IKI10400 • Struktur Data & Algoritma: Analisa Algoritma

Fakultas Ilmu Komputer • Universitas Indonesia

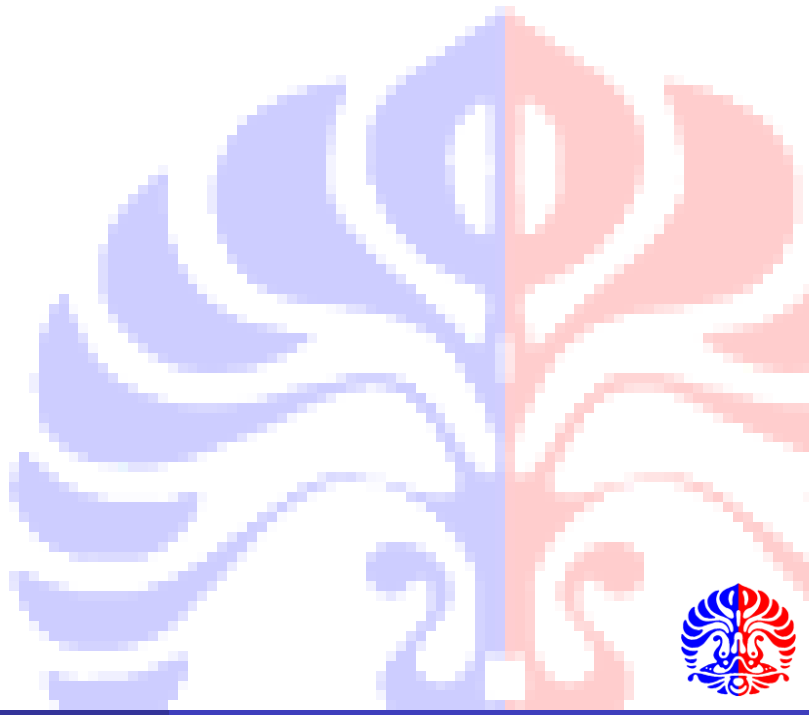
Slide acknowledgments:
Suryana Setiawan, Ade Azurat, Denny, Ruli Manurung

Algoritma

- **al•go•rithm**
  - *n.*
    1 *Math. a*) any systematic method of solving a certain kind of problem *b*) the repetitive calculations used in finding the greatest common divisor of two numbers (called in full Euclidean algorithm)
    2 *Comput.* a predetermined set of instructions for solving a specific problem in a limited number of steps
- Suatu set instruksi yang harus diikuti oleh komputer untuk memecahkan suatu masalah.
- Program harus berhenti dalam batas waktu yang wajar (*reasonable*)
- Tidak terikat pada *programming language* atau bahkan paradigma pemrograman (mis. *Procedural* vs *Object-Oriented*)

Analisa Algoritma: Motivasi

- perlu diketahui berapa banyak *resource* (*time* & *space*) yang diperlukan oleh sebuah algoritma
- Menggunakan teknik-teknik untuk mengurangi waktu yang dibutuhkan oleh sebuah algoritma



Tujuan Pengajaran

- Mahasiswa dapat memperkirakan waktu yang dibutuhkan sebuah algoritma.
- Mahasiswa memahami kerangka matematik yang menggambarkan *running time*.
- Mahasiswa mengenali beberapa teknik sederhana yang dapat memperbaiki *running time*.
- Mahasiswa memahami bahwa suatu permasalahan dapat diselesaikan dengan beberapa algoritma dengan *running time* yang berbeda-beda.

Outline

- Apa itu analisa algoritma?- *what*
- Bagaimana cara untuk analisa/mengukur? - *how*
- Notasi Big-Oh
- Studi kasus: *The Maximum Contiguous Subsequence Sum Problem* (Nilai jumlah berurutan terbesar)
  - Algoritma 1: A cubic algorithm
  - Algoritma 2: A quadratic algorithm
  - Algoritma 3: A linear algorithm

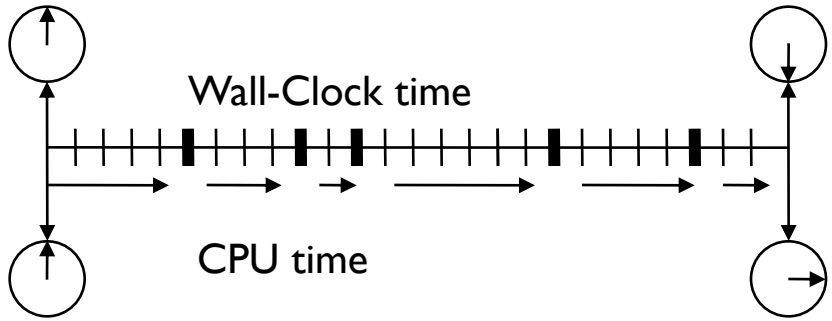
Analisa Algoritma: *What*?

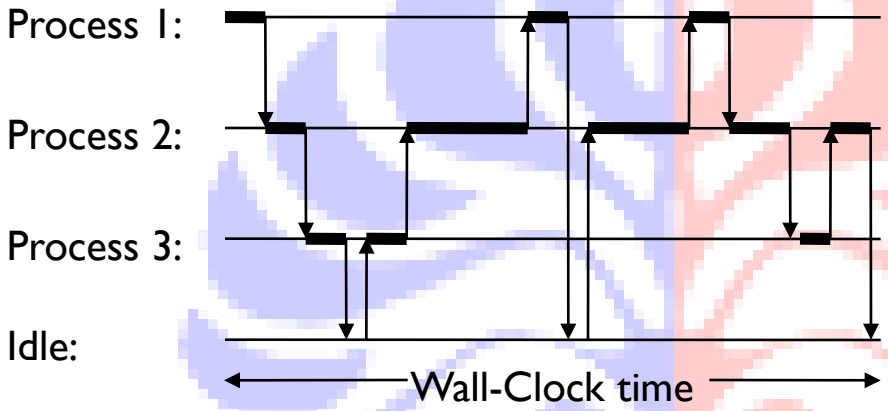
- Mengukur jumlah sumber daya (*time* dan *space*) yang diperlukan oleh sebuah algoritma
- Waktu yang diperlukan (*running time*) oleh sebuah algoritma cenderung tergantung pada jumlah input yang diproses.

  → *Running time* dari sebuah algoritma adalah fungsi dari jumlah inputnya
- Ada algoritma yang running time-nya tergantung pada jumlah output-nya (*output-sensitive*)
- Selalu tidak terikat pada *platform* (mesin + OS), bahasa pemrograman, kualitas kompilator atau bahkan paradigma pemrograman (mis. *Procedural* vs *Object-Oriented*)

Analisa Algoritma: *How*?

