باسمه تعالی

# پروژه‌ی درس آمار و احتمال مهندسی

## آشنایی با زنجیره‌های مارکوف

استاد درس

دکتر محمّدعلی مدّاح‌علی

آخرین مهلت تحویل:

۳۱ خرداد ۱۳۹۹

# ۱ بازهم شستا! (بلاتشبیه مقدّمه)

قصّه را با یک مثال شروع می‌کنیم...

فرض کنید شما می‌خواهید در بازار سرمایه فعّالیّت کنید و از این روش پول‌دار شوید! احتمالاً می‌دانید که در این بازار، شما باید سهم شرکت‌های مختلف را بخرید و بفروشید. شما هنگامی سود می‌کنید که یک سهم را در قیمت پایینی خریداری کرده و در قیمت بالاتری بفروشید. دقیقاً به همین علّت است که وقتی شاخص بورس بالا می‌رود، همه خوش‌حال می‌شوند. زیرا سهم‌هایی که قبلاً خریده بودند ارزش‌مندتر شده و بعداً می‌توانند به قیمت بالاتری آن‌ها را بفروشند. پس تعیین‌کننده‌ترین عامل، **قیمت** است.

بیایید از یک دیدگاه احتمالاتی به این فرآیند بنگریم. فقط یک سهم را در نظر می‌گیریم قیمت آن را در هر لحظه با $X(t)$ نشان می‌دهیم. کار کردن با توابع پیوسته کمی سخت است و در نتیجه از قیمت (که در هر لحظه در حال تغییر است) نمونه‌برداری می‌کنیم. مثلاً هر $T$ دقیقه. (این اتّفاق در واقعیّت هم رخ می‌دهد و افرادی که بازار را تحلیل می‌کنند، با نمونه‌های قیمت کار می‌کنند.) حالا یک دنباله‌ی گسسته داریم:

$$X_n = X(nT)$$

چرا از حروف بزرگ استفاده کردیم؟ چون می‌خواهیم هرکدام از $X_i$ها را با یک متغیّر تصادفی مدل کنیم، به تعبیر دیگر یک دنباله از متغیّرهای تصادفی داریم. بازهم برای سادگی فرض می‌کنیم که $X_i$ها متغیّرهای تصادفی گسسته‌اند (و نه پیوسته). هم‌چنین فرض می‌کنیم که قیمت‌ها از $t = ۰$ (که معادل است با $n = ۰$) آغاز می‌شوند. یعنی دنباله‌ی قیمت‌ها را می توان به صورت $\{X_n\}_{n=۰}^{\infty}$ نشان داد.

فرض کنید الان در لحظه‌ی $n$ هستیم و می‌خواهیم درباره‌ی قیمت در لحظه‌ی $n + ۱$ صحبت کنیم. (وقتی می‌گویم می‌خواهیم درباره‌ی یک متغیّر تصادفی صحبت کنیم، یعنی می‌خواهیم توزیع آن را بیابیم!) وقتی ما در لحظه‌ی $n$ هستیم، یعنی تاریخچه‌ی بازار از ابتدا تا لحظه‌ی $n$ را داریم و مقادیر متغیّرهای تصادفی $X_۰, X_۱, \cdots, X_n$ را می‌دانیم. در نتیجه چیزی که برای ما مهم است، توزیع شرطی است:

$$\mathbb{P}[X_{n+۱}|X_۰, X_۱, \cdots, X_n]$$

اگر این توزیع شرطی را داشته باشیم، می‌توانیم توزیع $X_{n+۱}$ را بیابیم و عملاً همه‌ی اطّلاعات درباره‌ی آن را داریم. ولی ما دوست نداریم این‌قدر مدل پیچیده‌ای داشته باشیم!

