• Reklam seçimi problemleri,

• Portföy seçimi problemi ve

• Karışım problemleridir.

Doğrusal programlama, değişkenlere ve kısıtlayıcılara bağlı kalarak amaç fonksiyonunu en uygun (maksimum veya minimum) kılmaya çalışır. Daha önce de değindiğimiz gibi doğrusal programlama verilen optimallik ölçütüne bağlı kalarak kıt kaynakların optimal şekilde dağıtımını içeren deterministik matematiksel bir tekniktir.

İşletme, ekonomi ve muhasebe bilim dallarını da yakından ilgilendiren doğrusal programlama, yöneylem araştırmasında da en yaygın kullanılan araçlardan birisidir. Çünkü geniş bir uygulama alanı olan doğrusal programlama, ayrıca bir işletmenin karşılaştığı darboğazların giderilmesinde, kıt kaynakların etkin kullanımı ve bunların gölge fiyatlarının belirlenmesi ile en uygun çözümlere ulaştıracak politikaları saptamada kullanılmaktadır.

Doğrusal Programlamanın Varsayımları

Doğrusal programlama modelinden tutarlı sonuçların elde edilmesi aşağıdaki varsayımlara bağlıdır:

a. Doğrusallık Varsayımı

Doğrusallık varsayımına oransallık (proportionality) varsayımı da denir. Bu varsayım modelin amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcı fonksiyonları ile ilgilidir.

Şöyle ki her bir faaliyetin amaç fonksiyonunun değerine (z) katkısı, x_j faaliyetinin düzeyine oranlıdır. Bunu, amaç fonksiyonunda c_jx_j terimi ile gösterebiliriz. Örneğin bir gömlek üretiminin maliyeti 12 ise 100 gömlek üretmenin maliyeti (12 x 100 = 1200) 1200TL'dir. Benzer şekilde, her bir faaliyetin sol taraftaki her fonksiyonel kısıtlayıcıya katkısı, X_j faaliyetinin düzeyine oranlıdır. Bir anlamda işletmenin girdileri ile çıktıları arasında doğrusal bir ilişkinin olduğunu gösterir. Üretim düzeyi artarken aynı oranda üretim girdileri de artar. Bunu da kısıtlayıcılardaki $a_{ij}x_j$ terimi ile gösterebiliriz. Kısıtlayıcı ve amaç fonksiyonundaki değişkenlerin (x_j) derecesi yani üstü 1 olmalıdır. Yoksa bu varsayım işlemez.

Gerçek hayatta, üretimdeki ekonomi ölçeği bize, bir birim üretimin marjinal maliyeti birim ürün sayısı artarken azaldığını anlatır. Bir bakıma azalan marjinal getiri yasası işlediğinde ise, ürün miktarı artarken bu ürünün kâr fonksiyonunun eğimi azalmayı sürdürerek o ürünün amaç fonksiyonuna katkısını azaltacaktır. Bu gerçekleştiğinde, üretim maliyeti veya kâr fonksiyonu üretilen birim sayısının doğrusal olmayan fonksiyonudur. Dolayısı ile doğrusallık varsayımı bozulur. Karar değişkenlerinin amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıları, doğrusal fonksiyon olmadığında, problem doğrusal olmayan programlama problemi özelliğini taşır ve problem doğrusal programlama ile çözülemez.

b. Toplanabilirlik Varsayımı

Doğrusal programlama da her fonksiyon (amaç fonksiyonu veya kısıtlayıcının sol tarafındaki fonksiyon) ilişkin olduğu faaliyetlerin bireysel katkılarının toplamıdır.

Bu varsayımı, kısıtlayıcının sol tarafındaki fonksiyon için ele alırsak, değişik üretim faaliyetlerine kaynak olan üretim girdilerinin toplamının, her bir işlem için ayrı ayrı kullanılan girdilerin toplamına eşit olduğunu gösterir. Örneğin, bir ürünün üretimi için üç saate, diğer ürünün üretimi için beş saate gereksinim var ise bu iki ürünü birden üretmek için sekiz saat gereklidir.

Toplanabilirlik varsayımının iki ürün tamamlayıcı ürün veya iki ürünün birleşik üretildiğinde bozulabileceğini düşünenler de olabilir. Şöyle ki, birleşik ürün üretimindeki gerekli kaynak miktarının belirlenmesi sorunu ile yeni ürün piyasaya yapılan reklam harcamaları kendi ürününü olduğu kadar tamamlayıcı ürünün satış gelirini de artırır. Dolayısıyla onların birleşik kârı bireysel olarak üretilen ürün kârından fazladır.

c. Bölünebilirlik Varsayımı

Bölünebilirlik varsayımı, her bir karar değişkeninin kesirli değerler almasına izin verilmesini ister. Böylece bu değişkenler, sadece tam sayılı değerler alması için sınırlandırılmaz. Her karar değişkeni bazı faaliyetlerin düzeyini gösterdiğinden, faaliyetlerin kesirli düzeylerde çalışabileceği varsayılır.

Kesin durumlarda veya girdi ve çıktıların bölünmezlik sorunu, bazı veya tüm karar değişkenlerinin tam sayı olmasını gerektirir. Bu gibi koşullarda bu varsayım işlemez ve bu tür kısıtlayıcılı matematik modele, tam sayılı programlama modeli adı verilir.

d. Kesinlik Varsayımı

Kesinlik varsayımı, doğrusal programlama modelindeki her bir parametrenin [amaç fonksiyonu katsayıları (cj), sağ taraf kısıtlayıcı değeri (bj) ve teknolojik katsayıların (a^)] kesin olarak bilindiğidir. Yani, onların bilinen bir sabit olacağı varsayılır ki bu da modelin deterministik model olduğunu belirtir.

Bu varsayım gerçek iş hayatında tam olarak nadiren karşılanır. Çünkü doğrusal programlama modelleri, faaliyetlerin gelecekteki durumunu belirlemek için kurulur. Gelecekteki koşulların tahminine dayanarak kullanılan parametre değerlerinde bazı belirsizliklerin olması kaçınılmazdır.

Geçmişte olduğu gibi günümüzde de pek çok gerçek problem doğrusal programlama modeli şeklinde formüle edilerek bilgisayar çözümleri ile başarılı şekilde uygulamaya konulmaktadır. Fakat bu modelin doğrusallık ve bölünebilirlik (süreklilik) varsayımları gerçek dünyadaki ilişkileri gözlediğimizde bir eksiklik arz ettiğini söylemeliyiz.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, ekonomideki üretim ölçeği doğrusallık varsayımını ve girdi ve çıktıların bölünmezlik sorunu da bölünebilirlik varsayımını bozmaktadır. Çünkü bölünebilirlik varsayımı bize karar değişkenlerinin sürekli olması anlamındadır. Kesikli ve tam sayılı değerler ile çelişir. Çoğu problemlerin çözümü karar değişkenlerin tam sayı olduğunda anlamlıdır. Diyebiliriz ki bu iki varsayım, doğrusal programlama yöntemini kısıtlamaktadır.

Doğrusal Programlama Modeli

Bir problemin doğrusal programlama modelini oluştururken aşağıdaki işlemler yapılır.

a. Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi

Bir problemin doğrusal programlama modelinin kurulmasına öncelikle karar değişkenlerinin tanımlanmasıyla başlanır. Herhangi bir doğrusal programlamada, karar değişkenleri alınacak kararları tamamen betimlemesi gerekir. Genellikle karar değişkenleri alınacak kararlara ilişkin faaliyetlerin düzeyini gösterir ki çoğu kez x_j (j = 1, 2,..n) simgesiyle ifade edilir. Ayrıca karar değişkenlerin değeri kısıtlayıcı kümesini doyurmalıdır.

b. Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi

Herhangi bir doğrusal programlama probleminde, karar verici karar değişkenlerinin bazı fonksiyonunu en büyüklemek (genellikle gelir ve kârın) veya en küçüklemek (genellikle maliyetlerin) ister. En büyüklenen (maksimize edilen) veya minimum kılınan (en küçüklenen) fonksiyona amaç fonksiyonu adı verilir.

Doğrusal programlama modelinden beklenen sonucun alınabilmesi için amacın açık olarak bilinmesi ve matematiksel olarak yazılımı gereklidir.

Amaç fonksiyonu, problemin ilişkin olduğu süreçteki başarımın (per-formansın) en olanaklı değerini verir. Bu yüzden başarımı (z), en çoklayacak veya en küçükleyecek x_j (j = 1, 2, ...n) değişkenlerinin değeri bulunur.

Çoğu doğrusal programlama uygulamaları, kaynakların faaliyetlere dağıtımını içerir. Her elverişli kaynağın miktarı sınırlı olduğundan kaynakların faaliyetlere dağıtımı çok dikkatli yapılmalıdır. Bu yüzden amaç fonksiyonuna ulaşılırken seçenekli üretim yollarının olması gerektiği kabul edilmeli ve onun değerinin en yüksek veya en az olabilmesi için de karar değişkenlerinin bir değeri olmalıdır. Yoksa amaç fonksiyonu artı sonsuzda (+∞) en büyüklenir veya küçüklenir ki bununda firma için bir anlamı yoktur.

Modelin amaç fonksiyonunda karar değişkenleri x_1, x_2,..., x_j,... x_n ve kâr veya maliyet katsayıları (parametreleri) da C_1, C_2,..., C_J,..., C_N ile gösterilirse amaç fonksiyonu:

Max veya min (z) = $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x3 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n$ şeklinde yazılır.

c. Kısıtlayıcıların Belirlenmesi

Ekonomide üretim kaynakları veya üretim faktörleri sınırlıdır. Bir işletmenin elindeki makine kapasitesi, teknolojisi, iş gücü, enerji, sermaye, ham madde, yan mamul madde, malzeme gibi üretim faktörleri ile ürünlerine olan talep de sınırlıdır. Dolayısı ile karar değişkenlerinin miktarı da sınırlı olacaktır. Önemli olan bu kısıtlayıcılar altında amaç fonksiyonunu veya işletme başarısını en olanaklı kılan düzeyde ürünleri üretmektir.

İşletmenin faaliyetlere dağıtabileceği kaynak miktarı b_i (i = 1,2, ..., m) ve ürünlerin seçenekli üretim yollarını (teknolojik yapısı) veya teknoloji katsayılarını da (a_{ij}) sembolü ile gösterelim. Bu durumda kısıtlayıcı denklem takımı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1j}x_j + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2j}x_j + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{ij}x_j + \ldots\ldots + a_{in}x_n \leq b_i \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mj}x_j + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{aligned}
$$

Kısıtlayıcılardaki karar değişkenlerinin katsayıları, farklı ürünlerin üretiminde kullanılan teknolojiyi yansıttığı için **teknolojik katsayılar** adı verilir.

Kısıtlayıcının sağ tarafındaki b_i parametresi daha öncede ifade ettiğimiz gibi elverişli kaynak miktarını gösterir. Fakat bu kaynak miktarları kısıtlayıcı fonksiyonuna göre her zaman sınırlı olmaz. Bazen karar değişkenlerinin istediğinden fazla veya tam eşitlikte olması da mantıklı olan durumdur.

Bu durumda, kısıtlayıcıların doğrusal olması gerektiği gibi diğer iki tür temel sınırlayıcı da bulunmaktadır.

$$
\begin{aligned}
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \qquad \text{bazı i değerleri için} \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad \text{bazı i değerleri için}
\end{aligned}
$$

d. İşaret Kısıtlaması

Doğrusal programlama probleminin formülasyonunu tamamlamak için her bir karar değişkeninin sadece pozitif yani negatif olmayan veya karar değişkenlerin hem pozitif hem de negatif değerli olabileceği varsayılmalıdır.

Karar değişkeni x_j sadece pozitif değerli olduğu varsayılırsa $x_j \geq 0$ işaret kısıtlamasını modele ekleriz. x_j değişkeninin hem pozitif hem de negatif (veya sıfır) değerli olduğu varsayılırsa x_j sınırlandırılmayan işarette olup ve x_j yerine x_j^+- x_j^-simgesi kullanılır. Fakat modelin sonunda karar değişkenlerin işaret kısıtlamasını belirtirken x_j^+- $x_j^- \geq 0$ yerine sadece x_j^+- $x_j^- \leq 0$ yazılır. Doğrusal programlama modelinin matematik yazılımı aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$
\begin{aligned}
\text{Maksimum } (z) = \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{Kısıtlayıcılar} \quad & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \;\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad \text{ve} \\
x_1 \geq 0 \quad & x_2 \geq 0 \quad \ldots \; x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Bu doğrusal programlama problemi maksimum amaçlı kısıtlayıcıları da $\leq$ biçimde ise buna **normal max doğrusal programlama problemi** de denir.

c_j, b_i ve a_{ij} modelin parametreleri olup $x_j \geq 0$ kısıtlamasını da negatif olmama kısıtlayıcısı (veya negatif olmama koşulu) adı verilir. x_1, x_2, ..., x_n ise kontrol edilebilen değişkenler veya karar değişkenleridir.

Normal minimizasyon doğrusal programlama probleminde ise amaç fonksiyonu minimum ve kısıtlayıcılarda "$\geq$" yapısındadır.

Özetle, herhangi bir doğrusal programlama modeli belirlenen amaç fonksiyonunu en büyükleyecek veya en küçükleyecek kontrol edilebilen (karar) değişkenleri bulmak için kurulur.

Bazı durumlarda karar değişkenlerinin optimal değerini etkilemeden amaç fonksiyonu basitleştirilebilinir. Amaç fonksiyonuna sabitler eklenir ya da çıkarılırsa problemi çözerken sabitler ele alınmayabilir.

Örneğin aşağıdaki amaç fonksiyonu;

En büyükleme $z = 3x_1 + 10x_2 + 500$ yerine

En büyükleme $z = 3x_1 + 10x_2$ olarak ele alınabilir.

Burada kontrol edilebilen değişkenlerin optimal değerleri değişmez; istenen düzenleme sadece problem çözüldükten sonra amaç değerine 500 sabitinin eklenmesidir.

Aynı zamanda amaç fonksiyonu herhangi bir sabit ile bölünür veya çarpılırsa, karar değişkenlerinin optimal değeri değişmez.

Örneğin maksimum $z = 60x_1 + 100x_2$, maksimum $z' = 6x_1 + 10x_2$ olarak basitleştirilebilir. Asıl amaç fonksiyonunun optimal değeri bulunmak istendiğinde, maksimum z'nin optimal değeri 10 ile çarpılmalıdır.

Şimdi yukarıdaki iki basitleştirici adımı birleştirelim. İşletmenin amaç fonksiyonu;

$z = 12x_1 + 15x_2 + 60$ olsun.

z amaç fonksiyonu $z' = 4x_1 + 5x_2$ olarak basitleştirilebilir.

Diyelim ki z'nin optimal değeri 200'dür.

Buna göre, asıl (z)'nin değeri $z = 3(200) + 60 = 660$ olur.

Doğrusal Programlama Modelinin Çözümünde Kullanılan Tanımlamalar

Doğrusal programlama problemine ilişkin yaygınca kullanılan tanımlamaları kısaca açıklamaya çalışalım.

a. Uygun Bölge

İşaret kısıtlaması da dahil, tüm kısıtlayıcıları doyuran xı, x2,..., xn karar değişkenlerinin değer kümesidir. Uygun bölge bir bakıma, tüm uygun çözümlerin değer kümesidir.

Bir doğrusal programlama problemini örnek alarak uygun bölge tanımını açıklamaya çalışalım.

$$\text{Max } z = 115x_1 + 90x_2$$

Kısıtlayıcılar

$$4x_1 + 16x_2 \leq 128 \text{ ....} 1$$

$15x_1 + 10x_2 \leq 220$ .... 2 ve

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ 3

$x_1 = 12$ ve $x_2 = 4$ değerleri veya kısıtlayıcıların grafik çizimlerindeki noktaları yukarıdaki kısıtlayıcıları ve işaret kısıtlamasını da doyurur.

Şöyle ki;

Kısıtlayıcı (1), $4(12) + 16(4) \leq 128$ olduğundan

Kısıtlayıcı (2), $15(12) + 10(4) \leq 220$ olduğundan

Kısıtlayıcı (3), de $12 \geq 0$ ve $4 \geq 0$ olduğundan doyurulmaktadır.

Diğer taraftan, $x_1 = 20$ ve $x_2 = 2$ değerleri (noktaları), 1 ve 3'nolu kısıtlayıcıları doyururken, 2'nolu kısıtlayıcıyı [15(20) + 10(2) = 320], 220'den küçük ve eşit olmadığından doyurmamaktadır. Eğer herhangi bir nokta doğrusal programlama probleminin uygun bölgesinde değilse bu noktaya uygun olmayan nokta denir.

b. Köşe Noktaları

Uygun bölgenin yapısı gereği, belirli sayıda uygun nokta olacaktır. Bu noktalar köşe (aşıt) noktalar olarak bilinir ve onlar doğrusal programlamada önemli rol oynarlar. Köşe noktaları kavramı grafik çözüm yöntemini ele aldığımızda daha iyi açıklığa kavuşacaktır.

c. Uygun Çözüm

Karar değişkenleri değerlerinin özel bir kümesinin, tüm kısıtlayıcıları doyuran çözümüne uygun çözüm denir. Uygun çözüm, uygun bölgede tek noktada olabilir. Bu noktanın köşe noktası veya iç noktada olabildiği düşünülmelidir.

Uygun bölge tanımlaması için ele alınan örnek problemde, karar değişkenlerinin (2, 3), (6, 2), (8, 4) değerleri uygun çözümdür.

d. Optimal Çözüm

Amaç fonksiyonunu maksimum veya minimum kılan uygun çözüme optimal çözüm denir.

Amaç fonksiyonunu maksimum kılan en büyük değere, en uygun değer denir. Aynı şekilde amaç fonksiyonunu minimum kılan en küçük değer de en uygun değerdir.

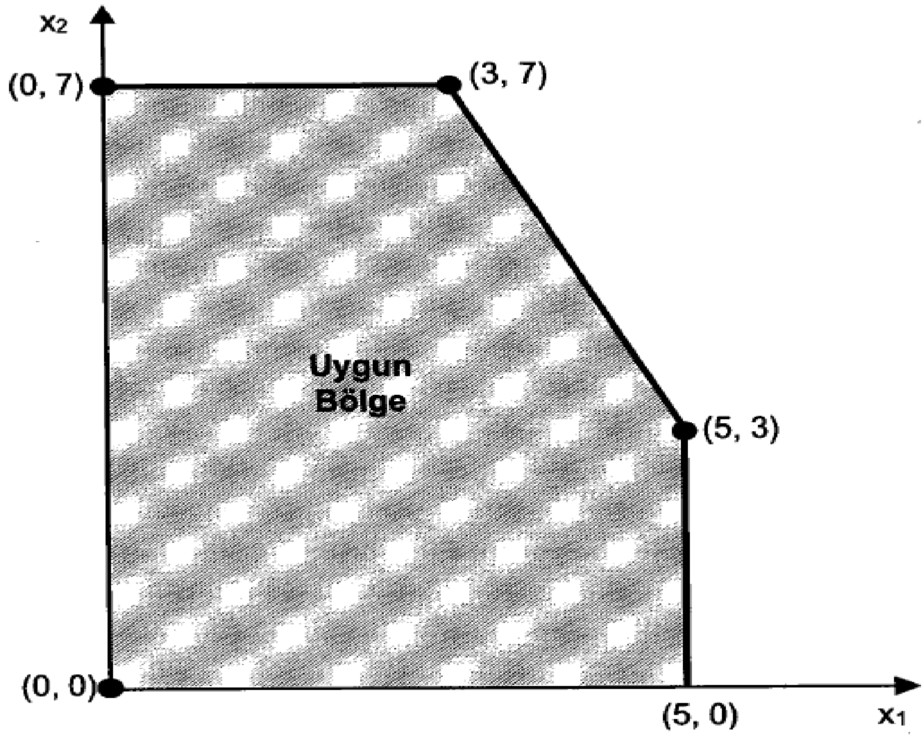
e. Köşe Nokta Uygun Çözüm

Simpleks yöntem ile optimal çözümü araştırırken temel rol oynayan özel uygun çözümlerden köşe-nokta uygun çözümü tanımlamaya çalışalım.