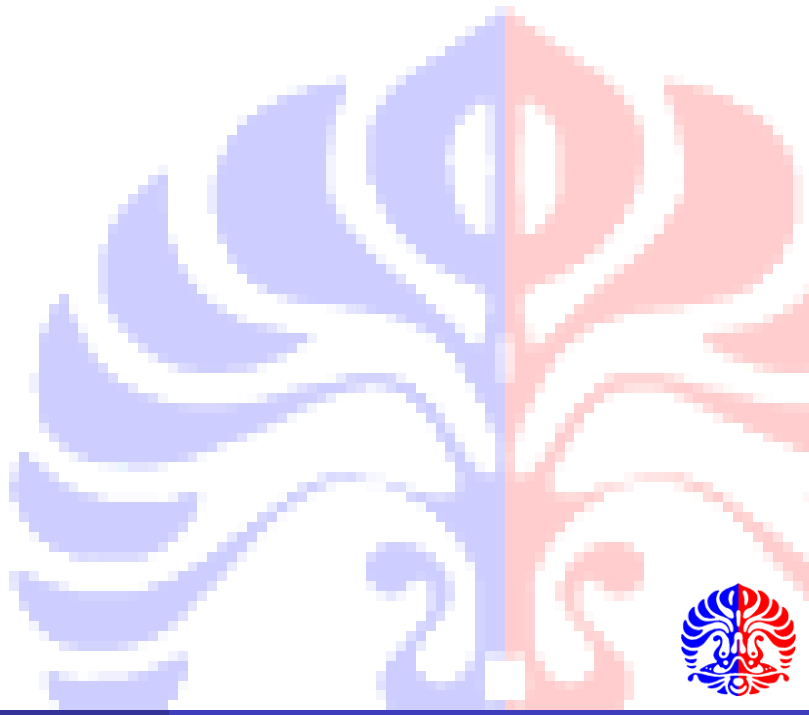
- Bagaimana jika kita menggunakan jam?
  - Jumlah waktu yang digunakan bervariasi tergantung pada beberapa faktor lain: kecepatan mesin, sistem operasi (multi-tasking), kualitas kompiler, dan bahasa pemrograman.
  - Sehingga kurang memberikan gambaran yang tepat tentang algoritma





Analisa Algoritma: *How*?

- Notasi O (sering disebut sebagai "notasi big-Oh")
  - Digunakan sebagai bahasa untuk membahas efisiensi dari sebuah algoritma: log n, linier, n log n, n^2, n^3, ...
  - Dari hasil *run-time*, dapat kita buat grafik dari waktu eksekusi dan jumlah data.

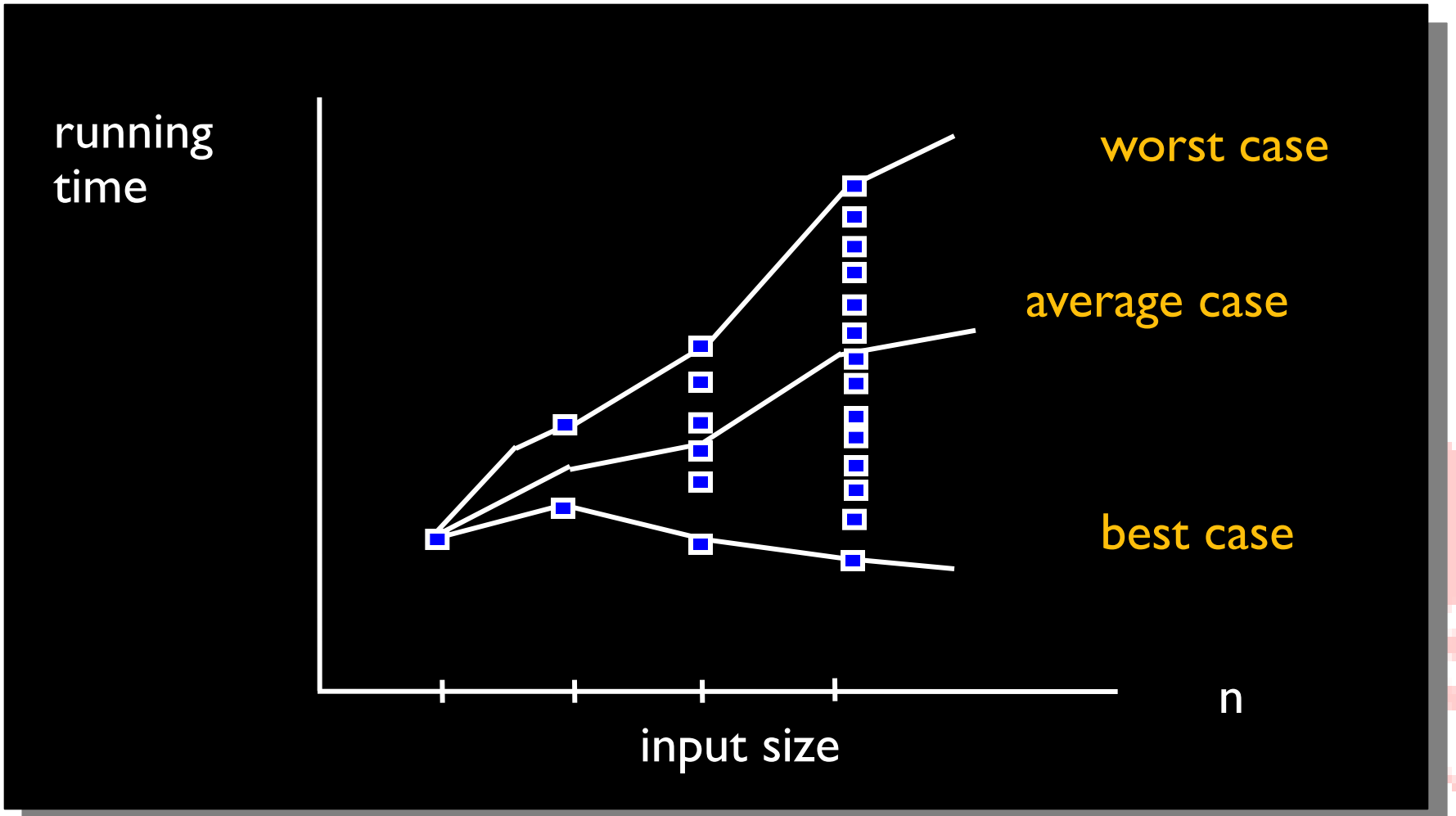


Analisa Algoritma: *How*?