# ۲ از دِی که گذشت، هیچ از او یاد مَکن! [1]

در یک زنجیره‌ی مارکوف، به شرط دانستن $X_n$، توزیع $X_{n+۱}$ از $X_i$های قبلی مستقل است. یعنی:

$$\mathbb{P}[X_{n+۱}|X_۰, X_۱, \cdots, X_n] = \mathbb{P}[X_{n+۱}|X_n]$$

به تعبیر دیگر، داشتن مقدار دنباله در لحظه‌ی $n$ برای یافتن توزیع در لحظه‌ی $n + ۱$ کافیست و نیازی به مقادیر لحظات قبلی نداریم. هم‌چنین توزیع شرطی $\mathbb{P}[X_{n+۱} = j|X_n = i]$ به $n$ وابسته نیست و با گذشت زمان عوض نمی‌شود. در نتیجه می‌توان آن را با $p_{ij}$ نشان داد. حال اگر فرض کنیم مقادیر ممکن برای همه‌ی $X_i$ها به صورت $\mathcal{X} = \{۱, ۲, \cdots, M\}$ هستند، می‌توان $p_{ij}$ ها را در یک ماتریس $\mathbf{P}_{M\times M}$ کنار هم قرار داد. این ماتریس را ماتریس انتقال می‌نامیم. درایه‌ی سطر $i$ام و ستون $j$ام ماتریس $\mathbf{P}$ عبارت است از $p_{ij}$.

در نتیجه اگر ماتریس انتقال و توزیع $X_۰$ را داشته باشیم، می‌توانیم توزیع هر $X_n$ را بیابیم. توزیع $X_۰$ (یعنی احتمال آن‌که $X_۰ = i$ شود به ازای $i$های مختلف) را با بردار $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_M]$ نشان می‌دهیم که $\lambda_i = \mathbb{P}[X_۰ = i]$.

[1] از دی که گذشت، هیچ ازو یاد مکن/ فردا که نیامده‌ست، فریاد مکن
بر نامده و گذشته بنیاد مکن/ حالی خوش باش و عمر بر باد مکن [خیّام]

**تعریف ۱.** دنباله‌ی $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ را یک زنجیره‌ی مارکوف با توزیع اولّیه‌ی $\boldsymbol{\lambda}$ و ماتریس انتقال $\mathbf{P}$ می‌نامیم، اگر

۱. $X_0$ دارای توزیع $\boldsymbol{\lambda}$ باشد.

۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=j|X_0=k_0, X_1=k_1, \cdots, X_n=i] = \mathbb{P}[X_{n+1}=j|X_n=i] = p_{ij} \qquad (1)$$

و $\mathbf{P}=[p_{ij}]_{M\times M}$

---

**پرسش ۱.** دو مثال از دنباله‌های مارکوف بیابید! (مثال‌هایی که در آن‌ها استقلال ذکر شده در رابطه‌ی (۱) واقعاً برقرار باشد!)

**پرسش ۲.** ثابت کنید که به ازای هر $i \in \mathcal{X}$،

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1$$

**پرسش ۳.** اگر در یک دنباله‌ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$، توزیع $X_n$ را با $\boldsymbol{\lambda}_n$ نشان دهیم، ثابت کنید:

$$\boldsymbol{\lambda}_n = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}^n$$

**پرسش ۴.** اگر در مورد دنباله‌ی $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ بدانیم که $\mathbb{P}[X_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n] = \mathbb{P}[X_{n+1}|X_{n-1}, X_n]$، ثابت کنید که می‌توان این دنباله را به صورت یک دنباله‌ی مارکوف نوشت.

در حالت کلّی‌تر، ثابت کنید اگر یک دنباله دارای حافظه‌ی محدودی به طول $K$ باشد، یعنی:

$$\mathbb{P}[X_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_n] = \mathbb{P}[X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_{n-K+1}]$$

ثابت کنید که می‌توان این دنباله را به صورت یک دنباله‌ی مارکوف نوشت.

**پرسش ۵.** ثابت کنید که دنباله‌ی $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$، یک زنجیره‌ی مارکوف با توزیع اولّیه‌ی $\boldsymbol{\lambda}$ و ماتریس انتقال $\mathbf{P}=[p_{ij}]_{M\times M}$ است، اگر و تنها اگر به ازای هر $n$ و به ازای هر $i_0, i_1, \cdots, i_n \in \mathcal{X}$ داشته باشیم:

$$\mathbb{P}[X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n] = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

---

هرکدام از اعضای $\mathcal{X}$ را یک «حالت» از زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ می‌نامیم. یک زنجیره‌ی مارکوف را می توان با یک گراف وزن‌دار و جهت‌دار نیز نشان داد. رأس‌های این گراف، حالت‌های زنجیره‌ی مارکوف هستند و اگر $p_{ij} > 0$، یک یال از رأس $i$ به رأس $j$ وجود دارد و وزن این یال، برابر با $p_{ij}$ است.