Uygun alanın köşesinde olan bir çözüme **köşe-nokta uygun çözüm** denir.

Sınırlandırılmış uygun bölgeli ve uygun çözümlü bir doğrusal programlama probleminin köşe-nokta uygun çözümleri ve en az bir optimal çözümü vardır. Daha öte, en iyi köşe-nokta uygun çözümü, optimal çözüm olmalıdır. Böylece, bir problemin bir tek optimal çözümü var ise o köşe-nokta uygun çözümü olmalıdır. Seçenekli optimal çözümlü problemlerin ise en az iki tane köşe-nokta uygun çözümü olmalıdır.

Örneğin aşağıdaki şekilde, problemin 5 tane köşe-nokta uygun çözümü vardır. Bu noktalardan hangisi amaç fonksiyonunu maksimum kılıyorsa o köşe-nokta uygun çözümü, optimal çözümdür.



Eğer bu problemin amaç fonksiyonu

Max $z = 5x_1 + 8x_2$ ise

optimal çözümü $(x_1, x_2) = (3, 7)$ değerleri sağladığından, bu değerler de köşe-nokta uygun çözümlerinden birisidir.

f. Temel Çözüm

Cebirsel bir yöntem olan simpleks yöntemi ile doğrusal programlama problemleri çözülürken kısıtlayıcılara belirli değişkenler eklenir veya çıkarılır. Böylece doğrusal programlama problemi ekli bir biçime dönüşür. İşte ekli köşe-nokta çözümü temel çözümdür. Ayrıca temel uygun çözümde ekli köşe-nokta uygun çözümdür. Bu tanım simpleks yöntemi konusunda ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

g. Bozulan Çözüm

Cari temel çözümün bir veya birkaç temel değişkeninin değeri sıfırsa, bozulan çözüm vardır. Cari temeldeki değişkenlere temel değişkenler adı verilir. Geriye kalan değişkenler temel olmayan değişkenler olup onların çözüm değerleri sıfırdır.

Doğrusal programlama problemi çözülürken aşağıdaki çözüm türlerinden birisi ile de karşılaşılabilinir.

1. Uygun Çözüm Bulunmama: Karar değişkenlerin değerleri problemin tüm kısıtlayıcılarını doyurmaz ise bu çözüm uygun olmayan çözümdür. Böyle problemlere uygunsuz problem denir.

2. Tek Optimal Çözüm: Bu durumda, problem için en iyi olan sadece bir tek uygun çözüm vardır.

3. Seçenekli Optimal Çözümler: Bu durumda problemin birden fazla optimal çözümü vardır.

4. Sınırsız Çözüm: Maksimum veya minimumlu problemlerde, istenildiği kadar amaç fonksiyonunun değeri büyük veya küçük yapılabildiği uygun çözümdür. Böyle problemlere sınırsız çözümlü problem denir.

Doğrusal programlamanın en yaygın kullanıldığı alanlardan birisi, her türlü üretim işlevli şirketlerin en kârlı veya en düşük maliyetli üretim bileşimini belirlemede kullanılmaktadır. Şimdi buna ilişkin örnek problemlerin modelini kurmaya çalışalım.

Örnek:

Bir imalatçı “A” ve “B” ürünlerini üretmeyi planlamaktadır. Her iki ürün de iki ayrı süreçten, montaj ve boyamadan geçtikten sonra satışa hazır duruma gelmektedir. “A” ürününün her birimi montaj bölümünde 1, boyama bölümünde 2 saat kalmakta, “B” ürününün her birimi ise montajda 2, boyamada 1 saat kalmaktadır. Haftalık toplam çalışma kapasiteleri montaj bölümü için 50, boyama bölümü için 70 saattir.

Bunun dışında yalnızca "B" ürünü için özel bir katkı maddesine ihtiyaç duyulmakta olup, B'nin bir birim üretimi için bu maddeden 6 kg gerekmektedir. Ayrıca bu katkı maddesinden haftada ancak 180 kg tedarik etmek mümkün olmaktadır.

"A" ürününün bir biriminden 20 TL, "B" ürününün bir biriminden ise 30 TL kâr edilmektedir.

Toplam kârı maksimize edecek şekilde, her bir üründen haftada üretilmesi gereken miktarı belirleyecek Doğrusal Programlama modelini kurunuz.

Çözüm:

Modelin kurulmasına karar değişkenlerinin saptanması ile başlanır. Problemde sorulan sorunun cevabı, karar değişkenlerinin alacağı değerlerle bulunacaktır. Bu durumda karar değişkenleri "A" ve "B" ürünlerinden üretilecek miktarlar olacaktır.

"A" ürününden üretilecek miktar: X_1,

"B" ürününden üretilecek miktar: X_2 olsun.

Amaç fonksiyonu genellikle problemin parasal büyüklükleri ile ilgili maksimize veya minimize edilecek bir fonksiyondur. Örnekte, birim kârlılıkların verilmiş olması nedeni ile amaç fonksiyonu maksimize edilmesi gerekmektedir.

Amaç fonksiyonu:

Max. $Z = 20X_1 + 30X_2$

Amaç fonksiyonunu teknik sınırlamaların belirlenmesi takip eder. Örnekte, üretim miktarını sınırlayabilecek kısıtlı kaynakların sayısı üçtür. Bunlar, montaj bölümünün haftalık çalışma kapasitesi, boyama bölümünün haftalık çalışma kapasitesi ve kullanılabilecek katkı maddesinin miktarıdır.

Teknik Sınırlamalar:

I. $x_1 + 2\,x_2 \leq 50$ (Montaj bölümü)

II. $2\,x_1 + x_2 \leq 70$ (Boyama bölümü)

III. $6\,x_2 \leq 180$ (Malzeme)

Doğal Sınırlamalar: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Grafik Yöntemle Çözüm:

İki karar değişkeni içeren basit Doğrusal Programlama modellerine uygulanabilecek en pratik çözüm şekli grafik yöntemdir.

Örneğin, iki model ürünü olan bir işletmede her modelden üretilecek miktarları, kartezyen koordinat sisteminde düşey ve yatay eksenler üzerinde göstermek mümkündür.

Çözüm sürecinde ilk adım, "olabilir çözüm alanını" belirlemektir. Karar değişkenlerinin negatif bir değer almaları söz konusu olmadığı sürece alan, x ve y eksenlerinin sınırladığı pozitif bölgeye indirgenmiş olur. Bu bölge içindeki olabilir çözüm alanı, modeldeki teknik sınırlamalar yardımıyla belirlenir. Birinci dereceden her eşitlik bir doğruyu, her eşitsizlik ise bir alanı gösterir. Eşitsizlik söz konusu ise alanı sınırlayan doğrunun "olabilir çözüm alanı" tarafı oklarla belirtilir.

Sonuçta tüm teknik sınırlamaları sağlayan alan, "olabilir çözüm alanı" olarak bulunur ve bu alan üzerindeki her nokta, olabilir bir karar veya çözüme karşılık gelir.

Bundan sonraki aşama, olabilir çözümler içinden "en iyi" çözümü bulmaktır ve bu da amaç fonksiyonu yardımı ile belirlenir. "En iyi" olabilir çözüm, "olabilir çözüm alanının" köşe noktalarından biridir.

Dolayısıyla, her köşe noktasının koordinatları amaç fonksiyonuna yerleştirilerek aldıkları değerler karşılaştırabilir. Amaç fonksiyonunun maksimizasyon veya minimizasyon olmasına bağlı olarak değerlerin en büyüğünü veya en küçüğünü sağlayan köşe noktası problemin "en iyi" çözümüdür.

En iyi çözümü bulmanın daha kolay bir yolu da eğimi sabit olan amaç fonksiyonu doğrusunu "olabilir çözüm alanı" üzerinde kaydırmak suretiyle, amaç fonksiyonu kriteri maksimizasyon ise alanı yukarıda en son terk ettiği nokta, minimizasyon ise alanı aşağıda en son terk ettiği nokta en iyi çözüm noktası olarak bulunur.

Örnekteki problemi ele alarak grafik yöntem ile çözümünü bulalım.

A.F.: Max. $Z = 20X_1 + 30X$

T.S.: I. $X_1 + 2X_2 \leq 50$

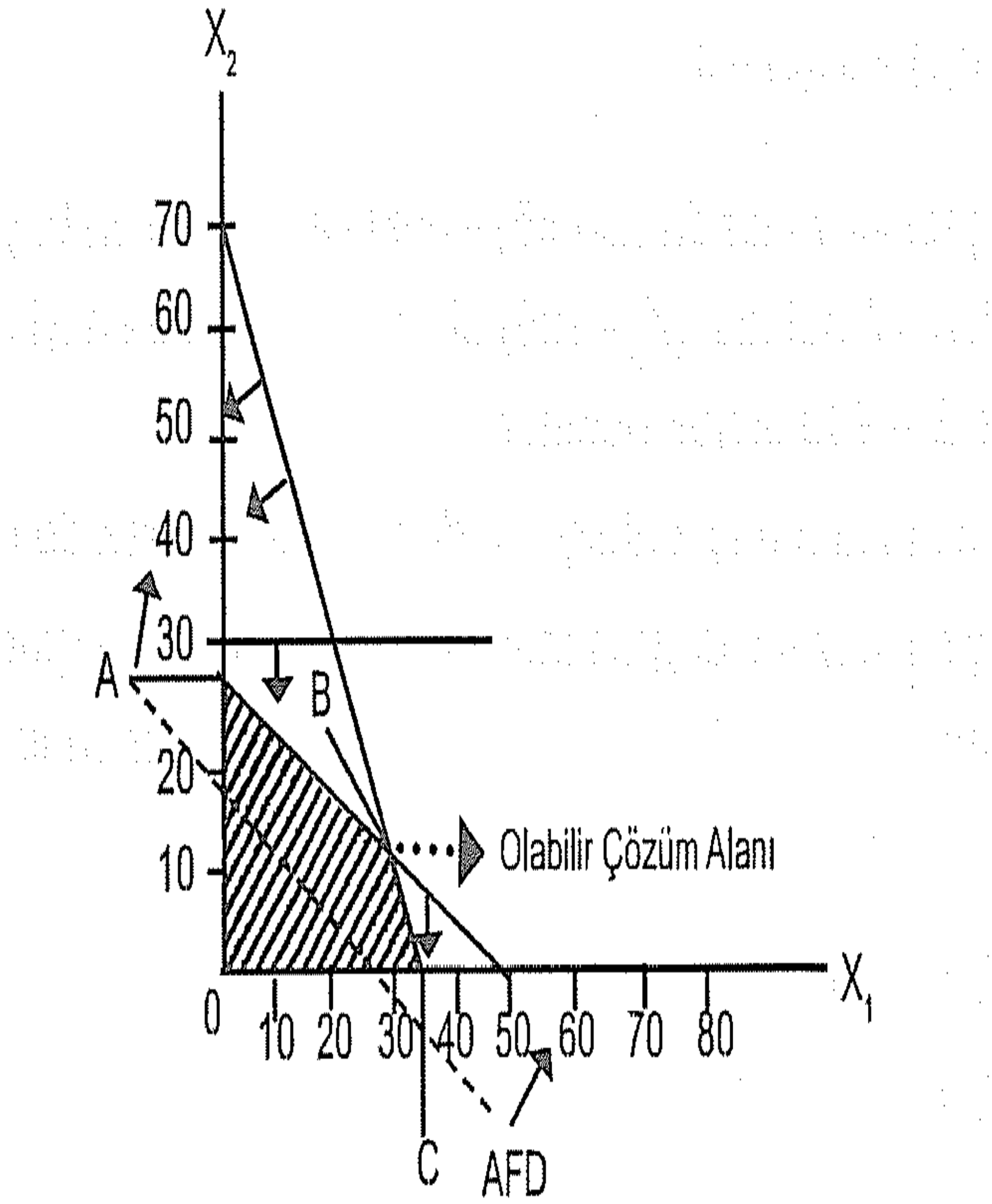
II. $2X_1 + X_2 \leq 70$

III. $6X_2 \leq 180$

D.S.: $X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$

Çözüm:

I. $X_1 + 2X_2 \leq 50$	$X_1 = 0,$	$X_2 = 50/2 = 25$
	$X_2 = 0,$	$X_1 = 50$
II. $2X_2 + X_2 \leq 70$	$X_1 = 0,$	$X_2 = 70$
	$X_2 = 0,$	$X_1 = 70/2 = 35$
III. $6X_2 \leq 180$		$X_2 = 180/6 = 30$



Olabilir çözüm alanı bulunduktan sonra köşe noktalarının koordinatları belirlenip amaç fonksiyonunda vereceği sonuçlar araştırılır.

A noktası: (0,25)

$$Z = 20(0) + 30(25) = 750$$

B Noktası:

$$
\begin{array}{r}
-2/ \quad X_1 + 2X_2 = 50 \\
2X_1 + X_2 = 70 \\
\hline
-2X_1 - 4X_2 = -100 \\
2X_1 + X_2 = 70 \\
\hline
-3X_2 = -30 \\
X_2 = 10 \; ; \quad X_1 = 30
\end{array}
$$

B noktası: (30, 10)

$$Z_B = 20(30) + 30(10) = 600 + 300 = 900$$

C noktası: (35, 0)

$$Z_C = 20(35) + 30(0) = 700$$

D noktası (0, 0)

$$Z_D = 20(0) + 30(0) = 0$$

Amaç fonksiyonunda tüm köşe noktaları içinde en büyük değeri sağlayan nokta "B" noktası (ZB= 900) olması nedeni ile en iyi çözüm; X,= 30, X2= 10 ve Z = 900 olarak bulunur.

Aynı sonuca amaç fonksiyonu doğrusunu çizerek de ulaşılabilir. Amaç fonksiyonu doğrusunun olabilir çözüm alanı içindeki konumunu görebilmek için amaç fonksiyonu herhangi bir değer verilerek çizilir. 20X1 + 30X2 = 600 X1 = 0, X2 = 20 X, = 0, X, = 30

Daha sonra, maksimizasyon problemi olması nedeni ile doğru yukarı doğru kaydırılır ve "olabilir çözüm alanını" en son B noktasında terk ettiği görülebilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde doğrusal programlama ile kaynak dağıtım kararlarının nasıl verilebileceğini inceledik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları aşağıdaki verilere göre cevaplayınız.

Maksimum Amaç Fonksiyonu: Z=20x_1+30x_2

Teknik Sınırlamalar: A) x_1+2x_2≤ 50, B) 2x_1+x_2≤ 70, C) 6x_2≤ 180

Doğal Sınırlamalar, x_1≥0 , x_2≥0

1) Verilere göre x_1'deki bir birim değişimin amaç fonksiyona etkisi kaçtır?

a) 6

b) 5

c) 30

d) 20

e) 7

2) Verilere göre x_2'deki bir birim değişimin amaç fonksiyona etkisi kaçtır?

a) 6

b) 5

c) 30

d) 20

e) 7

3) Verilere göre A teknik sınırlamasında, x_1'deki bir birim değişimi kaynak tüketimine etkisi kaçtır?

a) 6

b) 5

c) 30

d) 1

e) 7

4) Verilere göre A teknik sınırlamasında, x_2'deki bir birim değişimi kaynak tüketimine etkisi kaçtır?

a) 6

b) 5

c) 30

d) 2

e) 7

5) Verilere göre B teknik sınırlamasında, x_1'deki bir birim değişimi kaynak tüketimine etkisi kaçtır?

a) 6

b) 5

c) 3

d) 2

e) 7

6) Verilere göre B teknik sınırlamasında, x_2'deki bir birim değişimi kaynak tüketimine etkisi kaçtır?

a) 1

b) 5

c) 3

d) 2

e) 7

7) Verilere göre C teknik sınırlamasında, x_2'deki bir birim değişimi kaynak tüketimine etkisi kaçtır?

a) 6

b) 5

c) 30

d) 2

e) 7

8) Aşağıdakilerden hangisi x_1 ve x_2 için köşe çözümleri arasındadır?

a) (0,25)

b) (5, 15)

c) (0, 15)

d) (5, 0)

e) (0, 5)

9) Aşağıdakilerden hangisi x_1 ve x_2 için en iyi köşe çözümdür?

a) (0,25)

b) (5, 15)

c) (0, 15)

d) (5, 0)

e) (30, 10)

10) En iyi köşe çözüm durumun amaç fonksiyonu kaç değerini alır?

a) 900

b) 800

c) 700

d) 500

e) 1000

Cevaplar

1)d, 2)c, 3)d, 4)d, 5)d, 6)a, 7)a, 8)a, 9)e, 10)a

9. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE KARAR VERME II

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Bir işletme, kaç tane işçi çalıştıracağına nasıl karar verir?

2. Bir işletme siparişleri teslim ederken elindeki araçları nasıl kullanır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Doğrusal Programlama İle Karar Verme II	Doğrusal programlama ile karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Simpleks Yöntem
- Doğrusal Programlama

9. Doğrusal Programlama İle Karar Verme II

Simpleks Yöntem

Doğrusal programlama problemlerini çözmede yaygınca kullanılan simpleks yöntemi, ilk kez 1947 yılında G. B. Dantzig tarafından kullanılmıştır. Daha sonra Chames, Cooper ve diğerleri ekonomik ve endüstriyel analizler için uygulamalı öncü çalışmalar yapmışlardır. Grafik yöntemi en fazla üç değişkenli problemlerin çözümünde elverişlidir. Uygulamada ise problemin değişkenleri çok daha fazla ve dolayısı ile gerçek doğrusal programlama problemlerinin çözümü ise simpleks yöntemi ile sağlanır. Yöntem cebirsel tekrarlama (iterasyon) işlemine dayanır. Yöntemde önce başlangıç simpleks tablosu düzenlenir sonra tekrarlayıcı işlemler ile belirli bir hesap yöntemi içinde gelişen çözümlere doğru ilerleyerek optimal çözüme ulaşıncaya kadar işlemler sürdürülür. Gelişen çözüm tablolarında amaç fonksiyonunun ve karar değişkenlerinin değişen değerleri gözlenebilir. Simpleks yönteminin hedefi eldeki kaynakların en kârlı şekilde nasıl kullanılması gerektiğini belirlemektir. Bu yöntem, küçük boyutlu problemlere uygulanmasının yanında, günümüz bilgisayarlarıyla muazzam boyutlu (devasa) problemlerin çözümünde de etkin olduğu görülmektedir. Simpleks yöntemin cebirsel işlemlerine başlamadan önce, geometrik bakış açısından onun temelini oluşturmaya çalışalım. İfade edildiği gibi simpleks yöntemi, cebirsel bir işlemdir. Fakat onun temelinde yatan kavramlar ise geometriktir. Geometrik kavramların anlaşılması, simpleks yöntemin nasıl işlediği ve neyin onu etkili kıldığı yönünde, güçlü sezgisel bir duygu sağlar.

Grafik çözüm yönteminden hatırlanacağı gibi optimal çözüm noktası, her zaman uygun çözüm alanının bir köşe noktası ya da uç noktası ile ilişkiliydi. Simpleks yöntem esas olarak işte bu temel fikre dayanmaktadır. Bir başka deyişle simpleks yöntem, matematiksel bir yöntem olmasına rağmen dayandığı temel fikir geometriktir. Bu nedenle simpleks yöntem grafik yöntem ile birlikte incelenecektir.

Örnek-1: Bir imalatçı “A” ve “B” ürünlerini üretmeyi planlamaktadır. Her iki ürün de iki ayrı süreçten, montaj ve boyamadan geçtikten sonra satışa hazır duruma gelmektedir. “A” ürününün her birimi montaj bölümünde 1, boyama bölümünde 2 saat kalmakta, “B” ürününün her birimi ise montajda 2, boyamada 1 saat kalmaktadır. Haftalık toplam çalışma kapasiteleri montaj bölümü için 50, boyama bölümü için 70 saattir.