- Contoh: Mencari elemen terkecil dalam sebuah array
  - Algoritma: *sequential scan* / *linear search*
  - Orde-nya: O(n) – linear

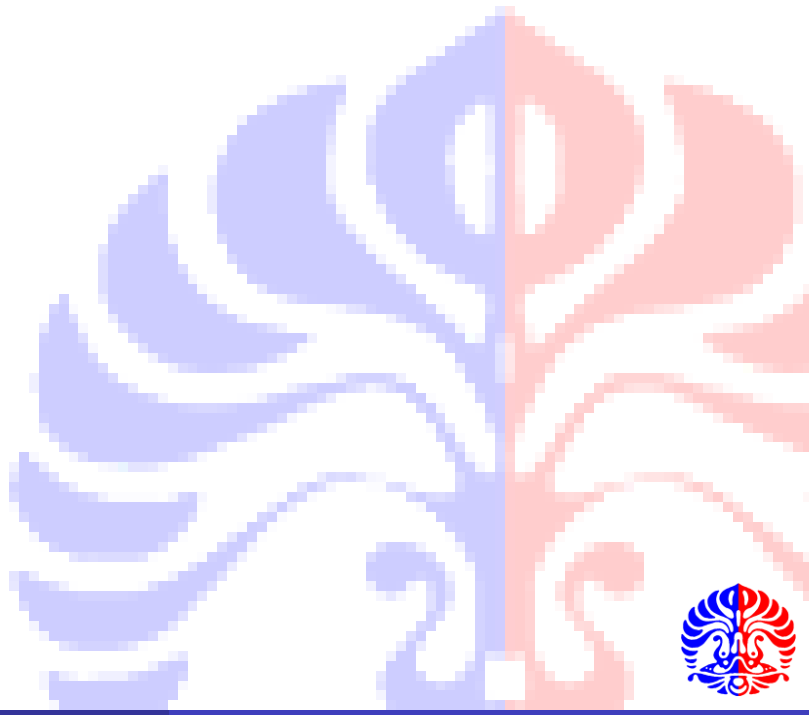
```
public static int smallest (int a[])
{    assert (array.length > 0);
     int elemenTerkecil = a[0];
     for (ii = 1; ii < a.length; ii++) {
         if (a[ii] < elemenTerkecil) {
             elemenTerkecil = a[ii];
         }
     }
     return elemenTerkecil ;
}
```

Analisa Algoritma: *How*?



Big Oh: contoh

- Sebuah fungsi kubik adalah sebuah fungsi yang suku dominannya (*dominant term*) adalah sebuah konstan dikalikan dengan n^3.
- Contoh:
  - $10\ n^3 + n^2 + 40\ n + 80$
  - $n^3 + 1000\ n^2 + 40\ n + 80$
  - $n^3 + 10000$



Dominant Term

- Mengapa hanya suku yang memiliki pangkat tertinggi/dominan saja yang diperhatikan?
- Untuk *n* yang *besar*, suku dominan lebih mengindikasikan perilaku dari algoritma.
- Untuk *n* yang *kecil*, suku dominan tidak selalu mengindikasikan perilakunya, *tetapi* program dengan input kecil umumnya berjalan sangat cepat sehingga kita tidak perlu perhatikan.

Big Oh: issues

- Apakah fungsi linier selalu lebih kecil dari fungsi kubik?
  - Untuk *n* yang kecil, bisa saja fungsi linier > fungsi kubik
  - Tetapi untuk *n* yang besar, fungsi kubik > fungsi linier
  - Contoh:
    - $f(n) = 10\ n^3 + 20\ n + 10$
    - $g(n) = 10000\ n + 10000$
    - $n = 10, f(n) = 10.210, g(n) = 110.000$
      ➔ $f(n) < g(n)$
    - $n = 100, f(n) = 10.002.010, g(n) = 1.010.000$
      ➔ $f(n) > g(n)$
- Mengapa nilai konstan/koefesien pada setiap suku tidak diperhatikan?
  - Nilai konstan/koefesien tidak berarti pada mesin yang berbeda

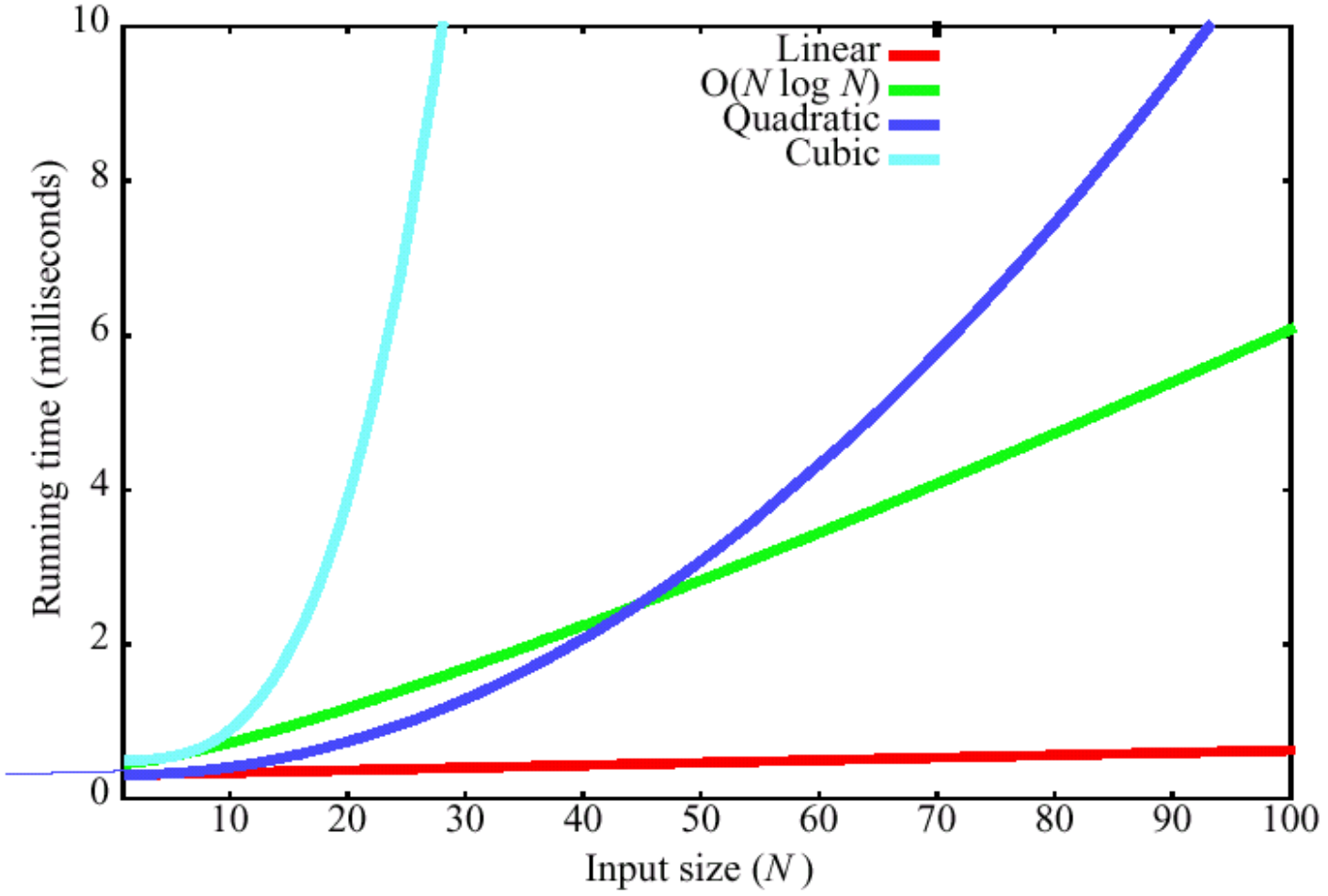
∴ Big Oh digunakan untuk merepresentasikan laju pertumbuhan (*growth rate*)