---

**پرسش ۶.** گراف متناظر با زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ با ماتریس انتقال $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ را ترسیم کنید.

**پرسش ۷.** (معادلات چپمن-کلموگروف) یک زنجیره‌ی مارکوف در نظر گرفته و تعریف کنید

$$p_{ij}(m, m+n) = \mathbb{P}(X_{m+n}=j\,|X_m=i).$$

نشان دهید

$$p_{ij}(m, m+n+r) = \sum_k p_{ik}(m, m+n) p_{kj}(m+n, m+n+r)$$

اگر تعریف کنیم $\mathbf{P}(m, m+n) = [p_{ij}(m, m+n)]_{M\times M}$، به کمک معادله‌ی قبل نشان دهید $\mathbf{P}(m, m+n) = \mathbf{P}^n$.

---

**تعریف ۲.** درایه‌ی سطر $i$ام و ستون $j$ام ماتریس $\mathbf{P}^n$ را با $p_{ij}^{(n)}$ نشان می‌دهیم که با توجه به معادلات چپمن-کلموگروف، می دانیم برابر احتمال رفتن از حالت $i$ به حالت $j$ در دقیقاً $n$ قدم است.

## ۳ بس در طلبت کوشش بی‌فایده کردیم! [۲]

فرض کنید در لحظه‌ی $n$، در حالت $i$ از دنباله‌ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ قرار داریم. سؤال آنست که آیا حالت $j$ برای ما دسترسی‌پذیر است یا خیر؟ به تعبیر دیگر، می‌توان پس از طی‌کردن احتمالا چند گام، از حالت $i$ به $j$ رسید؟

**تعریف ۳.** فرض کنید در لحظه‌ی $n$، در حالت $i$ از یک زنجیره‌ی مارکوف قرار داریم، حالت $j$ را دسترسی‌پذیر می‌گوییم و می‌نویسیم $i \to j$ اگر یک $m \geq 0$ وجود داشته باشد که $\mathbb{P}[X_{n+m} = j | X_n = i] > 0$

**تعریف ۴.** می‌گوییم حالت $i$ در ارتباط با حالت $j$ است و می‌نویسیم $i \leftrightarrow j$ اگر و تنها اگر $i \to j$ و $j \to i$

**پرسش ۸.** ثابت کنید که $i \to j$، اگر و تنها اگر یک $n \geq 0$ و حالت‌های $i_0, i_1, \cdots, i_n$ که در آن‌ها $i_0 = i$ و $i_n = j$ وجود داشته باشند، به قسمی که

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} > 0$$

**پرسش ۹.** ثابت کنید که «در ارتباط بودن» یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی حالت‌ها $(\mathcal{X})$ است. (جبر و احتمال، یادت بخیر!) و در نتیجه می‌تواند $\mathcal{X}$ را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز کند. این کلاس‌ها را کلاس‌های مخابراتی زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}$ می‌نامیم.

**تعریف ۵.** یک کلاس مخابراتی $C$ را بسته می‌نامیم، هرگاه به ازای هر حالت $i \in C$، اگر $i \to j$، آن‌گاه $j \in C$.

**پرسش ۱۰.** کلاس‌های مخابراتی یک زنجیره‌ی مارکوف با ماتریس انتقال زیر را بیابید:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

کدام کلاس‌ها بسته هستند؟

**تعریف ۶.** یک زنجیره‌ی مارکوف را irreducible می‌نامیم هرگاه تنها یک کلاس مخابراتی داشته باشد.

**تعریف ۷.** دوره تناوب یک حالت $s_i$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_i = \gcd\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

که در آن gcd بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک است.

**پرسش ۱۱.** یک زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}$ با $\mathcal{X} = \mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i + 1 | X_n = i] = p \quad \text{و} \quad \mathbb{P}[X_{n+1} = i - 1 | X_n = i] = 1 - p$$

و همچنین $X_0 = 0$. دوره‌ی تناوب حالت‌های این زنجیره‌ی مارکوف را محاسبه کنید.

**پرسش ۱۲.** نشان دهید دوره‌ی تناوب تمام اعضای یک کلاس مخابراتی با یکدیگر برابر است. به عبارت دیگر، نشان دهید که اگر $i \leftrightarrow j$ آنگاه $d_i = d_j$.