Bunun dışında yalnızca “B” ürünü için özel bir katkı maddesine ihtiyaç duyulmakta olup, B'nin bir birim üretimi için bu maddeden 6 kg gerekmektedir. Ayrıca bu katkı maddesinden haftada ancak 180 kg tedarik etmek mümkün olmaktadır.

“A” ürününün bir biriminden 20 TL, “B” ürününün bir biriminden ise 30 TL kâr edilmektedir.

Toplam kârı maksimize edecek şekilde, her bir üründen haftada üretilmesi gereken miktarı belirleyecek Doğrusal Programlama modelini kurunuz.

Çözüm: Modelin kurulmasına karar değişkenlerinin saptanması ile başlanır. Problemde sorulan sorunun cevabı, karar değişkenlerinin alacağı değerlerle bulunacaktır. Bu durumda karar değişkenleri “A” ve “B” ürünlerinden üretilecek miktarlar olacaktır.

“A” ürününden üretilecek miktar: X,

“B” ürününden üretilecek miktar: X_2 olsun.

Amaç fonksiyonu genellikle problemin parasal büyüklükleri ile ilgili maksimize veya minimize edilecek bir fonksiyondur. Örnekte, birim kârlılıkların verilmiş olması nedeni ile amaç fonksiyonu maksimize edilmesi gerekmektedir.

Amaç fonksiyonu:

Max. Z = 20X,+ $30X_2$

Amaç fonksiyonunu teknik sınırlamaların belirlenmesi takip eder. Örnekte, üretim miktarını sınırlayabilecek kısıtlı kaynakların sayısı üçtür. Bunlar, montaj bölümünün haftalık çalışma kapasitesi, boyama bölümünün haftalık çalışma kapasitesi ve kullanılabilecek katkı maddesinin miktarıdır.

Problemi aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

AF.: Amaç Fonksiyonu; T.S.: Teknik sınırlamalar, D.S.: Doğal sınırlamalar

A.F.: Max. $Z = 20X_1 + 30X$

T.S.:

I. $X_1 + 2X_2 \leq 50$

II. $2X_1 + X_2 \leq 70$

III. $6X_2 \leq 180$

D.S.: $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

Simpleks Yönteme göre modeli aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$Z - 20\,X_1 - 30_2\,X + 0\,S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3 = 0$$
$$X_1 + 2\,X_2 + S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3 = 50$$
$$2\,X_1 + X_2 + 0\,S_1 + S_2 + 0\,S_3 = 70$$
$$0\,X_1 + 6\,X_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + S_3 = 180$$

Matematiksel formülasyonun tam olabilmesi için her denklemde bütün değişkenler yer almaktadır. Simpleks algoritması, amaç fonksiyonunun değerini, sistematik bir şekilde her adımda daha iyileştirerek en iyi çözüme ulaşan bir yöntemdir. Algoritmanın başlangıç tablosu tüm değişkenlerin katsayılarının yer aldığı bir matris şeklindedir.

Tablo 1: Simpleks Algoritmasının Başlangıç Tablosu

Temel Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b	
S_1	1	2	1	0	0	50	50/2 = 25 ←
S_2	2	1	0	1	0	70	70/1 = 70
S_3	0	6	0	0	1	180	180/6 = 30
Z	-20	-30	0	0	0	0	

Matristeki eşitliklerin sağ tarafının ifade edildiği (b) sütunu hariç her sütun, bir değişkenin katsayılarından oluşan bir vektörü, satırlar ise teknik sınırlamaları göstermektedir. En alt satır ise amaç fonksiyonun ifade edildiği satırdır.

Başlangıç tablosu, X_1=0 ve X_2 =0 olduğu orijini başlangıç noktası alır.

Bir temel çözüm, "olabilir çözümler alanının" bir köşe noktasına karşılık gelir. En iyi çözüm de amaç fonksiyonunun değerini optimize eden bir "temel çözüm" noktasıdır.

Temelde bulunan değişkenler çözümde bulunan değişkenlerdir ve bunların aldıkları değerler (b) sütununda görülmektedir. Tablonun sağ alt köşesindeki rakam, amaç fonksiyonunun o aşamada almış olduğu değeri göstermektedir.

Başlangıç tablosuna bakıldığında, örneğin birinci sütundaki değerler incelenirse, X_1'den bir birim arttırmak birinci kaynaktan 1 birim, ikinci kaynaktan ise 2 birim kullanılmasına yol açacaktır. Bunun karşılığında 20 TL kâra katkısı olacaktır.

Başlangıç tablosu olabilir çözüm alanının bir köşesini temsil ediyordu. Bir sonraki tabloda, amaç fonksiyonunun daha iyi bir değer alacağı bir başka köşeye geçilecek şekilde matriste dönüşüm sağlanır. Bunun için de temeldeki değişkenlerden biri sıfır yapılarak, onun yerine bir başka değişken temel alınır. Bu aynı zamanda tablodaki tüm katsayıların değiştirilmesini gerektirir.

İşleme öncelikle hangi değişkenin temel çözüme gireceğinin bulunması ile başlanır. Bunun için en alt satırdaki amaç fonksiyonunun katsayılarına bakılır ve amaç fonksiyonuna en büyük katkıyı getirecek en büyük negatif değere sahip olan değişken temel çözüme girecek değişken olarak belirlenir. Bu değişken sütununa "pivot sütun" adı verilir. Örnekte, temel çözüme girecek değişken (-30) katsayısına sahip X değişkenidir.

İterasyona Z satırında (-) değer kalmayıncaya kadar devam edilir ve Z satırında negatif bir sayı olmadığında en iyi sonuca ulaşılmış olur.

Temelden çıkacak değişken ise kullanılabilecek kaynak miktarının sınırı ile belirlenir ve tablonun sağ tarafından bulunan "b" sütunundaki değerlerin tek tek, temel çözüme girecek olan değişkenin katsayılarına bölünmesi ile belirlenir. Bölme sonucu elde edilen en küçük pozitif değere sahip olan satırın değişkeni temel çözümden çıkar. Bunun nedeni, kullanılan her "X2", 50'lik kaynaktan 2 birim tüketmekte ve sonuçta 25 birim (50/2 = 25) sonra kaynak bitmektedir.

Temel çözümden çıkan değişkenin satırına "pivot satır" denir ve pivot sütun ile kesiştiği sayı da "pivot" adını alır.

Pivotun belirlenmesinden sonra tablonun yeniden düzenlenmesine geçilir. Yeni tablo oluşturulurken pivotun (1), pivot sütunundaki diğer sayıların (0)'a eşitlenmesi hedeflenir. Pivotun (1) olabilmesi için pivotun bulunduğu satırdaki tüm sayılar pivota bölünür.

Pivot sütunundaki diğer sayıların (0)'a eşitlenmesi için her satır sıra ile ele alınır. Yeni pivot satırın elemanları tek tek, ele alınan satırın pivot sütunundaki sayı ile çarpılır ve bulunan sonuçlar dönüştürülmek istenen satırın elemanlarından çıkartılarak yeni satır oluşturulur.

Temel çözümdeki değişkenler, çıkan ve onun yerine gelen değişken dışında aynı kalırlar. Aynı işlemler "Z" satırı için de yapılır ve yeni tablo tamamlanır.

Tablo 2: Simpleks Çözümünün İkinci İterasyonu

Temel Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b	
S_1	1/2	1	1/2	0	0	25	$25 : \frac{1}{2} = 50$
S_2	3/2	0	-1/2	1	0	45	$45 : \frac{3}{2} = 30 \leftarrow$
S_3	-3	0	-3	0	1	30	—
Z	-5 ↑	0	15	0	0	750	

Birinci iterasyonun sonunda Tablo 8'den görüleceği gibi başlangıç tablosunda (0) olan amaç fonksiyonunun değeri 750'ye yükselmiştir.

Yeni tablonun Z satırına bakıldığında hâlâ (-) değerli (-5) sayı bulunduğu görülür. Bu da amaç fonksiyonu değerinin daha da iyileştirilebileceği anlamına gelmektedir, bu nedenle daha önce başlangıç tablosuna yapılan işlemler aynı şekilde tekrarlanarak yeni bir tablo elde edilir Bkz. Tablo 3.

Tablo 3: Simpleks Çözümünün Son Tablosu

Temel Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	10
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	30
S_3	0	0	-4	2	1	120
Z	0	0	40/3	10/3	0	900

Elde edilen yeni tablonun Z satırında negatif sayı bulunmadığından en iyi sonuca ulaşılmıştır.

Bu durumda X_1= 30, X_2= 10 olarak bulunmuş ve amaç fonksiyonu da Z = 900 değerini almıştır.

Yapay değişkenlerden S_1 ve S_2'nin temel çözümde olmaması (0)'a eşit olduklarını ve bu da birinci ve ikinci kaynağın tamamının kullanıldığını gösterir. S_3'ün 120'ye eşit olması için üçüncü kaynaktaki atıl kapasiteyi göstermektedir.

Yapay değişkenlerin Z satırındaki değerleri gölge fiyat olarak adlandırılmakta ve ait olduğu kaynağın bir birim arttırılması durumunda amaç fonksiyonunda ortaya çıkacak iyileşme miktarını belirtmektedir.

$$\left(S_1 \text{ inin } \frac{40}{3}, S_2 \text{ inin } \frac{10}{3}, S_3 \text{ inin } 0 \right)$$

Buraya kadar incelenen, kaynakların sınırlı olması nedeniyle faaliyetlerin kısıtlandığı durumlardı. Başka bir deyişle teknik sınırlamalardaki eşitsizlikler, küçük eşit (≤) şeklinde olmaktaydı. Bunun aksi olarak, faaliyetlerin ulaşılması gereken asgari düzeylerinin verildiği durumlarda eşitsizliklerin işareti büyük eşit (≥) şeklinde olmaktadır.

Böyle durumlarda yapılacak işlem, büyük eşit işaretini küçük eşite çevirmek, bunun için de eşitsizliğin iki tarafını (-) ile çarpmak gerekmektedir.

Simpleks algoritması için hazırlanacak başlangıç tablosu, daha önceki örnekte yapıldığı şekilde hazırlanır. Buradaki farklılık, önceki örnekte başlangıç tablosu olabilir bir çözüm iken bu durumda olabilir çözüm alanının dışında bir noktayı ifade etmektedir. Onun için de çözümü, öncelikle olabilir çözüm alanının içine getirmek gerekmektedir. Bu amaçla başlangıç tablosunun (b) sütununda (-) değere sahip olan temeldeki değişkenlerin temelden çıkarılması sağlanır. Dolayısıyla negatif (b) değerine sahip olan satır pivot satır olarak belirlenir, birden fazla (-) değerin olması durumunda seçim keyfi yapılır.

Pivot satırın seçiminden sonra, pivot sütununun seçimi için pivot satırdaki (-) değere sahip sayılar (Z) satırında karşılık gelen değerlere bölünürler. En büyük orana sahip olan sütun pivot sütun olarak belirlenir.

Bundan sonra, yapılacak tablo düzenlemeleri daha önceki örnekte yapılanların aynısıdır.

Teknik sınırlamanın eşitsizlik yerine eşitlik olduğu durumlarda da öncelikle o kısıtın ele alınabilmesi için eşitliğin iki tarafının da (-) ile çarpılarak pivot satır olarak seçilmesi sağlanır. Eşitlikte de eşitsizlikte olduğu gibi bir yapay değişken vardır. Ancak, bu değişkenin sıfıra eşit çıkabilmesi için, Z satırındaki değeri (-) dahi olsa temel çözüme alınmaz.

Şimdiye kadar amaç fonksiyonunun maksimize edildiği durumlar incelenmiştir. Amacın minimizasyon olduğu durumlarda ise, amaç fonksiyonu (-) ile çarpılarak bir maksimizasyon fonksiyonuna dönüştürülür ve problem daha önce görüldüğü şekilde bir maksimizasyon problemi olarak çözülebilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, doğrusal programlama problemlerini çözmede yaygınca kullanılan simpleks yönteminin rolü ve önemini görmüş olduk.

Bölüm Soruları

Bütün soruları Tablo-1'deki verilere göre cevaplayınız.

Tablo-1 Bir Maksimizasyon İçin Simpleks Yöntemi Başlangıç Çözüm Tablosu

Kâr Katsayısı	C_j / *Temel Değişken Vektörü*	45	55	0	0	*Çözüm Vektörü*
		X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_3	6	4	1	0	120
0	X_4	3	10	0	1	180
Z_j		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		45	55	0	0	0

1) Verilere göre x_1'deki bir birim değişimin amaç fonksiyona etkisi kaçtır?

a) 6

b) 55

c) 30

d) 45

e) 0

2) Verilere göre x_2'deki bir birim değişimin amaç fonksiyona etkisi kaçtır?

a) 6

b) 45

c) 55

d) 20

e) 07

3) Verilere göre x_3'deki bir birim değişimin amaç fonksiyona etkisi kaçtır?

a) 6

b) 55

c) 30

d) 0

e) 10

4) Verilere göre x_4'deki bir birim değişimin amaç fonksiyona etkisi kaçtır?

a) 6

b) 45

c) 0

d) 20

e) 10

5) Çözüm vektöründe 120 neyi gösterir?

a) Maksimum Kârı

b) Minimum Kârı

c) Satış Düzeyini

d) Kısır Düzeyini

e) Maliyet Düzeyini

6) Çözüm vektöründe 180 neyi gösterir?

a) Maksimum Kârı

b) Minimum Kârı

c) Satış Düzeyini

d) Kısıt Düzeyini

e) Maliyet Düzeyini

7) Tabloda çözüm için pivot satır hangisidir?

a) x_3'ün olduğu satır

b) x_4'ün olduğu satır

c) x_1'in olduğu sütun

d) x_2'nin olduğu sütun

e) x_4'ün olduğu sütun

8) Tabloda çözüm için pivot sütun hangisidir?

a) x_3'ün olduğu satır

b) x_4'ün olduğu satır

c) x_1'in olduğu sütun

d) x_2'nin olduğu sütun

e) x_4'ün olduğu sütun

9) Tabloda 6 sayısı neyi göstermektedir?

a) Maksimum Kârı

b) Minimum Kârı

c) x_2'nin kaynak tüketim düzeyini

d) x_1'in kaynak tüketim düzeyini

e) Maliyet Düzeyini

10) Tabloda 10 sayısı neyi göstermektedir?

a) Maksimum Kârı

b) Minimum Kârı

c) x_2'nin kaynak tüketim düzeyini

d) x_1'in kaynak tüketim düzeyini

e) Maliyet Düzeyini

Cevaplar

1)d, 2)c, 3)d, 4)c, 5)d, 6)d, 7)b, 8)d, 9)d, 10)c

10. TAŞIMA VE ATAMA PROBLEMLERİ VE KARAR VERME I

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Bir fırın siparişlerini yetiştirirken elindeki araçları nasıl kullanır?

2. Arabalı vapurlarda araçlar vapur içinde nasıl parkettirilir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Taşıma Ve Atama Problemleri Ve Karar Verme I	Taşıma ve atama problemleri ve karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Kaynak dağıtım sorunu
- Kaynak dağıtım yaklaşımları

10.Taşıma ve Atama Problemleri ve Karar Verme I

Atama problemlerinde, toplam maliyeti minimize veya toplam getiriyi maksimize edecek şekilde kaynakların işlere dağıtılması hedeflenir. Uygulanması daha basit olması nedeni ile çözümün tam sayılı olması istenen durumlarda Doğrusal Programlama yerine atama modelleri tercih edilir.

Toplam kullanılabilir kaynakların, ihtiyaç olan toplam kaynağa eşit olması durumunda bir "Dengeli Atama" problemi, eldeki kaynakların ihtiyaç duyulan kaynak miktarına eşit olmaması durumunda ise bir "Dengesiz Atama" problemi söz konusudur.

Atama problemleri, "basit atama" ve "transportasyon yöntemi" olmak üzere iki gruba ayrılırlar.

Basit atama problemlerinde kaynaklar ve işler arasında bire bir atama vardır. Diğer bir deyişle işler veya kaynaklar parçalanamaz durumdadır. Transportasyon problemlerinde ise kaynaklar işlere bölünebilir ve bazı işler bazı kaynakların birleşmesi ile yapılabilir.

Bir basit atama problemi, insanların işlere, kamyonların hatlara, sürücülerin kamyonlara veya projelerin araştırma ekiplerine atanmaları gibi sorunlara cevap arar.

Bir transportasyon problemi ise fabrikalardan depolara veya satış noktalarına yapılacak dağıtıma veya bir üretim planlama problemine çözüm getirir.

1. Basit Atama Problemi

Bir "basit arama" problemini örnek yardımı ile çözmeye çalışalım.

Dört ayrı makinede de işlenebilecek dört iş parçası vardır. İş parçalarının her bir makinedeki işlem maliyetleri aşağıdaki matriste görülmektedir (Bkz. Tablo-1).

Tablo-1: Basit atama başlangıç tablosu

		Makineler			
		M_A	M_B	M_C	M_D
İş parçaları	I_1	5	7	9	6
	I_2	8	6	9	2
	I_3	3	4	5	6
	I_4	9	7	8	1

Minimum toplam maliyet ile iş parçalarının makinelere atanma planını, "Hungarian metodu" ile bulalım.

Çözümde birinci adım, fırsat kaybı maliyetlerini türetmektir. Bu amaçla her sütundaki en düşük maliyet belirlenerek, bu değer sütundaki diğer elemanlardan çıkartılarak yeni sütun oluşturulur. Aynı işlem bütün sütunlar için yapılarak her sütunda en az bir (0) değeri bulunmuş olur (Bkz. Tablo-2).

Tablo 2: İşlerin makinelere göre fırsat kayıpları tablosu

	M_A	M_B	M_C	M_D
I_1	2	3	4	5
I_2	5	2	4	1
I_3	0	0	0	5
I_4	6	3	3	0

Tablo-2'de incelendiğinde M_A'nın en düşük maliyetle atanacağı işin I_3 olduğu görülür. M_B 'nin ise atanacağı en düşük maliyetli işin de l3 olduğu ve bu atamanın MA ile çeliştiği görülür. Bu nedenle bir çözüme ulaşılamamıştır.

İkinci adımda, sütunlar için yapılan işlem satırlar için uygulanır. Sütun satır sırası değiştirilerek önce satır sonra sütun çıkartması yapmak da mümkündür. Her satırdaki en ufak sayı, satırdaki diğer bütün sayılardan çıkartılarak yeni satırlar oluşturulur. Bu işlem 3 ve 4. satırlarda hâlihazırda (0) bulunduğu için, 1 ve 2. satırlara uygulanır ve Tablo-3 elde edilir.

Tablo-3: İşlerin makinelere ve makinelerin işlere göre hesaplanan fırsat kayıpları

	M_A	M_B	M_C	M_D
I_1	0	1	2	3
I_2	4	1	3	0
I_3	0	0	0	5
I_4	6	3	3	0

$I_1 \rightarrow M_A$

$I_2 \rightarrow M_D$

$I_3 \rightarrow M_B$ veya M_C olabildiği halde I_4'ün atanabileceği tek makine olan M_D'nin I_2 ile dolu olması nedeni ile her işin bir makineye atanması gerçekleşemez.

Bundan sonra yapılacak işlemleri aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

1. Tabloda bulunan tüm sıfırların üstlerinden mümkün olan en az sayıda çizgi ile geçilir (Bkz. Tablo-4).

Tablo 4: Sıfırların üzerlerinden çizgi geçilmesi aşaması

	M_A	M_B	M_C	M_D
I_1	0	1	2	3
I_2	4	1	3	0
I_3	0	0	0	5
I_4	6	3	3	0

2. Üzerinden çizgi geçmeyen sayılar içinden en küçüğü seçilir (1 sayısı).