Orde Fungsi Running-Time

Function	Name
c	Constant
log N	Logarithmic
$\log^2 N$	Log-squared
N	Linear
N log N	N log N
N^2	Quadratic
N^3	Cubic
2^N	Exponential
N!	Factorial

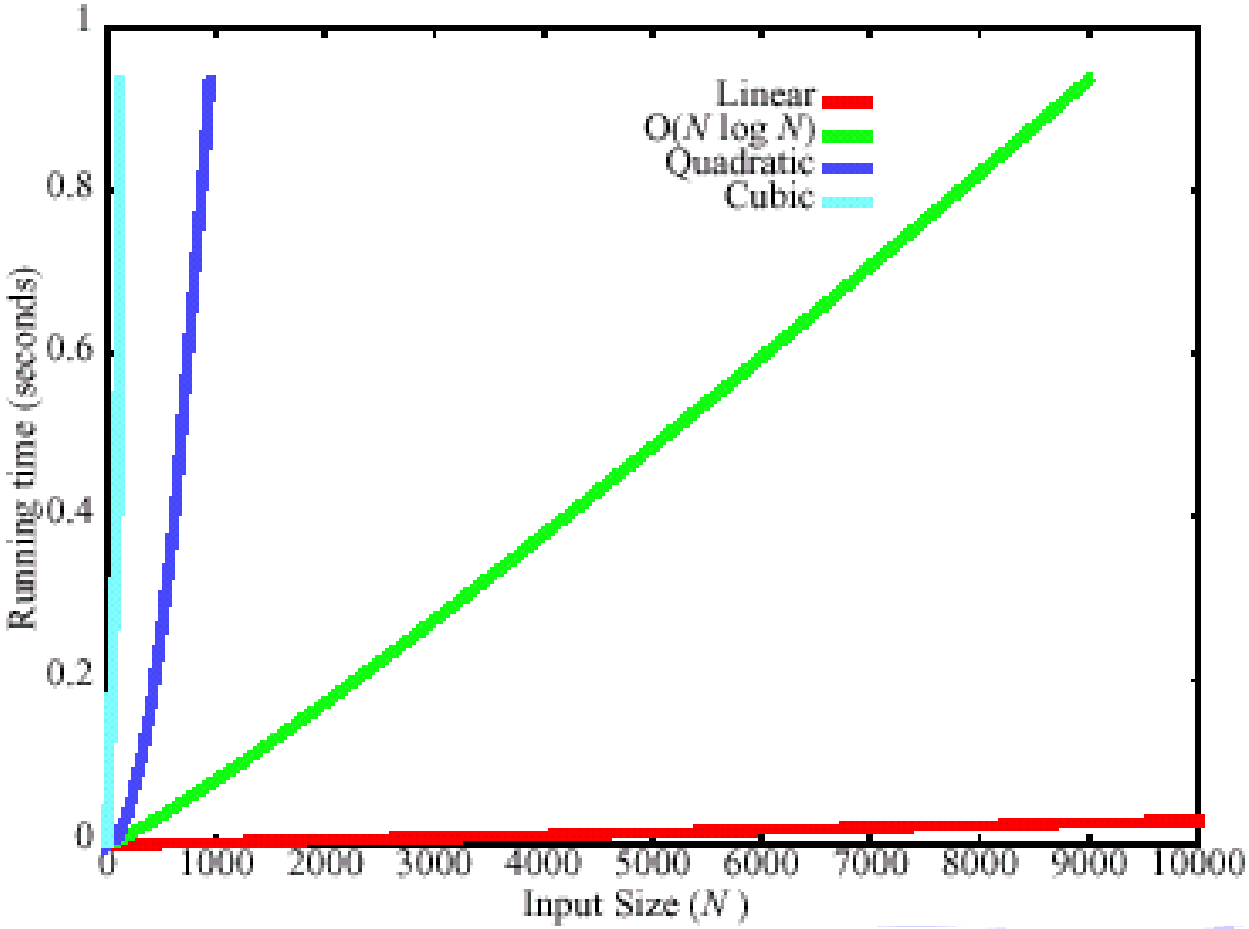
Fungsi Running-Time

- Untuk input yang sedikit, beberapa fungsi lebih cepat dibandingkan dengan yang lain.



Fungsi Running-Time (2)

- Untuk input yang besar, beberapa fungsi *running-time* sangat lambat - tidak berguna.



Contoh Algoritma

- Mencari dua titik yang memiliki jarak terpendek dalam sebuah bidang (koordinat X-Y)
  - Masalah dalam komputer grafis.
  - Algoritma *brute force*:
    - hitung jarak dari semua pasangan titik
    - cari jarak yang terpendek
  - Jika jumlah titik adalah *n*, maka jumlah semua pasangan adalah C(n, 2) = n * (n - 1) / 2
  - Orde-nya: $O(n^2)$ - kuadratik
  - Ada solusi yang O(n log n)

Contoh Algoritma

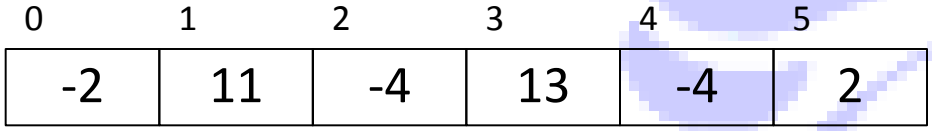
- Tentukan apakah ada tiga titik dalam sebuah bidang yang segaris (*colinier*).
  - Algoritma *brute force*:
    - periksa semua tripel titik yang terdiri dari 3 titik.
  - Jumlah pasangan: C(n, 3) = n * (n - 1) * (n - 2) / 6
  - Orde-nya: $O(n^3)$ - kubik. Sangat tidak berguna untuk 10.000 titik.
  - Ada algoritma yang kuadratik.