[۲] بس در طلبت کوشش بی‌فایده کردیم/ چون طفل دوان در پی گنجشک پریده [سعدی]

## ۴ روز فراق را که نَهد در شمار عمر؟ [۳]

زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}_{n=۰}^{\infty}$ با ماتریس انتقال $\mathbf{P}$ را در نظر بگیرید. یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی حالت‌ها مانند $A$ را در نظر می‌گیریم. زمان برخورد برای این زیرمجموعه که با $H^A$ نشان داده می‌شود، یک متغیّر تصادفی است و برابر است با مینیمم تعداد گام‌هایی که طول می‌کشد تا حالت دنباله، عضوی از مجموعه‌ی $A$ شود.

$$H^A = \inf\{n \geq ۰ : X_n \in A\}$$

در تعریف بالا، اینفیمم یک مجموعه‌ی تُهی را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم.
اگر حالت اوّلیه‌ی زنجیره را $i$ فرض کنیم، احتمال آن‌که «بالأخره» حالت مجموعه عضوی از $A$ شود را با $h_i^A$ نشان می‌دهیم.

$$h_i^A = \mathbb{P}[H^A < \infty | X_۰ = i]$$

اگر $A$ یک کلاس بسته باشد، $h_i^A$ را «احتمال جذب» می‌نامیم.
هم‌چنین با شروع از حالت $i$، امید ریاضی تعداد گام‌های لازم برای آن‌که حالت زنجیره عضو مجموعه‌ی $A$ شود را با $k_i^A$ نشان می‌دهیم.

$$k_i^A = \mathbb{E}[H^A | X_۰ = i]$$

**پرسش ۱۳.** ثابت کنید که برای هر زیرمجموعه‌ی $A$، بردار $\mathbf{h}^A = [h_۱^A, h_۲^A, \cdots, h_M^A]$ جواب کمینه‌ی دستگاه معادلات خطّی زیر است:

$$\begin{cases} h_i^A = ۱ & \forall i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in \mathcal{X}} p_{ij} h_j^A & \forall i \notin A \end{cases} \tag{۲}$$

(جواب کمینه به آن معناست که اگر دستگاه (۲) جواب یکتا نداشته باشد، جوابی را انتخاب می‌کنیم که مقدارش در هر $i \in \mathcal{X}$، کمینه باشد)

**پرسش ۱۴.** ثابت کنید که برای هر زیرمجموعه‌ی $A$، بردار $\mathbf{k}^A = [k_۱^A, k_۲^A, \cdots, k_M^A]$ جواب کمینه‌ی دستگاه معادلات خطّی زیر است:

$$\begin{cases} k_i^A = ۰ & \forall i \in A \\ k_i^A = ۱ + \sum_{j \in \mathcal{X}} p_{ij} k_j^A & \forall i \notin A \end{cases} \tag{۳}$$

(جواب کمینه به آن معناست که اگر دستگاه (۳) جواب یکتا نداشته باشد، جوابی را انتخاب می‌کنیم که مقدارش در هر $i \in \mathcal{X}$، کمینه باشد)

**پرسش ۱۵.** زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}$ با ماتریس انتقال $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. $\mathbf{h}^{\{۴\}}$ و $\mathbf{k}^{\{۱,۴\}}$ را بیابید.

[۳] بی عمر زنده‌ام من و این بس عجب مدار/ روز فراق را که نهد در شمار عمر؟ [حافظ]

## ۵ خوشا رفتن از خود، رسیدن به خویش [۴]

(این بخش از پروژه امتیازی است!)

یک حالت زنجیره‌ی مارکوف، بازگشتی نامیده می‌شود اگر با شروع از آن حالت، با احتمال یک ، بالأخره به آن حالت باز گردیم. در ادامه به بیان تعریف دقیق این ویژگی می‌پردازیم. تعریف دقیق بازگشتی بودن یک حالت به این صورت است:

**تعریف ۸.** حالت $i$ در یک زنجیره‌ی مارکوف، بازگشتی نامیده می‌شود هرگاه

$$\mathbb{P}[\exists\, n \geq ۱ \quad : \quad X_n = i | X_۰ = i] = ۱.$$

اگر حالتی بازگشتی نباشد، آن را گذرا می‌نامیم.