3. Bu sayı, üzerinden çizgi geçmeyen tüm sayılardan çıkartılır, çizgilerin kesişme noktasında bulunan sayılara eklenir. Üzerinden tek çizgi geçen sayılar ise aynı kalır (Bkz. Tablo-5.).

Tablo 5: Sonuç tablosu

	M_A	M_B	M_C	M_D
I_1	0	0	1	3
I_2	4	0	2	0
I_3	1	0	0	6
I_4	6	2	2	0

Sonuçta elde edilen tablo incelenir ve çözüm elde edilmemiş ise aynı işlemler birinci adımdan itibaren tekrarlanır.

Tablo-5: incelendiğinde;

$I_1 \rightarrow M_A$

$I_4 \rightarrow M_D$ (Atamalar öncelikle tek sıfır olan satır veya sütunlar dikkate alınarak gerçekleştirilir).

$I_2 \rightarrow M_B$ (M_D makinesi dolu olduğu için tek seçenek)

$I_3 \rightarrow M_C$ şeklinde bir atama planı ile tüm işler makinelere atanmış olur. Bu çözüm başka seçeneği olmayan en düşük maliyetli tek çözümdür. Bu çözüm ile toplam maliyet:

$I_1 \rightarrow M_A : 5$

$I_2 \rightarrow M_B : 6$

$I_3 \rightarrow M_C : 5$

$I_4 \rightarrow M_D : 1$

17 olarak bulunur.

İş sayısının kaynak sayısından fazla veya kaynak sayısının iş sayısından fazla olması durumunda "Dengesiz Atama" problemi söz konusudur. Bu tür problemlerde satır ve sütun sayısını eşitlemek amacıyla matrise, eksik olan iş ise yapay iş, kaynak ise yapay kaynak eksik olan sayı kadar ilave edilir (Bkz. Tablo-6.).

Tablo 6: Yapay iş ilave edilmiş başlangıç tablosu

	M_A	M_B	M_C	M_D	M_E
I_1	5	7	9	6	3
I_2	8	6	9	2	8
I_3	3	4	5	6	4
I_4	9	7	8	1	2
I_y	0	0	0	0	0

İlave edilen yapay iş veya kaynak gerçekte var olmadığı için tüm maliyetler sıfıra eşittir. Bundan sonra çözüm için yapılacak işlemler, dengeli atama problemlerindeki sürecin aynısıdır. Sonuçta eğer yapay bir değişken ilave edildiyse, çözümde yapay değişken ile eşleşen makine kullanılmayacak makine, eğer yapay bir makine söz konusu ise yapay makine ile eşleşen iş yapılmayacak iş olacaktır.

Dengesiz atama problemlerinde atama sorununun yanında yatırım kararlarına da cevap bulunur. Eğer, örnekteki 5 makineden dördü alınmak isteniyorsa, tercih edilmeyecek olan makine, sonuçta yapay iş ile eşleşen makine olacaktır.

Bir basit atama problemi, örnekteki gibi maliyetlerin minimizasyonu yerine kârın maksimizasyonu şeklinde de olabilir. Bu durumda matris içindeki en büyük sayı saptanır ve tüm diğer sayılar bu sayıdan çıkartılmak yoluyla, kâr matrisi maliyet matrisine dönüştürülmüş olur.

Bundan sonra, maliyet matrisi durumundaki işlemler aynen tekrarlanır.

Son olarak, birtakım teknolojik veya başka sebeplerle bazı işlerin bazı makinelere atanmaları istenmiyor olabilir. Bu durumdaki bir maliyet matrisinde atama yapılması istenmiyor olabilir. Bu durumdaki bir maliyet matrisinde atama yapılması istenmeyen hücreye çok büyük bir sayı verilerek, o seçeneğin çözüme girmesi engellenir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, basit atama problemlerinin nasıl kullanılacağını, kaynaklar ve işler arasında eşleştirmenin nasıl sağlanacağını inceledik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları Tablo-1'deki verilere göre cevaplayınız.

Tablo-1: Makineler ve İş Parçaları İçin Maliyetleri Gösteren Basit Atama Başlangıç Tablosu

		Makineler			
		M_A	M_B	M_C	M_D
İş parçaları	I_1	5	7	9	6
	I_2	8	6	9	2
	I_3	3	4	5	6
	I_4	9	7	8	1

1) Verilere göre I_1'den M_A'ya atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 5

e) 4

2) Verilere göre I_2'den M_A'ya atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 8

e) 5

3) Verilere göre I_4'den M_D'ye atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 1

e) 5

4) Verilere göre I_2'den M_B'ye atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 6

e) 5

5) Verilere göre I_3'den M_D'ya atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 5

e) 6

6) Verilere göre I_3'den M_A'ya atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 3

e) 4

7) Verilere göre I_4'den M_C'ye atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 8

e) 5

8) Verilere göre I_2'den M_C'ye atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 2

e) 5

9) Verilere göre I_3'den M_C'ye atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 6

e) 5

10) Verilere göre I_1'den M_C'ya atama maliyeti nedir?

a) 6

b) 7

c) 9

d) 3

e) 6

Cevaplar

1)d, 2)d, 3)d, 4)d, 5)e, 6)d, 7)d, 8)c, 9)e, 10)c

11.TAŞIMA VE ATAMA PROBLEMLERİ VE KARAR VERME II

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Aylık gelirinizi ihtiyaçlarınıza göre dağıtırken nasıl karar veriyorsunuz?

2. Günlük zamanınızı farklı işler arasında nasıl dağıtıyorsunuz?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Taşıma Ve Atama Problemleri Ve Karar Verme II	Taşıma ve atama problemleri ve karar verme	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Kaynak dağılımı
- Kısıt altında optimizasyon

11.Taşıma ve Atama Problemleri ve Karar Verme II

Transportasyon Yöntemi

Transportasyon problemleri genellikle, mal veya servislerin, kaynaklardan birtakım hedeflere en az taşıma maliyeti ile dağıtımı konusu ile ilgilidir. Bunun yanında işlerin makinelere atanmaları veya bir orta dönemli planlama probleminde talebi karşılayacak şekilde üretimin aylara/haftalara göre planlanması problemlerine de çözüm getirir. Doğrusal Programlama Modeli yardımı ile de çözülebilecek olan bu tür problemlere transportasyon yöntemi, daha etkin bir algoritma ve sonuçların tam sayı elde edilmesi imkânı sağlar.

Transportasyon algoritması ile çözüm yöntemini, bir fiziksel dağıtım problemini ele alarak inceleyelim.

İstanbul, Ankara ve İzmir'deki 3 fabrikadan, Bursa, Adana ve Samsun'daki ana depolara mal gönderilmek istenmektedir. Fabrikaların kapasiteleri, depoların ihtiyaçları ve şehirler arası birim taşıma maliyetleri Tablo-1'de görülmektedir.

Tablo 1: Transportasyon problemi örneğine ilişkin veriler

DEPOLAR

Fabrikalar	Bursa	Adana	Samsun	Kapasiteler
İstanbul	20	90	60	140
Ankara	40	50	30	120
İzmir	60	70	80	50
İhtiyaçlar	60	150	100	310

En az toplam taşıma maliyeti hangi fabrikadan hangi şehirdeki depolara, ne miktarda mal gönderilmesi gerektiği transportasyon algoritması ile bulunmaya çalışılacaktır.

Tablodan görülebileceği gibi fabrikaların kapasitelerinin toplamı, depoların ihtiyaçlarının toplamına (310) eşittir. Bu durumda "dengeli" bir atama problemi söz konusudur.

Çözüm sürecinin ilk aşaması, probleme olabilir bir çözüm teşkil edecek bir başlangıç tablosu hazırlamaktır. Bu başlangıç çözümünün bulunabilmesi için "kuzey-batı köşesi", "En az maliyete öncelik" ve "VAM" (Vogel'sApproximation Method) gibi yöntemler vardır.

"Kuzey batı köşesi" yönteminde tablonun en üst sol köşesindeki gözden başlanarak ihtiyaç veya kapasite limitlerinin elverdiği kadar miktarın tamamı bu göze atanır, ihtiyaç veya kapasite miktarlarından ataması tamamlanmamış olanın eksik kalan kısmı en yakınındaki göze atanır (yan veya alt göz). Bu şekilde ihtiyaçlar ve kapasitelerin tek tek atamaları gerçekleştirilerek merdiven şeklinde en alt göze kadar inilir. Bu yöntemle başlangıç tablosu, maliyetler dikkate alınarak hazırlanmadığı için, başlangıç tablosundan en iyi çözüme ulaşıncaya kadar geçen iterasyon sayısı fazla olur.

“En az maliyete öncelik” yönteminde ise tablonun tümü içindeki en düşük maliyetli göze ihtiyaç ve kapasite karşılaştırması yapılarak mümkün olan en yüksek atama yapılır. Daha sonra ikinci en düşük maliyetli göze yapılabilecek en yüksek atama yapılır ve bu şekilde devam edilerek tablo tamamlanır.

Üç yöntem içinde, başlangıç tablosundan sonra en iyi çözüme en az iterasyonla ulaşılabilen yöntem “VAM” yöntemi olması nedeni ile örnek problemin başlangıç tablosu, bu yöntemden yararlanılarak bulunacaktır. Aşağıda “VAM” yönteminin uygulama aşamaları verilmektedir:

- Her satırdaki en küçük iki birim maliyet (kâr matrisi ise en büyük iki kâr) arasındaki fark belirlenir.

- Aynı işlemler sütunlar için yapılır.

- En büyük farka sahip satır veya sütun seçilerek, buradaki en küçük birim maliyetli göze (kâr ise en büyük kârlı göze) mümkün olan en büyük atama yapılır.

- Kapasitesi dolan satır veya ihtiyacı karşılanan sütun bundan sonraki aşamalarda göz önüne alınmaz.

- İndirgenen tablo ile tekrar birinci basamağa dönülerek aynı işlemler bütün atamalar tamamlanıncaya kadar devam eder.

Örnek problemin “VAM” ile başlangıç tablosu bulunma aşamaları aşağıdaki tablolarda verilmektedir.

Tablo 2: “VAM” birinci tablo

DEPOLAR

Fabrikalar	Bursa	Adana	Samsun	Kapasiteler	Satır Farkı
İstanbul	60 20	90	60	140	40 ←
Ankara	40	50	30	120	10
İzmir	60	70	80	50	10
İhtiyaçlar	60	150	100	310	
Sütun Farkı	20	20	30		

Tablo 3: “VAM” ikinci tablo

Fabrikalar	Adana	Samsun	Kapasiteler	Satır Farkı
İstanbul	90	60	80	30
Ankara	50	100 30	120	20
İzmir	70	80	50	10
İhtiyaçlar	150	100		
Sütun Farkı	20	30		

Tablo 4: “VAM” üçüncü tablo

Fabrikalar	Adana	Kapasiteler
İstanbul	80 90	80
Ankara	20 50	120
İzmir	50 70	50
İhtiyaçlar	150	

Tablo 5: “VAM”a göre “bulunan başlangıç tablosu”

Fabrikalar	D1 Bursa	D2 Adana	D3 Samsun	Kapasiteler
F1 İstanbul	60 20	80 90	60	140
F2 Ankara	40	20 50	100 30	120
F3 İzmir	60	50 70	80	50
İhtiyaçlar	60	150	100	

Bulunan başlangıç tablosu, problem için olabilir bir çözümü vermektedir. Bundan sonra, bu çözümün iyileştirilerek en iyi çözümün bulunması amaçlanacaktır.

En iyi çözüme ulaşmak için atılacak ilk adım, atama yapılmamış olan boş gözleri tek tek ele alarak, bir birim atama yapıldığı takdirde toplam maliyetin nasıl etkileneceğini ölçmektir. Boş göze yapılan bu bir birim atamada satır ve sütun dengesinin korunmasına dikkat edilmelidir.

Boş gözlerin tümü değerlendirildikten sonra, toplam maliyette (kâr) en fazla iyileşmeyi sağlayan göze, mümkün olan en büyük atama gerçekleştirilir. Bu işlemler, maliyette iyileşme sağlayan hiçbir boş göz kalmayıncaya kadar devam eder.

İşleme tablo-20'deki F1—D3 gözü ile başlayalım. Bu göze bir birim atamak, F1-D2 gözünü bir azaltmayı, F2-D2 gözünü bir arttırmayı ve F2-D3 gözünü bir azaltmayı gerektirmektedir.

F1-D3: 60-90+ 50-30 = -10

Böylece F1-D3 gözüne bir birim atamakla toplam maliyette 10 birimlik bir azalma olacağı anlaşılmıştır.

Benzer şekilde diğer boş gözler incelenir:

F2-D1: 40-50+ 90-20 = 60

F3-D1: 60-70+ 90-20 = 60

F3-D3: 80-30 + 50-70 = 30

Bu durumda, toplam maliyette iyileştirme sağlayacak tek gözün F1-D3 gözü olduğu belirlenmiştir (tek negatif değer).

Bu göze yapılabilecek azami miktar, dengeyi bozmamak için eksiltme yapılacak gözlerden en küçük atama miktarına sahip olan gözün değeri olacaktır. F1-D3 gözüne atama yapılırken eksiltme yapılacak olan gözler F1-D2 ve F2-D3'tür.

Bu iki gözden F1-D2'nin miktarı (80) daha küçük olduğu için, bu miktar F1-D3'e atanacak miktar olarak belirlenecektir. Yeni durum tablo-6 'da görülmektedir.

Tablo 6: İyileştirilmiş Tablo

Fabrikalar	D1	D2	D3	Kapasiteler
F1	60 [20]	[90]	80 [60]	140
F2	[40]	100 [50]	20 [30]	120
F3	[60]	50 [70]	[80]	50
İhtiyaçlar	60	150	100	

Boş gözler tekrar değerlendirilirse;

F1-D2: 90-50 + 30-60 = 10

F2-D1: 40-30 + 60-20 = 50

F3-D1: 60-70 + 50-30 + 60-20 = 50

F3-D3: 80-30 + 50-70 = 30

Hiçbir boş gözün toplam maliyette bir iyileştirme sağlamayacağı görülmüştür.

Böylece tablo-6'de görülen atama planı en iyi atama planıdır ve bu plana göre toplam maliyet:

TM = 60x20 + 80x 0 + 100x50 + 20x30 + 50x70 = 15100 olacaktır.

Ele alınan örnekte bir “dengeli transportasyon” problemi incelenmiş olmakla birlikte gerçek hayatta çoğunlukla, talebin kaynaklardan veya kaynakların talepten fazla olduğu “dengesiz transportasyon” problemleri vardır.

Dengesiz bir transportasyon problemi ile karşılaşıldığında yapılması gereken işlem modeli dengeli duruma dönüşmektir.

Toplam kaynak miktarının toplam ihtiyaçtan fazla olması durumunda, yapay bir ihtiyaç, toplam ihtiyacın toplam kaynaktan fazla olması durumunda ise yapay bir kaynak eklenmek suretiyle kaynak ve ihtiyaç toplamları eşitlenmiş olur. İlave edilen yapay kaynak veya ihtiyacın birim maliyetleri (0) olarak alınır.

Sonuçta bulunan çözümde, yapay kaynağa atanmış bulunan ihtiyaçlar yerine getirilmeyecek, yapay ihtiyaca atanan kaynaklar ise kullanılmayacak anlamına gelmektedir.

Bir transportasyon modelinin çözümünde, (n) satır sayısı, (m) sütun sayısı olma durumunda tabloda en az (n+m-1) sayıda atama olması istenir. Bu sayıdan az atamaya sahip çözümlerde “dejenerasyon” söz konusu olur. Böyle durumlarda boş gözlerin maliyete katkıları hesaplanırken, kapalı bir çevrim oluşturulamadığı için boş gözün değeri bulunamaz. Bu engeli ortadan kaldırmak ve çevrimi tamamlamak için daha önce bir atamaya sahip olup daha sonra değeri (0)'a düşen göze çok küçük bir değere sahip e değerinde bir atama yapılarak çevrim tamamlanır ve hesaplamak mümkün hâle getirilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, transportasyon problemleri genellikle, mal veya servislerin, kaynaklardan birtakım hedeflere en az taşıma maliyeti ile dağıtımı konusu ile ilgili olduğunu öğrendik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları Tablo-1'deki verilere göre cevaplayınız.

Tablo-1: Fabrikalar ve Depolar İçin Maliyetleri, Kapasiteleri ve İhtiyaçları Gösteren "VAM" Birinci Tablosu (Küçük sayılar maliyetleri göstermektedir)

	DEPOLAR			
Fabrikalar	Bursa	Adana	Samsun	Kapasiteler
İstanbul	20	90	60	140
Ankara	40	50	30	120
İzmir	60	70	80	50
İhtiyaçlar	60	150	100	310

1) Verilere göre İstanbul'dan Bursa'ya taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 20

e) 50

2) Verilere göre İstanbul'dan Adana'ya taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 20

e) 50

3) Verilere göre İstanbul'dan Samsun'a taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 60

e) 50

4) Verilere göre Ankara'dan Bursa'ya taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 40

e) 50

5) Verilere göre Ankara'dan Adana'ya taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 20

e) 50

6) Verilere göre Ankara'dan Samsun'a taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 30

e) 50

7) Verilere göre İzmir'den Bursa'ya taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 60

e) 50

8) Verilere göre İzmir'den Adana'ya taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 20

e) 50

9) Verilere göre İzmir'den Samsun'a taşıma maliyeti nedir?

a) 40

b) 70

c) 90

d) 80

e) 50

10) Verilere göre fabrikaların toplama kapasitesi nedir?

a) 140

b) 170

c) 190

d) 310

e) 150

Cevaplar

1)d, 2)c, 3)d, 4)d, 5)e, 6)d, 7)d, 8)b, 9)d, 10)d

12. TAHMİN YÖNTEMLERİ I

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Kışın yeterince yağmur yağmaz ise yazın susuzluk olma ihtimalı nedir?

2. Eğitim düzeyiniz arttıkça aylık geliriniz de artıyor mu?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Tahmin Yöntemleri I	Tahmin yöntemleri	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Regresyon Analizi
- Tahmin

12. Tahmin Yöntemleri I

1.Temel Kavramlar ve Ekonometrik Modelleme Süreci

Ekonometri: İktisadi modellerin geçerliliğini matematiksel ve istatiksel tekniklerle inceleyen bilim dalı.

İktisadi Model: İktisadi değişkenler arasındaki temel ilişkileri ortaya koyan mantıksal yapılardır.

Örneğin Keynezyen tüketim fonksiyonu: Tüketim = F (Gelir), C=F(Y)

Bağımlı Değişken (Açıklanan Değişken) : Alacağı değerler başka değişkenlere bağlı olan değişken.

Tüketim fonksiyonunda, Tüketim bağımlı değişkendir. Alacağı değerler gelire bağlıdır.

Bağımsız Değişken (Açıklayıcı Değişken) : Bağımlı değişkenin alacağı değerleri, etkileyen (açıklayan) değişken.

Tüketim fonksiyonunda, Gelir bağımsız değişkendir. Tüketimin alacağı değerler Gelirden etkilenir.

Matematiksel Model: İktisadi modellerin matematiksel yapılara dönüştürülmüş şekli.

Doğrusal Tüketim fonksiyonu: $C = Co+cY$

Ekonometrik Model: İktisadi matematiksel modelleri belirli bir hata payı ile açıklayan modellerdir. $C = Co+cY+u$; *u: hata terimi*

Gerçek yaşamda belirsizlik sözkonusudur.

Bu sebeple, değişkenler arasındaki ilişkiler belirli be olasılıkla (hata payı ile) öngörülür.