Studi Kasus

- Mengamati sebuah masalah dengan beberapa solusi.
- Masalah *Maximum Contiguous Subsequence Sum*
  - Diberikan (angka integer negatif dimungkinkan) $A_1, A_2, \ldots, A_N$, cari nilai maksimum dari $(A_i + A_{i+1} + \ldots + A_j)$.
- *Maximum contiguous subsequence sum* adalah nol jika semua integer adalah negatif.
- Contoh (*maximum subsequences* digarisbawahi)
  - 2 ,4- ,13 ,4- ,11 ,2-
  - 6 ,1- ,2- ,4 ,3- ,1

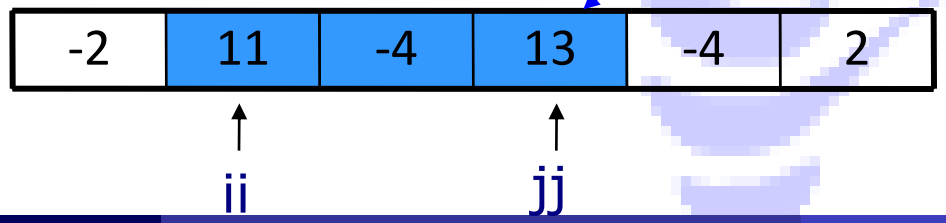
Brute Force Algorithm (1)

- Algoritma:
  - Hitung jumlah dari semua *sub-sequence* yang mungkin
  - Cari nilai maksimumnya
- Contoh:
  - jumlah *subsequence* (*start*, *end*)
    - (0,0), (0,1), (0,2), …, (0,5)
    - (1,1), (1,2), …, (1,5)
    - …
    - (5,5)



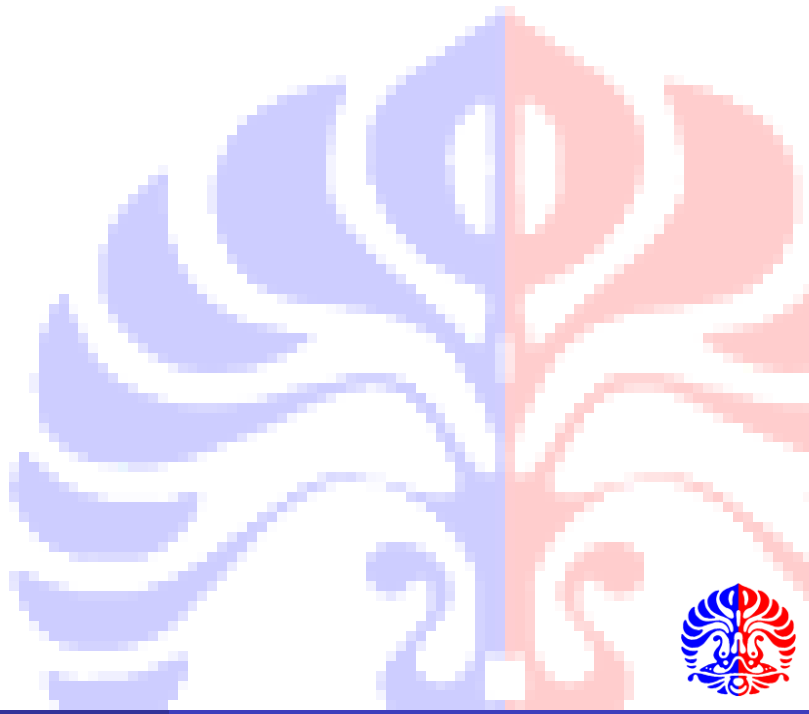
Brute Force Algorithm (2)

```
public static int maxSubSum1( int [] A )
}
        int maxSum  = 0;
        for(int ii = 0; ii < A.length; ii++) {
            for( int jj = ii; jj < A.length; jj++)
            }
                int thisSum= 0;
                for(int kk = ii; kk <= jj; kk++)
                    thisSum += A[kk];
                if( thisSum > maxSum  )
                    maxSum  = thisSum;
            }
        }
        return maxSum ;
    }
```



Analisa

- Iterasi (kk) sebanyak *N* dalam iterasi (jj) sebanyak *N* dalam iterasi (ii) sebanyak *N* artinya: $O(N^3)$, atau algoritma kubik.
- *Slight over-estimate* yang dihasilkan dari perhitungan iterasi yang kurang dari *N* adalah tidak terlalu penting (kk <= jj).



Running Time yang sesungguhnya

- Untuk $N = 100$, waktu sebenarnya adalah 0.47 detik pada sebuah komputer.
- Dapat menggunakan informasi tersebut, untuk memperkirakan waktu untuk input yang lebih besar:

$$T(N) = cN^3$$

$$T(10N) = c(10N)^3 = 1000cN^3 = 1000T(N)$$

- Ukuran input meningkat dengan kelipatan 10 kali, yang artinya meningkatkan *running time* dengan kelipatan 1000 kali.
- Untuk $N = 1000$, perkiraan waktu 470 detik. (waktu sebenarnya 449 detik).
- Untuk $N = 10{,}000$, perkiraan waktu 449000 detik (6 hari).

Bagaimana memperbaikinya?

- Membuang sebuah iterasi; Tidak selalu bisa.
- Dalam contoh sebelumnya dimungkinkan: iterasi paling dalam (*kk*) tidak diperlukan karena informasi nya terbuang.
- Nilai **`thisSum`** untuk nilai **`jj`** selanjutnya dapat dengan mudah diperoleh dari nilai **`thisSum`** yang sebelumnya:
  - Yang diperlukan: $A_{ii} + A_{ii+1} + \ldots + A_{jj-1} + A_{jj}$
  - Yang telah dihitung: $A_{ii} + A_{ii+1} + \ldots + A_{jj-1}$
  - Yang dibutuhkan adalah yang telah dihitung + A_{jj}
  - **Dengan kata lain:**
    - **sum (ii, jj) = sum (ii, jj - 1) + A_{jj}**

The Better Algorithm

```
public static int maxSubSum2( int [ ] A )
 {
     int maxSum  = 0;
     for( int ii = 0; ii < A.length; ii++ )
     {
         int thisSum = 0;
         for( int jj = ii; jj < A.length; jj++ )
         {
             thisSum += A[jj];
             if( thisSum > maxSum  )
                 maxSum  = thisSum;
         }
     }
     return maxSum ;
 }
```

Analisa

- Dengan logika yang sama: Saat ini *running time* adalah *quadratic*, or $O(N^2)$
- Perkirakan waktu eksekusi untuk input berukuran ribuan. Algoritma ini masih dapat digunakan untuk ukuran input 10 ribu.
- Ingat, bahwa algoritma kubik sudah tidak *practical* lagi bila digunakan untuk ukuran input tersebut.