**تعریف ۹.** احتمال این که با شروع از حالت $i$ ام، اولین عبور از حالت $j$ در $n$ مرحله اتفاق بیافتد را $f_{ij}(n)$ می‌نامیم. به عبارت دیگر

$$f_{ij}(n) = \mathbb{P}[X_۱ \neq j, X_۲ \neq j, \ldots, X_{n-۱} \neq j, X_n = j | X_۰ = i].$$

همچنین احتمال این‌که با شروع از $i$، زنجیره بالاخره به $j$ برسید را با $f_{ij}$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$f_{ij} = \sum_{n=۱}^{\infty} f_{ij}(n).$$

توجه کنید که حالت $i$ بازگشتی است اگر و تنها اگر $f_{ii} = ۱$. برای مطالعه‌ی خواص بازگشتی بودن حالت‌ها، دو تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=۰}^{\infty} s^n p_{ij}^{(n)}, \qquad F_{ij}(s) = \sum_{n=۰}^{\infty} s^n f_{ij}(n)$$

که در آن <u>$p_{ij}^{(n)}$ احتمال رفتن از حالت $i$ به $j$ در $n$ مرحله است.</u> (از طرف دیگر، می‌دانیم که $p_{ij}^{(n)}$ درایه‌ی سطر $i$ام و ستون $j$ام ماتریس $\mathbf{P}^n$ است.) همچنین تعریف می‌کنیم $p_{ij}^{(۰)} = \delta_{ij}$ و $f_{ij}(۰) = ۰$.

---

**پرسش ۱۶.** (امتیازی) نشان دهید

$$P_{ii}(s) = ۱ + F_{ii}(s) P_{ii}(s)$$
$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s) P_{jj}(s) \quad if \quad i \neq j$$

(راهنمایی: دو حالت $i$ و $j$ را معیّن فرض کنید، دو رویداد $A_m$ و $B_m$ را به صورت

$$A_m = \{X_m = j\} \quad , B_m = \{X_r \neq j \quad for \quad ۱ \leq r < m, X_m = j\}$$

تعریف کنید و دو احتمال $\mathbb{P}[A_m | X_۰ = i]$ و $\mathbb{P}[A_m \cap B_r | X_۰ = i]$ را بررسی کنید.)

**پرسش ۱۷.** (امتیازی) به کمک پرسش قبل، نشان دهید:

۱. اگر $\sum_n p_{jj}^{(n)} = \infty$ آن‌گاه حالت $j$ بازگشتی است. همچنین در این صورت برای هر $i$ و $j$ ای که $f_{ij} > ۰$ داریم

$$\sum_n p_{ij}^{(n)} = \infty.$$

[۴] خوشا رقص مردانی از آینه/ سواران میدانی از آینه
خوشا رفتن از خود، رسیدن به خویش/ سفر در خیابانی از آینه [قیصر امین‌پور]

۲. اگر $\sum_n p_{jj}^{(n)} < \infty$ آنگاه حالت $j$ گذرا است. همچنین در این صورت برای هر $i$ داریم

$$\sum_n p_{ij}^{(n)} < \infty.$$

**پرسش ۱۸.** (امتیازی) به کمک پرسش قبل نشان دهید که اگر حالت $j$ گذرا باشد، آن‌گاه برای هر $i$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \circ.$$

**پرسش ۱۹.** (امتیازی) نشان دهید که یک حالت $i$ بازگشتی است اگر و تنها اگر امید ریاضی تعداد دفعات عبور از حالت $i$ به شرط شروع کردن از حالت $i$ نامتناهی باشد.

**پرسش ۲۰.** (امتیازی) بازگشتی یا گذرا بودن حالت‌ها در زنجیره‌ی مارکوف پرسش (۱۱) را بر حسب $p$ مشخص کنید.

## ۶ عاقبت گرگ‌زاده گرگ شود، گرچه با آدمی بزرگ شود! [۵]

در مطالعه‌ی زنجیره‌های مارکوف، بسیار علاقه‌مندیم که به بررسی خواص $X_n$ در حدّ $n \to \infty$ بپردازیم. مسائلی از جنس اینکه آیا با افزایش $n$، آیا توزیع $X_n$ به توزیع مشخصی میل خواهد کرد یا نه و نحوه‌ی محاسبه‌ی چنین توزیعی از اهمیت کاربردی بسیار زیادی برخوردار هستند. در این بخش تلاش می‌کنیم به بررسی این نوع مسائل بپردازیم. وجود یک توزیع حدّی برای $X_n$ در حدّ $n \to \infty$، رابطه‌ی تنگاتنگی با توزیع ایستان دارد.