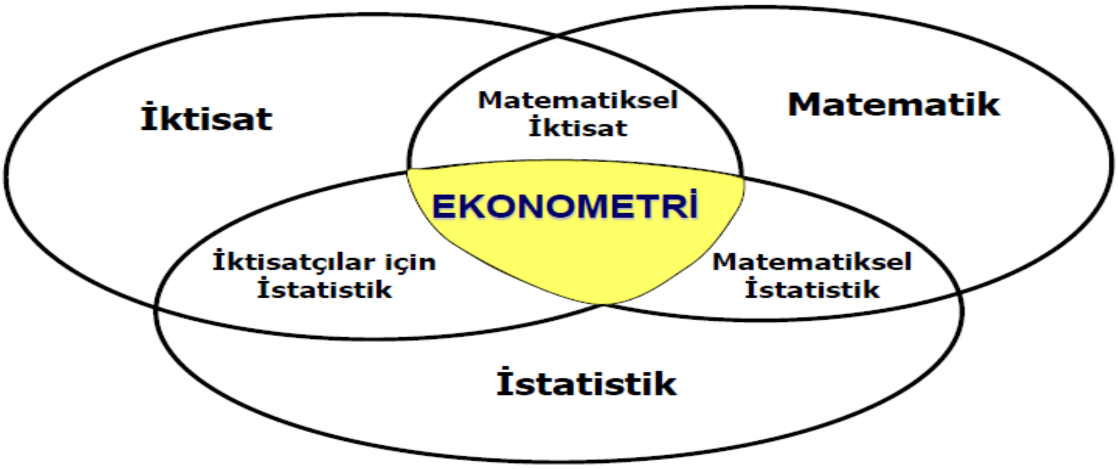
Ekonometrik modeller bu hata payı çerçevesinde değişkenler arasındaki ilişkileri açıklayan modellerdir.

Ekonometrik model türleri: İktisadi değişkenler arasındaki ilişkilerin farklı modellerle açıklanması, ekonometrik modellerin de farklı türlerini ortaya çıkarmıştır. Başlıca ekonometrik modeller:

EKONOMETRİ NEDİR?

- Ekonometri:
  - -Ekonomi
  - -Matematik
  - -İstatistik
- Bilimlerinin ara kesitidir.
  - Yani, İktisat teorisinin, matematik ve istatistik yöntemlerle *kanıtlanması* çabalarıdır.

EKONOMETRİ NEDİR?



Regresyon Modelleri: İktisadi bir veya daha fazla bağımlı değişkenin alacağı değerleri, iktisat teorisine uygun bir veya daha fazla açıklayıcı değişkenler kullanarak açıklayan ekonometrik modeldir.

Zaman Serisi modelleri: İktisadi değişkenler arasındaki ilişkileri açıklamaktan ziyade değişkenlerin gelecekteki değerleri için doğru tahminler yapmak için geliştirilen modellerdir. AR (otoregresif), MA (hareketli ortalama), ARMA, ARIMA, vb. modeller bu gruba girer.
Çok denklemli zaman seriler içinse VAR (vektör otoregresif), VARMA modelleri sayılabilir.

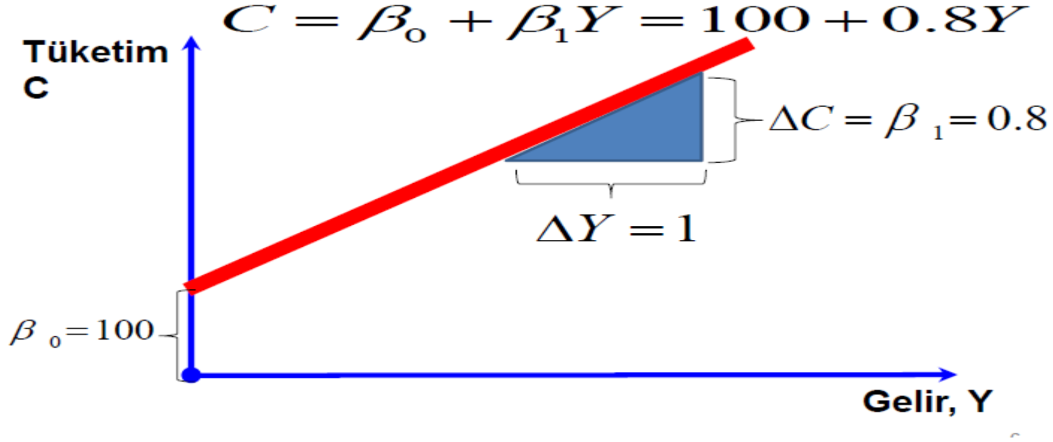
Eşanlı Denklem Sistemleri: Çok denklemli karşılıklı bağımlılık içeren değişkenlerden oluşan modellerdir.

Panel Veri Modelleri: Zaman ve birim (yatay kesit) boyutu birlikte dikkate alınan değişkenlerden oluşan modellerdir.

İktisat ve Matematik
(Deterministik İlişki)

Keynesyen tüketim fonksiyonu

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y = 100 + 0.8Y$$



İktisat ve Ekonometri
(Stokastik İlişki)

REGRESYON DENKLEMİ
Keynesyen tüketim fonksiyonu

$$C_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 Y_i}_{\text{Kesin İlişki}} + \underbrace{u_i}_{\text{Hata terimi}}$$

Veri bir Y karşısında C'nin Beklenen Değeri :

$$\boxed{E(C_i / Y_i) = \beta_0 + \beta_1 Y_i}$$

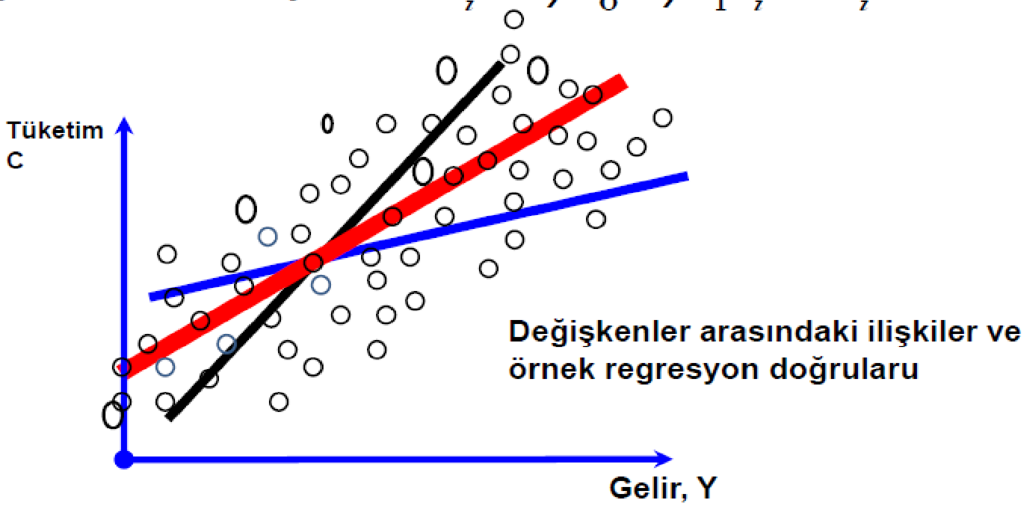
Değişkenler Arasındaki Gerçek İlişki Ve En İyi Tahmin Edilen İlişki

Parametreler

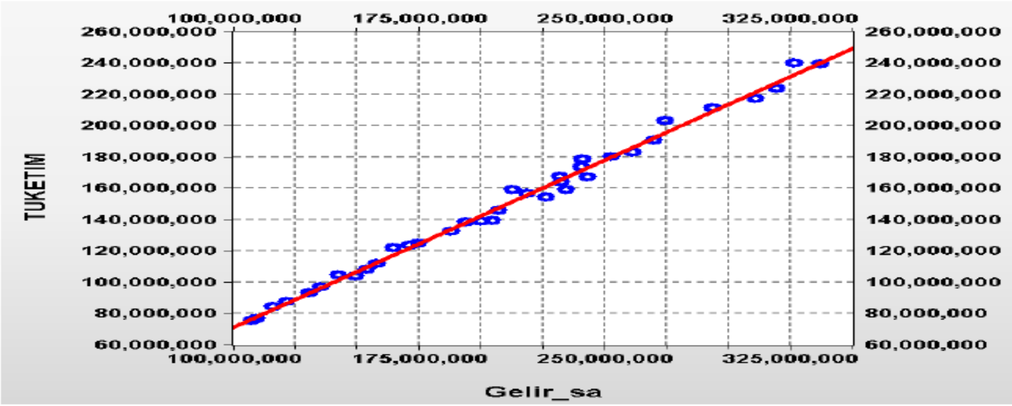
Gerçek İlişki: $C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + u_i$

Tahminler

En İyi Tahmin Edilen İlişki $C_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Y_i + \hat{u}_i$



Tüketim/Gelir ilişkisi $\boxed{E(C_i / Y_i) = \beta_0 + \beta_1 Y_i}$



TUKETIM = - 80118.0 + 0.71*GELIR_SA

EKONOMETRİK MODELLEME SÜRECİNDE TEMEL AŞAMALAR

•**Araştırma konusunun tespit edilmesi:** Açıklanmak istenen iktisadi olayın (bağımlı değişkenin) saptanması

•**Ön inceleme ve çıkarsama:** Bu değişkeni etkileyen faktörlerin (bağımsız değişkenler) gözlemlenmesi, açıklanması

•**Mantıksal Modelleme ve Hipotez Geliştirme:** Değişkenler/faktörler arası iktisadi ilişkinin mantıksal açıklamalarının yapılması ve hipotez (önsav) geliştirme.

•**Matematiksel Modelleme:** Belli hipotezler altında değişkenler arasındaki ilişkilerin matematiksel/formel bir biçimde ifade edilmesi,

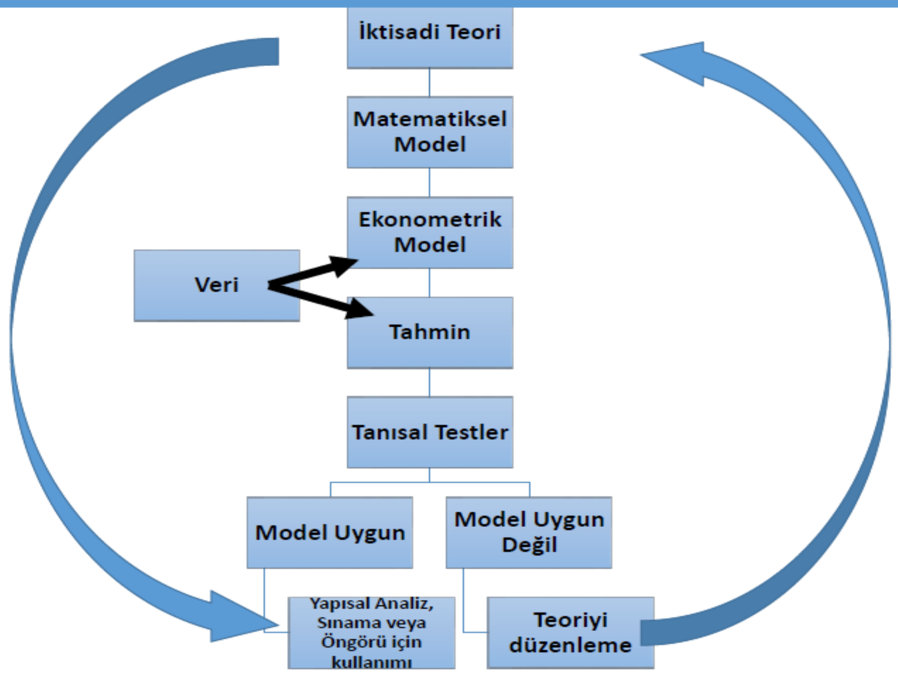
•**Ekonometrik Modeli kurmak**

•**Modelin Uygunluğunu test etmek,**

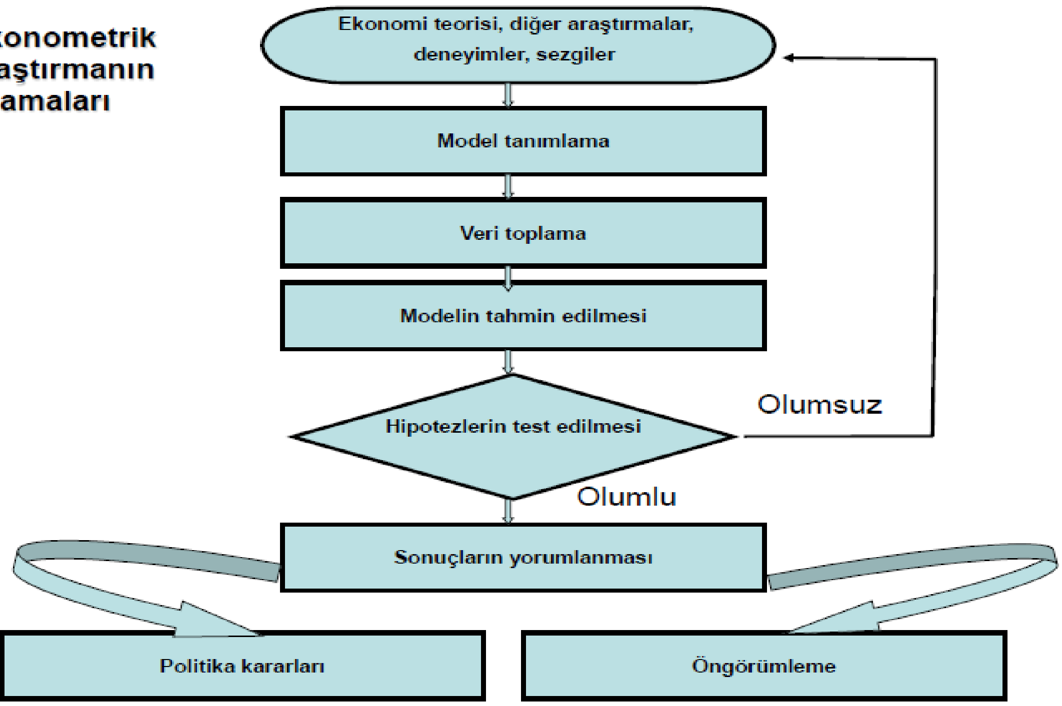
Uygunsa, Politika için kullanmak

Uygun değilse, Modeli gözden geçirmek

EKONOMETRİK ARAŞTIRMANIN AŞAMALARI



Ekonometrik araştırmanın aşamaları



3.DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ

3.1. DOĞRUSAL REGRESYON MODELİ

Bir bağımlı değişkenin (Y), bağımsız değişkenlerce (X) doğrusal fonksiyonel yapıda açıklandığı model tipidir. Değişken ve parametreler doğrusaldır.

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e_t$$

3.2. TEMEL VARSAYIMLAR

Regresyon modelinin sağlıklı tahmin sonuçları verebilmesi için bazı temel varsayımları sağlaması gerekir.

1-Normallik (Normality)

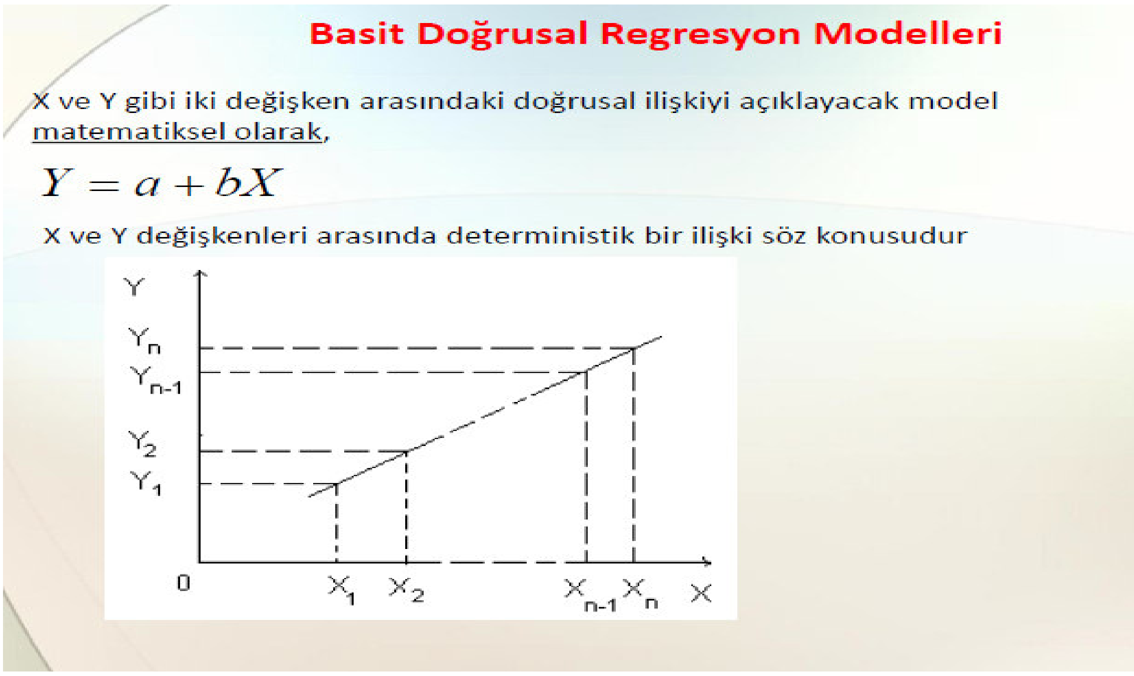
2-Eşit Varyanslılık (Homoscedasticity)

3-Hataların bağımsız olması (Otokorelasyon-Autocorrelation olmaması)

4-Çoklu Doğrusal Bağlantı (Multicollinearity) olmaması

5-Doğrusallık (Linearity)

Bunlara ilave olarak modelin matematiksel kalıbını doğru tespit edilmesi ve modelde yapısal kırılma olmaması gerekir.

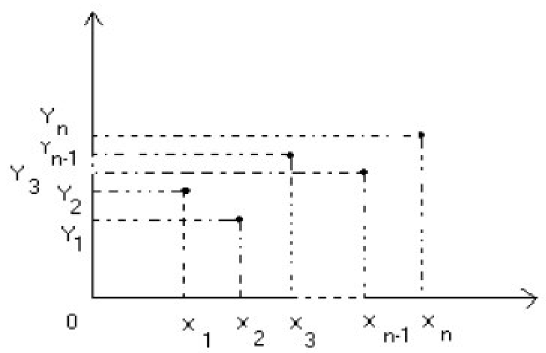


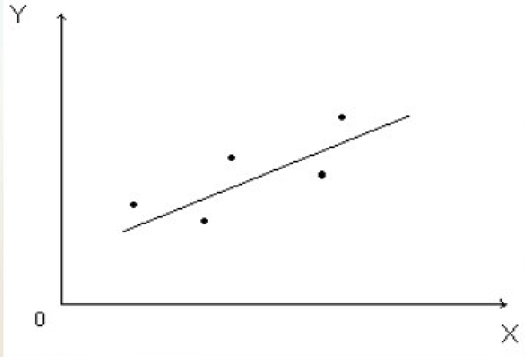
Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Basit doğrusal regresyon modeli

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Bu model anakütle regresyon modelidir





Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Anakütle regresyon modeli

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Örnek regresyon modeli

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i$$

$$\boxed{Y_i = \hat{Y}_i + e_i}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

Farkların kareleri toplamının minimizasyonu ile tahminciler elde ediliyordu. Regresyon modelleri için bu fark Y_i ile $E(Y_i)$ arasındaki fark olacaktır

$$S = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[Y_i - E(Y_i)\right]}_{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}^2$$

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-1)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(-X_i)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

NORMAL DENKLEMLER

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\dfrac{\sum X_i Y_i}{n} - n\dfrac{\bar{Y}\sum X_i}{n}}{n\dfrac{\sum X_i^2}{n} - n\dfrac{\bar{X}\sum X_i}{n}}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

	Gelir(X)	Ulaşım Har.(Y)	XY	X^2	$(X-\bar{X})$	$(Y-\bar{Y})$	xy	$(X-\bar{X})^2$
1992	5.2	0.7	3.64	27.04	-27.3	-2.3	62.79	745.29
1993	8.5	0.9	7.65	72.25	-24	-2.1	50.4	576
1994	13.4	1.5	20.1	179.56	-19.1	-1.5	28.65	364.81
1995	20.2	2.3	46.46	408.04	-12.3	-0.7	8.61	151.29
1996	30.5	3.4	103.7	930.25	-2	0.4	-0.8	4
1997	42	4.1	172.2	1764	9.5	1.1	10.45	90.25
1998	59.3	5.2	308.36	3516.49	26.8	2.2	58.96	718.24
1999	80.9	5.9	477.31	6544.81	48.4	2.9	140.36	2342.56
	260	24	1139.42	13442.44	0	0	359.42	4992.44
ort	32.5	3						

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

$$24 = 8\beta_0 + 260\beta_1 \qquad \beta_1 = 0.071993$$

$$1139.42 = 260\beta_0 + 13442.44\beta_1 \qquad \beta_0 = 0.660228$$

$$\beta_1 = \frac{1139.42 - 8(32.5)(3)}{13442.44 - 8(32.5)^2} = 0.071993$$

$$\beta_0 = 3 - 0.071993(32.5) = 0.660228$$

$$\beta_1 = \frac{359.42}{4992.44} = 0.071993$$

$$\beta_0 = 3 - 0.071993(32.5) = 0.660228$$

$$\hat{Y} = 0.660228 + 0.071993\,X$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

ÖRNEK: 12 ailenin aylık gelirleri ile gıda harcamaları arasındaki ilişki incelenmek istenmektedir. Bu doğrultuda aşağıdaki ara sonuçları kullanarak regresyon modeli parametrelerini tahmin ediniz?