Actual running time

- Untuk $N = 100$, waktu sebenarnya adalah 0.011 detik pada sebuah komputer.
- Perkirakan waktu sebenarnya untuk input lebih besar:

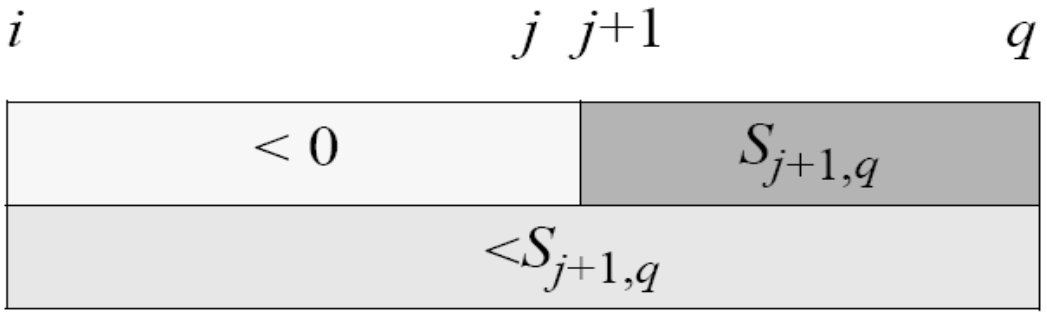
  $T(N) = cN^2$

  $T(10N) = c(10N)^2 = 100cN^2 = 100T(N)$
- Input diperbesar dengan kelipatan 10 artinya *running time* akan membesar dengan kelipatan 100.
- Untuk $N = 1000$, perkiraan *running time* adalah 1.11 detik. (waktu sebenarnya 1.12 detik).
- Untuk $N = 10{,}000$, perkiraan 111 detik (= actual).

Algoritma linear

- Algoritma Linear merupakan yang terbaik.
- Ingat: linear artinya ***O(N)***.
- *Running time* yang linear selalu sebanding dengan ukuran input. Sulit untuk membuat algoritma yang lebih baik dari linear (kecuali ada rumusan tertentu).
- Jika input membesar dengan kelipatan 10, maka *running time* juga hanya akan membesar dengan kelipatan yang sama.

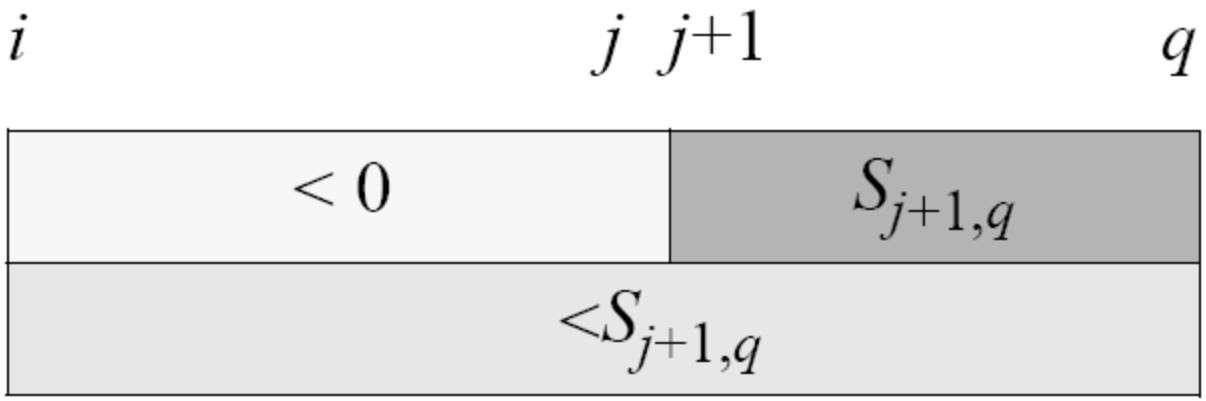
Ide



- $\mathbf{A_{i,j}}$ adalah kumpulan bilangan mulai dari urutan i hingga urutan j.
- $\mathbf{S_{i,j}}$ adalah jumlah dari kumpulan bilangan tersebut.
- Theorema: Untuk $\mathbf{A_{i,j}}$ dengan $\mathbf{S_{i,j} < 0}$. Jika $\mathbf{q > j}$, maka $\mathbf{A_{i,q}}$ bukanlah deretan terurut yang terbesar.

Bukti Theorema

- Bukti:
  - $S_{i,q} = S_{i,j} + S_{j+1,q}$
  - $S_{i,j} < 0 \rightarrow S_{i,q} < S_{j+1,q}$



Program – versi 1

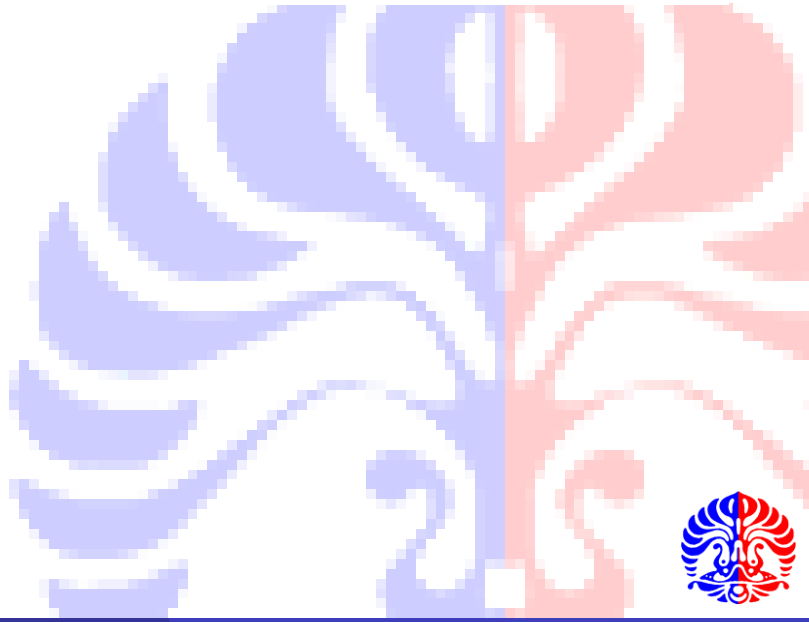
```
static public int
maximumSubSequenceSum3 (int a[])
{
    int maxSum = 0;
    int thisSum = 0;
    for (int jj = 0; jj < a.length; jj++) {
        thisSum += a[jj];
        if (thisSum > maxSum) {
            maxSum = thisSum;
        } else if (thisSum < 0) {
            thisSum = 0;
        }
    }
    return maxSum;
}
```

Program – versi 2

```
static public int
maximumSubSequenceSum3b (int a[])
{
    int thisSum = 0, maxSum = 0;
    for (int ii = 0; ii < a.length; ii++) {
        thisSum = Math.max(0, a[ii] + thisSum);
        maxSum  = Math.max(thisSum, maxSum);
    }
    return maxSum;
}
```

Running Time

N	$O(N^3)$	$O(N^2)$	$O(N \log N)$	$O(N)$
10	0.00103	0.00045	0.00066	0.00034
100	0.47015	0.01112	0.00486	0.00063
1,000	448.77	1.1233	0.05843	0.00333
10,000	NA	111.13	0.68631	0.03042
100,000	NA	NA	8.01130	0.29832