**تعریف ۱۰.** (توزیع ایستان) فرض کنید یک توزیع اوّلیه‌ی $\boldsymbol{\lambda}$ روی حالت‌های زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}$ قرار گرفته است. اگر با گذر زمان توزیع حالت‌های مختلف تغییری نکند، توزیع $\boldsymbol{\lambda}$ را توزیع ایستان زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}$ می‌نامیم. یعنی $\boldsymbol{\lambda}$ توزیع ایستان است، اگر و تنها اگر:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{P} = \boldsymbol{\lambda}$$

**تعریف ۱۱.** (حالت دائمی) حالت $j$ را حالت دائمی می‌گوییم هرگاه احتمال آن با بزرگ‌شدن $n$ مستقل از حالت اولیه باشد. به عبارت دیگر

$$\forall i \in \mathcal{X}: \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = w_j.$$

زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}$ را دارای حالت دائمی می‌گوییم هر گاه رابطه‌ی فوق برای تمام حالت‌ها برقرار باشد، یعنی

$$\forall i,j \in \mathcal{X}: \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = w_j.$$

**پرسش ۲۱.** رابطه‌ی توزیع ایستان یک زنجیره‌ی مارکوف را با بردارهای ویژه‌ی ماتریس انتقال آن زنجیر بیان کنید.

**پرسش ۲۲.** فرض کنید یک زنجیره‌ی مارکوف با مجموعه‌ی حالت‌های $\mathcal{X}$، تعداد حالت $|\mathcal{X}| = r$ و ماتریس انتقال $\mathbf{P}$، حالت دائمی دارد و احتمال‌های حالت‌های دائمی برابر با $w_j$ باشند. در این صورت نشان دهید:

۱. $\sum_{i=1}^{r} w_j = 1$

۲. توزیع $\boldsymbol{\lambda} = (w_1, w_2, \ldots, w_r)$ یک توزیع ایستان برای زنجیر است.

۳. $\boldsymbol{\lambda}$ توزیع ایستان یکتای زنجیره‌ی فوق است.

[۵] گلستان سعدی، باب اوّل

**پرسش ۲۳.** (امتیازی) فرض کنید $\mathbf{P}$ یک ماتریس انتقال $r \times r$ باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $N$ ای وجود داشته باشد که $\mathbf{P}^N$ دارای یک ستون تماماً ناصفر باشد، آن‌گاه زنجیره‌ی مارکوف دارای حالت دائمی است. تلاش می‌کنیم به صورت قدم به قدم این گزاره را ثابت کنیم.

فرض کنید ستون $j_\circ$ یک ستون تماماً ناصفر ماتریس $\mathbf{P}^N$ باشد.

۱. نشان دهید

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} = \sum_{k=۱}^{r} p_{kj}^{(n)} [p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}].$$

۲. دو مجموعه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$S_۱ = \{k : p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)} \geq \circ\}$$
$$S_۲ = \{k : p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)} < \circ\}$$

جمع بخش قبل را به صورت زیر بنویسید:

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} = \sum_{k \in S_۱} p_{kj}^{(n)} [p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}] + \sum_{k \in S_۲} p_{kj}^{(n)} [p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}].$$

$M_j^{(n)}$ را بزرگترین المان ستون $j$ ماتریس $\mathbf{P}^n$ و $m_j^{(n)}$ را کوچکترین المان ستون $j$ آن بگیرید. نشان دهید

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k \in S_۱} q_k = (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k \in S_۲} q_k$$

که در آن $q_k = |p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}|$ است.