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1282.04 \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 639.04 \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i = 108 \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 60$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) \qquad \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{108}{12} = 9 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{60}{12} = 5$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{639.04 - 12(5)(9)}{1284.04 - 12(9)^2} = \frac{99.04}{310.04} = 0.3194$$

$$\hat{\beta}_0 = 5 - 0.3194(9) = 2.1254$$

$$\hat{Y}_i = 2.1254 + 0.3194 X_i$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Örnek: Regresyon modeli $\hat{Y} = 0.660228 + 0.071993\, X$ olarak belirlenmişti. Teorik değerleri hesaplayalım.

$$\hat{Y}_1 = 0.660228 + 0.071993(5.2) = 1.03459$$
$$\hat{Y}_2 = 0.660228 + 0.071993(8.5) = 1.272167$$
$$\hat{Y}_3 = 0.660228 + 0.071993(13.4) = 1.624932$$
$$\hat{Y}_4 = 0.660228 + 0.071993(20.2) = 2.114483$$
$$\hat{Y}_5 = 0.660228 + 0.071993(30.5) = 2.85601$$
$$\hat{Y}_6 = 0.660228 + 0.071993(42) = 3.683927$$
$$\hat{Y}_7 = 0.660228 + 0.071993(59.3) = 4.929404$$
$$\hat{Y}_8 = 0.660228 + 0.071993(80.9) = 6.484449$$

	$\hat{Y}_i$	$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$
1992	1.03459	-0.33459
1993	1.272167	-0.37217
1994	1.624932	-0.12493
1995	2.114483	0.185517
1996	2.85601	0.54399
1997	3.683927	0.416073
1998	4.929404	0.270596
1999	6.484449	-0.58445
	23.99996	3.82E-05

$$\sum Y_i = \sum \hat{Y}_i$$

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$$

Parametre Tahmincilerinin Varyansları

Model parametrelerinin varyansını hesaplayabilmek için anakütle hata terimlerinin varyansının hesaplanması gereklidir.

$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}{N} \qquad \bar{e} = 0$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i)^2}{N}$$

Anakütle hata terimleri bilinmeyeceğinden, hata terimlerinin varyansının örnekten tahmin edilmesi gerekecektir.

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i)^2}{n-2} \qquad \sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum x_i y_i$$

$$\sum e_i^2 = \sum Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i Y_i$$

$$S^2_{\hat{\beta}_0} = S_e^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right] \qquad S^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{S_e^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Örnek: Regresyon modeli $\hat{Y} = 0.660228 + 0.071993\,X$ olarak belirlenmişti.

	$\hat{Y}_i$	e	e^2
1992	1.03459	-0.33459	0.111951
1993	1.272167	-0.37217	0.138508
1994	1.624932	-0.12493	0.015608
1995	2.114483	0.185517	0.034417
1996	2.85601	0.54399	0.295926
1997	3.683927	0.416073	0.173116
1998	4.929404	0.270596	0.073222
1999	6.484449	-0.58445	0.341581
	23.99996	3.82E-05	1.184329

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{1.184379}{8-2} = 0.197388 \qquad \bar{X} = 32.5 \qquad \sum (X_i - \bar{X})^2 = 4992.44$$

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{1.184379}{8-2} = 0.197388 \qquad \bar{X} = 32.5 \quad \sum (X_i - \bar{X})^2 = 4992.44$$

$$S_{\hat{\beta}_0}^2 = S_e^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right]$$

$$= 0.197388 \left[\frac{1}{8} + \frac{(32.5)^2}{4992.44} \right]$$

$$= 0.066435$$

$$S_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{0.066435} = 0.25775$$

$$S_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{S_e^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{0{,}197388}{4992.44}$$

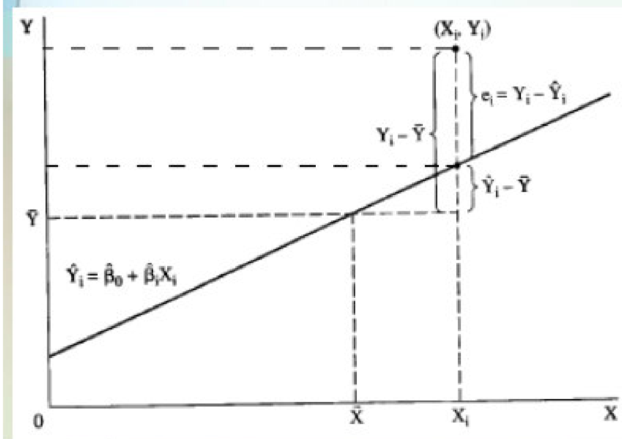
$$= 0.0000395374$$

$$S_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{0.0000395374} = 0.006288$$

BELİRLİLİK KATSAYISI (R^2)

Bağımlı değişkendeki değişmelerin bağımsız değişken veya bağımsız değişkenler tarafından açıklanma oranını gösteren katsayıya belirlilik katsayısı denir.

$$\text{Toplam Değişme} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$



$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + e_i$$

BELİRLİLİK KATSAYISI

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + e_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \text{Toplam Değişmeyi}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \text{Açıklanan Değişmeyi}$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \text{Açıklanmayan Değişmeyi}$$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} \qquad R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$0 \le R^2 \le 1$$

1'e yaklaşması bağımlı değişkendeki değişmelerin bağımsız değişken tarafından iyi açıklandığını ortaya koyacaktır.

Örnek: Regresyon modeli $\hat{Y} = 0.660228 + 0.071993\,X$ olarak belirlenmişti.

$(Y-\bar{Y})$	$(Y-\bar{Y})^2$
-2.3	5.29
-2.1	4.41
-1.5	2.25
-0.7	0.49
0.4	0.16
1.1	1.21
2.2	4.84
2.9	8.41
0	27.06

Ulaşım Harcamaları

Gelir

$$\sum e_i^2 = 1.184379 \qquad \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 27.06$$

Toplam değişme : $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 27.06$

Açıklanmayan değişme : $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum e_i^2 = 1.184379$

Açıklanan değişme : $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ = 27.06- 1,184379 = 25.87567

Ulaşım Harcamalarındaki değişimin %95'i gelir ile açıklanabilmektedir.

$$R^2 = \frac{25.87567}{27.06} = 0.95623 \qquad R^2 = 1 - \frac{1.184379}{27.06} = 0,95623$$

35

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, basit regresyon yönteminin karar verme süreçlerindeki rolünü öğrendik.

Bölüm Soruları

Bütün soruları aşağıda verilen basit regresyon sonuçlarına göre cevaplayınız.

Y =	**10**	**+4x**	**+u**
Standart Hata	(2.0)	(1.0)	
t-istatistik	[5.0]	[4.0]	
Prob.	0.0	0.0	

Belirlilik katsayısı $\mathbf{R^2=0.95}$; Korelasyon katsayısı $\mathbf{r_{y,x}=0.97}$

1) Verilere göre modelin sabitin değeri kaçtır?

a) 10

b) 5

c) 4

d) 2

e) 20

2) Verilere göre modelde bağımsız değişkenin katsayısının değeri kaçtır?

a) 2

b) 5

c) 10

d) 4

e) 20

3) Verilere göre modelde, sabitin standart hata değeri kaçtır?

a) 12

b) 5

c) 4

d) 2

e) 20

4) Verilere göre modelde, bağımsız değişkenin standart hata değeri kaçtır?

a) 12

b) 5

c) 14

d) 1

e) 20

5) Verilere göre modelin sabitin t-istatistik değeri kaçtır?

a) 2

b) 5

c) 4

d) 5

e) 20

6) Verilere göre modelde bağımsız değişkenin t-istatistik değeri kaçtır?

a) 2

b) 5

c) 10

d) 4

e) 20

7) Verilere göre modelde, sabitin Prob. değeri kaçtır?

a) 12

b) 5

c) 4

d) 0

e) 20

8) Verilere göre modelde, bağımsız değişkenin Prob. değeri kaçtır?

a) 12

b) 5

c) 14

d) 0

e) 20

9) Verilere göre modelde, bağımlı değişkendeki değişimlerin ne kadarı bağımsız değişkence açıklanmaktadır?

a) %92

b) %85

c) %94

d) %95

e) %90

10) Verilere göre modelde, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişki düzeyi nedir?

a) %97

b) %85

c) %94

d) %97

e) %90

Cevaplar

1)a, 2)d, 3)d, 4)d, 5)d, 6)d, 7)d, 8)d, 9)d, 10)a

13. TAHMİN YÖNTEMLERİ II

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Geliriniz arttıkça harcamalarınız da artıyor mu?

2. Enflasyon arttıkça satın alma gücünüz azalıyor mu?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Tahmin Yöntemleri II	Tahmin yöntemleri	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Regresyon analizinde varsayımlar
- t ve F Testleri

13. Tahmin Yöntemleri II

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların İstatistiksel Anlamlılığını Testi

t -testi

2 amaçla kullanılır.

A)Katsayıların Anlamlılığının Testi

Katsayıların **ayrı ayrı** istatistiksel anlamlılığı t testi ile incelenir.

1- Hipotezler oluşturulur

Temel hipotez $H_0 : \beta_0 = 0$

Karşıt hipotez test çift taraflı $H_1 : \beta_0 \neq 0$

test tek taraflı $H_1 : \beta_0 > 0$ veya $H_1 : \beta_0 < 0$

2- Tablo değeri hesaplanır

Örnek birim sayısı 30'dan büyük ise örnekleme dağılımının normal dağılım olduğu kabul edilir ve çift taraflı test için $Z_{\alpha/2}$ tek taraflı test için Z_α değeri normal dağılım tablosundan belirlenen α hata payı ile bulunur

Örnek birim sayısı 30'dan küçük ise örnekleme dağılımı t dağılımıdır. Basit regresyonda t dağılımının serbestlik derecesi (n-2)'dir. Belirlenen α hata payı ile t dağılımı tablosundan çift taraflı test için $t_{\alpha/2}$ tek taraflı test için t_α değeri bulunacaktır

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların Testi

t Testi

2- Tablo değeri hesaplanır

sd	1T	0.4	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
	2T	0.8	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1		0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.320	318.310	636.620
2		0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.598
3		0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4		0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5		0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6		0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri
Katsayıların Testi

t Testi

1- Hipotezler oluşturulur

2- Tablo değeri hesaplanır

3- Test istatistiğinin hesaplanması

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S_{\hat{\beta}_0}} \qquad \beta_0 = 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_0}{S_{\hat{\beta}_0}}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri
Katsayıların Testi

t Testi

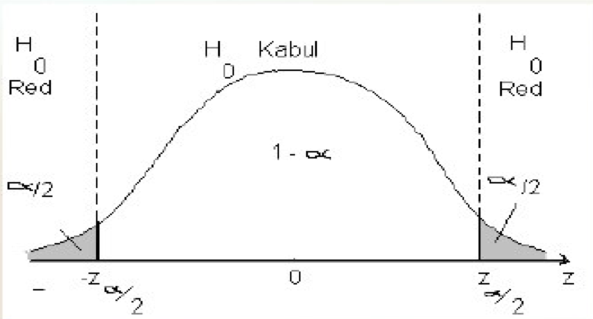
1- Hipotezler oluşturulur

2- Tablo değeri hesaplanır

3- Test istatistiğinin hesaplanması

4- Karar

Çift taraflı test için test istatistiği $\mp Z_{\alpha/2}$ veya $\mp t_{\alpha/2,n-2}$ H_0 hipotezi kabul, H_1 hipotezi reddedilir



Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların Testi

ÖRNEK:

$$\hat{Y} = 0.660228 + 0.071993\,X$$
$$(0.25775) \quad (0.006288)$$

$H_0 : \beta_0 = 0$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$H_1 : \beta_0 \neq 0$ $\quad$ SD= n-2=8-2=6

$$t_{\alpha/2,n-2} = t_{0,025,6} = 2.447$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_0}{S_{\hat{\beta}_0}} = \frac{0.660228}{0,25775} = 2.561525$$

$$t > t_{0,025,6}$$

H_0 hipotezi red

$H_0 : \beta_1 = 0$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ $\quad$ SD= n-2=8-2=6

$$t_{\alpha/2,n-2} = t_{0,025,6} = 2.447$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0,071993}{0,006288} = 11,44947$$

$$t > t_{0,025,6}$$

H_0 hipotezi red

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların Testi

t-testi

B- Parametrenin belirli değerden farklılığının testi

1- Hipotezler oluşturulur

Temel hipotez $\quad H_0 : \beta_i = \beta_{iv}$

Karşıt hipotez $\quad$ test çift taraflı $\quad H_1 : \beta_i \neq \beta_{iv}$

test tek taraflı $\quad H_1 : \beta_i < \beta_{iv}$ $\quad$ veya $\quad H_1 : \beta_i > \beta_{iv}$

2- Tablo değeri hesaplanır

3- Test istatistiğinin hesaplanması

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S_{\hat{\beta}_i}}$$

4- Karar

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların Testi

F Testi

Bağımsız değişkenlerin *tümünün* katsayılarının istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını test eder.

F testinde tek taraflı test yapılamaz

Temel hipotez $H_0 : \beta_1 = 0$

Karşıt hipotez $H_1 : \beta_1 \neq 0$

Test istatistiği
$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / 1}{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (n-2)}$$

Test istatistiğinin dağılımı F dağılımıdır. Serbestlik dereceleri (1) ve (n-2)'dir. F test istatistiği F tablosundan serbestlik dereceleri $SD_1=1$ ve $SD_2 = n-2$ ve α hata payı ile bulunan tablo değeri ile karşılaştırılır

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların Testi

F Testi

SD1

SD2

	1	2	3	4	5	...	...
1	161.4	199.5	251.7	224.6	230.2	...	...
2	18.51	9.16	9.16	19.25	19.2	...	...
3	10.18	9.28	9.28	9.12	9.01	...	...
4	7.71	6.59	6.59	9.39	6.26	...	...
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	...	...
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	...	...
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	...	...
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	...	...
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	...	...
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	...	...
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	...	...
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların Testi

F Testi

$F < F_{\alpha,1,n-2}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir

$F > F_{\alpha,1,n-2}$ ise H_1 hipotezi kabul edilir

F test istatistiği belirlilik katsayısı R^2 ile de hesaplanabilir

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}.\frac{n-2}{1} = \frac{(n-2)R^2}{1-R^2}$$

Basit regresyonda eğim katsayısı için hesaplanan t test istatistiğinin karesi F test istatistiğine eşittir.

$$t_{\beta_1}^2 = F$$

Bu eşitlik sadece basit regresyon için geçerlidir

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Katsayıların Testi

F Testi

Örnek:

$H_0 : \beta_1 = 0$ $\alpha = 0{,}05$

$H_1 : \beta_1 \neq 0$

SD_1= k-1=2-1=1

SD_2=n-2=8-2=6

$F_{0,05,1,6} = 5.99$

$$F = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 /(k-1)}{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 /(n-k)}$$

1

$$F = \frac{25.87567/(2-1)}{1.184379/(8-2)} = 131.0847$$

$F > F_{0,05,1,6}$

olduğundan H_0 hipotezi reddedilir.

β_1 $t^2 = F$ olduğundan

2

$$F = (11,44947)^2 = 131.0904$$

3

$$F = \frac{n-k}{k-1}.\frac{R^2}{1-R^2}$$

$$F = \frac{8-2}{2-1}.\frac{0.95623}{1-0.95623} = 131.0802$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması
Açıklanan Değişme	1	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/1$
Açıklanamayan Değişme	n-2	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2/(n-2)$
Toplam Değişme	n-1	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$	

25.87567

8-2=6

27.06

1.184379

$$F=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/1}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2/(n-2)}$$

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=\frac{25.87567}{27.06}=0.95623$$

$$F=\frac{25.87567/1}{1.184379/(8-2)}=131.0847$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametre Tahmincilerinin Aralık Tahmini

$$\hat{\beta}_0-t_{n-2,\alpha/2}S_{\hat{\beta}_0}\le\beta_0\le\hat{\beta}_0+t_{n-2,\alpha/2}S_{\hat{\beta}_0}$$

$$\hat{\beta}_1-t_{n-2,\alpha/2}S_{\hat{\beta}_1}\le\beta_1\le\hat{\beta}_1+t_{n-2,\alpha/2}S_{\hat{\beta}_1}$$

Aralık genişliğini etkileyen faktörler

Aralık

$\overline{X} - Z \cdot \sigma_{\overline{X}}$ 'dan $\overline{X} + Z \cdot \sigma_{\overline{X}}$

'ya uzanır.

- Verilerin yayılımı (σ)
- Örnek hacmi
- Güven seviyesi ($1 - \alpha$)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametre Tahmincilerinin Aralık Tahmini

Önceki örnek için parametrelerin aralık tahminini bulalım

SD=n-2=8-2=6 $\alpha = 0,05$

$t_{\alpha/2,n-2} = t_{0,025,6} = 2.447$

$$0.660228 - 2,447(0,25775) \le \beta_0 \le 0.660228 + 2,447(0,25775)$$

$$0.029514 \le \beta_0 \le 1.290942$$

SD=n-2=8-2=6 $\alpha = 0,05$

$t_{\alpha/2,n-2} = t_{0,025,6} = 2.447$

$$0.071993 - 2,447(0.006288) \le \beta_1 \le 0.071993 + 2,447(0.006288)$$

$$-0.08187 \le \beta_1 \le 0.22586$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Teorik Değerlerin Aralık Tahmini

$$\hat{Y}_i - t_{\alpha/2,n-2} S_{\hat{Y}_i} \leq (\beta_0 + \beta_1 X_i) \leq \hat{Y}_i + t_{\alpha/2} S_{\hat{Y}_i}$$

$$\hat{Y}_i - t_{\alpha/2,n-2} S_{\hat{Y}_i} \leq E(Y_i) \leq \hat{Y}_i + t_{\alpha/2} S_{\hat{Y}_i}$$

$$S^2_{\hat{Y}_i} = S^2_e \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right]$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Teorik Değerlerin Aralık Tahmini

Önceki örnek için 1994 yılına ilişkin teorik değerlerin aralık tahminini yapalım

SD=n-2=8-2=6 $\alpha = 0{,}05$ $t_{\alpha/2,n-2} = t_{0{,}025,6} = 2.447$

$$\hat{Y}_{1994} = 0.660228 + 0.071993(13.4) = 1.624932$$

$$S^2_{\hat{Y}_i} = S^2_e \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] = 0.197388 \left[\frac{1}{8} + \frac{(13.4 - 32.5)^2}{4992.44} \right] = 0.039097$$

$$S_{\hat{Y}_i} = \sqrt{0.039097} = 0.19773$$

$$1.624932 - 2.447(0.19773) \leq Y_i \leq 1.624932 + 2.447(0.19773)$$

$$1.141087 \leq Y_i \leq 2.108777$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Esneklik

Bağımsız değişkende meydana gelen yüzde birlik artışa karşılık bağımlı değişkende meydana gelen artış veya azalışının yüzde değerine *esneklik* denir

$$E_{XY} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

Basit doğrusal regresyon modelinde, $\hat{\beta}_1$ katsayısı eğimi verdiğinden

$$E_{XY} = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \hat{\beta}_1 \cdot \frac{X}{Y}$$

Esneklik belirlenirken bağımlı ve bağımsız değişkenler birlikte kullanıldığından bunların ortalamaları alınabilir. Buna göre ortalama esneklik

$$E_{XY} = \hat{\beta}_1 \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Esneklik
ÖRNEK

$$E_{XY} = \hat{\beta}_1 \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

$$= 0,071993 . \frac{32.5}{3} = 0.779924$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

KORELASYON KATSAYISI

Korelasyon katsayısı, kovaryansın değişkenlerin standart sapmalarına bölünmesi ile elde edilen standart bir ölçüdür. Standart ölçü olduğu için değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü belirttiği gibi, ilişkinin derecesini de belirtmektedir.