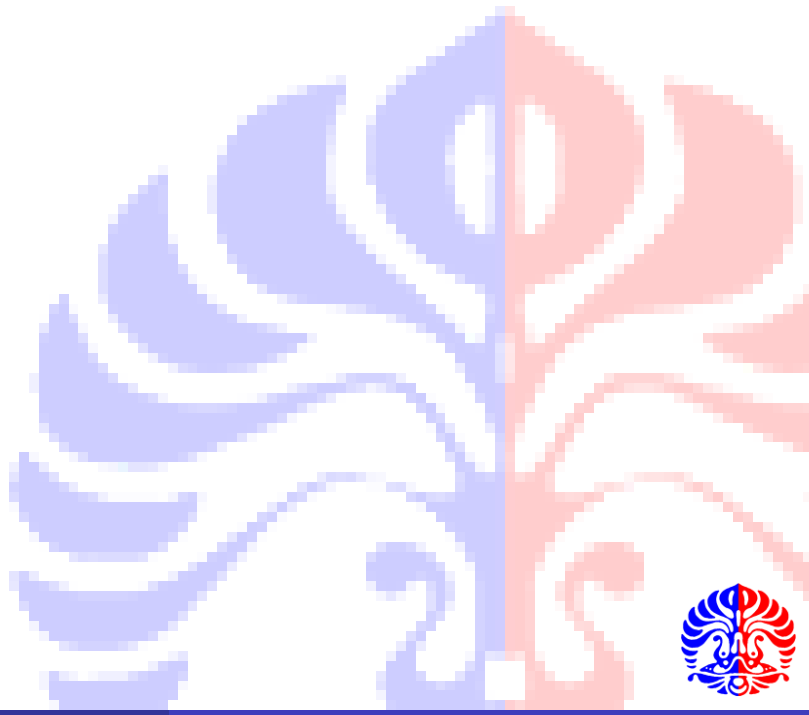
Running Time: on different machines

- Algoritma Kubik pada mesin Alpha 21164 at 533 Mhz menggunakan C compiler (mewakili mesin yang lambat)
- Algoritma Linear pada mesin Radio Shack TRS-80 Model III (a 1980 personal computer with a Z-80 processor running at 2.03 Mhz) using interpreted Basic (mewakili mesin cepat)

n	Alpha 21164A, C compiled, Cubic Algorithm	TRS-80, Basic interpreted, Linear Algorithm
10	0.6 microsecs	200 milisecs
100	0.6 milisecs	2.0 secs
1,000	0.6 secs	20 secs
10,000	10 mins	3.2 mins
100,000	7 days	32 mins
1,000,000	19 yrs	5.4 hrs

Running Time: Moral Of The Story

- Bahkan teknik programming yang terbaik tak akan dapat membuat sebuah algoritma yang tidak efisien menjadi cepat.
- Sebelum kita menginvestasikan waktu untuk mencoba mengoptimisasi program, kita harus pastikan algoritma nya sudah yang paling efisien.



Algoritma Logaritme

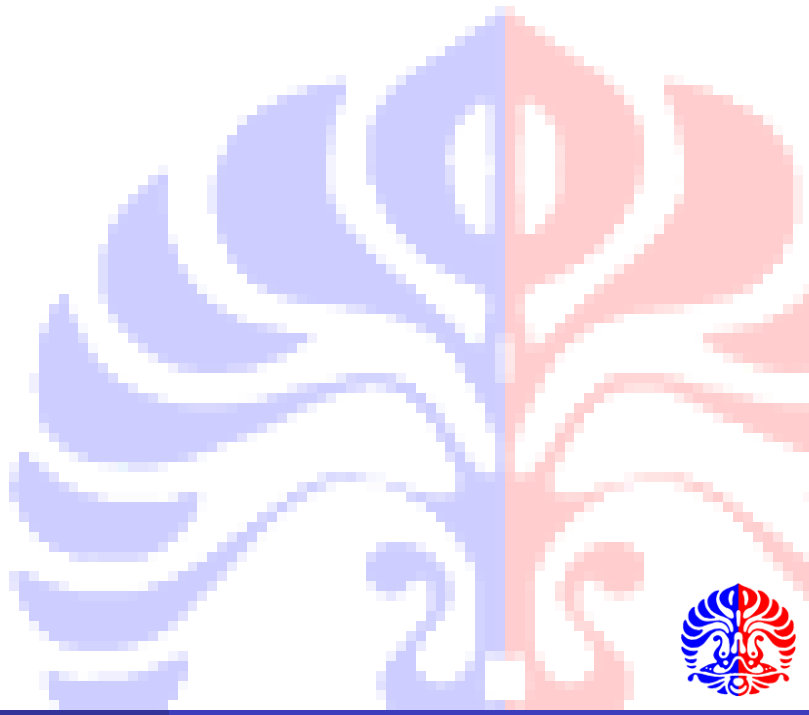
- Definisi Formal
  - Untuk setiap $B, N > 0$, $\log_B N = K$, if $B^K = N$.
  - Jika (base) B diabaikan, maka default-nya adalah 2 dalam konteks ilmu komputer (binary representation).
- Contoh:
  - log 32 = 5 (karena $2^5 = 32$)
  - log 1024 = 10
  - log 1048576 = 20
  - log 1 milyard = sekitar 30
- logaritme berkembang jauh lebih lambat dari N dan lebih lambat dari akar kuadrat dari N.

Contoh Algoritma Logaritme

- **BITS IN A BINARY NUMBER**
  - Berapa banyak bits dibutuhkan untuk merepresentasikan bilangan bulat?
- **REPEATED DOUBLING**
  - Mulai dari $X = 1$, berapa kali X harus dikalikan dua agar mendekati nilai N?
- **REPEATED HALVING**
  - Mulai dari $X = N$, jika N dibagi dua terus menerus, berapa kali iterasi agar membuat N lebih kecil atau sama dengan 1 (Halving rounds up).
- Jawaban untuk seluruh pertanyaan diatas adalah: log N (dibulatkan).

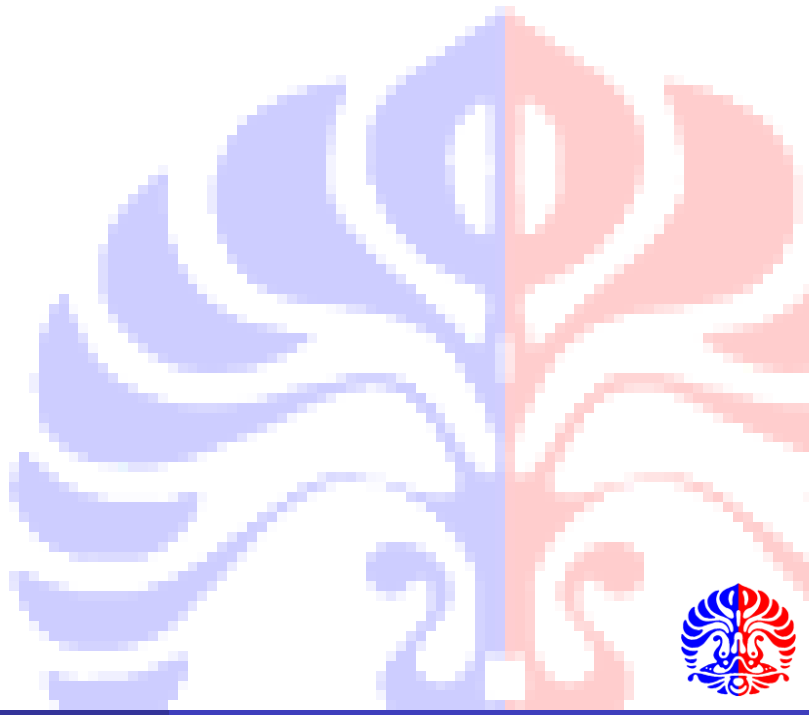
Mengapa log *N*?