۳. نشان دهید که اگر $j_\circ \in S_۱$ باشد، $\epsilon > \circ$ وجود دارد به نحوی که

$$\sum_{k \in S_۱} q_k \leq ۱ - \epsilon.$$

همچنین اگر $j_\circ \in S_۲$ است

$$\sum_{k \in S_۲} q_k \leq ۱ - \epsilon.$$

۴. به کمک بخش قبل، ثابت کنید برای هر $i$ و $j$ داریم

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(۱ - \epsilon)$$

و بنابراین

$$M_j^{(n+N)} - m_j^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(۱ - \epsilon).$$

۵. قرار دهید $n = (l - ۱)N$ و نشان دهید

$$M_j^{(lN)} - m_j^{(lN)} \leq [M_j^{(l-۱)j} - m_j^{(l-۱)j}](۱ - \epsilon)$$

و بنابراین

$$\lim_{l \to \infty} [M_j^{(lN)} - m_j^{(lN)}] = \circ.$$

۶. نشان دهید دنباله‌ی $M_j^{(n)}$ و $m_j^{(n)}$ با $n$ یکنوا هستند.

۷. به کمک این واقعیت از درس ریاضی ۱ که هر دنباله‌ی یکنوای کران‌دار همگراست، نشان دهید تحت شرایط مذکور، زنجیره‌ی مارکوف دارای حالت دائمی است.

---

## ۷ مَن جَرَّبَ المُجَرَّب! [۶]

یک بانک قصد دارد برای اعطای وام، اشخاص حقوقی‌ای که در بانک حساب دارند را مدل‌سازی کند. این بانک، شرکت‌ها را در هشت کلاس طبقه‌بندی می‌کند:

| BBB | A | AA | AAA |
|---|---|---|---|
| شرکت با درآمد محدود | شرکت با درآمد معمولی | شرکت با درآمد خوب | شرکت با درآمد عالی |

| D | C | B | BB |
|---|---|---|---|
| شرکت ورشکسته | شرکت زیان‌ده | شرکت با درآمد خیلی کم | شرکت با درآمد کم |

متخصصان اقتصاد، ماتریس انتقال زیر را برای شرکت‌ها در سال پیشنهاد کرده‌اند.

| Initial | Rates at year-end | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ratings | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | D |
| AAA | 0.8372 | 0.0983 | 0.0504 | 0.0094 | 0.0025 | 0.0013 | 0.0008 | 0.0001 |
| AA | 0.0066 | 0.9172 | 0.0694 | 0.0049 | 0.0006 | 0.0009 | 0.0002 | 0.0002 |
| A | 0.0007 | 0.0225 | 0.9176 | 0.0518 | 0.0049 | 0.0020 | 0.0001 | 0.0004 |
| BBB | 0.0003 | 0.0026 | 0.0483 | 0.8924 | 0.0444 | 0.0081 | 0.0016 | 0.0023 |
| BB | 0.0003 | 0.0006 | 0.0044 | 0.0666 | 0.8323 | 0.0746 | 0.0105 | 0.0107 |
| B | 0.0002 | 0.0009 | 0.0031 | 0.0046 | 0.0572 | 0.8362 | 0.0384 | 0.0594 |
| CCC | 0.0004 | 0.0011 | 0.0029 | 0.0088 | 0.0191 | 0.1028 | 0.6123 | 0.2526 |
| D | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |

۱. زنجیره‌ی مارکوف فوق را $\{X_n\}$ می‌نامیم. آن را شبیه‌سازی کنید، به این معنا که تابعی بنویسید که با دریافت حالت اوّلیه $(s_۰)$ و یک عدد طبیعی $N$، یک تحقّق از متغیّرهای تصادفی $X_۰, X_۱, X_۲, \ldots, X_N$ که در آن $X_۰ = s_۰$ است را خروجی بدهد.

۲. توزیع ایستان این زنجیره‌ی مارکوف را به دست آورید.

۳. برای هر کدام از هشت حالت اوّلیه‌ی ممکن یک شرکت، پنج بار شبیه‌سازی را انجام داده و نمودار حالت شرکت بر حسب زمان را تا زمان $n = ۲۰$ را رسم کنید (در کل هشت شکل که در هر شکل، پنج نمودار وجود دارد).

۴. شبیه‌سازی بخش قبل را مجدداً تکرار نمایید ولی شبیه‌سازی را به جای $n = ۲۰$ تا زمان $n = ۱۰۰$ انجام دهید.