Korelasyon katsayısının hesaplanmasında regresyonda olduğu gibi bağımlı ve bağımsız değişken ayrımı yoktur. Bu nedenle sadece korelasyon katsayısının hesaplanacağı durumlarda değişkenlerden herhangi biri Xi, diğeri Yi olarak alınabilir.

$$-1 \leq r \leq +1$$

r =0 ise değişkenler arasında ilişki yoktur.
r < 0 ise değişkenler arasında ters yönlü ilişki vardır.
r > 0 ise değişkenler arasında doğru yönlü ilişki vardır.

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

KORELASYON KATSAYISI

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{(n-1)S_X S_Y}$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

S_x ve S_y formüllerini yerine koyarak

$$r = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

Basit Doğrusal Regresyon ve Korelasyon Katsayısı Arasındaki İlişki

$$R^2 = r.r = r^2$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

KORELASYON KATSAYISI

ÖRNEK:

$$r = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2 \sum (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

$$= \frac{359.42}{\sqrt{(4992.44)(27.06)}} = 0.97787$$

$$r^2 = R^2 \qquad r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,95623} = 0.97787$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

KORELASYON KATSAYISI

Y_i	X_i	$Y_i-\bar{Y}$	$X_i-\bar{X}$	$(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$	$(Y_i-\bar{Y})^2$	$(X_i-\bar{X})^2$
2	5	-3	-2	6	9	4
5	4	0	-3	0	0	9
3	7	-2	0	0	4	0
7	8	2	1	2	4	1
8	11	3	4	12	9	16
25	35			20	26	30

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{(n-1)S_X S_Y} \qquad S_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}} \qquad S_Y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{n-1}}$$

$$\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{35}{5}=7 \qquad \bar{Y}=\frac{\sum Y_i}{n}=\frac{25}{5}=5$$

Basit Doğrusal Regresyon Modelleri

KORELASYON KATSAYISI

$$S_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{30}{5-1}}=\sqrt{7,5}=2,7386$$

$$S_Y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{26}{5-1}}=\sqrt{6,5}=2,5495$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{(n-1)S_X S_Y}$$

$$r=\frac{20}{(5-1)(2,7386)(2,5495)}=\frac{20}{27,9282}=0,7161$$

Türkiye Ekonomisi Verisi İle LOGARİTMİK Tüketim Fonksiyonu Tahmini

$$LogC_i = \beta_0 + \beta_1 LogY_i + u_i$$

3.4.2. Regresyon Modelinin Tanımlanması, Tahmin Edilmesi ve Gerekli Testler

Bu aşamada hangi değişkeni incelemek istiyorsanız bu **bağımlı değişken**,

hangi değişkenlerle incelemek istiyorsanız bunlar da **bağımsız değişkenler** olacaktır.

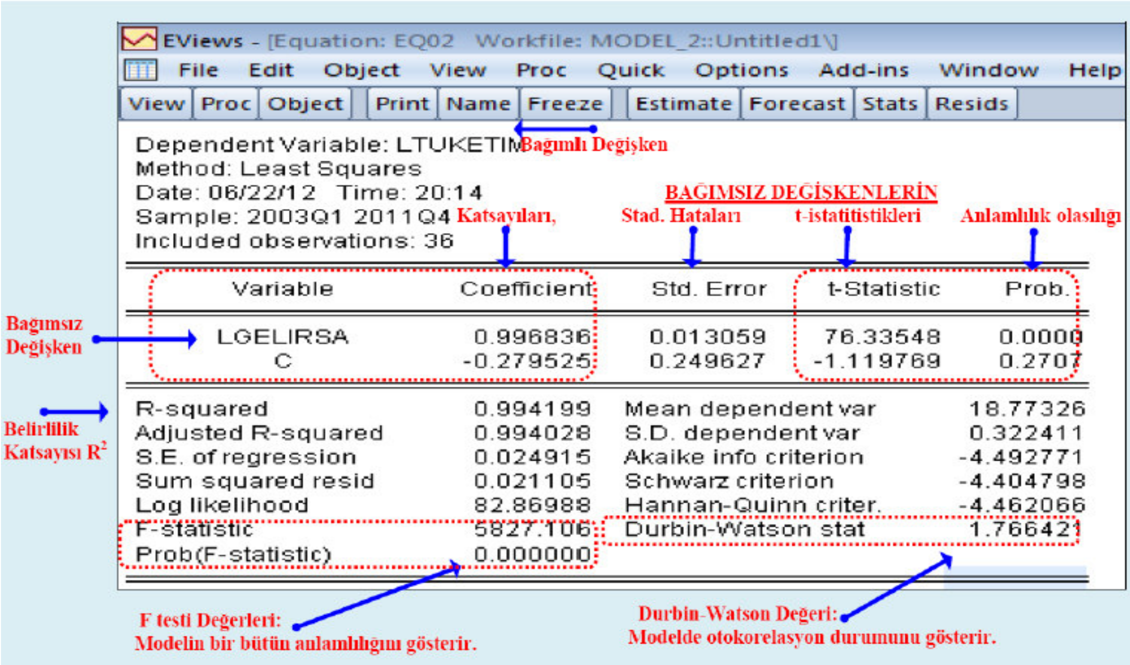
İktisat teorisinde tanımlanmış bir matematiksel kalıp varsa tahminde bunu kullanabilirsiniz.

Yoksa deneme yanılma yolu ile, doğrusal, tek-çit taraflı logaritmik modeller kullanabilirsiniz.

Örnek modelimiz: Türkiye ekonomisi için Tüketim = F (Gelir) şeklinde incelenecektir.

Modele beklentileri-gecikmeleri katmak için TUFE'nin ve diğer değişkenlerin gecikmeli yapısı da sağ tarafa eklenebilir.

Basit Regresyon Modeli için Eviews paket programı rapor çıktıları



Dependent Variable: LTUKETIM
Method: Least Squares
Date: 06/22/12 Time: 20:14
Sample: 2003Q1 2011Q4
Included observations: 36

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LGELIRSA	0.996836	0.013059	76.33548	0.0000
C	-0.279525	0.249627	-1.119769	0.2707

R-squared	0.994199	Mean dependent var	18.77326
Adjusted R-squared	0.994028	S.D. dependent var	0.322411
S.E. of regression	0.024915	Akaike info criterion	-4.492771
Sum squared resid	0.021105	Schwarz criterion	-4.404798
Log likelihood	82.86988	Hannan-Quinn criter.	-4.462066
F-statistic	5827.106	Durbin-Watson stat	1.766421
Prob(F-statistic)	0.000000		

3.4.2.4. Regresyonda Katsayıların yorumlanması.

- Katsayılar yorumlanırken her bir değişkenin ölçü birimi (TL, $, %, Endeks) göz önünde bulundurulur.
- Buna göre *bağımsız değişken bir ölçü birimi değiştiğinde, bağımlı değişken, katsayı kadar (bağımlı değişkeni bir ölçü birimi) değişir,* şeklinde yorumlanır.
- Katsayının işareti ise, eğer pozitifse değişkenler aynı yönde değişir, negatifse ters yönde değişir.
- Örneğimizde: LTuketim = -0.2795 + 0.9996Lgelirse + u ,
- Bağımsız değişkenin katsayısını yorumlayalım.
- Bağımlı ve bağımsız değişkenler logaritması alındığı için, bu katsayı oran (%) şeklinde yorumlanır ve gelir esneklik katsayısını da temsil eder.

Yorum: Türkiye ekonomisinde analiz döneminde diğer şartlar sabitken, Gelir (GSYİH) %1 değiştiğinde, Tüketim yaklaşık %1 (0.99) aynı yönde değişir.

Gelir esnekliği = 1

t-testi iki şekilde yapılabilir, A ve B

$A)$ t-istastik değerleri, t-tablo değerleri ile kullanılarak

Aşamalar :

1)*Hipotez* kurulur: $H_0: \ \beta_1 = 0 \quad H_1: \ \beta_1 \neq 0$

2)t-istatistik değeri ve t-tablo değeri hesaplanır *karşılaştırılır*

$t_{hes} = \dfrac{\beta_1 - 0}{S_{\beta_1}}$ *hesaplanan değeri,* $\mathrm{t}_{\alpha;n-k} =$ *tablo değeri*

3) Karar: Eğer $t_{hes} > \mathrm{t}_{\alpha;n-k}$ ise $H_0: \ \beta_1 = 0$ *reddedilir.*

Bu katsayıya ait değişken modelde kalmalı kararı verilir.

$B)$ *Değişkenler* için PROB değerleri kullanılır

Eğer değişkenin PROB değeri,

seçilen anlamlılık düzeyi (α=0.01 veya α=0.05)'den küçükse,

Bu katsayıya ait değişken modelde kalmalı kararı verilir.

EViews - [Equation: EQ02 Workfile: MODEL_2::Untitled1\]

File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: LTUKETIM
Method: Least Squares
Date: 06/22/12 Time: 20:14
Sample: 2003Q1 2011Q4
Included observations: 36

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LGELIRSA	0.996836	0.013059	76.33548	0.0000
C	-0.279525	0.249627	-1.119769	0.2707

R-squared	0.994199	Mean dependent var	18.77326
Adjusted R-squared	0.994028	S.D. dependent var	0.322411
S.E. of regression	0.024915	Akaike info criterion	-4.492771
Sum squared resid	0.021105	Schwarz criterion	-4.404798
Log likelihood	82.86988	Hannan-Quinn criter.	-4.462066
F-statistic	5827.106	Durbin-Watson stat	1.766421
Prob(F-statistic)	0.000000		

Tabloda bağımsız değişkenin PROB değeri 0.01'den küçük olduğu için .

İstatiksel açıdan modelde yer almalıdır.

3.4.2.2. Modelin Bir Bütün Anlamlılığı İçin F-testi

Regresyon modelinde tüm bağımsız değişken katsayılarının birlikte anlamlılığı F testi ile incelenir.

<u>F-testi iki şekilde yapılabilir, A ve B</u>

A) F-istatistik değeri ve F-tablo değeri kullanılır

1) *Hipotez* kurulur: $H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad H_1: \ \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq 0$

2) F-istatistik değeri ve F-tablo değeri hesaplanır *karşılaştırılır*

$$F_{hes} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^{n} (Y - \hat{Y}_i)^2 / (n-k)} = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{(n-k)}{(k-1)} \ \textit{hesaplanan değeri,}$$

$\mathrm{F}_{\alpha;(k-1),(n-k)} = \textit{tablo değeri}$

3) Karar : Eğer $F_{hes} > \mathrm{F}_{\alpha;(k-1),(n-k)}$ ise $H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ *reddedilir.*

$n =$ *gözlem sayısı*; $k =$ mod *eldeki parametre sayısı*

Model bir bütün olarak anlamlı kararı verilir.

B. F-testinin PROB değerlerine bakılır.

Eğer F-testinin PROB değeri,

seçilen anlamlılık düzeyi (α=0.01 veya α=0.05)'den küçükse,

Model bir bütün olarak anlamlı kararı verilir.

F-statistic	5827.106
Prob(F-statistic)	0.000000

Tabloda F-testi PROB değerleri 0.01'den küçük.

Bu sebeple, Model anlamlıdır. uygundur

3.4.2.3. Belirlilik Katsayısı R^2 Anlamı

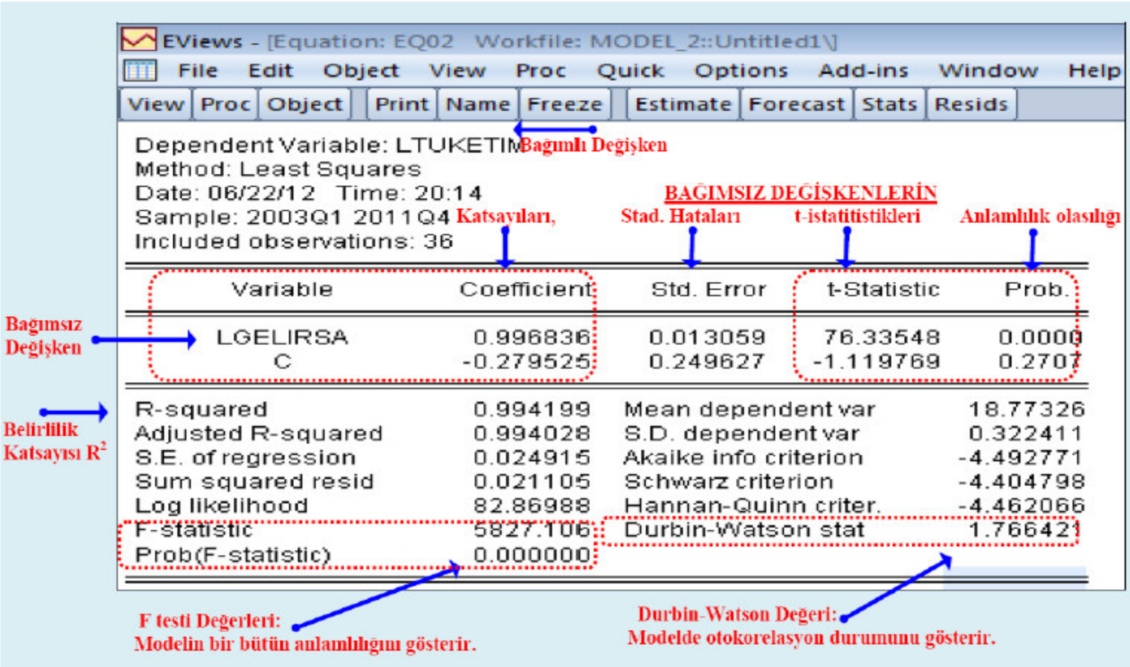
- Belirilik katsayısı (R^2) değeri, bağımsız değişkenler, bağımlı değişkendeki değişimin yüzde kaçını açıkladığını gösteren katsayıdır.
- 1'e yaklaştıkça modelin açıklama gücü yükselir.
- Model'de $R^{2=}$0.99 olup oldukça yüksektir.
- Ancak bu kadar yüksek açıklama gücü, değişkenler arasındaki trend etkisi ve sahte regresyondan kaynaklanıyor olabilir.
- Diğer varsayımların da sağlandıktan sonraki R^2 değeri daha sağlıklıdır.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde basite regresyon analizinde elde edilen modellerin geçerliliği için t ve F testlerinin yapılmasını ve korelasyon katsayısının elde edilmesi ve yorumlanmasını incelemiş olduk.

Bölüm Soruları

Bütün soruları aşağıda verilen basit regresyon sonuçlarına göre cevaplayınız.



1) Verilere göre modelin sabitin değeri kaçtır?

a) -0.27

b) 0.99

c) 4

d) 2

e) 20

2) Verilere göre modelde bağımsız değişkenin katsayısının değeri kaçtır?

a) 20

b) 50

c) 10

d) 0.99

e) 200

3) Verilere göre modelde, sabitin standart hata değeri kaçtır?

a) 122

b) 522

c) 433

d) 0.249

e) 2033

4) Verilere göre modelde, bağımsız değişkenin standart hata değeri kaçtır?

a) 123

b) 533

c) 144

d) 0.013

e) 204

5) Verilere göre modelin sabitin t-istatistik değeri kaçtır?

a) 232

b) 523

c) 432

d) -1.11

e) 203

6) Verilere göre modelde bağımsız değişkenin t-istatistik değeri kaçtır?

a) 254

b) 567

c) 107

d) 76.3

e) 206

7) Verilere göre modelde, sabitin Prob. değeri kaçtır?

a) 121

b) 521

c) 413

d) 0.27

e) 20

8) Verilere göre modelde, bağımsız değişkenin Prob. değeri kaçtır?

a) 12

b) 54

c) 14

d) 0.0

e) 20

9) Verilere göre modelde, bağımlı değişkendeki değişimlerin ne kadarı bağımsız değişkence açıklanmaktadır?

a) %92

b) %85

c) %94

d) %99

e) %90

10) Verilere göre modelde, bağımsız değişkenin istatistiksel olarak %1 anlamlı olması için Prob. değeri kaç olmalıdır?

a) %1'den küçük

b) %1'den büyük

c) %5'ten küçük

d) %5'ten büyük

e) %5'e eşit

Cevaplar

1)a, 2)d, 3)d, 4)d, 5)d, 6)d, 7)d, 8)d, 9)d, 10)a

14. TAHMİN YÖNTEMLERİ III

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1. Kıdeminiz ve eğitiminiz arttıkça geliriniz nasıl değişir?

2. Geliriniz ve çocuk sayısınız arttıkça tasarruf düzeyiniz nasıl değişir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Tahmin Yöntemleri III	Tahmin yöntemleri	Teorik ve Uygulamalı Analiz

Anahtar Kavramlar

- Çok Değişkenli Regresyon Analizi
- Tahmin

14. TAHMİN YÖNTEMLERİ III

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \varepsilon_i$$

Bu model iki bağımsız değişkenli anakütle çoklu doğrusal regresyon modelidir.