- *B* bits menyatakan 2^B bilangan bulat. Maka 2^B adalah minimal sebesar *N*, maka *B* adalah minimal log *N*. Karena *B* bilangan bulat, maka pembulatan dibutuhkan.
- Pendekatan serupa untuk contoh-contoh lain.



Repeated Halving Principle

- Sebuah algoritma adalah $O(\log N)$ jika membutuhkan waktu konstan untuk membagi input permasalahan dan mengerjakan masing-masing-nya secara rekursif. (biasanya 1/2).
- Penjelasan: Akan terjadi sebanyak $\log N$ dari proses konstan tersebut.



Linear Search

- Bila diberikan sebuah bilangan bulat *X* dan sebuah array *A*, kembalikan posisi *X* dalam *A* atau sebuah tanda bila tidak ada *X* dalam *A*. Jika *X* muncul lebih dari sekali, kembalikan posisi manapun. Array *A* tidak perlu diubah.
- Jika array input tidak terurut, solusinya adalah menggunakan linear search. Running times:
  - pencarian tidak berhasil: *O*(*N*); setiap element diperiksa
  - pencarian berhasil:
    - Worst case: *O*(*N*); setiap element diperiksa
    - Average case: *O*(*N*); setengah bagian diperiksa
- Apakah kita akan dapat melakukannya lebih baik bila diketahui array input terurut?

Binary Search

- Ya! Gunakan binary search.
- Lihat bilangan ditengah (asumsi array terurut dari kiri ke kanan)
  - Kasus 1: Jika *X* lebih kecil dari bilangan ditengah, maka hanya perlu lihat sub array bagian kiri.
  - Kasus 2: Jika *X* lebih besar dari bilangan ditengah, maka hanya perlu lihat sub array bagian kanan
  - Kasus 3: Jika *X* sama dengan bilangan ditengah, maka selesai.
  - Base Case: Jika input sub array kosong, *X* tidak ditemukan.
- Logaritme sesuai dengan *the repeated halving principle*.
- Algoritma binary search pertama dipublikasikan tahun 1946. Published binary search pertama tanpa bugs tidak muncul hingga 1962.

```
/**
    Performs the standard binary search using two comparisons per
    level.
        @param a the array
        @param x the key
        @exception ItemNotFound if appropriate.
        @return index where item is found.
*/
public static int binarySearch (Comparable [ ] a,
    Comparable x ) throws ItemNotFound
{
    int low = 0;
    int high = a.length - 1;
    int mid;

    while( low <= high )
    {
        mid = (low + high) / 2;
        if (a[mid].compareTo (x) < 0) {
            low = mid + 1;
        } else if (a[mid].compareTo (x) > 0) {
            high = mid - 1;
        } else {
            return mid;
        }
    }
    throw new ItemNotFound( "BinarySearch fails" );
}
```

Analisa program Binary Search

- Dapat melakukan satu perbandingan tiap iterasi dari pada dua iterasi dengan cara menggantikan base case:
  - Save the value returned by **`a[mid].compareTo (x)`**
- *Average case* dan *worst case dalam algoritma hasil revisi adalah sama* : 1 + log *N* perbandingan (dibulatkan). Contoh: If *N* = 1,000,000, maka 20 bilangan dibandingkan.
- Sequential search akan lebih banyak 25,000 kali dalam kondisi rata-rata (*average case*).

Big-Oh Rules (1)

- Ekspresi matematika untuk menyatakan tingkat laju pertumbuhan relatif:
  - DEFINITION: (Big-Oh) $T(N) = O(F(N))$ jika ada konstan positif c *dan* N_0 sehingga $T(N) \leq c\ F(N)$ untuk $N \geq N_0$.
  - DEFINITION: (Big-Omega) $T(N) = \Omega(F(N))$ jika ada konstan c *dan* N_0 sehingga $T(N) \geq c\ F(N)$ untuk $N \geq N_0$
  - DEFINITION: (Big-Theta) $T(N) = \Theta(F(N))$ jika dan hanya jika $T(N) = O(F(N))$ dan $T(N) = \Omega(F(N))$.
  - DEFINITION: (Little-Oh) $T(N) = o(F(N))$ jika dan hanya jika $T(N) = O(F(N))$ dan $T(N) \neq \Theta\ (F(N))$.

Big-Oh Rules (2)

- **Arti dari beberapa fungsi tingkat laju.**

$T(N) = O(F(N))$	Growth of $T(N)$ is $\leq$ growth of $F(N)$
$T(N) = \Omega(F(N))$	Growth of $T(N)$ is $\geq$ growth of $F(N)$
$T(N) = \Theta(F(N))$	Growth of $T(N)$ is = growth of $F(N)$
$T(N) = o(F(N))$	Growth of $T(N)$ is $<$ growth of $F(N)$

- Jika ada lebih dari satu parameter, maka aturan tersebut berlaku untuk setiap parameter.
  - $4\ n \log(m) + 50\ n^2 + 500\ m + 1853$

    ➔ $O(n \log(m) + n^2 + m)$

  - $4\ m \log(m) + 50\ n^2 + 500\ m + 853$

    ➔ $O(m \log(m) + n^2)$

Latihan

- Urutkan fungsi berikut berdasarkan laju pertumbuhan (growth rate)
  - $N, \sqrt{N}, N^{1.5}, N^2, N \log N, N \log \log N, N \log^2 N, N \log (N^2), 2/N, 2^N, 2^{N/2}, 37, N^3, N^2 \log N$
- $A^5 + B^5 + C^5 + D^5 + E^5 = F^5$
  - $0 < A \leq B \leq C \leq D \leq E \leq F \leq 75$
  - Hanya memiliki satu solusi. Berapa?

Summary

- Algoritma
  - Suatu set instruksi (*unambiguous*) yang harus diikuti oleh komputer untuk memecahkan suatu masalah, dan harus berhenti (*terminate*) dalam batas waktu yang wajar (*reasonable*)
- Analisa algoritma
  - banyak *resource* (*time* & *space*) yang diperlukan oleh sebuah algoritma berdasarkan besarnya input
  - menggunakan Big Oh notation – dominant terms, upper bound
    - Bukan menggunakan *wall clock*
  - *best case, average case, worst case*