۵. ماتریس انتقال را $\mathbf{P}$ بنامید. ماتریس‌های $\mathbf{P}^۲$، $\mathbf{P}^{۱۰}$، $\mathbf{P}^{۱۰۰}$ و $\mathbf{P}^{۱۰۰۰}$ را محاسبه کنید. مشاهدات خود را توضیح دهید.

۶. به ازای هر حالت اوّلیه، نمودار احتمال حضور یک شرکت در هر یک از وضعیت‌ها را بر حسب زمان رسم نمایید.

۷. به کمک شبیه‌سازی، نسبت تعداد شرکت‌های در هر وضعیت را به کل شرکت‌ها در زمان‌های طولانی به دست آورید.

۸. دیده می‌شود که در مدل فوق با شروع از هر وضعیت، شرکت بالأخره ورشکست می‌شود! به کمک شبیه‌سازی، هیستوگرام زمان لازم برای رسیدن به وضعیت ورشکست را برای هر یک از هشت وضعیت اوّلیه رسم نمایید. به ازای وضعیت‌های اوّلیه‌ی مختلف، زمان میانگین ورشکست‌شدن را محاسبه کنید.

۹. مهندسان بانک، برای رفع مشکلات مدل قبل، مدل زیر را پیشنهاد داده‌اند. بخش‌های (۱) تا (۶) را در مورد مدل جدید تکرار کنید.

[۶] هرچند کازمودم، از وی نبود سودم/ مَن جَرَّبَ المُجَرَّب، حَلَّت بِهِ النَّدامَة [حافظ]

| Initial ratings | Rates at year-end | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | D |
| AAA | 0.8372 | 0.0983 | 0.0504 | 0.0094 | 0.0025 | 0.0013 | 0.0008 | 0.0001 |
| AA | 0.0066 | 0.9172 | 0.0694 | 0.0049 | 0.0006 | 0.0009 | 0.0002 | 0.0002 |
| A | 0.0007 | 0.0225 | 0.9176 | 0.0518 | 0.0049 | 0.0020 | 0.0001 | 0.0004 |
| BBB | 0.0003 | 0.0026 | 0.0483 | 0.8924 | 0.0444 | 0.0081 | 0.0016 | 0.0023 |
| BB | 0.0003 | 0.0006 | 0.0044 | 0.0666 | 0.8323 | 0.0746 | 0.0105 | 0.0107 |
| B | 0.0002 | 0.0009 | 0.0031 | 0.0046 | 0.0572 | 0.8362 | 0.0384 | 0.0594 |
| CCC | 0.0004 | 0.0011 | 0.0029 | 0.0088 | 0.0191 | 0.1028 | 0.6123 | 0.2526 |
| D | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0006 | 0.0007 | .9972 |

## ۸ نکات مهم!

لطفاً به نکات زیر دقّت کنید:

۱. این پروژه بخشی از نمره‌ی شما در این درس را تشکیل خواهد داد.

۲. تمامی شبیه‌سازی‌ها باید با کمک زبان Python انجام شود. شما تنها مجاز به استفاده از کتاب‌خانه‌های `numpy`، `random` و `matplotlib` هستید. اگر روی عنوان هر کتاب‌خانه کلیک کنید، به راهنمای آن کتاب‌خانه هدایت می‌شوید.

۳. تحویل پروژه به صورت گزارش و کدهای نوشته‌شده است. گزارش باید شامل پاسخ پرسش‌ها، تصاویر و نمودارها و نتیجه‌گیری‌های لازم باشد. همچنین تمیزی گزارش بسیار مهم است. کدها و گزارش را در یک فایل فشرده‌شده در سامانه‌ی درس‌افزار آپلود کنید.

۴. اگر برای پاسخ به پرسش‌ها، از منبعی (کتاب، مقاله، سایت و...) کمک گرفته‌اید، حتماً به آن ارجاع دهید.

۵. نوشتن گزارش کار با LaTeX نمره‌ی امتیازی دارد.

۶. بخش‌های تئوری گزارش که در قالب پرسش‌ها طرح شده‌اند را می‌توانید روی کاغذ بنویسید و تصویر آن‌ها را در گزارش خود بیاورید، ولی توصیه‌ی برادرانه می‌کنم که این کار را نکنید!

۷. درصورت مشاهده‌ی تقلّب، نمره‌ی هردو فرد صفر منظور خواهد شد.

موفّق باشید