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_2 Z_i + e_i$$

Bu model iki bağımsız değişkenli Örnek çoklu doğrusal regresyon modelidir

İncelenecek bağımlı değişken dahil k sayıda değişken olduğunu varsayalım. Bu durumda anakütle çoklu doğrusal regresyon modeli

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

Örnek çoklu doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{i2} + \hat{\beta}_3 X_{i3} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{ik} + e_i$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

Temel Varsayımlar

- Normallik
- Sıfır ortalama
- Sabit varyans
- Otokorelasyon olmaması
- Bağımsız değişkenlerin tesadüfi değişken olmaması
- Çoklu doğrusal bağlılık olmaması
- n>k olması

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

Anakütle çoklu doğrusal regresyon modeli

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

Y_i'nin beklenen değeri

$$E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \ldots + \beta_k X_{ik}$$

En küçük kareler yönteminde Y_i ile $E(Y_i)$ arasındaki farkların kareleri toplamı minimize edileceğinden, farkların kareleri toplamı S

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - E(Y_i) \right]^2$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - E(Y_i) \right]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - (\beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \ldots + \beta_k X_{ik}) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{i2} - \beta_3 X_{i3} - \ldots - \beta_k X_{ik})^2$$

Minimizasyon için S'in parametrelere göre kısmi türevleri alınır

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

$$\frac{\partial T}{\partial \beta_1} = 2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{i2} - \beta_3 X_{i3} - \ldots - \beta_k X_{ik})(-1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta_2} = 2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{i2} - \beta_3 X_{i3} - \ldots - \beta_k X_{ik})(-X_{i2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta_3} = 2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{i2} - \beta_3 X_{i3} - \ldots - \beta_k X_{ik})(-X_{i3})$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta_k} = 2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{i2} - \beta_3 X_{i3} - \ldots - \beta_k X_{ik})(-X_{ik})$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

Kısmi türevler sıfıra eşitlenir ve çarpım şeklinde yeralan ifadeler ile çarpılırsa

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \hat{\beta}_3 X_{i3} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ik}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i X_{i2} - \hat{\beta}_1 X_{i2} - \hat{\beta}_2 X_{i2}^2 - \hat{\beta}_3 X_{i2} X_{i3} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{i2} X_{ik}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i X_{i3} - \hat{\beta}_1 X_{i3} - \hat{\beta}_2 X_{i3} X_{i2} - \hat{\beta}_3 X_{i3}^2 - \ldots - \hat{\beta}_k X_{i3} X_{ik}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i X_{ik} - \hat{\beta}_1 X_{ik} - \hat{\beta}_2 X_{ik} X_{i2} - \hat{\beta}_3 X_{ik} X_{i3} - \ldots - \hat{\beta}_k X_{ik}^2) = 0$$

Y_i'li ifadeler eşitliğin solunda, diğerleri sağında toplanırsa

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

En Küçük Kareler Yöntemi

Gerçek X_{ik} ve Y_i değerleri yerine ortalamadan farklar serileri oluşturularak yerine konursa

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(X_{i2}-\bar{X}_2)=\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}(X_{i2}-\bar{X}_2)^2+\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}(X_{i2}-\bar{X}_2)(X_{i3}-\bar{X}_3)+\ldots+\hat{\beta}_k\sum_{i=1}^{n}(X_{i2}-\bar{X}_2)(X_{ik}-\bar{X}_k)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(X_{i3}-\bar{X}_3)=\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}(X_{i3}-\bar{X}_3)(X_{i2}-\bar{X}_2)+\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}(X_{i3}-\bar{X}_3)^2+\ldots+\hat{\beta}_k\sum_{i=1}^{n}(X_{i3}-\bar{X}_3)(X_{ik}-\bar{X}_k)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(X_{ik}-\bar{X}_k)=\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}(X_{ik}-\bar{X}_k)(X_{i2}-\bar{X}_2)+\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}(X_{ik}-\bar{X}_k)(X_{i3}-\bar{X}_3)+\ldots+\hat{\beta}_k\sum_{i=1}^{n}(X_{ik}-\bar{X}_k)^2$$

Bu durumda k yerine k-1 denklemin ortak çözümü gerekmektedir. Sabit katsayı

$$\hat{\beta}_1=\bar{Y}-\hat{\beta}_2\bar{X}_2-\hat{\beta}_3\bar{X}_3-\ldots-\hat{\beta}_k\bar{X}_k$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

ÖRNEK

Y_i	X_{i2}	X_{i3}	$X_{i2}Y_i$	$X_{i3}Y_i$	$X_{i2}X_{i3}$	X_{i2}^2	X_{i3}^2	Y_i^2
10	120	4	1200	40	480	14400	16	100
13	135	8	1755	104	1080	18225	64	169
19	132	5	2508	95	660	17424	25	361
18	140	8	2520	144	1120	19600	64	324
15	153	10	2295	150	1530	23409	100	225
75	680	35	10278	533	4870	93058	269	1179

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

ÖRNEK

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} + \hat{\beta}_3 \sum X_{i3}$$

$$\sum X_{i2} Y_i = \hat{\beta}_1 \sum X_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}^{\;2} + \hat{\beta}_3 \sum X_{i2} X_{i3}$$

$$\sum X_{i3} Y_i = \hat{\beta}_1 \sum X_{i3} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i3} X_{i2} + \hat{\beta}_3 \sum X_{i3}^{\;2}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{75}{5} = 15 \qquad \bar{X}_2 = \frac{\sum X_{i2}}{n} = \frac{680}{5} = 136 \qquad \bar{X}_3 = \frac{\sum X_{i3}}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri

Parametrelerin Tahmini

$$-136/75 = 5\hat{\beta}_1 + 680\hat{\beta}_2 + 35\hat{\beta}_3$$
$$10278 = 680\hat{\beta}_1 + 93058\hat{\beta}_2 + 4870\hat{\beta}_3$$

$$-10200 = -680\hat{\beta}_1 - 92480\hat{\beta}_2 - 4760\hat{\beta}_3$$
$$10278 = 680\hat{\beta}_1 + 93058\hat{\beta}_2 + 4870\hat{\beta}_3$$

$$78 = 578\hat{\beta}_2 + 110\hat{\beta}_3$$

$$-7/75 = 5\hat{\beta}_1 + 680\hat{\beta}_2 + 35\hat{\beta}_3$$
$$533 = 35\hat{\beta}_1 + 4870\hat{\beta}_2 + 269\hat{\beta}_3$$

$$8 = 110\hat{\beta}_2 + 24\hat{\beta}_3$$

$$78 = 578\hat{\beta}_2 + 110\hat{\beta}_3$$
$$8 = 110\hat{\beta}_2 + 24\hat{\beta}_3$$

$$\hat{\beta}_1 = -45{,}55 \qquad \hat{\beta}_2 = 0{,}56 \qquad \hat{\beta}_3 = -2{,}23$$

$Y_i = -45{,}55 + 0{,}56X_{i2} - 2{,}23X_{i3}$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Parametrelerin Tahmini

ÖRNEK : Ortalamalardan farklar

$$\sum x_{i2} y_i = \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^{\ 2} + \hat{\beta}_3 \sum x_{i2} x_{i3}$$

$$\sum x_{i3} y_i = \hat{\beta}_2 \sum x_{i3} x_{i2} + \hat{\beta}_3 \sum x_{i3}^{\ 2}$$

$$78 = 578 \hat{\beta}_2 + 110 \hat{\beta}_3$$

$$8 = 110 \hat{\beta}_2 + 24 \hat{\beta}_3$$

$$\hat{\beta}_2 = 0{,}56 \qquad \hat{\beta}_3 = -2{,}23$$

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \overline{X}_3$$

= 15 – 0,56(136) – (-2,23)(7) = -45,5

Y_i = -45,55 + 0,56X_{i2} – 2,23X_{i3}

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Parametre Tahmincilerinin Varyansları

$$S_e^2 = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-k} = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

Çoklu regresyonda hata terimlerinin kareleri toplamı gerçek değerlerle

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{i2} Y_i - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} X_{i3} Y_i - \cdots - \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{ik} Y_i$$

Ortalamadan farklarla

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} y_i - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} x_{i3} y_i - \cdots - \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik} y_i$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Parametre Tahmincilerinin Varyansları

Örnek:

$$Y_i = -45{,}51 + 0{,}56\, X_{i2} - 2{,}23\, X_{i3}$$
$$\hat{Y}_1 = -45{,}51 + 0{,}56(120) - 2{,}23(4) = 12{,}77$$
$$\hat{Y}_2 = -45{,}51 + 0{,}56(135) - 2{,}23(8) = 12{,}25$$
$$\hat{Y}_3 = -45{,}51 + 0{,}56(132) - 2{,}23(5) = 17{,}26$$
$$\hat{Y}_4 = -45{,}51 + 0{,}56(140) - 2{,}23(8) = 15{,}05$$
$$\hat{Y}_5 = -45{,}51 + 0{,}56(153) - 2{,}23(10) = 17{,}87$$

$Y_i - \hat{Y}_i$	$(Y_i - \hat{Y}_i)^2$
-2,777	7,6729
0,75	0,5625
1,74	3,0276
2,95	8,7025
-2,87	8,2369
	28,2024

veya

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{i2} Y_i - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} X_{i3} Y_i$$

$$= 1179 - (-45{,}55)(75) - (0{,}56)(10278) - (-2{,}23)(533)$$

$$= 28{,}16$$

Örnek:

$$S_e^2 = \frac{28{,}2024}{5-3} = 14{,}1012$$

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) & Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3) \\ Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_2) & Kov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3) \\ Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3) & Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_3) \end{bmatrix} = S_e^2 \begin{bmatrix} n & \sum X_{i2} & \sum X_{i3} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}^2 & \sum X_{i2} X_{i3} \\ \sum X_{i3} & \sum X_{i3} X_{i2} & \sum X_{i3}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & & \\ & Var(\hat{\beta}_2) & \\ & & Var(\hat{\beta}_3) \end{bmatrix} = 14{,}1012 \begin{bmatrix} 148{,}499097 & & \\ & 0{,}13544018 & \\ & & 0{,}326185101 \end{bmatrix}$$

$$S_{\hat{\beta}_1}^2 = Var\hat{\beta}_1 = 2094{,}015466$$
$$S_{\hat{\beta}_2}^2 = Var\hat{\beta}_2 = 0{,}190986906$$
$$S_{\hat{\beta}_3}^2 = Var\hat{\beta}_3 = 4{,}599600063$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Belirlilik Katsayısı

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{i2} Y_i - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} X_{i3} Y_i - \cdots - \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{ik} Y_i$$

$$\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{i2} - \overline{X}_2) + \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{i3} - \overline{X}_3)$$

$$+ \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{ik} - \overline{X}_k)$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Düzeltilmiş Belirlilik Katsayısı

Çoklu regresyonda modele eklenecek her yeni bağımsız değişkenin, açıklanamayan değişmelerin bir bölümünü daha açıklaması beklenecektir. Aynı bağımlı değişken için bağımsız değişken sayıları ile farklı modeller oluşturulabilir. Bu farklı modelleri karşılaştırmak ve ilişkiyi daha iyi açıklayan modeli belirlemek için düzeltilmiş belirlilik katsayıları hesaplanacaktır.

$$\overline{R}^2 = R^2 - \frac{k-1}{n-k}(1 - R^2) \qquad \overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\left(\frac{n-1}{n-k}\right)$$

$$\overline{R}^2 \le R^2$$

Çoklu Doğrusal Regresyon Modelleri
Belirlilik Katsayısı

ÖRNEK

Y_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i - \bar{Y}$	$(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$
10	12,77	-2,23	4,9729
13	12,25	-2,75	7,5625
19	17,26	2,26	5,1076
18	15,05	0,05	0,0025
15	17,87	2,87	8,2369
			25,8824

$$\bar{Y} = 15$$

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 54$$

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{25,8824}{54} = 0,4793$$

$$\sum e_i^2 = \sum Y_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum Y_i - \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} Y_i - \hat{\beta}_3 \sum X_{i3} Y_i$$

$$= 28,16$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$= 1 - \frac{28,16}{54}$$

$$= 1 - 0,5214 = 0,4786$$

$$\bar{R}^2 = R^2 - \frac{k-1}{n-k}(1 - R^2)$$

$$= 0,47 - \left(\frac{3-1}{5-3}\right)(1 - 0,47) = -0,06$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\left(\frac{n-1}{n-k}\right)$$

$$= 1 - (1 - 0,47)\left(\frac{5-1}{5-3}\right) = -0,06$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ REGRESYON ANALİZİ
UYGULAMA:
Türkiye Ekonomisi Verisi İle
İTHALAT Fonksiyonu Tahmini

Model:

İTHALAT = F (GSYIH, İHRACAT, DÖVİZ KURU)

$$LogM_i = \beta_0 + \beta_1 LogY_i + \beta_1 LogX + \beta_1 LogE + u_i$$

3.5. ÇOK DEĞİŞKENLİ REGRESYON MODELİ VE TESTLER

Çok değişkenli regresyon analizinde bağımsız değişken sayısı birden fazladır.
Tek ve çok değişkenli regresyon modelinde genel olarak tüm testler benzer olduğu için testleri ve süreci tekrar anlatmayıp, Türkiye ekonomisi için bir model inceleyeceğiz.

Model: **İTHALAT = F (GSYIH, İHRACAT, DÖVİZ KURU)**

Analiz dönemi: 2003Q1-2009Q4 dönemidir.

Excel'den veriler E-views programına aktarılır.

E-views programında ithalat ilkönce seçilir, CTRL basılı iken diğer değişkenler seçilir ve model tahmin edilir.

2008 krizi modelde anlamlı olduğu için, 2008Q4 -2009Q2 dönemlerine 1 diğer dönemlere 0 verilerek kriz kukla değişkeni yaratılmıştır.

Model kriz değişkeni de eklenerek tahmin edilmiştir.

İTHALAT = F (GSYIH, İHRACAT, DÖVİZ KURU) modeli TAHMİN SONUCU

EViews - [Equation: ITHALAT_MODEL Workfile: MODEL_22::Untitled\]
File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Hel
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LITHALAT
Method: Least Squares
Date: 06/23/12 Time: 16:27
Sample: 2003Q1 2009Q4
Included observations: 28

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LIHRACAT	0.911063	0.090628	10.05278	0.0000
LGELIR	0.306901	0.115549	2.656017	0.0141
LKUR_EURO	-0.563907	0.154814	-3.642477	0.0014
KRIZ	-0.102661	0.037309	-2.751640	0.0114
C	-4.292782	1.356542	-3.164503	0.0043

R-squared	0.983712	Mean dependent var	10.31127
Adjusted R-squared	0.980880	S.D. dependent var	0.360511
S.E. of regression	0.049850	Akaike info criterion	-2.999160
Sum squared resid	0.057156	Schwarz criterion	-2.761267
Log likelihood	46.98825	Hannan-Quinn criter.	-2.926434
F-statistic	347.2771	Durbin-Watson stat	2.057009
Prob(F-statistic)	0.000000		

İTHALAT = F (GSYIH, İHRACAT, DÖVİZ KURU) modeli için TESTLER

Bağımsız değişkenler için t-testleri: Tüm bağımsız değişkenlerin PROB<0.05 olduğu için, tüm bağımsız değişkenler istatiksel olarak anlamlı modelde kalabilir.

Modelin bütünsel anlamlılığı için F-testi: F-prob değeri <0.05 olduğu için model bir bütün olarak anlamlıdır.

Belirlilik Katsayısı R^2: Bağımsız değişkenler, bağımlı değişkendeki değişimin %91'ni açıklamaktadır. Bu iyi bir açıklama düzeyidir.

Hataların Normalliği Testi: J-B Prob>0.05 normaldir.

Jarque-Bera	0.450849
Probability	0.798177

Otokorelasyon : Durbin-Watson=2.057 otokorelasyon yoktur. LM testinde de sonuç aynı.

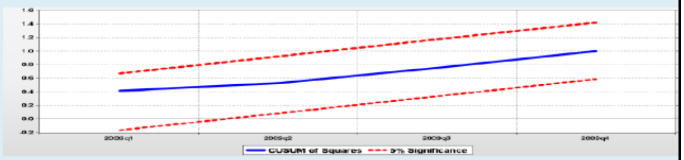
Değişen varyans:
White Prob>0.05 sabit varyans

Heteroskedasticity Test: White

F-statistic	0.728715	Prob. F(11,16)	0.6984
Obs*R-squared	9.345666	Prob. Chi-Square(11)	0.5900

Ramsey Reset testi: Prob>0.05 tanımlama hatası yoktur.

Cusum Square yapısal kırılma:
Kukla değişken sonrası kırılma yok.



Testlere göre temel varsayımlar sağlanmıştır.

KATSAYILARIN YORUMLANMASI, MODEL:

LITHALAT = 0.911*LIHRACAT + 0.306*LGELIR - 0.563*LKUR_EURO - 0.102*KRIZ - 4.29

Tüm değişkenler logaritmik olduğu için katsayıları oransal (%) yorumlayabiliriz:

Türkiye ekonomisi için analiz döneminde diğer şartlar sabitken,

- İhracat %1 değişirse, ithalat %0.911 aynı yönde değişir.
- Gelir %1 değişirse, ithalat %0.306 aynı yönde değişir.
- Kur_Euro %1 değişirse, ithalat %0.563 ters yönde değişir.
- Kriz ithalatı ters yönde etkilemektedir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde çoklu regresyon modellerinin karar verme süreçlerinde nasıl kullanıldığını incelemiş olduk.

Bölüm Soruları

Bütün soruları aşağıdaki tabloda bulunan bilgilere göre cevaplayınız.

Tablo:

İTHALAT = F (GSYIH, İHRACAT, DÖVİZ KURU) modeli TAHMİN SONUCU

EViews - [Equation: ITHALAT_MODEL Workfile: MODEL_22::Untitled\]

File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Hel

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: LITHALAT
Method: Least Squares
Date: 06/23/12 Time: 16:27
Sample: 2003Q1 2009Q4
Included observations: 28

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LIHRACAT	0.911063	0.090628	10.05278	0.0000
LGELIR	0.306901	0.115549	2.656017	0.0141
LKUR_EURO	-0.563907	0.154814	-3.642477	0.0014
KRIZ	-0.102661	0.037309	-2.751640	0.0114
C	-4.292782	1.356542	-3.164503	0.0043

R-squared	0.983712	Mean dependent var	10.31127
Adjusted R-squared	0.980880	S.D. dependent var	0.360511
S.E. of regression	0.049850	Akaike info criterion	-2.999160
Sum squared resid	0.057156	Schwarz criterion	-2.761267
Log likelihood	46.98825	Hannan-Quinn criter.	-2.926434
F-statistic	347.2771	Durbin-Watson stat	2.057009
Prob(F-statistic)	0.000000		

1) Verilere göre modelin sabitin değeri kaçtır?

a) -4.29

b) 0.99

c) 3.4

d) 2.5

e) 2.9

2) Verilere göre modeldeki LIHRACAT bağımsız değişkenin katsayısının değeri kaçtır?

a) 20.1

b) 50.5

c) 10.8

d) 0.91

e) 200

3) Verilere göre modeldeki LGELİR bağımsız değişkenin katsayısının değeri kaçtır?

a) 20.1

b) 50.5

c) 10.8

d) 0.30

e) 200

4) Verilere göre modeldeki LKUR_EURO bağımsız değişkenin katsayısının değeri kaçtır?

a) 20.1

b) 50.5

c) 10.8

d) -0.56

e) 200

5) Verilere göre modelde, sabitin standart hata değeri kaçtır?

a) 1.22

b) 5.22

c) 4.33

d) 1.35

e) 2.33

6) Verilere göre modelde, LKUR_EURO bağımsız değişkenin standart hata değeri kaçtır?

a) 53.3

b) 1.44

c) 0.15

d) 2.04

e) 0.85

7) Verilere göre modelin sabitin t-istatistik değeri kaçtır?

a) 2.32

b) 5.23

c) 4.32

d) -3.16

e) 2.03

8) Verilere göre modelde LGELİR bağımsız değişkenin t-istatistik değeri kaçtır?

a) 2.54

b) 5.67

c) 1.07

d) 2.65

e) 2.06

9) Verilere göre modelde, sabitin Prob. değeri kaçtır?

a) 0.0121

b) 0.0521

c) 0.0413

d) 0.0043

e) 0.0020

10) Verilere göre modelde, LGELİR bağımsız değişkenin Prob. değeri kaçtır?

a) 0.0121

b) 0.0521

c) 0.0413

d) 0.0141

e) 0.0020

Cevaplar

1)a, 2)d, 3)d, 4)d, 5)d, 6)c, 7)d, 8)d, 9)d, 10)d

KAYNAKÇA

Alptekin Esin, Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri, Gazi Ktp. 2003

Aykut Top, Yılmaz Erdal. Üretim Yönetimi, Yaprak Yayın, 2009

Halaç Osman, Kantitatif Karar Verme Teknikleri, Alfa Yayınları, 2001

Özkan Şule, Yöneylem Araştırması Nicel Karar Teknikleri, Nobel Yayın Dağıtım, 2005

Öztürk Ahmet, Yöneylem Araştırması, Ekin Basım Yayın, 12. Bsk. 2013

Taha Hamdy, Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2010

Timor Mehpare, Yöneylem Araştırması, Kolektif, Türkmen Kitabevi, 2011